

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μικρά κενά μεταξύ των πρώτων αριθμών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτης Θεοδωρόπουλος

Επιβλέπων: Αριστείδης Κοντογεώργης

Αθήνα, Ιούνιος 2025

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Επιβλέπων καθηγητής:	Αριστείδης Κοντογεώργης, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α
Μέλος τριμελούς επιτροπής:	Μαρίνα Ηλιοπούλου, Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.
Μέλος τριμελούς επιτροπής:	Δημήτριος Χατζάκος, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία έγινε στα πλαίσια του προγράμματος Μεταπτυχιακών σπουδών 'Θεωρητικά Μαθηματικά' του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, υπό την επίβλεψη του κ. Αριστείδη Κοντογεώργη. Θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον κ. Κοντογεώργη για την επίβλεψη της εργασίας και έπειτα την κα. Μαρίνα Ηλιοπούλου για την συμμετοχή της στη τριμελή επιτροπή.

Ιδιαιτέρως, θα ήθελα να ευχαριστήσω το τρίτο μέλος της επιτροπής κ. Δημήτριο Χατζάκο. Πρωτίστως για την καίριας σημασίας καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας, αλλά και για την μετάδοση του ενθουσιασμού του για τον κλάδο της Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών.

Παναγιώτης Θεοδωρόπουλος
Αθήνα, Ιούνιος 2025

Περίληψη

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η έκθεση των πρόσφατων αποτελεσμάτων στο θέμα των μικρών κενών (small gaps) μεταξύ των πρώτων αριθμών. Το πρόβλημα της ύπαρξης φραγμένων κενών μεταξύ διαδοχικών πρώτων αριθμών υπήρξε ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών κατά τον 20ο αιώνα, με τις βασικές επιτυχίες να σημειώνονται κατά τις αρχές του 21ου. Τον Μάιο του 2013 ο Y. Zhang, σε μία καταπληκτική εργασία του [17], απέδειξε για πρώτη φορά την ύπαρξη φραγμένων διαστημάτων μεταξύ διαδοχικών πρώτων, χρησιμοποιώντας την βασική μέθοδο εντοπισμού τέτοιων κενών, την μέθοδο GPY των D. A. Goldston, J. Pintz και C. Y. Yildirim. Λίγους μήνες μετά, ο J. Maynard [14] έδωσε μία απλούστερη συνδυαστική απόδειξη του Θεωρήματος του Zhang, αποδεικνύοντας μάλιστα μία ισχυρότερη μορφή του. Την ίδια εποχή, ο T. Tao είχε αναπτύξει ανεξάρτητα παρόμοιες ιδέες με αυτές του Maynard, χρησιμοποιώντας αναλυτικά εργαλεία. Το 2014 οι Goldston, Pintz, Yildirim και Zhang έλαβαν το Βραβείο Cole για την δουλειά τους στα Μικρά κενά μεταξύ των πρώτων αριθμών, ενώ το 2022 ο Maynard έλαβε το Μετάλλιο Fields για την συνεισφορά του στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών. Βασικός σκοπός μας είναι να δώσουμε μία πλήρη απόδειξη του Θεωρήματος των Zhang-Maynard-Tao.

Στο 1ο κεφάλαιο δίνουμε μία σύντομη εισαγωγή σε βασικές έννοιες που θα μας χρειαστούν, ενώ στο 2ο κεφάλαιο εισάγουμε τις βασικές έννοιες από την θεωρία των L-συναρτήσεων, με απώτερο σκοπό την διατύπωση του θεωρήματος Siegel-Walfisz. Στο 3ο κεφάλαιο παρουσιάζουμε στοιχειώδεις μεθόδους της θεωρίας κοσκίνων, και στο 4ο κεφάλαιο αποδεικνύουμε το κεντρικής σημασίας Θεώρημα Bombieri-Vinogradov, το οποίο μας οδηγεί φυσιολογικά στην έννοια του επιπέδου κατανομής των πρώτων αριθμών. Η έννοια αυτή θα έχει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην προσπάθεια εντοπισμού μικρών κενών μεταξύ των πρώτων αριθμών.

Τέλος, στα κεφάλαια 5 και 6 μελετάμε το κεντρικό θέμα αυτής της εργασίας. Αρχικά παρουσιάζουμε την μέθοδο GPY για τον εντοπισμό πρώτων σε $k-$άδες, καθώς και τα αποτελέσματα της μεθόδου απο τους ίδιους τους Goldston, Pintz, Yildirim . Στο κεφάλαιο 6, αφού κάνουμε μία νύξη για την μέθοδο του Zhang η οποία τον οδήγησε στην απόδειξη ότι $\liminf(p_{n+1}-p_n) < \infty$, παρουσιάζουμε την πολυμεταβλητή εκδοχή της μεθόδου GPY όπως την χρησιμοποιήσε ο Maynard, προκειμένου να αποδειχθεί αφενός το φράγμα $\liminf(p_{n+1}-p_n) \leq 600$ και αφετέρου το Θεώρημα Maynard-Tao.

Abstract

The aim of this Master's thesis is the exposition of the recent breakthroughs on the topic of small gaps between primes. The problem related to the existence of bounded gaps between consecutive primes was of great importance during the 20th century, meeting great success in the beginning of the 21st century. In 2013, Y. Zhang in his extraordinary paper [17], proved for the very first time the existence of bounded intervals between consecutive primes, using the basic method for detecting such gaps, the GPY method (due to D. A. Goldston, J. Pintz and C. Y. Yildirim). A few months later, J. Maynard in his work [14] managed to obtain even stronger results, while using a more elementary combinatorial method. At the same time, T. Tao independently developed similar ideas, using analytic tools. In 2014, Goldston, Pintz, Yildirim and Zhang received the Cole Prize for their work on small gaps between primes, while in 2022 Maynard was awarded the Fields Medal for his contribution to Analytic Number Theory. The main goal of this thesis is to give a full proof of the Zhang-Maynard-Tao theorem.

In Chapter 1 we give an introduction to basic tools and definitions that we will need throughout our exposition. In Chapter 2 we present some basic theory of L-functions, with the ultimate goal being to state the Siegel-Walfisz theorem, while in Chapter 3 we present elementary methods from Sieve Theory. In Chapter 4, we prove the Bombieri-Vinogradov theorem, which naturally leads us to the concept of the level of distribution of the prime numbers. This concept will play a key role in the attempt to detect small gaps between primes.

Chapters 5 and 6 are the main part of this thesis. We initially present the GPY method for detecting primes in k-tuples, as well as the results obtained by this method originally by Goldston, Pintz and Yildirim. In Chapter 6 after we briefly mention Zhang's strategy to prove that $\liminf(p_{n+1} - p_n) < \infty$, we present the multivariable version of the GPY method, as used by Maynard, in order to obtain the upper bound $\liminf(p_{n+1} - p_n) \leq 600$, as well as the Maynard-Tao theorem.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**
1.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί 1
1.2 Βασικά στοιχεία ανάλυσης 6
1.2.1 Ο τύπος άθροισης του Poisson 6
1.2.2 Η συνάρτηση Γάμμα 7
1.3 Θεμελιώδη αποτελέσματα Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών 8

2 L-συναρτήσεις **10**
2.1 Η συνάρτηση $\zeta(s)$ του Riemann 10
2.2 Οι L-σειρές και η αναλυτική τους επέκταση 16
2.3 Μελέτη των ριζών των L-σειρών 19
2.4 Οι ασυμπτωτικοί τύποι των συναρτήσεων $\psi(x,\chi)$ και $N(T,\chi)$ 24
2.5 Το Θεώρημα Siegel-Walfisz 24

3 Θεωρία κοσκίνων **28**
3.1 Τα αξιώματα της Θεωρίας κοσκίνων 28
3.2 Το κόσκινο του Selberg 32
3.3 Εφαρμογή στις πρώτες $k-$άδες 38
3.4 Το μεγάλο κόσκινο 40

4 Το Θεώρημα Bombieri-Vinogradov και το επίπεδο κατανομής των πρώτων αριθμών **50**
4.1 Η συνάρτηση διακύμανσης 50
4.2 Απόδειξη του Θεωρήματος Bombieri-Vinogradov 58
4.2.1 Εκτιμήσεις για τους όρους D_{Λ_4} και D_{Λ_1} 58
4.2.2 Εκτίμηση του όρου D_{Λ_3} 59
4.2.3 Εκτίμηση του όρου D_{Λ_2} 62
4.2.4 Ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος Bombieri-Vinogradov 63

5 Η μέθοδος Goldston-Pintz-Yildirim **65**
5.1 Περιγραφή της μεθόδου 65
5.2 Το Πρώτο Θεώρημα GPY 69
5.3 Το Δεύτερο Θεώρημα GPY 78

6 Το Θεώρημα Zhang-Maynard-Tao **90**
6.1 Διαχείριση του S_1 92
6.2 Διαχείριση του S_2 96
6.3 Ασυμπτωτικοί τύποι των S_1 και S_2 102
6.4 Επιλογή της συνάρτησης F για μικρά k 107
6.5 Επιλογή της συνάρτησης F για μεγάλα k 114

Βιβλιογραφία **119**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο, παραθέτουμε τα βασικά εισαγωγικά στοιχεία της Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών που θα χρειαστούμε σε αυτήν την εργασία. Για μία πλήρη εισαγωγή σε αυτές τις έννοιες, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις παραπομπές [1, 3, 18].

