Ημιομάδες του Weierstrass, Galois module δομή των ολόμοφων διαφορικών και εφαρμογές

Σ. Καρανικολόπουλος Α. Κοντογεώργης

6 Μαΐου 2011

Σκοπός της Ομιλίας

X είναι προβολική μη ιδιόμορφη καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα θετικής χαρακτηριστικής. Θα συμβολίζουμε το σώμα συναρτήσεων της X με F. Η ομάδα αυτομορφισμών του F θα συμβολίζεται με G και είναι πεπερασμένη.

1. Ημιομάδες του Weierstrass.
2. G-module δομή των πολυδιαφορικών
3. Θεωρία παραμορφώσεων καμπύλων με αυτομορφισμούς.

Ημιομάδες του Weierstrass και η ramification filtration

Ημιομάδες του Weierstrass

1. Η ημιομάδα του Weierstrass Σ_P στην θέση P του F είναι η υποημιομάδα των φυσικών αριθμών η οποία αποτελείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς $i \in \mathbb{N}$ ώστε να υπάρχει μια συνάρτηση $f \in F$ με $(f)_\infty = iP$.
2. Οι αριθμοί στην ημιομάδα του Weierstrass στο P θα λέγονται pole numbers. Το σύνολο $\mathbb{N} - \Sigma_P$ είναι πεπερασμένο και αποτελείται από g στοιχεία. Τα στοιχεία του $\mathbb{N} - \Sigma_P$ θα λέγονται gaps. Όλα τα gaps είναι $\leq 2g - 1$.

Ramification Filtration

1. $$G(P) = \{g \in G : g(P) = g\}.$$

2. Η ομάδα G έχει την παρακάτω ramification filtration

$$G_0 \geq G_1 = \cdots = G_{i_1} > G_{i_1+1} = \cdots = G_{i_2} > G_{i_2+1} = \cdots = G_s > \{1\}.$$

Έστω t ένας local uniformizer στο P. Η ομάδες G_i ορίζονται από $G_i = \{g \in G(P) : v_P(g(t) - t) \geq i + 1\}$.

Συσχετίσεις

Στόχος: Συσχέτιση της ramification filtration και της ημιομάδας του Weierstrass.

Συσχετίσεις

Στόχος: Συσχέτιση της ramification filtration και της ημιομάδας του Weierstrass.

Έστω m ο μικρότερος pole number που δεν διαιρείται με p. Θεωρούμε τον χώρο $L(mP)$, και σταθεροποιούμε μία βάση αυτού. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to L(mP).$$

Στόχος: Συσχέτιση της ramification filtration και της ημιομάδας του Weierstrass.

Έστω m ο μικρότερος pole number που δεν διαιρείται με p. Θεωρούμε τον χώρο $L(mP)$, και σταθεροποιούμε μία βάση αυτού. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to L(mP).$$

Επιπλέον συμβολίζουμε με f_m την συνάρτηση με $(f)_\infty = mP$. Υποθέτουμε ότι $f_m = \frac{1}{t^m}$. Θεωρούμε τον συνκύκλο
$a(\sigma) = \sigma(f_m) - f_m \in \langle f_0, \ldots, f_{m-1} \rangle_k$, $(f_i)_\infty = iP$. Τότε

$$\sigma(t) = t(1 + \alpha(\sigma) t^m)^{-1/m}$$

Στόχος: Συσχέτιση της ramification filtration και της ημιομάδας του Weierstrass.
Έστω m ο μικρότερος pole number που δεν διαιρείται με p. Θεωρούμε τον χώρο $L(mP)$, και σταθεροποιούμε μία βάση αυτού. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to L(mP).$$

Επιπλέον συμβολίζουμε με f_m την συνάρτηση με $(f)_\infty = mP$. Υποθέτουμε ότι $f_m = \frac{1}{t^m}$. Θεωρούμε τον συνκύκλο
$a(\sigma) = \sigma(f_m) - f_m \in \langle f_0, \ldots, f_{m-1} \rangle_k$, $(f_i)_\infty = iP$. Τότε

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= t(1 + \alpha(\sigma)t^m)^{-1/m} \\ &= t - \frac{1}{m} t^{-|v_t(\alpha(\sigma)|+m+1} + \cdots \end{aligned}$$

$\sigma \in G_{m-|v_t(\alpha(\sigma)|}$.

Συσχετίσεις

Στόχος: Συσχέτιση της ramification filtration και της ημιομάδας του Weierstrass.
Έστω m ο μικρότερος pole number που δεν διαιρείται με p. Θεωρούμε τον χώρο $L(mP)$, και σταθεροποιούμε μία βάση αυτού. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to L(mP).$$

Επιπλέον συμβολίζουμε με f_m την συνάρτηση με $(f)_\infty = mP$. Υποθέτουμε ότι $f_m = \frac{1}{t^m}$. Θεωρούμε τον συνκύκλο $a(\sigma) = \sigma(f_m) - f_m \in \langle f_0, \ldots, f_{m-1} \rangle_k$, $(f_i)_\infty = iP$. Τότε

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= t(1+\alpha(\sigma)t^m)^{-1/m} \\ &= t - \frac{1}{m} t^{-|v_t(\alpha(\sigma)|+m+1} + \cdots \end{aligned}$$

$\sigma \in G_{m-|v_t(\alpha(\sigma)|}$.
Κάθε πήδημα στην ramification filtration είναι διαφορά από δύο pole numbers.

