Θεωρία Αριθμών και Άλγεβρα, μέλλον, εφαρμογές και η διδασκαλία σε Π.Π.Σ.

Αριστείδης Κοντογεώργης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών.

12/04/2014 Μαθηματικά στα Πειραματικά Γυμνάσια-Λύκεια

Περιεχόμενα

Σκοποί της Διάλεξης

Παρατηρήσεις σχετικά με τις γνώσεις ικανότητες φοιτητών.

Η μόδα στα μαθηματικά!

Εφαρμογές

Διδασκαλία

Γνώσεις αποφοίτων Λυκείου

- Κοινός τόπος: φθίνουσα πορεία
- Αιτίες

Αιτίες

- Οικονομική Κρίση;
- Έλλειψη πειθαρχίας - «Πρώτα ο μαθητής!»
- Απαξίωση Δασκάλου - Καθηγητή
- Υπερχαλάρωση - Περιορισμένοι Στόχοι

Αιτίες

- Οικονομική Κρίση;
- Έλλειψη πειθαρχίας - «Πρώτα ο μαθητής!»
- Απαξίωση Δασκάλου - Καθηγητή
- Υπερχαλάρωση - Περιορισμένοι Στόχοι

Αιτίες

- Οικονομική Κρίση;
- Έλλειψη πειθαρχίας - «Πρώτα ο μαθητής!»
- Απαξίωση Δασκάλου - Καθηγητή
- Υπερχαλάρωση - Περιορισμένοι Στόχοι

Αιτίες

- Οικονομική Κρίση;
- Έλλειψη πειθαρχίας - «Πρώτα ο μαθητής!»
- Απαξίωση Δασκάλου - Καθηγητή
- Υπερχαλάρωση - Περιορισμένοι Στόχοι

Αιτίες

- Οικονομική Κρίση;
- Έλλειψη πειθαρχίας - «Πρώτα ο μαθητής!»
- Απαξίωση Δασκάλου - Καθηγητή
- Υπερχαλάρωση - Περιορισμένοι Στόχοι

Παιδιά με «ειδικές ανάγκες»

Πρωταθλητές ή ευτυχισμένοι άνθρωποι

Διδασκαλία

- Πρόγραμμα σπουδών με σαφείς στόχους και ύλη.
- Η ύλη ολοκληρώνεται χωρίς «περικοπές»

Πως θα διαμορφωθεί η ύλη;

- Άνθρωποι με καλές προθέσεις διαφωνούν!
- Πολλές διαφορετικές απόψεις για το τι είναι τα Μαθηματικά και το τι πρέπει να διδάσκεται.
- Απόψεις του ομιλητή για το το μέλλον της Άλγεβρας και Θεωρίας Αριθμών

Πως θα διαμορφωθεί η ύλη;

- Άνθρωποι με καλές προθέσεις διαφωνούν!
- Πολλές διαφορετικές απόψεις για το τι είναι τα Μαθηματικά και το τι πρέπει να διδάσκεται.
- Απόψεις του ομιλητή για το το μέλλον της Άλγεβρας και Θεωρίας Αριθμών

Πως θα διαμορφωθεί η ύλη;

- Άνθρωποι με καλές προθέσεις διαφωνούν!
- Πολλές διαφορετικές απόψεις για το τι είναι τα Μαθηματικά και το τι πρέπει να διδάσκεται.
- Απόψεις του ομιλητή για το το μέλλον της Άλγεβρας και Θεωρίας Αριθμών

Πως θα διαμορφωθεί η ύλη;

- Άνθρωποι με καλές προθέσεις διαφωνούν!
- Πολλές διαφορετικές απόψεις για το τι είναι τα Μαθηματικά και το τι πρέπει να διδάσκεται.
- Απόψεις του ομιλητή για το το μέλλον της Άλγεβρας και Θεωρίας Αριθμών

Κριτήρια Μαθηματικής Αξίας

- Αλληλεπίδραση με τα Μαθηματικά
- Εφαρμογές στην Επιστήμη
- Αισθητική Αξία
- Μόδα-Τρέχουσες τάσεις

Η μόδα στα μαθηματικά

Τριγωνομετρία

Η προ-προηγούμενη γενιά μαθητών - φοιτητών ανατράφηκε με τους «πίνακες λογαρίθμων» και τον λογαριθμικό κανόνα. Αυτά σήμερα είναι μουσειακά είδη.