1.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Ξεκινάμε με κάποιους βασικούς συμβολισμούς που θα χρειαστούμε για να δηλώσουμε την ασυμπτωτική σχέση μεταξύ δύο συναρτήσεων.

Ορισμός 1. *Για δύο συναρτήσεις f, g θα γράφουμε:*

- $f(x) = O(g(x))$ *ή ισοδύναμα* $f(x) \ll g(x)$ *αν υπάρχουν θετικές σταθερές* M, x_0 *τέτοιες ώστε* $|f(x)| \leq Mg(x)$ *για κάθε* $x \geq x_0$,
- $f(x) \sim g(x)$ *αν* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$,
- $f(x) = o(g(x))$ *αν* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
- $f(x) \asymp g(x)$ *ή ισοδύναμα* $f(x) \approx g(x)$ *αν* $f(x) = O(g(x))$ *και* $g(x) = O(f(x))$.

Προχωράμε στον ορισμό μίας πολύ σημαντικής κλάσης συναρτήσεων, οι οποίες θα μας απασχολήσουν στη παρούσα εργασία.

Ορισμός 2. *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *θα λέγεται αριθμητική. Η* f *θα λέγεται πολλαπλασιαστική αν για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων* m, n *σχετικά πρώτων ισχύει*

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Τέλος, θα λέμε ότι η f *είναι πλήρως πολλαπλασιαστική αν για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων* m, n *ισχύει*

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Στο σύνολο των αριθμητικών συναρτήσεων ορίζεται μία πράξη με τεράστια αριθμοθεωρητική σημασία, το γινόμενο Dirichlet.

Ορισμός 3. *Έστω* f, g *δύο αριθμητικές συναρτήσεις. Ορίζουμε το γινόμενο Dirichlet τους να είναι η αριθμητική συνάρτηση*

$$(f * g)(n) \quad = \quad \sum_{ab=n} f(a)g(b).$$

Με στοιχειώδη τρόπο αποδεικνύεται ότι αν οι f, g είναι πολλαπλασιαστικές, τότε και η $f * g$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Συχνά θα συναντούμε ορισμένες συγκεκριμένες αριθμητικές συναρτήσεις με σημαντικό ρόλο στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών, επομένως κρίνεται σκόπιμη μία σύντομη παρουσίαση τους.

- Η μοναδιαία συνάρτηση I ορίζεται ως

$$I(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

όπου με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού x. Η συνάρτηση αυτή έχει την ιδιότητα $f * I = f$ για κάθε αριθμητική συνάρτηση f, και είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

- Η ταυτοτική συνάρτηση u ορίζεται ως

$$u(n) = 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

και είναι φυσικά πλήρως πολλαπλασιαστική.

- Η συνάρτηση ω ορίζεται ως

$$\omega(n) = \#\{p \mid n\ :\ p \text{ πρώτος}\},$$

δηλαδή απαριθμεί το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n. Συμβατικά θέτουμε $\omega(1) = 0$ και παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων (m, n) ισχύει

$$\omega(mn) \quad \leq \quad \omega(m) + \omega(n),$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν οι δύο αριθμοί είναι μεταξύ τους πρώτοι, δηλαδή εάν $(m, n) = 1$.

- Η συνάρτηση μ του Möbius η οποία όριζεται ως

$$\mu(n) \quad = \quad \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{αν } n \text{ ελεύθερος τετραγώνων,} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση μ είναι πολλαπλασιαστική αλλά όχι πλήρως πολλαπλασιαστική. Ισχύει επίσης ο τύπος αντιστροφής $\mu * u = I$.

- Η συνάρτηση ϕ του Euler ορίζεται ως

$$\phi(n) = \#\{1 \leq m \leq n\ :\ (m, n) = 1\},$$

και είναι πολλαπλασιασική, αλλά όχι πλήρως πολλαπλασιαστική.

- Η συνάρτηση Λ του von Mangoldt ορίζεται ως

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{αν } n = p^m \text{ όπου } m \geq 1 \text{ και } p \text{ πρώτος,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Φυσικά η συνάρτηση Λ δεν είναι πολλαπλασιαστική, ομως παίζει κομβικό ρόλο στην Θεωρία των πρώτων αριθμών. Ικανοποιεί επίσης την πολύ σημαντική σχέση

$$(\Lambda * u)(n) = \log n.$$

- Η συνάρτηση N ορίζεται ως

$$N(n) = n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Έχουμε επίσης το γινόμενο $\phi * u = N$.

- Η συνάρτηση τ_k η οποία ορίζεται ως

$$\tau_k(n) = (\underbrace{u * u \cdots * u}_{k \text{ φορές}})(n).$$

Παρατηρούμε ότι $\tau_{k+1} = \tau_k * u$ και επίσης ότι η συνάρτηση τ_2 είναι η επονομαζόμενη συνάρτηση διαιρετών που δίνεται ως

$$\tau_2(n) = \#\{d \ : \ d \mid n\}.$$

Για μία σημαντική οικογένεια αριθμητικών συναρτήσεων ορίζουμε επίσης το γινόμενο Euler μέσα από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1 (Γινόμενο Euler)**.** *Έστω f μια αριθμητική συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty.$$

Τότε ισχύει ο τύπος του ***γινομένου του Euler****:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad = \quad \prod_{p} \left(\sum_{m \geq 0} f(p^m) \right). \tag{1.1}$$

Ειδικότερα, αν η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική (οπότε $f(p^m) = f^m(p)$), χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γεωμετρικών σειρών λαμβάνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad = \quad \prod_{p} \left(\frac{1}{1 - f(p)} \right).$$

Συνεχίζουμε την εισαγωγή μας με τον έννοια του αθροίσματος Ramanujan.

Ορισμός 4. *Έστω q ένας θετικός ακέραιος. Ορίζουμε το άθροισμα Ramanujan $c_q(n)$ να είναι το άθροισμα των $n-$οστών δυνάμεων όλων των $q-$οστών πρωταρχικών ριζών της μονάδας, δηλαδή την ποσότητα*

$$c_q(n) \quad = \quad \sum_{\substack{(m,q)=1 \\ m \mod q}} e^{2\pi i \frac{mn}{q}},$$

όπου ο συμβολισμός $m \mod q$ δηλώνει ότι ο m διατρέχει ένα οποιοδήποτε πλήρες σύστημα υπολοίπων $\mod q$.

Η παραπάνω συνάρτηση είναι φυσικά $q-$περιοδική λόγω της $2\pi i-$περιοδικότητας της μιγαδικής εκθετικής. Επίσης θα υιοθετούμε συχνά τον συμβολισμό

$$e(a) \quad = \quad e^{2\pi i a},$$

επομένως το άθροισμα Ramanujan μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$c_q(n) \quad = \quad \sum_{\substack{(m,q)=1 \\ m \mod q}} e\left(\frac{mn}{q}\right).$$

Συνοψίζουμε μερικές χρήσιμες ιδιότητες των αθροισμάτων Ramanujan στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1. *Έστω q ένας θετικός ακέραιος και $c_q(n)$ το αντίστοιχο άθροισμα Ramanujan στο n. Έχουμε ότι:*

i) αν $(n,q)=1$ τότε $c_q(n)=c_q(1)=\mu(q)$,

ii) αν $q \mid n$ τότε $c_q(n)=\phi(q)$,

iii) αν $(q_1,q_2)=1$ τότε $c_{q_1q_2}(n)=c_{q_1}(n)c_{q_2}(n)$ για κάθε n.

Ορίζουμε στη συνέχεια μία οικογένεια πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων με ιδιαίτερο ρόλο στην κλασική Αναλυτική Θεωρία Αριθμών, τους χαρακτήρες Dirichlet.

Ορισμός 5. *Έστω q ένας θετικός ακέραιος. Αν $U(\mathbb{Z}_q)$ είναι η πολλαπλασιαστική ομάδα των πρωταρχικών κλάσεων $\bmod q$, τότε κάθε πολλαπλασιαστική συνάρτηση*

$$\chi \ : \ U(\mathbb{Z}_q) \to \mathbb{C}-\{0\}$$

θα ονομάζεται χαρακτήρας Dirichlet modulo q. Επεκτείνουμε κάθε έναν χαρακτήρα σε όλο το $\mathbb{Z}$ θέτοντας, για $(n,q)=1$,

$$\chi(n)=\chi([n]),$$

όπου $[n]$ η κλάση του $n \mod q$, και $\chi(n)=0$ όταν $(n,q)>1$.