Το κίνητρο

Θεωρία παραμορφώσεων

Παραμόρφωση (X, G) υπέρ τον τοπικό δακτύλιο Artin A είναι μία proper, smooth family καμπυλών

$$\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(A)$$

μαζί με μέ ένα ομομορφισμό ομάδων $G \to \mathrm{Aut}_A(\mathcal{X})$ και ένα G-equivariant ισομορφισμό ϕ από την ίνα του κλειστού σημείου του A στην αρχική καμπύλη X:

$$\phi : \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(k) \to X.$$

Θεωρία παραμορφώσεων

Δυο παραμορφώσεις $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ένας G-equivariant ισομορφισμός ψ ο οποίος ανάγεται στην μονάδα στην ειδική ίνα και κάνει το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & \mathcal{X}_2 \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec} A &
\end{tikzcd}$$

Το πρόβλημα καθορισμού παραμορφώσεων ανάγεται σε ένα "configuration problem of points" και ένα τοπικό πρόβλημα.

Το πρόβλημα καθορισμού παραμορφώσεων ανάγεται σε ένα "configuration problem of points" και ένα τοπικό πρόβλημα.
Τοπικό πρόβλημα: Για κάθε άγρια διακλαδιζόμενο σημείο P σταθεροποιούμε μία αναπαράσταση

$$\rho : G(P) \to \mathrm{Aut} k[[t]].$$

Το πρόβλημα καθορισμού παραμορφώσεων ανάγεται σε ένα "configuration problem of points" και ένα τοπικό πρόβλημα.
Τοπικό πρόβλημα: Για κάθε άγρια διακλαδιζόμενο σημείο P σταθεροποιούμε μία αναπαράσταση

$$\rho : G(P) \to \mathrm{Aut} k[[t]].$$

και ορίζουμε τον παρακάτω συναρτητή παραμόρφωσης:

$$D_P : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets},$$

$$A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{lifts } G(P) \to \mathrm{Aut}(A[[t]]) \text{ του } \rho \text{ modulo συζυγία} \\ \text{με στοιχείο } \ker(\mathrm{Aut} A[[t]] \to k[[t]]) \end{array} \right\}$$

Το πρόβλημα καθορισμού παραμορφώσεων ανάγεται σε ένα "configuration problem of points" και ένα τοπικό πρόβλημα.
Τοπικό πρόβλημα: Για κάθε άγρια διακλαδιζόμενο σημείο P σταθεροποιούμε μία αναπαράσταση

$$\rho : G(P) \to \mathrm{Aut}k[[t]].$$

και ορίζουμε τον παρακάτω συναρτητή παραμόρφωσης:

$$D_P : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets},$$

$$A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{lifts } G(P) \to \mathrm{Aut}(A[[t]]) \text{ του } \rho \text{ modulo συζυγία} \\ \text{με στοιχείο } \ker(\mathrm{Aut}A[[t]] \to k[[t]]) \end{array} \right\}$$

Η ομάδα $\mathrm{Aut}k[[t]]$ είναι λιγότερο κατανοητή από την γενική γραμμική ομάδα στην οποία θέλουμε να δουλεύουμε.

Ο συναρτητής παραμόρφωσης ικανοποιεί μερικές προϋποθέσεις (Schlessinger criteria) ώστε το

$$D(k[\epsilon]/\epsilon^2) \text{ να είναι διανυσματικός χώρος.}$$

και οποίος στην βιβλιογραφία ονομάζεται ο εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης.
Πρόβλημα: Να υπολογιστεί η διάσταση του $D(k[\epsilon])$.

$$D(k[\epsilon]/\epsilon^2) = H^1(X, G, \mathcal{T}_X)$$

Ο συναρτητής παραμόρφωσης ικανοποιεί μερικές προϋποθέσεις (Schlessinger criteria) ώστε το

$$D(k[\epsilon]/\epsilon^2) \text{ να είναι διανυσματικός χώρος.}$$

και οποίος στην βιβλιογραφία ονομάζεται ο εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης.
Πρόβλημα: Να υπολογιστεί η διάσταση του $D(k[\epsilon])$.

$$\begin{aligned} D(k[\epsilon]/\epsilon^2) &= H^1(X, G, \mathcal{T}_X) \\ &= H^1(X/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \oplus H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \quad \text{Bertin-Mézard 2000} \end{aligned}$$

Ο συναρτητής παραμόρφωσης ικανοποιεί μερικές προϋποθέσεις (Schlessinger criteria) ώστε το

$$D(k[\epsilon]/\epsilon^2) \text{ να είναι διανυσματικός χώρος.}$$

και οποίος στην βιβλιογραφία ονομάζεται ο εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης.
Πρόβλημα: Να υπολογιστεί η διάσταση του $D(k[\epsilon])$.

$$\begin{aligned} D(k[\epsilon]/\epsilon^2) &= H^1(X, G, \mathcal{T}_X) \\ &= H^1(X/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \oplus H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \quad \text{Bertin-Mézard 2000} \\ &= H^0(X, \Omega_X^{\otimes 2})_G \quad \text{K. 2007} \end{aligned}$$

Ο συναρτητής παραμόρφωσης ικανοποιεί μερικές προϋποθέσεις (Schlessinger criteria) ώστε το

$$D(k[\epsilon]/\epsilon^2) \text{ να είναι διανυσματικός χώρος.}$$

και οποίος στην βιβλιογραφία ονομάζεται ο εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης.
Πρόβλημα: Να υπολογιστεί η διάσταση του $D(k[\epsilon])$.