Η δικιά μου γενιά ανατράφηκε με την τριγωνομετρία η οποία ήταν χρήσιμη σε μηχανικούς, τοπογράφους, ναυτικούς.

Σήμερα;

Τριγωνομετρία

Η προ-προηγούμενη γενιά μαθητών - φοιτητών ανατράφηκε με τους «πίνακες λογαρίθμων» και τον λογαριθμικό κανόνα. Αυτά σήμερα είναι μουσειακά είδη.

Η δικιά μου γενιά ανατράφηκε με την τριγωνομετρία η οποία ήταν χρήσιμη σε μηχανικούς, τοπογράφους, ναυτικούς.
Σήμερα;

Τριγωνομετρία

Η προ-προηγούμενη γενιά μαθητών - φοιτητών ανατράφηκε με τους «πίνακες λογαρίθμων» και τον λογαριθμικό κανόνα. Αυτά σήμερα είναι μουσειακά είδη.

Η δικιά μου γενιά ανατράφηκε με την τριγωνομετρία η οποία ήταν χρήσιμη σε μηχανικούς, τοπογράφους, ναυτικούς.
Σήμερα;

Τριγωνομετρία

Οι J. Silverman J. Tate στο βιβλίο τους Rational points on elliptic curves γράφουν:

These formulas have other uses; you may have met them in calculus . In Figure 1.2, we have

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta; \qquad \text{and so} \quad t = \tan\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}.$$

So the formulas given above allow us to express cosine and sine rationally in terms of the tangent of the half angle:

$$x = \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}.$$

If you have some complicated identity in sine and cosine that you want to test, all you have to do is substitute these formulas, collect powers of t, and see if you get zero. (If they had told you this in high school, the whole business of trigonometric identities would have become a trivial exercise in algebra!)

Από την μόδα στην αφάνεια και στην μόδα ξανά!

- Προβολική Γεωμετρία- Υπερβολική Γεωμετρία θεωρήθηκαν «άχρηστες» αλλά επανήλθαν:
  - Προβολική Γεωμετρία: Συμπαγοποίηση πολλαπλοτήτων, ελλειπτικές Καμπύλες
  - Υπερβολική Γεωμετρία: modular συναρτήσεις στην Θεωρία αριθμών και στην μαθηματική φυσική, Πρόγραμμα Gromov, Θεωρία Teichmuller, Πρόγραμμα Thurston κτλ.
- Ελλειπτικές συναρτήσεις Από τα κύρια προβλήματα της ανάλυσης του 19ου Αιώνα: Ελλειπτικά και υπερελλειπτικά ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \qquad \deg(f) \geq 3,$$

Abel, Jacobi, Weierstrass, Riemann Ξεχάστηκε από τους αναλύστες, αλλά σήμερα είναι κύριο σημείο της έρευνας σε Αλγεβρική Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών, Μαθηματική Φυσική.

Από την μόδα στην αφάνεια και στην μόδα ξανά!

- Προβολική Γεωμετρία- Υπερβολική Γεωμετρία θεωρήθηκαν «άχρηστες» αλλά επανήλθαν:
  - Προβολική Γεωμετρία: Συμπαγοποίηση πολλαπλοτήτων, ελλειπτικές Καμπύλες
  - Υπερβολική Γεωμετρία: modular συναρτήσεις στην Θεωρία αριθμών και στην μαθηματική φυσική, Πρόγραμμα Gromov, Θεωρία Teichmuller, Πρόγραμμα Thurston κτλ.
- Ελλειπτικές συναρτήσεις Από τα κύρια προβλήματα της ανάλυσης του 19ου Αιώνα: Ελλειπτικά και υπερελλειπτικά ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \qquad \deg(f) \geq 3,$$

Abel, Jacobi, Weierstrass, Riemann Ξεχάστηκε από τους αναλύστες, αλλά σήμερα είναι κύριο σημείο της έρευνας σε Αλγεβρική Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών, Μαθηματική Φυσική.