Οι ιδιότητες των χαρακτήρων Dirichlet θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες, και τις συνοψίζουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2. *a) Υπάρχουν ακριβώς $\phi(q)$ το πλήθος χαρακτήρες Dirichlet $\bmod q$.*

b) Για κάθε $(n,q)=1$ ισχύει ότι το $\chi(q)$ είναι μία $\phi(q)-$ρίζα της μονάδας.

c) (Πρώτη σχέση ορθογωνιότητας): Αν $(a,q)=1$ και $(b,q)=1$, τότε

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}\chi(a)\overline{\chi(b)} \ = \ \begin{cases}1, & \text{αν } a\equiv b \mod q,\\ 0, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

d) (Δεύτερη σχέση ορθογωνιότητας)

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{a \bmod q}\chi_1(a)\overline{\chi_2(a)} \ = \ \begin{cases}1, & \text{αν } \chi_1=\chi_2,\\ 0, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Για κάθε θετικό ακέραιο q ορίζεται πάντοτε ο χαρακτήρας

$$\chi_0(n) \ = \ \begin{cases}1, & \text{αν } (n,q)=1,\\ 0, & \text{αν } (n,q)>1,\end{cases}$$

τον οποίο ονομάζουμε **κύριο χαρακτήρα** $\bmod q$. Χρήσιμη θα μας φανεί και η έννοια του πρωταρχικού χαρακτήρα. Δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 6. *Έστω q ένας θετικός ακέραιος και ένας χαρακτήρας Dirichlet $\chi \bmod q$. Αν υπάρχει $d \mid n$ έτσι ώστε για κάθε a,b με $(a,q)=1$, $(b,q)=1$ και $a\equiv b \bmod d$ να ισχύει*

$$\chi(a)=\chi(b),$$

τότε το d ονομάζεται επαγόμενο μέτρο για τον χ.

Σε αυτή τη περίπτωση, ο χαρακτήρας χ συμπεριφέρεται σαν χαρακτήρας $\bmod d$ στο σύνολο των πρωταρχικών κλάσεων $\bmod q$, που είναι υποσύνολο των πρωταρχικών κλάσεων $\bmod d$. Η επόμενη πρόταση κάνει αυτή τη παρατήρηση αυστηρή.

Πρόταση 2. *Έστω q θετικός ακέραιος και χ ένας χαρακτήρας Dirichlet $\bmod q$. Αν το d είναι επαγόμενο μέτρο για τον χ, τότε υπάρχει μοναδικός χαρακτήρας Dirichlet $\psi \bmod d$ τέτοιος ώστε*

$$\chi(n) = \psi(n)\chi_0(n), \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z},$$

όπου χ_0 ο κύριος χαρακτήρας $\bmod q$.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον παρακάτω βασικό ορισμό.

Ορισμός 7. *Έστω q θετικός ακέραιος και χ ένας χαρακτήρας Dirichlet $\bmod q$. Ο χ θα λέγεται πρωταρχικός (primitive) αν δεν έχει κανένα επαγόμενο μέτρο εκτός από το q.*

Είναι σχετικά εύκολο με βάση τα παραπάνω να αποδείξει κανείς ότι για κάθε χαρακτήρα $\bmod q$ υπάρχει ελάχιστο επαγώμενο μέτρο $q_1 \mid q$ και πρωταρχικός χαρακτήρας ψ τέτοιος ώστε

$$\chi(n) = \psi(n)\chi_0(n), \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z},$$

όπου χ_0 ο κύριος χαρακτήρας $\bmod q$. Λέμε τότε ότι ο ψ **επάγει τον** χ. Για τα μερικά αθροίσματα χαρακτήρων, έχουμε τα παρακάτω φράγματα

Πρόταση 3. *Έστω q θετικός ακέραιος. Ισχύουν τα εξής*

a) Αν χ μη κύριος χαρακτήρας, τότε

$$\left| \sum_{n \leq x} \chi(n) \right| \leq \phi(q)$$

b) Αν χ πρωταρχικός χαρακτήρας, ισχύει η Ανισότητα Polya

$$\left| \sum_{n \leq x} \chi(n) \right| \leq q^{1/2} \log q$$

Ολοκλήρωνουμε την παράγραφο αυτή παρουσιάζοντας την έννοια του αθροίσματος Gauss.

Ορισμός 8. *Έστω q θετικός ακέραιος και χ ένας χαρακτήρας Dirichlet $\bmod q$. Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$G(n, \chi) = \sum_{\substack{(m,q)=1 \\ m \bmod q}} \chi(m) e\left(\frac{mn}{q}\right).$$

Παρατήρηση 1. *Αν $\chi = \chi_1$ ο κύριος χαρακτήρας $\bmod q$ τότε $G(n, \chi) = c_q(n)$. Συνεπώς η έννοια του αθροίσματος Gauss γενικεύει αυτήν του αθροίσματος Ramanujan.*

Ορισμός 9. *Έστω το άθροισμα Gauss $G(n, \chi)$ για κάποιον χαρακτήρα $\chi \bmod q$. Θα λέμε ότι το $G(n, \chi)$ είναι* **διαχωρίσιμο** *αν*

$$G(n, \chi) = \overline{\chi(n)} G(1, \chi) \tag{1.2}$$

για κάθε n.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να ελεγχθεί άμεσα ότι ισχύει για κάθε $(n,q)=1$. Πράγματι, σε αυτή τη περίπτωση αν το m διατρέχει τις πρωταρχικές κλάσεις $\bmod q$, το ίδιο κάνει και το mn. Συνεπώς

$$\begin{aligned} G(n,\chi) &= \sum_{\substack{(m,q)=1 \\ m \bmod q}} \chi(m) e\left(\frac{mn}{q}\right) \\ &\overset{k=mn}{=} \sum_{\substack{(k,q)=1 \\ k \bmod q}} \chi\left(\frac{k}{n}\right) e\left(\frac{k}{q}\right) \\ &= \sum_{\substack{(k,q)=1 \\ k \bmod q}} \frac{\chi(k)\overline{\chi(n)}}{|\chi(n)|^2} e\left(\frac{k}{q}\right) \\ &= \overline{\chi(n)} G(1,\chi). \end{aligned}$$

Από την άλλη, όταν $(n,q)>1$, το δεύτερο μέλος της (1.2) ισούται με μηδέν. Συνεπώς το $G(n,\chi)$ είναι διαχωρίσιμο αν και μόνον αν $G(n,\chi)=0$ για κάθε $(n,q)>1$. Η παρακάτω ενδιαφέρουσα πρόταση μας δείχνει τι σημαίνει για τον ίδιο τον χαρακτήρα χ το να έχει διαχωρίσιμο άθροισμα Gauss.

Πρόταση 4. *Έστω q ένας θετικός ακέραιος και χ ένας χαρακτήρας Dirichlet $\bmod q$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) Το άθροισμα Gauss $G(n,\chi)$ είναι διαχωρίσιμο,

ii) Ο χαρακτήρας χ είναι πρωταρχικός.

Ως πόρισμα, διατυπώνουμε και τη παρακάτω χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 5. *Έστω q ένας θετικός ακέραιος και χ ένας πρωταρχικός χαρακτήρας $\bmod q$. Τότε*

$$|G(1,\chi)|^2 = q$$

Ἀπόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |G(1,\chi)|^2 &= G(1,\chi)\overline{G(1,\chi)} \\ &= \sum_m G(1,\chi)\overline{\chi(m)} e\left(-\frac{m}{q}\right) \\ &= \sum_m G(m,\chi) e\left(-\frac{m}{q}\right) \\ &= \sum_n \chi(n) \sum_m e\left(\frac{m(n-1)}{q}\right) \end{aligned}$$

το εσωτερικό άθροισμα τώρα ισούται με 0 εκτός αν $n=1$, όπου τότε $\chi(1)=1$ και το εσωτερικό άθροισμα ισούται με q, το οποίο μας δίνει το ζητούμενο. □

1.2 Βασικά στοιχεία ανάλυσης

Συνεχίζουμε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο με κάποια απαραίτητα στοιχεία Μιγαδικής και Αρμονικής ανάλυσης.

1.2.1 Ο τύπος άθροισης του Poisson

Έστω μία Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty.$$

Ορίζουμε τον **μετασχηματισμό** Fourier της f να είναι η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που δίνεται από τον τύπο

$$\widehat{f}(\xi) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Ορισμός 10. *Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων k, m να ισχύει*

$$|f^{(k)}(x)| \ll_{k,m} x^{-m}.$$

Τότε λέμε ότι η f ανήκει στον χώρο του Schwartz και συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων αυτών με $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Για μια συνάρτηση που ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι φυσικά φανερό ότι ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier της. Θα χρειαστούμε το παρακάτω θεμελιώδες θεώρημα.

Θεώρημα 3 (Τύπος άθροισης του Poisson)**.** *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ισχύει η παρακάτω σχέση*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \quad = \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα, για $x = 0$ λαμβάνουμε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \quad = \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

1.2.2 Η συνάρτηση Γάμμα

Για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\Re(s) > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση Γάμμα:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Στη παρακάτω πρόταση αναφέρουμε κάποιες βασικές ιδιότητες αυτής της συνάρτησης.

Πρόταση 6. *i) Η συνάρτηση Γ επεκτείνεται σε μερόμορφη συνάρτηση στο C, με απλούς πόλους στα σημεία $-n$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα $\frac{(-1)^n}{n!}$.*

ii) Η συνάρτηση Γ δεν μηδενίζει σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

iii) Για κάθε s που δεν είναι πόλος για την Γ ισχύει

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

iv) (Ο τύπος του Stirling) Σταθεροποιούμε ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Για $-\pi + \epsilon < \arg s < \pi - \epsilon$, καθώς $|s| \to \infty$ ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - \frac{\log 2\pi}{2} s + O(|s|^{-1}).$$

v) Με τις υποθέσεις του μέρους iv ισχύει επιπλέον ότι

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \quad = \quad \log s + O(|s|^{-1}).$$

1.3 Θεμελιώδη αποτελέσματα Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών

Κλείνουμε την εισαγωγή μας με την παρουσίαση βασικών αποτελεσμάτων της Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών που θα χρειαστούμε. Ξεκινάμε με ένα πολύ συχνό και ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο, την άθροιση κατά μέρη.