$$\begin{aligned} D(k[\epsilon]/\epsilon^2) &= H^1(X, G, \mathcal{T}_X) \\ &= H^1(X/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \oplus H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \text{ Bertin-Mézard 2000} \\ &= H^0(X, \Omega_X^{\otimes 2})_G \text{ K. 2007} \end{aligned}$$

$$\dim_k H^1(X/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = 3g_{X/G} - 3 + \sum_{\mu=1}^{r} \left[\sum_{i=0}^{n_\mu} \frac{(e_i^{(\mu)} - 1)}{e_0^{(\mu)}} \right] \text{ K. 2006.}$$

Εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης

$$H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = \bigoplus_{\nu=1}^{r} H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$$

Εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης

$$H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = \bigoplus_{\nu=1}^{r} H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$$

$\hat{\mathcal{T}}_{X,P_i}$ είναι το $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$-module που παράγεται από το $\frac{d}{dt}$ με την adjoint δράση.

Εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης

$$H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = \bigoplus_{\nu=1}^{r} H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$$

$\hat{\mathcal{T}}_{X,P_i}$ είναι το $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$-module που παράγεται από το $\frac{d}{dt}$ με την adjoint δράση.
$H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$ είναι απλή συνομολογία ομάδων.

Εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης

$$H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = \bigoplus_{\nu=1}^{r} H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$$

$\hat{\mathcal{T}}_{X,P_i}$ είναι το $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$-module που παράγεται από το $\frac{d}{dt}$ με την adjoint δράση.
$H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$ είναι απλή συνομολογία ομάδων.

- Bertin-Mézard 2000 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Cornelissen-Kato 2002: Ordinary curves

Εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης

$$H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = \bigoplus_{\nu=1}^{r} H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$$

$\hat{\mathcal{T}}_{X,P_i}$ είναι το $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$-module που παράγεται από το $\frac{d}{dt}$ με την adjoint δράση. $H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$ είναι απλή συνομολογία ομάδων.

- Bertin-Mézard 2000 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Cornelissen-Kato 2002: Ordinary curves

Οι επεκτάσεις Artin-Schreier είναι εύκολες στον χειρισμό τους.

Εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης

$$H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = \bigoplus_{\nu=1}^{r} H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$$

$\hat{\mathcal{T}}_{X,P_i}$ είναι το $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$-module που παράγεται από το $\frac{d}{dt}$ με την adjoint δράση. $H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$ είναι απλή συνομολογία ομάδων.

- Bertin-Mézard 2000 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Cornelissen-Kato 2002: Ordinary curves

Οι επεκτάσεις Artin-Schreier είναι εύκολες στον χειρισμό τους. Κάποιος θα θεωρούσε λογικό να σπάσει τις p-επεκτάσεις βήμα-βήμα κάνοντας χρήση επεκτάσεων Artin-Schreier p και στην συνέχεια να χρησιμοποιήσει την Lyndon-Hochsield-Serre φασματική ακολουθία για να συνδέση τις συνομολογιακές ομάδες $G/H, H, G$.

Εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης

$$H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = \bigoplus_{\nu=1}^{r} H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$$

$\hat{\mathcal{T}}_{X,P_i}$ είναι το $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$-module που παράγεται από το $\frac{d}{dt}$ με την adjoint δράση. $H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$ είναι απλή συνομολογία ομάδων.

- Bertin-Mézard 2000 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Cornelissen-Kato 2002: Ordinary curves

Οι επεκτάσεις Artin-Schreier είναι εύκολες στον χειρισμό τους. Κάποιος θα θεωρούσε λογικό να σπάσει τις p-επεκτάσεις βήμα-βήμα κάνοντας χρήση επεκτάσεων Artin-Schreier p και στην συνέχεια να χρησιμοποιήσει την Lyndon-Hochsield-Serre φασματική ακολουθία για να συνδέση τις συνομολογιακές ομάδες $G/H, H, G$. Το δύσκολο μέρος αυτής της προσέγγισης είναι ο υπολογισμός του πυρήνα της συνάρτησης transgretion map.

$$H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = \bigoplus_{\nu=1}^{r} H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$$

$\hat{\mathcal{T}}_{X,P_i}$ είναι το $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$-module που παράγεται από το $\frac{d}{dt}$ με την adjoint δράση. $H^1(G(P_i), \hat{\mathcal{T}}_{X,P_i})$ είναι απλή συνομολογία ομάδων.

- Bertin-Mézard 2000 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Cornelissen-Kato 2002: Ordinary curves

Οι επεκτάσεις Artin-Schreier είναι εύκολες στον χειρισμό τους. Κάποιος θα θεωρούσε λογικό να σπάσει τις p-επεκτάσεις βήμα-βήμα κάνοντας χρήση επεκτάσεων Artin-Schreier p και στην συνέχεια να χρησιμοποιήσει την Lyndon-Hochsield-Serre φασματική ακολουθία για να συνδέση τις συνομολογιακές ομάδες $G/H, H, G$. Το δύσκολο μέρος αυτής της προσέγγισης είναι ο υπολογισμός του πυρήνα της συνάρτησης transgretion map. Ακριβή αποτελέσματα μπορεί να πάρει κανείς μόνο για πολύ ειδικές p-ομάδες.
(K 2007, Στοιχειώδεις αβελιανές επεκτάσεις)

Ένα άλυτο διάσημο πρόβλημα

Να καθοριστεί η G-module δομή του χώρου $H^0(X,\Omega^{\otimes m})$ στην θετική χαρακτηριστική όταν η G είναι μία p-ομάδα.