Από την μόδα στην αφάνεια και στην μόδα ξανά!

- Προβολική Γεωμετρία- Υπερβολική Γεωμετρία θεωρήθηκαν «άχρηστες» αλλά επανήλθαν:
  - Προβολική Γεωμετρία: Συμπαγοποίηση πολλαπλοτήτων, ελλειπτικές Καμπύλες
  - Υπερβολική Γεωμετρία: modular συναρτήσεις στην Θεωρία αριθμών και στην μαθηματική φυσική, Πρόγραμμα Gromov, Θεωρία Teichmuller, Πρόγραμμα Thurston κτλ.
- Ελλειπτικές συναρτήσεις Από τα κύρια προβλήματα της ανάλυσης του 19ου Αιώνα: Ελλειπτικά και υπερελλειπτικά ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \qquad \deg(f) \geq 3,$$

Abel, Jacobi, Weierstrass, Riemann Ξεχάστηκε από τους αναλύστες, αλλά σήμερα είναι κύριο σημείο της έρευνας σε Αλγεβρική Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών, Μαθηματική Φυσική.

Ιστορικά στοιχεία

- Αφαιρετική διαδικασία.
- Αλγεβροποίηση επιστημονικών κλάδων.

Το διασημότερο
πρόβλημα στην Θεωρία Αριθμών $X^n + Y^n = Z^n$.
Παραγοντοποίηση $X^n + Y^n = \prod(X - \zeta_{2n}^{2i+1} Y)$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\zeta_{2n}]$. Κριτήρια μονοσήμαντης ανάλυσης.
Η γέννηση της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

Θεωρία αναλλοίωτων,
το Θεώρημα βάσης του Hilbert.

Αφαίρεση

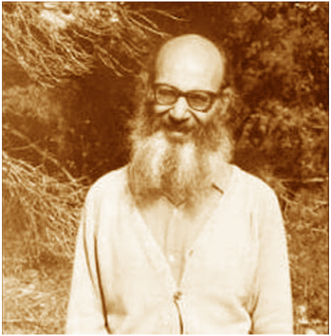
Αποσύνδεση από την Αλγεβρική
Θεωρία Αριθμών αφηρημένη μελέτη.
Σύνδεση με την Αλγεβρική Γεωμετρία.
Ιδεώδη, πρότυπα
δακτύλιοι. Σύνδεση με μη αντιμεταθετική
άλγεβρα: Θεωρία Αναπαραστάσεων.

Alexander Grothendieck

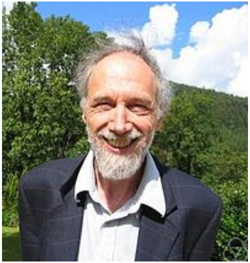
Ο A. Grothendieck
ενοποίησε την αλγεβρική γεωμετρία
με την θεωρία Αριθμών εισάγοντας
νέες έννοιες (σχήματα, κατηγορίες)
δημιουργώντας εργαλεία που
έλυσαν διάσημα προβλήματα: Εικασία
του Riemann για ζήτα συναρτήσεις
αλγεβρικών πολλαπλοτήτων,
εικασίες του Ramanujan.

Η φυγή - η κατάσταση σήμερα

Ενώ όλα έδειχναν ότι ο Grothendick θα ξαναέγραφε όλα τα μαθηματικά και στο απόγειο της καριέρας του, εγκαταλείπει την εργασία του για να καταλήξει σε ένα κοινόβιο κάπου στα πυρηναία.



Η κατάσταση σήμερα



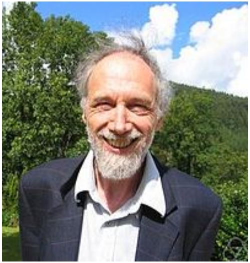
Τα μαθηματικά του Grothendieck είναι δύσκολα αλλά έλυσαν σημαντικά προβλήματα. Μεταξύ αυτών και το τελευταίο θεώρημα του Fermat.