Θεώρημα 4 (Άθροιση κατά μέρη)**.** *Έστω $0 \leq y < x$ και μία C^1 συνάρτηση $f : [y, x] \to \mathbb{C}$. Για κάθε αριθμητική συνάρτηση $a(n)$ ορίζουμε τη σειρά μερικών αθροισμάτων της*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

Τότε ισχύει τότε η παρακάτω εξίσωση

$$\sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) \quad = \quad A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x f'(t)A(t)dt.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα αποτελεί ίσως το πιο σημαντικό Θεώρημα σε ολόκληρη την Θεωρία Αριθμών, και περιγράφει την ασυμπτωτική κατανομή των πρώτων.

Θεώρημα 5 (Θεώρημα των πρώτων αριθμών (ΘΠΑ))**.** *Έστω*

$$\pi(x) = \#\{n \leq x \ : \ n \ \textit{πρώτος}\}$$

η συνάρτηση απαρίθμησης των πρώτων αριθμών. Τότε υπάρχει μία σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε καθώς $x \to \infty$ να ισχύει

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-C\sqrt{\log x}}\right),$$

όπου

$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt.$$

Ισοδύναμα, αν

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε καθώς $x \to \infty$ να ισχύει

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-C\sqrt{\log x}}\right).$$

Υπάρχουν πολλές ισοδύναμες αναδιατυπώσεις του Θεωρήματος των πρώτων αριθμών. Η πιο στοιχειώδης είναι η εξής: καθώς το λογαριθμικό ολοκλήρωμα $Li(x)$ ικανοποιεί την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$Li(x) \sim \frac{x}{\log x}, \qquad x \to \infty,$$

το ΘΠΑ πολλές φορές συνηθίζεται να το γράφουμε στην μορφή $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Άλλες ισοδύναμες διατυπώσεις του βασίζονται στην μέση τιμή της $\mu(n)$ ή άλλων αριθμητικών συναρτήσεων.

Θα χρειαστούμε επίσης πολλές φορές στην μελέτη μας το ακόλουθο κλασικό αποτέλεσμα του Mertens (το οποίο αποτελεί ένα από τα τρία βασικά αποτελέσματα του Mertens για τους πρώτους).

Θεώρημα 6 (Θεώρημα Mertens)**.** *Ισχύει η παρακάτω εκτίμηση*

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad = \quad \frac{e^{-\gamma}}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),$$

όπου

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k\le n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

είναι η σταθερά Euler-Mascheroni.

Θα χρειαστούμε επίσης κάποιες βασικές εκτιμήσεις που σχετίζονται με τις βασικές αριθμητικές συναρτήσεις που αναφέραμε στην αρχή της εισαγωγής μας.

Πρόταση 7. *Οι συναρτήσεις ϕ και τ_k ικανοποιούν τις παρακάτω εκτιμήσεις:*
i)

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)} \sim \log x,$$

ii)

$$\sum_{n>x}\frac{\mu^2(n)}{\phi^2(n)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

iii)

$$\sum_{n\le x}\tau_k(n) = \frac{x\log^{k-1}x}{(k-1)!} + O(x(\log x)^{k-2}),$$

iv) εάν σταθεροποιήσουμε έναν θετικό ακέραιο k, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $C = C(\epsilon)$ τέτοιο ώστε

$$\tau_k(n) \le C(\epsilon)\ n^{\epsilon}.$$

Κεφάλαιο 2

L-συναρτήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία της θεωρίας των L-συναρτήσεων. Καθώς ο βασικός σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση του θεωρήματος Siegel-Walfisz, δεν θα δοθεί ιδιαίτερο βάρος στις αποδείξεις. Οι βασικές αναφορές που χρησιμοποιούμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι οι [1, 3, 18, 15].

2.1 Η συνάρτηση $\zeta(s)$ του Riemann

Θα ξεκινήσουμε με κάποια βασικά στοιχεία από την θεωρία της συνάρτησης ζήτα του Riemann, πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των L-συναρτήσεων. Σε όλα τα παρακάτω, θα εννοείται οτι η $s = \sigma + it$ είναι μία μιγαδική μεταβλητή, δηλαδή $\sigma = \Re(s)$ και $t = \Im(s)$.

Ορισμός 11. *Για $s \in \mathbb{C}$ με $\Re(s) > 1$ ορίζεται η συνάρτηση ζήτα του Riemann από τον τύπο*

$$\zeta(s) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει βαρύνουσα σημασία στην αναλυτική θεωρία αριθμών αλλά και σπουδαίες ιδιότητες. Αναφέρουμε μερικές από αυτές στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7. *Για τη συνάρτηση $\zeta(s)$ ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Επεκτείνεται σε μερόμορφη συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$, με πόλο τάξης 1 και ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1 στο σημείο $s = 1$.*

2. *Δεν μηδενίζεται στη περιοχή $\sigma > 1$. Επιπλέον έχει ρίζες τα σημεία $s = -2k$ για $k \in \mathbb{Z}_+$ στη περιοχή $\sigma \leq 0$ και άπειρες ρίζες στη περιοχή $0 < \sigma < 1$ (κρίσιμη λωρίδα). Οι ρίζες αυτές είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\sigma = \frac{1}{2}$ αλλά και ως προς τον πραγματικό άξονα.*

3. *Υπάρχει ένα $c > 0$ ώστε στη περιοχή*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

η συνάρτηση $\zeta(s)$ να μην έχει ρίζες.

4. *Ισχύει η παρακάτω σχέση*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + b + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)} - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right),$$

όπου το $b \in \mathbb{C}$ είναι μία σταθερά και όπου το άθροισμα εκτείνεται πάνω από όλες τις ρίζες της συνάρτησης στη περιοχή $0 < \sigma < 1$ (μη τετριμμένες ρίζες).

Έχουμε επίσης κάποια φράγματα για τη συνάρτηση ζ, μερικά από τα οποία τα συνοψίζουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8. *Υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ τέτοιες ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες στις αντίστοιχες περιοχές:*

1. *Για $1 < \sigma \leq 2$ ισχύει η ανισότητα:*
$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + A.$$
2. *Για $1 < \sigma \leq 2$ ισχύει η ανισότητα:*
$$\zeta(\sigma) < \frac{1}{\sigma - 1} + A.$$
3. *Επιπλέον, για κάθε s με $|t| \geq 2,\ \sigma > 1 - \frac{B}{\log(|t|)}$ ισχύει*
$$|\zeta(s)| \ll \log|t|.$$
4. *Επίσης, για $|t| \geq 2,\ \sigma > 1 - \frac{B}{\log(|t|)}$ ισχύει το φράγμα*
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \log|t|.$$
5. *Τέλος, για $|t| \geq 3$ και $\sigma > 1 - \frac{B}{\log(|t|)}$ έχουμε*
$$\frac{1}{\zeta(s)} \ll \log|t|.$$

Απόδειξη. 1. Η συνάρτηση
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$
έχει πόλο τάξης 1 στο σημείο $s = 1$ με ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1. Λόγω του αναπτύγματος Laurent λοιπόν, η συνάρτηση $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$ έχει αναλυτική επέκταση σε περιοχή του $s = 1$. Επίσης, είναι αναλυτική στο $\sigma > 1$, συνεπώς ορίζεται συνεχής συνάρτηση f στο $[1, 2]$ που είναι ίση με
$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{\sigma - 1}$$
για $\sigma \in (1, 2]$. Εφόσον η f είναι συνεχής σε συμπαγές σύνολο, λαμβάνει μέγιστο και συνεπώς υπάρχει $A_1 > 0$ τέτοιο ώστε
$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{\sigma - 1} < A_1$$
για $1 < \sigma \leq 2$.

2. Εντελώς όμοια με το προηγούμενο, με κάποια διαφορετική σταθερά A_2. Η σταθερά A μπορεί τότε να επιλεχθεί ως το μέγιστο των A_1, A_2.