Να καθοριστεί η G-module δομή του χώρου $H^0(X, \Omega^{\otimes m})$ στην θετική χαρακτηριστική όταν η G είναι μία p-ομάδα.
Μόνο μερικά αποτελέσματα είναι γνωστά: Διάφοροι συγγραφείς έλυσαν το πρόβλημα υπό τους παρακάτω περιορισμούς

1. Δομή ομάδας (κυκλική, στοιχειώδης αβελιανή)
2. Δομή της Ramification filtration (ασθενής διακλάδωση, $G_2(P) = \{1\}$)

Ένα άλυτο διάσημο πρόβλημα

Να καθοριστεί η G-module δομή του χώρου $H^0(X, \Omega^{\otimes m})$ στην θετική χαρακτηριστική όταν η G είναι μία p-ομάδα.
Μόνο μερικά αποτελέσματα είναι γνωστά: Διάφοροι συγγραφείς έλυσαν το πρόβλημα υπό τους παρακάτω περιορισμούς

1. Δομή ομάδας (κυκλική, στοιχειώδης αβελιανή)
2. Δομή της Ramification filtration (ασθενής διακλάδωση, $G_2(P) = \{1\}$)
3. **Σε αυτή την διάλεξη**: Καλύμματα με ένα σημείο διακλάδωσης.

Ένα άλυτο διάσημο πρόβλημα

Να καθοριστεί η G-module δομή του χώρου $H^0(X, \Omega^{\otimes m})$ στην θετική χαρακτηριστική όταν η G είναι μία p-ομάδα.
Μόνο μερικά αποτελέσματα είναι γνωστά: Διάφοροι συγγραφείς έλυσαν το πρόβλημα υπό τους παρακάτω περιορισμούς

1. Δομή ομάδας (κυκλική, στοιχειώδης αβελιανή)
2. Δομή της Ramification filtration (ασθενής διακλάδωση, $G_2(P) = \{1\}$)
3. **Σε αυτή την διάλεξη**: Καλύμματα με ένα σημείο διακλάδωσης.

Η γνώση της G-module δομής της $H^0(X, \Omega^{\otimes m})$ επιτρέπει τον υπολογισμό του $H^0(X, \Omega^{\otimes m})_G$.

Ένα άλυτο διάσημο πρόβλημα

Να καθοριστεί η G-module δομή του χώρου $H^0(X, \Omega^{\otimes m})$ στην θετική χαρακτηριστική όταν η G είναι μία p-ομάδα.
Μόνο μερικά αποτελέσματα είναι γνωστά: Διάφοροι συγγραφείς έλυσαν το πρόβλημα υπό τους παρακάτω περιορισμούς

1. Δομή ομάδας (κυκλική, στοιχειώδης αβελιανή)
2. Δομή της Ramification filtration (ασθενής διακλάδωση, $G_2(P) = \{1\}$)
3. **Σε αυτή την διάλεξη**: Καλύμματα με ένα σημείο διακλάδωσης.

Η γνώση της G-module δομής της $H^0(X, \Omega^{\otimes m})$ επιτρέπει τον υπολογισμό του $H^0(X, \Omega^{\otimes m})_G$. Είναι εύκολο πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας αλλά δεν μπορούμε να το κάνουμε με το χέρι για συγκεκριμένες ομάδες.
Αυτή η τεχνική δούλεψε στις παρακάτω περιπτώσεις

- K. 2008 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ κάνοντας χρήση αποτελεσμάτων του S. Nakajima
- σε συνεργασία με τον K-Köck 2010 Ασθενώς διακλαδιζόμενα καλύμματα.

Katz-Gaber συμπαγοποίηση

Κάθε p-Galois επέκταση του $k[[t]]$ μπορεί να γίνει καθολική:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "G"'] & X \arrow[d, "G"] \\ \mathrm{Quot}(k[[t]]) & \mathbb{P}^1_k \end{tikzcd}$$

Το κάλυμμα $X \to \mathbb{P}^1_k$ έχει μόνο ένα σημείο διακλάδωσης P ώστε $G(P) = G$ και ο εντοπισμός του $X \to \mathbb{P}^1_k$ ξαναδίνει την αρχική επέκταση $L/k((t))$.

Katz-Gabber covers

Έστω $X \to \mathbb{P}^1(k)$ ένα κάλυμμα με μόνο ένα σημείο διακλάδωσης και ομάδα Galois $G = \mathrm{Gal}(X/\mathbb{P}^1)$ μία p-ομάδα.

Έστω $X \to \mathbb{P}^1(k)$ ένα κάλυμμα με μόνο ένα σημείο διακλάδωσης και ομάδα Galois $G = \mathrm{Gal}(X/\mathbb{P}^1)$ μία p-ομάδα.

Κατασκευή m-ολόμορφων πολυδιαφορικών του X

Katz-Gabber covers

Έστω $X \to \mathbb{P}^1(k)$ ένα κάλυμμα με μόνο ένα σημείο διακλάδωσης και ομάδα Galois $G = \mathrm{Gal}(X/\mathbb{P}^1)$ μία p-ομάδα.