Για αρκετά χρόνια (μετά την φυγή του Grothendieck) υπήρξε ειρωνική διάθεση χαρακτηρίζοντάς τα abstract nonsense.

Σήμερα η κατάσταση έχει αλλάξει.

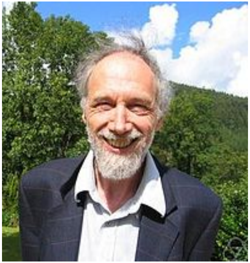
Το πρόγραμμα του Connes στην μη μεταθετική γεωμετρία έχει δείξει την δυναμική του στην επίλυση προβλημάτων της φυσικής της γεωμετρίας αλλά ακόμα και της Θεωρίας αριθμών (εικασία του Riemann).

Η κατάσταση σήμερα



Τα μαθηματικά του Grothendieck είναι δύσκολα αλλά έλυσαν σημαντικά προβλήματα. Μεταξύ αυτών και το τελευταίο θεώρημα του Fermat.
Για αρκετά χρόνια (μετά την φυγή του Grothendieck) υπήρξε ειρωνική διάθεση χαρακτηρίζοντάς τα abstract nonsense.
Σήμερα η κατάσταση έχει αλλάξει.
Το πρόγραμμα του Connes στην μη μεταθετική γεωμετρία έχει δείξει την δυναμική του στην επίλυση προβλήματων της φυσικής της γεωμετρίας αλλά ακόμα και της Θεωρίας αριθμών (εικασία του Riemann).

Η κατάσταση σήμερα



Τα μαθηματικά του Grothendieck είναι δύσκολα αλλά έλυσαν σημαντικά προβλήματα. Μεταξύ αυτών και το τελευταίο θεώρημα του Fermat.
Για αρκετά χρόνια (μετά
την φυγή του Grothendieck) υπήρξε ειρωνική διάθεση χαρακτηρίζοντάς τα abstract nonsense.
Σήμερα η κατάσταση έχει αλλάξει.
Το πρόγραμμα του Connes στην μη μεταθετική γεωμετρία έχει δείξει την δυναμική του στην επίλυση προβλήματων της φυσικής της γεωμετρίας αλλά ακόμα και της Θεωρίας αριθμών (εικασία του Riemann).

Άλγεβρα - Γεωμετρία - Θεωρία Αριθμών

- Αντί να μελετήσουμε ένα γεωμετρικό αντικείμενο μελετάμε τον δακτύλιο των συναρτήσεων που ορίζονται πάνω από αυτό. Υποπολ/τες $\leftrightarrow$ ιδεώδη, σημεία $\leftrightarrow$ μέγιστα ιδεώδη.
- Στην θεωρία αριθμών εμφανίζονται δακτύλιοι $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\zeta_n]$. Υπάρχει κάποιο γεωμετρικό αντικείμενο που να αντιστοιχεί σε αυτούς; Μπορούμε να μεταφέρουμε θεωρήματα από την Γεωμετρία σε αυτούς τους δακτυλίους;

Εφαρμογές

Hardy

Ο G. H. Hardy
στην απολογία του διατυπώνει ότι «είναι ευτυχής που ασχολείται με ένα κλάδο των Μαθηματικών που δεν θα βρει ποτέ βιομηχανική ή στρατιωτική εφαρμογή»

Η πεποίθηση του αυτή
αποδείχθηκε σήμερα λανθασμένη!

Hardy

Ο G. H. Hardy
στην απολογία του διατυπώνει ότι «είναι ευτυχής που ασχολείται με ένα κλάδο των Μαθηματικών που δεν θα βρει ποτέ βιομηχανική ή στρατιωτική εφαρμογή»

Η πεποίθηση του αυτή
αποδείχθηκε σήμερα λανθασμένη!

Εφαρμογές της Θεωρίας Αριθμών

Η Θεωρία αριθμών
σήμερα χρησιμοποιείται στην

- Κρυπτογραφία
- Κωδικοποίηση
- Ψηφιακές Υπογραφές

Μάλιστα τα εργαλεία
που απαιτούνται ποικίλουν από
στοιχειώδη (Θεωρία ισοτιμιών
modp) μέχρι αρκετά πολύπλοκα (Θεωρία Ελλειπτικών καμπυλών,
αβελιανών πολ/των, Συνομολογία).