3. Έστω $\sigma > 1$. Χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη έχουμε για κάθε N θετικό ακέραιο:
$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq N} \frac{1}{n^\sigma} &= N\frac{1}{N^\sigma} + \int_1^N \frac{\sigma\lfloor t \rfloor}{t^{\sigma+1}} dt = \frac{1}{N^{\sigma-1}} + \int_1^N \sigma \frac{1}{t^\sigma} dt - \int_1^N \sigma\{t\}\frac{1}{t^{\sigma+1}} dt \\
&= \frac{1}{N^{\sigma-1}} + \sigma\frac{N^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\sigma}{1-\sigma} - \sigma\int_1^\infty \{t\}\frac{1}{t^{\sigma+1}} dt + \int_N^\infty \sigma\{t\}\frac{1}{t^{\sigma+1}} dt \qquad (2.1) \\
&= \frac{N^{1-\sigma}}{1-\sigma} - h(\sigma) + \sigma\int_N^\infty \{t\}\frac{1}{t^{\sigma+1}} dt,
\end{aligned}$$

με

$$h(\sigma) = \frac{\sigma}{1-\sigma} + \sigma \int_1^\infty \{t\} \frac{1}{t^{\sigma+1}}.$$

Παίρνουμε $N \to \infty$ και λαμβάνουμε

$$\zeta(\sigma) = -h(\sigma)$$

αφού $1 - \sigma < 0$ και

$$\int_N^\infty \{t\} \frac{1}{t^{\sigma+1}} \leq \int_N^\infty \frac{1}{t^2} = \frac{1}{N}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν, έχουμε

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^\sigma} - \frac{N^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \sigma \int_N^\infty \{t\} \frac{1}{t^{\sigma+1}} dt.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $\sigma > 1$ και τα δύο μέλη είναι συναρτήσεις αναλυτικές στον τόπο $\Re(s) > 0, \quad s \neq 1$, επομένως απο την αρχή αναλυτικής συνέχισης συμπεραίνουμε ότι

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - s \int_N^\infty \{t\} \frac{1}{t^{s+1}} dt$$

στον τόπο αυτόν. Στη περιοχή

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log t}, \quad t \geq 2$$

έχουμε επομένως

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{2} + \sigma \int_N^\infty \frac{1}{t^{\sigma+1}} dt,$$

και για τον κάθε όρο, παρατηρούμε:

- κατ' αρχάς

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^{1-\frac{c_1}{\log t}}} = \sum_{n \leq N} \frac{n^{\frac{c_1}{\log t}}}{n} \leq N^{\frac{c_1}{\log t}} \sum_{n \leq N} \frac{1}{n} = e^{c_1 \frac{\log N}{\log t}} O(\log N),$$

- κατά δεύτερον

$$N^{1-\sigma} \leq N^{\frac{c_1}{\log t}} = e^{c_1 \frac{\log N}{\log t}},$$

- και κατά τρίτον

$$\sigma \int_N^\infty \frac{1}{t^{\sigma+1}} dt = N^{-\sigma} = O(1).$$

Επιλέγοντας $N = \lfloor t \rfloor$ και παρατηρώντας ότι $\log N \leq \log t$ έχουμε το ζητούμενο φράγμα.

4. Με βάση το τρίτο σκέλος του Θεωρήματος 7 υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε αν η $\rho = \beta + i\gamma$ είναι μία μη τετριμμένη ρίζα της ζ, να ισχύει

$$\beta \leq 1 - \frac{c}{\log(|\gamma| + 2)}.$$

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε $c < \frac{1}{2}$. Έστω αρχικά ότι $t \geq 3$. Τότε, για την περιοχή $|\sigma - 1| < \frac{c}{2 \log t}$ έχουμε ότι

$$\Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{\sigma - \beta}{|s-\rho|^2} + \frac{\beta}{|\rho|^2} = \frac{1}{|s-\rho|^2}\left(\sigma - \beta + \beta \frac{|s-\rho|^2}{|\rho|^2}\right). \tag{2.2}$$

Όταν $2|s-\rho| \geq |\rho|$, έχουμε ότι

$$\sigma - \beta + b\frac{|s-\rho|^2}{|\rho|^2} \geq \sigma - \beta + \frac{1}{4}\beta = \sigma - \frac{3}{4}\beta > \sigma - \frac{3}{4} > 0,$$

διότι για $t \geq 3$ έχουμε

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{4\log t} > \frac{c}{2\log t}.$$

Για $2|s-\rho| < |\rho|$ παρατηρούμε ότι

$$2|t-\gamma| < |\beta + i\gamma| < 1 + |\gamma| \Rightarrow |\gamma| < 2t+1,$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{2\log t} \geq 1 - \frac{c}{\log(|\gamma|+2)} \geq \beta > 0,$$

διότι $t^2 \geq 2t+3$ για $t \geq 3$. Συνεπώς από την (2.2) έχουμε

$$\Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) > 0.$$

Έπεται ότι στην περιοχή που μας ενδιαφέρει η παραπάνω σχέση ισχύει σε κάθε περίπτωση. Από το τέταρτο σκέλος του Θεωρήματος 7 λαμβάνουμε

$$\Re\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) < \left|\frac{1}{s-1}\right| + C + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{2\Gamma(\frac{1}{2}s+1)} < C_1 + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{2\Gamma(\frac{1}{2}s+1)},$$

διότι $|s-1| \geq t-1 \geq 2$. Επίσης, από τον τύπο του Stirling έχουμε

$$\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{2\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \ll \log\left(\frac{s}{2}+1\right) \ll \log\left(\left|\frac{s}{2}+1\right|^2\right).$$

Για την τελευταία ποσότητα, έχουμε

$$\log\left(\left(\frac{\sigma}{2}+1\right)^2 + \frac{t^2}{4}\right) \ll \log(t),$$

διότι το σ είναι φραγμένο. Καταλήγουμε ότι

$$\Re\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \ll \log(t)$$

για $t \geq 3$ και $|\sigma - 1| < \frac{c}{2\log t}$. Για να μπορέσουμε από το φράγμα για το πραγματικό μέρος να περάσουμε σε φράγμα για το μέτρο της συνάρτησης, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Borel-Caratheodory. Παίρνουμε ένα $t \geq 4$ και έστω $|\sigma - 1| \leq \frac{c_1}{\log t}$,όπου $c_1 = \frac{c}{8}$. Θα χρειαστεί να μετατοπίσουμε, υπό μίαν έννοια, την περιοχή στην οποία θέλουμε το φράγμα, σε περιοχή γύρω από το μηδέν ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα. Για τον λόγο αυτόν, επιλέγουμε το σημείο $s_0 = 1 + \frac{c_1}{\log t} + it$ και έτσι

$$|s - s_0| = \left|\sigma - 1 - \frac{c_1}{\log t}\right| \leq |\sigma - 1| + \frac{c_1}{\log t} \leq \frac{2c_1}{\log t}.$$

Από την άλλη, αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq \frac{3c_1}{\log t}$,τότε παίρνουμε:

- $$|\Re(s_0 + z) - 1| \leq \frac{c_1}{\log t} + |\Re(z)| \leq \frac{c_1}{\log t} + \frac{3c_1}{\log t} = \frac{c}{2\log t},$$
- $$\Im(s_0 + z) = t + \Im(z) \geq t - \frac{3c_1}{\log t} \geq 3.$$

Για όλα τα z στον δίσκο $\overline{\Delta\left(0, \frac{3c_1}{\log t}\right)}$ λαμβάνουμε επομένως

$$\Re\left(-\frac{\zeta'(s_0+z)}{\zeta(s_0+z)}\right) \ll \log t.$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$\phi(z) = \frac{-\zeta(s_0+z)}{\zeta(s_0+z)}$$

έχουμε ότι είναι αναλυτική στην δίσκο $\overline{\Delta\left(0, \frac{3c_1}{\log t}\right)}$. Από το Θεώρημα Borel-Caratheodory έχουμε στον δίσκο $\overline{\Delta\left(0, \frac{2c_1}{\log t}\right)}$ ότι:

$$|\phi(z)| \leq 4 \max_{|z|=\frac{2c_1}{\log t}} |\Re(\phi(z))| + 5|\phi(0)| = O(\log t) + 5\phi(0).$$

Για κάθε s στην αρχική περιοχή που μας ενδιαφέρει, έχουμε $s - s_0 \in \overline{\Delta\left(0, \frac{2c_1}{\log t}\right)}$, όποτε

$$\left|-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq O(\log t) + 5|\phi(0)|. \tag{2.3}$$

Τέλος, για το $\phi(0)$, από το πρώτο σκέλος της παρούσης Πρόταση, ότι

$$|\phi(0)| = \left|\frac{-\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right| \leq \frac{-\zeta'(1+\frac{c_1}{\log t})}{\zeta(1+\frac{c_1}{\log t})} \leq \frac{\log t}{c_1} + A.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.3) παίρνουμε ότι

$$\left|-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \ll \log t.$$

όταν $|\sigma - 1| \leq \frac{c_1}{\log t}$ και $t \geq 4$. Θεωρούμε τώρα $s = \sigma + it$ ώστε $1 + \frac{c_1}{\log t} \leq \sigma \leq 2$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα 1 και πάλι και λαμβάνουμε

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + A < \frac{\log t}{c_1} + A \Longrightarrow \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t).$$

Έπεται ότι $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t)$ στη περιοχή $1 - \frac{c_1}{\log t} \leq \sigma \leq 2,\ t \geq 4$. Η συνάρτηση $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ είναι αναλυτική, άρα και συνεχής, στο συμπαγές $1 - \frac{c_1}{\log t} \leq \sigma \leq 2,\ \ 2 \leq t \leq 4$. Έπεται ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq C < 2C \log 2 \leq 2C \log t$$

στη περιοχή αυτή. Έτσι έχουμε

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t), \qquad 1 - \frac{c_1}{\log t} \leq \sigma \leq 2, \qquad t \geq 2.$$

Τέλος, για $\sigma > 2$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} < \infty$$

δηλαδή $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(1)$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t), \qquad \sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log t}, \qquad t \geq 2.$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αν $t \leq -2$ και $\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log(-t)}$, έχουμε

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\frac{\overline{\zeta'(s)}}{\overline{\zeta(s)}}\right| = \left|\frac{\zeta'(\overline{s})}{\zeta(\overline{s})}\right| = O(\log(-t)) = O(\log|t|),$$

λόγω της Αρχής ανάκλασης για την αναλυτική συνάρτηση $(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ στη περιοχή $\sigma > 1 - \frac{c}{\log(t+2)}$, $t > 0$ (η συνθήκη $\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log t}$, $t \geq 2$ μας οδηγεί σε υποσύνολο της τελευταίας περιοχής).