Κατασκευή m-ολόμορφων πολυδιαφορικών του X

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(df_1^{\otimes m}) &= \left(-2mp^h + m\sum_{i=0}^{\infty}(e_i - 1)\right) P = \\ &= m(2g_X - 2)P \end{aligned}$$

Πρόταση:

1. Το σύνολο $f_i df_1$, $\deg \operatorname{div}(f_i) \leq 2g_X - 2$ αποτελεί βάση του χώρου των ολομόρφων διαφορικών του X.

Πρόταση:

1. Το σύνολο $f_i df_1$, $\deg \operatorname{div}(f_i) \leq 2g_X - 2$ αποτελεί βάση του χώρου των ολομόρφων διαφορικών του X.
2. Το σύνολο $f_i df_1^{\otimes m}$, $\deg \operatorname{div}(f_i) < m(2g_X - 2)$ αποτελεί βάση του χώρου των m-ολομόρφων πολυδιαφορικών της X.

Πρόταση:

1. Το σύνολο $f_i df_1$, $\deg \operatorname{div}(f_i) \leq 2g_X - 2$ αποτελεί βάση του χώρου των ολομόρφων διαφορικών του X.
2. Το σύνολο $f_i df_1^{\otimes m}$, $\deg \operatorname{div}(f_i) < m(2g_X - 2)$ αποτελεί βάση του χώρου των m-ολομόρφων πολυδιαφορικών της X.

Πρόταση:

1. Το σύνολο $f_i df_1$, $\deg \operatorname{div}(f_i) \leq 2g_X - 2$ αποτελεί βάση του χώρου των ολομόρφων διαφορικών του X.
2. Το σύνολο $f_i df_1^{\otimes m}$, $\deg \operatorname{div}(f_i) < m(2g_X - 2)$ αποτελεί βάση του χώρου των m-ολομόρφων πολυδιαφορικών της X.

Απόδειξη: Όλα τα m-ολόμορφα πολυδιαφορικά είναι της μορφής $f df_1^{\otimes m}$. Συνεπώς η συνθήκη ολομορφίας μεταφράζεται στην συνθήκη $f \in L(m(2g_X - 2)P)$. Τα γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $f_i df_1^{\otimes m}$ με $\deg \operatorname{div} f_i = m_i \leq m(2g_X - 2)$ σχηματίζουν βάση του $\Omega_X(m)$.

Παρατήρηση: Για την περίπτωση $m > 1$ παρατηρούμε ότι ο χώρος των m-ολομόρφων διαφορικών έχει διάσταση

$$\dim L(mW) = m(2g-2) + 1 - g = (2m-1)g - 2m + 1.$$

Από την άλλη το πλήθος των f_i ώστε $\deg \operatorname{div}(f_i) \leq m(2g-2)$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:
Στο διάστημα $[0, 2g-1]$ υπάρχουν g τέτοια στοιχεία. Στο διάστημα λ $(2g-1, m(2g-2)]$ υπάρχουν $m(2g-2) - (2g-1) = 2mg - 2m - 2g + 1$ τέτοια στοιχεία. Συνολικά υπάρχουν $2mg - 2m - 2g + 1 + g = (2m-1)g - 2m + 1$ και φυσικά αυτό ταυτίζεται με την διάσταση που υπολογίζουμε από τον τύπο των Riemann-Roch.

Πόρισμα: Η ημιομάδα του Weierstrass στο P είναι συμμετρική δηλαδή το $2g-1$ είναι ένα gap.

Απόδειξη: Το σύνολο των gaps έχει g το πλήθος στοιχεία $\{i_1 = 1, \ldots, i_g \leq 2g-1\}$. Αν το $2g-1$ είναι ένα gap τότε υπάρχουν g pole numbers i_μ με $i_\mu \leq 2g-2$ και το πλήθος των pole numbers $\leq 2g-2$ είναι ίσο με g (το 0 είναι πάντα pole number).

Αν το $2g-1$ είναι pole number τότε μπορούμε να σχηματίσουμε μόνο $g-1$ ολόμορφα διαφορικά της μορφής $f_i df_1$.

Η τοπική αναπαράσταση

Αν το f_1 είναι μία συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πρώτο μη τετριμμένο pole number m_1.
Η δράση του $\sigma \in G$ στο f_1 δίνεται από $\sigma(f_1) = f_1 + \alpha_1(\sigma)$. Τα πολλαπλάσια νm_1 αντιστοιχούν σε δυνάμεις f_1^ν και η δράση του σ επί αυτών δίνεται:

$$\sigma f_1^\nu = (f_1 + a_1)^\nu = f_1^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} a_1(\sigma)^{\nu-\mu} f_1^\mu.$$

Η τοπική αναπαράσταση

Αν το f_1 είναι μία συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πρώτο μη τετριμμένο pole number m_1.
Η δράση του $\sigma \in G$ στο f_1 δίνεται από $\sigma(f_1) = f_1 + \alpha_1(\sigma)$. Τα πολλαπλάσια νm_1 αντιστοιχούν σε δυνάμεις f_1^ν και η δράση του σ επί αυτών δίνεται:

$$\sigma f_1^\nu = (f_1 + a_1)^\nu = f_1^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} a_1(\sigma)^{\nu-\mu} f_1^\mu.$$

Προχωρούμε στον επόμενο pole number m_2 που δεν είναι διαιρετός με m_1 και ο οποίος αντιστοιχεί σε μία νέα συνάρτηση f_2. Ο πολυωνυμικός δακτύλιος $k[f_1, f_2]$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις που αντιστοιχούν στην υποημιομάδα που παράγεται από τους pole numbers m_1, m_2. Επιπλέον αν $\sigma(f_2) = f_2 + a_2(\sigma)$ τότε μπορούμε να επεκτείνουμε την δράση αυτή σε κάθε στοιχείο του δακτυλίου $k[f_1, f_2]$.