Αντιμεταθετική Άλγεβρα

Η μελέτη των πολυωνύμων μιας και περισσότερων μεταβλητών εξοβελίστηκε από την διδασκαλία ενδεχομένως στην λογική: ασχολούμαστε στον απειροστικό λογισμό με πολύ γενικότερες και δυσκολότερες συναρτήσεις.

Επιπλέον τα χρήσιμα προβλήματα όπως η λύση συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων ήταν πολύ δύσκολα.

Βάσεις Grobner (συνδυασμός απαλοιφής του Gauss διαίρεσης με πηλίκο και υπόλοιπο). Χρήσιμο εργαλείο που το χρειάζονται οι μηχανικοί.

Η μελέτη των πολυωνύμων μιας και περισσότερων μεταβλητών εξοβελίστηκε από την διδασκαλία ενδεχομένως στην λογική: ασχολούμαστε στον απειροστικό λογισμό με πολύ γενικότερες και δυσκολότερες συναρτήσεις.

Επιπλέον τα χρήσιμα προβλήματα όπως η λύση συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων ήταν πολύ δύσκολα.

Βάσεις Grobner (συνδυασμός απαλοιφής του Gauss διαίρεσης με πηλίκο και υπόλοιπο). Χρήσιμο εργαλείο που το χρειάζονται οι μηχανικοί.

Αντιμεταθετική Άλγεβρα

Η μελέτη των πολυωνύμων μιας και περισσότερων μεταβλητών εξοβελίστηκε από την διδασκαλία ενδεχομένως στην λογική: ασχολούμαστε στον απειροστικό λογισμό με πολύ γενικότερες και δυσκολότερες συναρτήσεις.

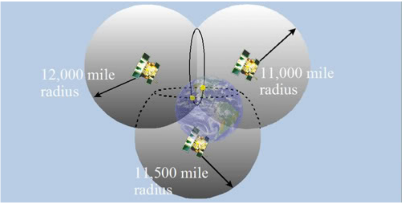
Επιπλέον τα χρήσιμα προβλήματα όπως η λύση συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων ήταν πολύ δύσκολα.

Βάσεις Grobner (συνδυασμός απαλοιφής του Gauss διαίρεσης με πηλίκο και υπόλοιπο). Χρήσιμο εργαλείο που το χρειάζονται οι μηχανικοί.

Η μελέτη των πολυωνύμων μιας και περισσότερων μεταβλητών εξοβελίστηκε από την διδασκαλία ενδεχομένως στην λογική: ασχολούμαστε στον απειροστικό λογισμό με πολύ γενικότερες και δυσκολότερες συναρτήσεις.

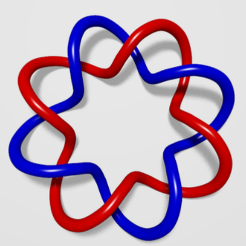
Επιπλέον τα χρήσιμα προβλήματα όπως η λύση συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων ήταν πολύ δύσκολα.

Βάσεις Grobner (συνδυασμός απαλοιφής του Gauss διαίρεσης με πηλίκο και υπόλοιπο). Χρήσιμο εργαλείο που το χρειάζονται οι μηχανικοί.



Gauss

linking number $\boxed{\frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3} \cdot (dr_1 \times dr_2)}$



Συνοχή των Μαθηματικών

Gauss

linking number $\boxed{\frac{1}{4\pi}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\frac{r_1-r_2}{|r_1-r_2|^3}\cdot(dr_1\times dr_2)}$

Τετραγωνικός

νόμος Αντιστροφής (Θεωρία Αριθμών)

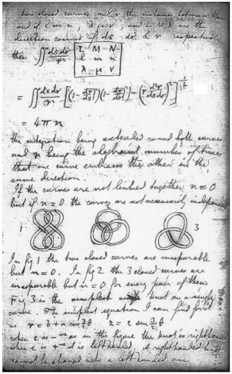
Είναι το ίδιο!