5. Από το δεύτερο σκέλος της παρούσης Πρότασης, έχουμε για $s = \sigma + it$ με $\sigma \in (1, 2]$

$$\begin{aligned} |\log\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^s}\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^\sigma} \\ &= \log\zeta(\sigma) \\ &\leq \log\left(A + \frac{1}{\sigma-1}\right), \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} |\log\zeta(s)| &\leq \log\left(A\frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma-1}\right) \\ &= \log\left((A+1)\frac{1}{\sigma-1}\right) \\ \Rightarrow |\log\zeta(s)| &\leq \log\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $1 + \frac{c_1}{\log t} < \sigma < 2$ και $t \geq 3$, τότε

$$|\log\zeta(s)| \leq \log\log t + O(1). \tag{2.4}$$

Από την άλλη, αν $\sigma \geq 2$ έχουμε

$$|\log\zeta(s)| \leq \log\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^\sigma} = O(1).$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $|\sigma - 1| \leq \frac{c_1}{\log t}$. Χρησιμοποιώντας το τρίτο μέρος της παρούσης Πρότασης παίρνουμε

$$\log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_0)) = \int_{s_0}^{s}\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}dw \ll |s - s_0|\log(t),$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι $s_0 = 1 + \frac{c_1}{\log t} + it$, συνεπώς η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος οριζόντιας ευθείας, κάθε σημείο της οποίας έχει σταθερό φανταστικό μέρος t. Έχουμε ότι

$$|s - s_0|\log t = \left|\sigma - 1 - \frac{c_1}{\log t}\right|\log t \leq \left(|\sigma - 1| + \frac{c_1}{\log t}\right)\log t = O(1),$$

κι άρα

$$\log\zeta(s) \leq \log\zeta(s_0) + O(1).$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε καταφέρει να μετατρέψουμε το ζητούμενο φράγμα σε φράγμα για την ποσότητα $\log\zeta(s_0)$, όπου τώρα όμως $\Re(s_0) = 1 + \frac{c_1}{\log t}$. Από τη σχέση (2.4) παίρνουμε λοιπόν

$$|\log\zeta(s_0)| \leq \log\log t + O(1).$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι

$$|\log\zeta(s)| \leq \log\log t + O(1)$$

στη περιοχή $\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log t}$, $t \geq 3$. Από εδώ, η απόδειξη ολοκληρώνεται ως εξής:

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \left|e^{\log\frac{1}{\zeta(s)}}\right| = e^{\log\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|} = e^{-\log|\zeta(s)|} \leq e^{|\log\zeta(s)|} \leq Ce^{\log\log t} = C\log t.$$

□

2.2 Οι L-σειρές και η αναλυτική τους επέκταση

Στο σημείο αυτό θα ξεκινήσουμε την μελέτη των $L-$σειρών. Δοθέντος ενός χαρακτήρα Dirichlet $\chi \mod q$ ορίζουμε την σειρά

$$L(s,\chi)=\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^s},\quad \Re(s)>1.$$

Πρώτος μας στόχος είναι η αναλυτική επέκταση σε όλο το $\mathbb{C}$ στη περίπτωση που ο χ είναι πρωταρχικός. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $\chi(-1)=1$.

  Θεωρούμε τη συνάρτηση $\xi(s,\chi)=\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})L(s,\chi)$ για $\sigma>1$ την οποία μπορούμε να γράψουμε ως εξής:

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}\int_0^\infty L(s,\chi)e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}dt=\int_0^\infty\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\sum_{n\geq 1}\chi(n)n^{-s}\right)e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\sum_{n\geq 1}\chi(n)\left(\frac{qt}{\pi n^2}\right)^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-t}}{t}\right)dt$$

  Θέτουμε $u=\frac{qt}{\pi n^2}$ και παίρνουμε

$$\int_0^\infty\left(\sum_{n\geq 1}\chi(n)e^{-\frac{\pi n^2 u}{q}}\right)u^{\frac{s}{2}-1}dt=\int_0^\infty\theta(u,\chi)u^{\frac{s}{2}-1}du$$

  Για τη συνάρτηση $f(y)=e^{-\frac{\pi y^2}{x}},\ \ y>0$ όπου $x>0$ σταθεροποιημένο, εφαρμόζεται ο τύπος του Poisson, οπότε

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi(n+a)^2}{x}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2\pi ina}$$

  Για τον μετασχηματισμό Fourier της f έχουμε

$$\hat{f}(n)=\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-2\pi iyn}dy=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi\left(\left(\frac{y}{\sqrt{x}}+in\sqrt{x}\right)\right)^2+n^2x}dy=$$

$$=e^{-\pi n^2x}\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi\left(\frac{y}{\sqrt{x}}+in\sqrt{x}\right)^2}dy$$

  Κάνοντας την αντικατάσταση $u=\frac{y}{\sqrt{x}}+in\sqrt{x}$ έχουμε

$$\sqrt{x}e^{-\pi n^2x}\int_{-\infty+in\sqrt{x}}^{\infty+in\sqrt{x}}e^{-\pi u^2}du$$

  Αποδεικνύουμε τώρα ότι για οποιοδήποτε $c\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic}e^{-\pi u^2}du=1$$

  Έστω $c\geq 0$.Η συνάρτηση $g(z)=e^{-\pi z^2}$ είναι ολόμορφη στο ορθογώνιο που σχηματίζεται απο τα σημεία $-R,R,R+ic,R-ic$ οπότε απο το θεώρημα Cauchy

$$\int_{-R}^{R}g(z)dz+I_1-\int_{-R+ic}^{R+ic}g(z)+I_2=0$$

όπου τα I_1, I_2 είναι τα ολοκληρώματα της g κατά μήκος των κατακόρυφων ευθειών $R \to R+ic$ και $-R+ic \to -R$. Έχουμε όμως

$$|I_1| = \left| \int_R^{R+ic} e^{-\pi z^2} dz \right| = \left| \int_0^c e^{-\pi R^2} e^{-2\pi i R t} e^{\pi t^2} i dt \right| \leq e^{-\pi R^2} \int_0^c e^{\pi t^2} dt \leq e^{-\pi R^2} c e^{\pi c^2}$$

Παίρνοντας όριο με $R \to \infty$ λοιπόν καταλήγουμε ότι τείνει στο μηδέν, και εντελώς όμοια το ίδιο κάνει και το I_2. Συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi z^2} dz = \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} e^{-\pi z^2} dz$$

Και γνωρίζουμε ότι το αριστερό ολοκλήρωμα κάνει 1. Η περίπτωση $c<0$ αντιμετωπίζεται απολύτως όμοια.
Φτάνουμε λοιπόν στη σχέση

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi(n+a)^2}{x}} = \sqrt{x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} e^{2\pi i n a} \tag{2.5}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$G(1,\overline{\chi}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{\frac{-\pi n^2 x}{q}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m) e^{\frac{2\pi i m n}{q}} \right) e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}} = \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}} e^{\frac{2\pi i m n}{q}}$$

Εφαρμόζοντας την (2.5) για $a=\frac{m}{q}$ και x το $\frac{x}{q}$ παίρνουμε

$$\sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{x}{q}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi(n+\frac{m}{q})^2 q}{x}} = \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m) \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi(qn+m)^2}{qx}}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $k=qn+m$ έχουμε

$$\left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=qn+1}^{qn+q} \overline{\chi}(k-qn) e^{-\frac{\pi k^2}{qx}} = \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=qn+1}^{qn+q} \overline{\chi}(k) e^{-\frac{\pi k^2}{qx}} = \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\chi}(k) e^{-\frac{\pi k^2}{qx}}$$

Καταλήξαμε δηλαδή ότι (χρησιμοποιώντας ότι $\chi(-1)=1$)

$$2G(1,\overline{\chi})\theta(x,\chi) = 2\left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \theta\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right) \Rightarrow G(1,\overline{\chi})\theta(x,\chi) = \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \theta\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right).$$

Επανερχόμαστε τώρα στη μελέτη της συνάρτησης $\xi(s,\chi)$. Έχουμε λοιπόν

$$\xi(s,\chi) = \int_0^{\infty} \theta(u,\chi) u^{\frac{s}{2}-1} du = \int_1^{\infty} \theta(u,\chi) u^{\frac{s}{2}-1} du + \int_0^1 \theta(u,\chi) u^{\frac{s}{2}-1} du$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα τώρα, χρησιμοποιούμε τη συναρτησιακή εξίσωση (2.2). Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{1}{u}$ και έχουμε

$$\int_1^{\infty} \theta\left(\frac{1}{y},\chi\right) y^{1-\frac{s}{2}} \frac{1}{y^2} dy = \int_1^{\infty} G(1,\chi)\theta(y,\overline{\chi}) \left(\frac{y}{q}\right)^{\frac{1}{2}} y^{-1-\frac{s}{2}} dy$$

Συνεπώς έχουμε αποδείξει τη σχέση

$$\xi(s,\chi) = \int_1^{\infty} \theta(u,\chi) u^{\frac{s}{2}-1} du + \frac{G(1,\chi)}{q^{\frac{1}{2}}} \int_1^{\infty} \theta(u,\overline{\chi}) u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} du$$

Η συνάρτηση στο δεξί μέλος είναι ακέραια, συνεπώς και η $\xi(s,\chi)$. Όμως, αφού η συνάρτηση $\frac{1}{\Gamma}$ είναι ακέραια και ισχύει ότι

$$L(s,\chi) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}} \xi(s,\chi) \tag{2.6}$$

συμπεραίνουμε ότι η $L(s,\chi)$ επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση.