Αν το f_1 είναι μία συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πρώτο μη τετριμμένο pole number m_1.
Η δράση του $\sigma \in G$ στο f_1 δίνεται από $\sigma(f_1) = f_1 + \alpha_1(\sigma)$. Τα πολλαπλάσια νm_1 αντιστοιχούν σε δυνάμεις f_1^ν και η δράση του σ επί αυτών δίνεται:

$$\sigma f_1^\nu = (f_1 + a_1)^\nu = f_1^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} a_1(\sigma)^{\nu-\mu} f_1^\mu.$$

Προχωρούμε στον επόμενο pole number m_2 που δεν είναι διαιρετός με m_1 και ο οποίος αντιστοιχεί σε μία νέα συνάρτηση f_2. Ο πολυωνυμικός δακτύλιος $k[f_1, f_2]$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις που αντιστοιχούν στην υποημιομάδα που παράγεται από τους pole numbers m_1, m_2. Επιπλέον αν $\sigma(f_2) = f_2 + a_2(\sigma)$ τότε μπορούμε να επεκτείνουμε την δράση αυτή σε κάθε στοιχείο του δακτυλίου $k[f_1, f_2]$.
Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο ορίζοντας την δράση επί των γεννητόρων f_ν της ημιομάδας μέχρι τον τελευταίο γεννήτορα f_m.

Παρατήρηση: Τα στοιχεία $a_\nu(\sigma) = (\sigma - 1) f_\nu$ είναι (όχι κατανάγκη τετριμμένοι) συνκύκλοι στην $H^1(G, k[f_1, \ldots, f_{\nu-1}])$.

Η τοπική αναπαράσταση

Παρατήρηση: Τα στοιχεία $a_\nu(\sigma) = (\sigma - 1)f_\nu$ είναι (όχι κατανάγκη τετριμμένοι) συνκύκλοι στην $H^1(G, k[f_1, \ldots, f_{\nu-1}])$.
Ορισμός: Ορίζουμε μία συνάρτηση βαθμού στα $k[f_1, \ldots, f_\nu]$ με $\deg(f_\nu) = m_\nu$.

Η τοπική αναπαράσταση

Παρατήρηση: Τα στοιχεία $a_\nu(\sigma) = (\sigma - 1) f_\nu$ είναι (όχι κατανάγκη τετριμμένοι) συνκύκλοι στην $H^1(G, k[f_1, \ldots, f_{\nu-1}])$.
Ορισμός: Ορίζουμε μία συνάρτηση βαθμού στα $k[f_1, \ldots, f_\nu]$ με $\deg(f_\nu) = m_\nu$.
Υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος γεννήτορες της ημιομάδας του Weierstrass. Έστω r το πλήθος τους. Ορίζουμε $k_\ell[f_1, \ldots, f_r]$ να είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από στοιχεία βαθμού $\leq \ell$.
Παρατήρηση: Ο χώρος των m-ολομόρφων πολυδιαφορικών είναι ισόμορφος με $k_{m(2g_X - 2)}[f_1, \ldots, f_r]$.

Η τοπική αναπαράσταση

Παρατήρηση: Τα στοιχεία $a_\nu(\sigma) = (\sigma - 1)f_\nu$ είναι (όχι κατανάγκη τετριμμένοι) συνκύκλοι στην $H^1(G, k[f_1, \ldots, f_{\nu-1}])$.
Ορισμός: Ορίζουμε μία συνάρτηση βαθμού στα $k[f_1, \ldots, f_\nu]$ με $\deg(f_\nu) = m_\nu$.
Υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος γεννήτορες της ημιομάδας του Weierstrass. Έστω r το πλήθος τους. Ορίζουμε $k_\ell[f_1, \ldots, f_r]$ να είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από στοιχεία βαθμού $\leq \ell$.
Παρατήρηση: Ο χώρος των m-ολομόρφων πολυδιαφορικών είναι ισόμορφος με $k_{m(2g_X-2)}[f_1, \ldots, f_r]$.
Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την διάσταση του $H^0(X, \Omega^{\otimes 2})_G$ ο οποίος είναι ίσος με την διάστασης του συμπληρώματος του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα $a_i(g), i = 1, \ldots, r \;\; g \in G$.

Πόσοι είναι οι αδιάσπαστοι παράγοντες;

Το να μπορέσουμε μέσα στην παραπάνω διάσπαση να αναγνωρίσουμε αδιάσπαστους παράγοντες είναι πολύ δύσκολο πρόβλημα. Έκτος από την κυκλική ομάδα που οι αδιάσπαστοι παράγοντες δίνονται από την κανονική μορφή Jordan η περιγραφή των αδιασπάστων παραγόντων δεν είναι εύκολη ούτε για την $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$.