Αριθμητική Τοπολογία (Reznikov, Mazur)

Ο τύπος

του Gauss ξεχάστηκε και ξαναεμφανίστηκε

στις εργασίες των Witten, Kontsevich.



Ο Riemann στα χειρόγραφα
που βρέθηκαν μετά τον θάνατο του στην
ίδια σελίδα χειρίζονταν την συνάρτηση
του και μερικές διαφορικές εξισώσεις.
Δεν ήταν τυχαίο!
(Πρόγραμμα Selberg, Connes κτλ.)

Και η Διδασκαλία;

Επιθυμία του ομιλητή μετακίνησης θεωρητικής γνώσης σε μικρότερες τάξεις - τουλάχιστον σε «πειραματικό στάδιο».

Ερώτημα: Θέλουμε οι μαθητές να καταλαβαίνουν ή όχι την ανάγκη ενός ορισμού;

Ο S. Abhyankar περιγράφει το «ινδικό σύστημα» της αποκάλυψης. Έμαθε μαθηματικά διαβάζοντας τα βιβλία του Bhaskaracharya (1100 μ.Χ.) τα οποία είναι γραμμένα σε έμμετρη μορφή. Τα έμαθε ελπίζοντας ότι κάποια στιγμή οι στίχοι θα αποκτήσουν νόημα!

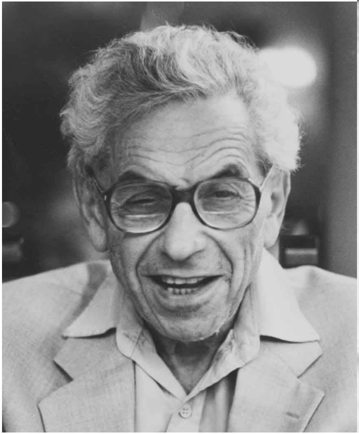
Και η Διδασκαλία;

Επιθυμία του ομιλητή μετακίνησης θεωρητικής γνώσης σε μικρότερες τάξεις - τουλάχιστον σε «πειραματικό στάδιο».

Ερώτημα: Θέλουμε οι μαθητές να καταλαβαίνουν ή όχι την ανάγκη ενός ορισμού;

Ο S. Abhyankar περιγράφει το «ινδικό σύστημα» της αποκάλυψης. Έμαθε μαθηματικά διαβάζοντας τα βιβλία του Bhaskaracharya (1100 μ.χ.) τα οποία είναι γραμμένα σε έμμετρη μορφή. Τα έμαθε ελπίζοντας ότι κάποια στιγμή οι στίχοι θα αποκτήσουν νόημα!

Δημιουργοί Συστημάτων και Λύτες Προβλημάτων

Αθλητισμός

Δεν κάνουν όλοι για τα ίδια αθλήματα ούτε πρέπει να κάνουν την ίδια προπόνηση!

Μπορούμε να διδάξουμε:

- Ισοτιμίες (αριθμητική στο ρολόι)
- Διαίρεση με πηλίκο και υπόλοιπο
- Διαδοχικές διαιρέσεις με πηλίκο και υπόλοιπο p-αδικούς αριθμούς
- Πρώτους αριθμούς και διάφορα σχετικά θεωρήματα - παιχνίδια

Πολυώνυμα μιας και περισσότερων μεταβλητών

- Διαίρεση με πηλίκο και υπόλοιπο
- Επίλυση συστημάτων.
- Η έννοια του ιδεώδους - αλγεβρικού συνόλου
- Άπειρη διαδικασία διαίρεσης - σειρές Taylor- εκθετικές συναρτήσεις.

Τα παλιά χρόνια...

Ύλη

1. Πίνακες Γραμμικά Συστήματα
2. Ομάδες - Δακτύλιοι
3. Διανυσματικοί χώροι
4. Μιγαδικοί Αριθμοί
5. Στατιστική
6. Συνδυαστική
7. Πιθανότητες

Ομάδες και συμμετρία