- $\chi(-1)=-1$ Στη προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\chi(-1)=1$ για να λάβουμε ότι $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\chi(n)e^{\frac{-\pi n^2 x}{q}}=2\theta(x,\chi)$. Θα τροποποιήσουμε τη προηγούμενη απόδειξη επιλέγοντας την ξ κατάλληλα. Έστω λοιπόν

$$\xi(s,\chi)=\Gamma(\frac{s+1}{2})\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+1}{2}}L(s,\chi)$$

Εφαρμόζουμε παρόμοιες πράξεις με τη προηγούμενη περίπτωση και λαμβάνουμε

$$\xi(s,\chi)=\int_0^\infty u^{\frac{s-1}{2}}\left(\sum_{n\geq 1}n\chi(n)e^{-\frac{\pi n^2 u}{q}}\right)du=\int_0^\infty u^{\frac{s-1}{2}}\tilde{\theta}(u,\chi)du$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αφού $\chi(-1)=-1$,είναι

$$\tilde{\theta}(x,\chi)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}n\chi(n)e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}}$$

λόγω της ύπαρξης του n στο άθροισμα. Έχουμε τη σχέση (2.5), την οποία βλέπουμε ως συνάρτηση του a, δηλαδή έχουμε σταθεροποιημένο ενα $x>0$. Η σχέση γράφεται

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi(n+a)^2}{x}}-\sqrt{x}e^{-\pi n^2 x}e^{2\pi ina}=0\Rightarrow\sum_{n\in\mathbb{Z}}f_n(a)=0.$$

Τώρα έχουμε για $a>0$ (αφού αυτά τα a μας ενδιαφέρουν)

$$|f_n(a)|\leq e^{-\frac{\pi(n+a)^2}{x}}+\sqrt{x}e^{-\pi n^2 x}\leq e^{\frac{-\pi n^2}{x}}+\sqrt{x}\frac{1}{n^2}\leq\left(\frac{x}{\pi}+\sqrt{x}\right)\frac{1}{n^2}$$

Από το $M-test$ του Weierstrass παίρνουμε ότι η ακολουθία $s_n(a)=\sum\limits_{n\in Z}f_n(a)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0.Από το θεώρημα Weierstrass συμπεραίνουμε ότι $s_n'(a)\to 0$ και μάλιστα ομοιόμορφα.Συνεπώς μπορούμε να παραγωγίσουμε ως προς a την (2.5)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi(n+a)^2}{x}}\frac{-\pi}{x}2(n+a)=\sqrt{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2 x}e^{2\pi ina}2\pi in\Rightarrow ix^{-\frac{3}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi(n+a)^2}{x}}(n+a)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}ne^{-\pi n^2 x}e^{2\pi ina}$$

$$\Rightarrow ix^{-\frac{3}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi(n+a)^2}{x}}(n+a)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}ne^{-\pi n^2 x}e^{2\pi ina}\tag{2.7}$$

Τώρα γράφουμε ακριβώς όπως στη πρώτη περίπτωση

$$2G(1,\overline{\chi})\tilde{\theta}(x,\chi)=G(1,\overline{\chi})\sum_{n\in\mathbb{Z}}n\chi(n)e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}}=\sum_{m=1}^{q}\overline{\chi}(m)\sum_{n\in Z}ne^{-\frac{\pi n^2 x}{q}}e^{\frac{2\pi imn}{q}}$$

Εφαρμόζουμε την (2.7) για x το $\frac{x}{q}$ και $a=\frac{m}{q}$ και λαμβάνουμε

$$2G(1,\overline{\chi})\tilde{\theta}(x,\chi)=\sum_{m=1}^{q}\overline{\chi}(m)i\left(\frac{x}{q}\right)^{-\frac{3}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{q\pi(n+\frac{m}{q})^2}{x}}\left(n+\frac{m}{q}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2G(1,\overline{\chi})\theta(\tilde{x,}\chi)=\frac{1}{q}i\left(\frac{x}{q}\right)^{-\frac{3}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=1}^{q}\overline{\chi}(m)e^{-\frac{\pi(qn+m)^2}{qx}}(qn+m)$$

Με παρόμοια επιχειρήματα όπως στη προηγούμενη περίπτωση, καταλήγουμε στην σχέση

$$2G(1,\overline{\chi})\tilde{\theta}(x,\chi)=\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}k\overline{\chi}(k)e^{-\frac{\pi k^2}{qx}}=2\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\tilde{\theta}\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right)$$

δηλαδή

$$G(1,\overline{\chi})\tilde{\theta}(x,\chi)=\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\tilde{\theta}\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right)$$

Επανερχόμαστε λοιπόν στη ξ και γράφουμε

$$\xi(s,\chi)=\int_1^\infty u^{\frac{s-1}{2}}\tilde{\theta}(u,\chi)du+\int_0^1 u^{\frac{s-1}{2}}\tilde{\theta}(u,\chi)du$$

Θέτουμε $y=\frac{1}{u}$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα και από τη σχέση που μόλις δείξαμε, αυτό γίνεται

$$-iq^{-\frac{1}{2}}\int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}}G(1,\chi)\tilde{\theta}(y,\overline{\chi})dy$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη σχέση

$$\xi(s,\chi)=\int_1^\infty u^{\frac{s-1}{2}}\tilde{\theta}(u,\chi)du-iq^{-\frac{1}{2}}G(1,\chi)\int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}}\tilde{\theta}(u,\overline{\chi})du$$

Το δεύτερο μέλος είναι ακέραια συνάρτηση, επομένως και η ξ. Με τον ίδιο τρόπο όπως στη πρώτη περίπτωση, προκύπτει ότι $L(s,\chi)$ επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση.

Αν τώρα χ ένας μη κύριος χαρακτήρας $\mod q$,έστω ότι επάγεται απο τον χαρακτήρα $\chi_1 \mod q_1$. Για $\sigma>1$ ισχύει ότι

$$L(s,\chi_1)=\prod_p\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid q_1}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p\nmid q_1,p|q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Τώρα $\chi(n)=\chi_1(n)\chi_0(n)$ οπότε παίρνουμε

$$L(s,\chi)=\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{\chi_1(p)\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις λαμβάνουμε

$$L(s,\chi_1)=L(s,\chi)\prod_{p\nmid q_1,p|q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\Rightarrow L(s,\chi)=\prod_{p\nmid q_1,p|q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)L(s,\chi_1)$$

Η $L(s,\chi_1)$ όμως επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση, και η $\prod_{p\nmid q_1,p|q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$ είναι επίσης ακέραια. Συνεπώς επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση και η $L(s,\chi)$.

2.3 Μελέτη των ριζών των L-σειρών

Στη παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μία αντίστοιχη περιοχή μη μηδενισμού για τις $L-$συναρτήσεις, όπως και για την συνάρτηση ζήτα, όπως αυτή εκφράζεται στο τρίτο μέρος του Θεωρήματος 7. Αρχικά διατυπώνουμε ανάλογες προτάσεις που ισχύουν για τις $L-$συναρτήσεις.

Θεώρημα 8. *Έστω χ ένας πρωταρχικός χαρακτήρας Dirichlet $\mod q$. Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις*

1. *Η συνάρτηση $L(s,\chi)$ έχει ρίζες στα σημεία $-2k-a$, όπου*

$$a=(1-\chi(-1))/2$$

και $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

2. *Η $L(s,\chi)$ έχει άπειρες ρίζες στην κρίσιμη λωρίδα $0 \leq \sigma \leq 1$, οι οποίες είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\sigma = \frac{1}{2}$ (όχι όμως και ως προς τον πραγματικό άξονα, όταν ο χ είναι μιγαδικός).*

3. *Ικανοποιείται η παρακάτω σχέση*

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s+a}{2})}{\Gamma(\frac{s+a}{2})} + B(\chi) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-r} + \frac{1}{r}\right) \tag{2.8}$$

όπου $\Re\left(B(\chi) + \sum_r \frac{1}{r}\right) = 0$

Έστω ένας πρωταρχικός χαρακτήρας $\chi \mod q$. Για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου, θα έχουμε $s = \sigma + it$ με $t \geq 0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας, εφόσον μας απασχολούν οι ρίζες της $L(s,\chi)$ και γνωρίζουμε ότι αν ρ είναι μία ρίζα για την $L(s,\chi)$ με $\Im(\rho) \leq 0$, τότε η $1-\rho$ είναι επίσης ρίζα, με $\Im(1-\rho) \geq 0$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned} L(s,\chi) &= \sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^s} \\ &= \prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1} \end{aligned}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους και παραγωγίζοντας, λαμβάνουμε

$$\log L(s,\chi) = -\sum_p \log(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})$$

$$\Rightarrow -\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}\chi(p)p^{-s}\log p$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της γεωμετρικής σειράς, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} -\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} &= \sum_p \sum_{m\geq 1}\frac{\chi(p^m)}{p^{ms}}\log p \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^\sigma}e^{-it\log n} \end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε ένα n ώστε $(n,q) = 1$ και θέτουμε $\chi(n) = e^{i\phi}$. Τότε $\Re\left((\chi(n)e^{-it\log n}\right) = \cos\theta$, με $\theta = \phi - t\log n$. Έχουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} \Re(\chi^2(n)e^{-i2t\log n}) &= \Re(e^{2i\phi}e^{-i2t\log n}) \\ &= cos(2\phi - 2t\log n) \\ &= cos(2\theta) \end{aligned}$$