Πόσοι είναι οι αδιάσπαστοι παράγοντες;

Το να μπορέσουμε μέσα στην παραπάνω διάσπαση να αναγνωρίσουμε αδιάσπαστους παράγοντες είναι πολύ δύσκολο πρόβλημα. Έκτος από την κυκλική ομάδα που οι αδιάσπαστοι παράγοντες δίνονται από την κανονική μορφή Jordan η περιγραφή των αδιασπάστων παραγόντων δεν είναι εύκολη ούτε για την $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$.

Έχουμε ένα κάλυμμα $X \to \mathbb{P}^1$, με μόνο ένα διακλαδισμένο σημείο $Q \mapsto P$. Η ημιομάδα στο P της $\mathbb{P}^1$ είναι η ημιομάδα των φυσικών αριθμών. Αν x είναι το στοιχείο του ρητού σώματος συναρτήσεων με $(x)_\infty = P$ τότε $(x^n)_\infty = nP$.

Πόσοι είναι οι αδιάσπαστοι παράγοντες;

Το να μπορέσουμε μέσα στην παραπάνω διάσπαση να αναγνωρίσουμε αδιάσπαστους παράγοντες είναι πολύ δύσκολο πρόβλημα. Έκτος από την κυκλική ομάδα που οι αδιάσπαστοι παράγοντες δίνονται από την κανονική μορφή Jordan η περιγραφή των αδιασπάστων παραγόντων δεν είναι εύκολη ούτε για την $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$.

Έχουμε ένα κάλυμμα $X \to \mathbb{P}^1$, με μόνο ένα διακλαδισμένο σημείο $Q \mapsto P$. Η ημιομάδα στο P της $\mathbb{P}^1$ είναι η ημιομάδα των φυσικών αριθμών. Αν x είναι το στοιχείο του ρητού σώματος συναρτήσεων με $(x)_\infty = P$ τότε $(x^n)_\infty = nP$.

Τα στοιχεία x^n όταν τα δούμε ώς συναρτήσεις στο σώμα της X είναι στην ημιομάδα του Weierstrass του Q και $(x^n)_{\infty,X} = p^s n$. Οι G-αναλλοίωτες συναρτήσεις στο $L(kP)$ έχουν pole numbers που διαιρούνται με p^s.

Πόσοι είναι οι αδιάσπαστοι παράγοντες;

Το να μπορέσουμε μέσα στην παραπάνω διάσπαση να αναγνωρίσουμε αδιάσπαστους παράγοντες είναι πολύ δύσκολο πρόβλημα. Έκτος από την κυκλική ομάδα που οι αδιάσπαστοι παράγοντες δίνονται από την κανονική μορφή Jordan η περιγραφή των αδιασπάστων παραγόντων δεν είναι εύκολη ούτε για την $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$.

Έχουμε ένα κάλυμμα $X \to \mathbb{P}^1$, με μόνο ένα διακλαδισμένο σημείο $Q \mapsto P$. Η ημιομάδα στο P της $\mathbb{P}^1$ είναι η ημιομάδα των φυσικών αριθμών. Αν x είναι το στοιχείο του ρητού σώματος συναρτήσεων με $(x)_\infty = P$ τότε $(x^n)_\infty = nP$.

Τα στοιχεία x^n όταν τα δούμε ώς συναρτήσεις στο σώμα της X είναι στην ημιομάδα του Weierstrass του Q και $(x^n)_{\infty,X} = p^s n$. Οι G-αναλλοίωτες συναρτήσεις στο $L(kP)$ έχουν pole numbers που διαιρούνται με p^s.

Κάθε αδιάσπαστος προσθετέος έχει ακριβώς ένα αναλλοίωτο στοιχείο οπότε το πλήθος των αδιάσπαστων παραγόντων στο $L(nP)$ είναι $\left\lfloor \frac{n}{p^n} \right\rfloor$.

Είμαστε στην περίπτωση καλύμματος με ένα σημείο διακλάδωσης:

$$H^0(X, G, \mathcal{T}_C) = H^0(X/G, \pi_*^G(\mathcal{X}) \oplus H^1(G, \hat{\mathcal{T}}_X).$$

Υπολογισμός του εφαπτόμενου χώρου του τοπικού συναρτητή παραμόρφωσης

Είμαστε στην περίπτωση καλύμματος με ένα σημείο διακλάδωσης:

$$H^0(X,G,\mathcal{T}_C) = H^0(X/G,\pi_*^G(\mathcal{X}) \oplus H^1(G,\hat{\mathcal{T}}_X).$$

$$\dim H^0(X/G,\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = -3 + \left\lceil \sum_{i=0}^{n_\mu} \frac{(e_i^{(\mu)}-1)}{e_0^{(\mu)}} \right\rceil$$

Και

$$\dim H^0(X,G,\mathcal{T}_C) = \dim k_{4g_X-4}[f_1,\ldots,f_r]_G.$$

Υπολογισμός του εφαπτόμενου χώρου του τοπικού συναρτητή παραμόρφωσης

Είμαστε στην περίπτωση καλύμματος με ένα σημείο διακλάδωσης:

$$H^0(X,G,\mathcal{T}_C) = H^0(X/G,\pi_*^G(\mathcal{X}) \oplus H^1(G,\hat{\mathcal{T}}_X).$$

$$\dim H^0(X/G,\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) = -3 + \left\lceil \sum_{i=0}^{n_\mu} \frac{(e_i^{(\mu)}-1)}{e_0^{(\mu)}} \right\rceil$$

Και

$$\dim H^0(X,G,\mathcal{T}_C) = \dim k_{4g_X-4}[f_1,\ldots,f_r]_G.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το $H^1(G,\hat{\mathcal{T}}_X)$.

Παραδείγματα

Ο πρώτος pole number είναι πρώτος προς το p.

Αυτό έχει ως συνέπεια ότι υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση της G στο $L(mP)$ διάστασης 2.

Ο πρώτος pole number είναι πρώτος προς το p.

Αυτό έχει ως συνέπεια ότι υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση της G στο $L(mP)$ διάστασης 2.
Σε αυτή την περίπτωση η ομάδα G είναι στοιχειώδης αβελιανή και έστω ότι παράγεται από τα στοιχεία σ_i.

Ο πρώτος pole number είναι πρώτος προς το p.

Αυτό έχει ως συνέπεια ότι υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση της G στο $L(mP)$ διάστασης 2.
Σε αυτή την περίπτωση η ομάδα G είναι στοιχειώδης αβελιανή και έστω ότι παράγεται από τα στοιχεία σ_i.
Ο χώρος των "τοπικά ολόμορφων διαφορικών" είναι $k_{m(2g_X-2)}[f]$ με δράση

$$\sigma_i f = f + c(\sigma_i)$$

Ο πρώτος pole number είναι πρώτος προς το p.

Αυτό έχει ως συνέπεια ότι υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση της G στο $L(mP)$ διάστασης 2.
Σε αυτή την περίπτωση η ομάδα G είναι στοιχειώδης αβελιανή και έστω ότι παράγεται από τα στοιχεία σ_i.
Ο χώρος των "τοπικά ολόμορφων διαφορικών" είναι $k_{m(2g_X-2)}[f]$ με δράση

$$\sigma_i f = f + c(\sigma_i)$$

$$\sigma_i f^k = f^k + \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k}{\nu} f^\nu c(\sigma_i)^{k-\nu}$$

Ο πρώτος pole number είναι πρώτος προς το p.

Αυτό έχει ως συνέπεια ότι υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση της G στο $L(mP)$ διάστασης 2.
Σε αυτή την περίπτωση η ομάδα G είναι στοιχειώδης αβελιανή και έστω ότι παράγεται από τα στοιχεία σ_i.
Ο χώρος των "τοπικά ολόμορφων διαφορικών" είναι $k_{m(2g_X-2)}[f]$ με δράση

$$\sigma_i f = f + c(\sigma_i)$$

$$\sigma_i f^k = f^k + \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k}{\nu} f^\nu c(\sigma_i)^{k-\nu}$$

Θα πρέπει να γνωρίζουμε πότε ένας διωνυμικός συντελεστής είναι 0 modulo p.

Διάσταση των covariant στοιχείων

Για ένα module $k_\ell[f]$ με την παραπάνω δράση θεωρούμε το p-αδικό ανάπτυγμα $\ell = \sum_{i=1}^{n} a_i p^i$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\chi : \{0, \ldots, p-1\} \to \{0, 1\}$ ορισμένη από:

$$\chi(a) := \begin{cases} 1, & \text{αν } a \neq 0 \\ 0, & \text{αν } a = 0 \end{cases}.$$

Τότε

$$\dim k_\ell[f]_G = \sum_{i=1}^{n} \chi(a_i).$$

Έστω G μία κυκλική ομάδα τάξης p^n. Χρειαζόμαστε n-πηδήματα στην ramification filtration και n γεννήτορες της ημιομάδας. Έστω f_m μία συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πρώτο pole number που είναι πρώτος με το p. Οι τιμές του συνκύκλου $a(g^k) = g^k f_m - f_m$ καθορίζονται από την συνθήκη του συνκύκλου

$$a(g^k) = (1 + g + g^2 + \cdots + g^{k-1})a(g).$$

Έστω G μία κυκλική ομάδα τάξης p^n. Χρειαζόμαστε n-πηδήματα στην ramification filtration και n γεννήτορες της ημιομάδας. Έστω f_m μία συνάρτηση που αντιστοιχεί στον πρώτο pole number που είναι πρώτος με το p. Οι τιμές του συνκύκλου $a(g^k) = g^k f_m - f_m$ καθορίζονται από την συνθήκη του συνκύκλου

$$a(g^k) = (1 + g + g^2 + \cdots + g^{k-1})a(g).$$

Η δράση του g^ν στο $a(g)$ μπορεί να περιγραφεί:

Διαλέγουμε την βάση $(g-1)^k f_m$.

Διαλέγουμε την βάση $(g-1)^k f_m$.
Ως προς αυτή την βάση η δράση δίνεται από τον πίνακα Jordan matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Διαλέγουμε την βάση $(g-1)^k f_m$.
Ως προς αυτή την βάση η δράση δίνεται από τον πίνακα Jordan matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός έχει k δύναμη

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i < j \\ 1 & \text{αν } i = j \\ \binom{k}{j-i} & \text{αν } j > i \end{cases}$$

Στον παραπάνω τύπο $\binom{k}{\mu} = 0$ αν $\mu > k$.

Τα πηδήματα στην ramification filtration δίνονται από τον τύπο

$$m - v_t(a(g^{p^i})).$$

Τα πηδήματα στην ramification filtration δίνονται από τον τύπο

$$m - v_t(a(g^{p^i})).$$

Ερώτημα: **Μπορεί κανείς να δώσει μία απόδειξη του θεωρήματος Hasse-Arf με αυτό τον τρόπο**;