φυσικά, έχουμε ότι το θ εξαρτάται από το n, δηλαδή $\theta = \theta_n$, ωστόσο χάριν συντομίας το παραλείπουμε. Θεωρούμε τώρα την έκφραση

$$-3\Re\left(\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}\right) - 4\Re\left(\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right) - \Re\left(\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}(3 + 4cos\theta + \cos(2\theta))$$

Προκειμένου να συνεχίσουμε, θα χρειαστούμε την παρακάτω ανισότητα

$$3 + 4cos\theta + cos(2\theta) \geq 0$$

Ἀπόδειξη. .... □

Κατά συνέπεια, λαμβάνουμε την εξής σχέση

$$-3\left(\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right)-4\Re\left(\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right)-\Re\left(\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right)\geq 0 \tag{2.9}$$

Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση όπου ο χ είναι μιγαδικός χαρακτήρας. Εφόσον ο χ είναι μιγαδικός, έχουμε ότι $\chi^2\neq\chi_0$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} &= \sum_{n\geq 1}\frac{\chi_0(n)\Lambda(n)}{n^\sigma}\\ &\leq \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\\ &= -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\\ &< \frac{1}{\sigma-1}+A\end{aligned} \tag{2.10}$$

για $1\leq\sigma<2$, από το Θεώρημα 7.

Ερχόμαστε τώρα στον δεύτερο όρο και τον τρίτο όρο (2.9). Το επιχείρημά μας θα βασιστεί στην σχέση

$$-\Re(\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}) = \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi}+\frac{1}{2}Re\left(\frac{\Gamma'(\frac{s+a}{2})}{\Gamma(\frac{s+a}{2})}\right)-\Re\left(\sum_r\frac{1}{s-r}\right) \tag{2.11}$$

Έχουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right) &\ll \log(\sigma^2+t^2)\\ &\ll \log(t+2)\end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$-\Re\left(\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right)<C_1\log q(t+2)-\Re\left(\sum_r\frac{1}{s-r}\right) \tag{2.12}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\Re(\frac{1}{s-r}) &= \Re\left(\frac{\sigma-it-\beta+i\gamma}{|s-r|^2}\right)\\ &= \frac{\sigma-\beta}{|s-r|^2}\\ &> 0\end{aligned}$$

διότι $\sigma>1>\beta$. Επομένως, μπορούμε να λάβουμε ακόμα μεγαλύτερες εκφράσεις απαλείφοντας όρους του αθροίσματος των ριζών στη σχέση (2.12). Επιλέγουμε το $t=\gamma$ να είναι το φανταστικό μέρος γ μίας ρίζας $r_0=\beta+i\gamma$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma\geq 0$, λόγω συμμετρίας των ριζών) της $L(s,\chi)$ και απαλείφουμε όλους τους όρους του προαναφερθέντος αθροίσματος στην (2.12), εκτός από τον όρο που αντιστοιχεί στην r_0. Λαμβάνουμε τότε τη σχέση

$$-\Re\left(\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right)<C_1\log q(t+2)-\frac{1}{\sigma-\beta} \tag{2.13}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $s-r=\sigma-\beta$. Για τελευταίο όρο της (2.9) χρησιμοποιούμε και πάλι την (2.11), με την παρατήρηση ότι η σχέση αυτή ισχύει για πρωταρχικούς χαρακτήρες, και ο χ^2 μπορεί να μην είναι. Σε αυτή η περίπτωση, έστω χ_1 πρωταρχικός χαρακτήρας $\bmod q_1$ που επάγει τον χ^2. Τότε έχουμε ότι για οποιοδήποτε s με $\sigma>1$

$$\begin{aligned}\left|\frac{L'(s,\chi^2)}{L'(s,\chi^2)}-\frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)}\right| &= \sum_{\substack{(n,q)>1\\(n,q_1)=1}}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\\ &\le \sum_{(n,q)>1}\frac{\Lambda(n)}{n}\end{aligned}$$

καθώς τώρα η Λ είναι μη μηδενική μόνο στις δυνάμεις πρώτων, έχουμε συνεισφορά μόνο όταν $n=p^k$ για κάποιον πρώτο $p\mid q$. Συνεπώς το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\sum_{p\mid q}\sum_{k\ge1}\frac{\log p}{p^k} &= \sum_{p\mid q}\log p\frac{1}{p-1}\\ &\le \sum_{p\mid q}\log p\\ &\le \log q\end{aligned}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την (2.12) για τον χαρακτήρα χ_1 έχουμε

$$\begin{aligned}-\Re\left(\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right) &< (C_1+1)\log q(t+2)-\Re\left(\sum_r\frac{1}{s-r}\right)\\ &< (C_1+1)\log q(t+2)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (2.9), (2.10), (2.13) και (2.14) καταλήγουμε στη σχέση

$$3A+\frac{3}{\sigma-1}+C\log q(t+2)-\frac{4}{\sigma-\beta}>0$$

Επιλέγοντας $\sigma=1+\frac{c_0}{\log q(t+2)}$ για αρκετά μικρό $c_0<\frac{1}{C}$ βλέπουμε από τη παραπάνω σχέση ότι

$$\beta<1-\frac{D}{\log q(t+2)}\tag{2.15}$$

για κάποιο $D>0$. Το συμπέρασμα της σχέσης (2.15) υπενθυμίζουμε ότι έχει στηριχθεί μέχρι τώρα στο γεγονός ότι ο χ είναι πρωταρχικός μιγαδικός χαρακτήρας. Είναι άμεσο να το περάσουμε και σε οποιονδήποτε μιγαδικό χαρακτήρα, ως εξής:

Αν χ μιγαδικός χαρακτήρας $\bmod q$ μη πρωταρχικός , έστω ψ ο χαρακτήρας $\bmod q_1$ που τον επάγει, ο οποίος είναι προφανές ότι είναι μιγαδικός Τότε για $\sigma>1$

$$L(s,\psi) = L(s,\chi)\prod_{\substack{p\mid q\\p\nmid q_1}}\frac{1}{1-\psi(p)p^{-s}}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί και ως

$$L(s,\chi)=L(s,\psi)\prod_{\substack{p\mid q\\p\nmid q_1}}(1-\psi(p)p^{-s})$$

Γνωρίζουμε ότι οι $L(s,\chi)$ και $L(s,\psi)$ έχουν αναλυτική επέκταση σε όλο το $\mathbb{C}$ και η συνάρτηση $1-\psi(p)p^{-s}$ είναι για κάθε p αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$, επομένως από την αρχή αναλυτικής συνέχισης η τελευταία σχέση

ισχύει σε όλο το $\mathbb{C}$. Αν λοιπόν ρ μία ρίζα της $L(s,\chi)$ που δεν είναι ρίζα της $L(s,\psi)$ τότε για κάποιον πρώτο p με $p \nmid q_1$ θα ισχύει

$$\psi(p) = p^{\rho} \quad \Rightarrow \quad |\psi(p)| = p^{\Re(\rho)}$$

Το οποίο μας δίνει $\Re(\rho) = 0$, επομένως ικανοποιείται άμεσα και για αυτή τη ρίζα η σχέση (2.15).

Θεωρούμε τώρα έναν πρωταρχικό πραγματικό χαρακτήρα χ. Στη περίπτωση που ο χ ήταν μιγαδικός χαρακτήρας, σημειώσαμε ότι $\chi^2 \neq \chi_0$, ωστόσο όταν ο χ είναι πραγματικός χαρακτήρας, ισχύει ότι $\chi^2 = \chi_0$. Αντιμετωπίζουμε αυτό το πρόβλημα ως εξής. Αρχικά έχουμε ότι

$$\left| \frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \log q \tag{2.16}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα 7, έχουμε τη σχέση

$$-\Re\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \quad = \quad \Re(\frac{1}{s-1}) + O\left(\log(t+2)\right) \tag{2.17}$$

η οποία προκύπτει με παρόμοια επιχειρήματα όπως με την (2.11). Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (2.16) και (2.17) καταλήγουμε στη σχέση

$$-\Re\left(\frac{L'(\sigma+2it,\chi_0)}{L(\sigma+2it,\chi_0)}\right) < \Re\left(\frac{1}{\sigma+2it-1}\right) + O(\log q(t+2))$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (2.9) έχουμε

$$\Re\left(\frac{1}{\sigma+2it-1}\right) + \Delta \log q(t+2) + \frac{3}{\sigma-1} + 3A - \frac{4}{\sigma-\beta} \geq 0$$

Επιλέγουμε όπως και πριν $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log q(t+2)}$, με την αναγκαία ωστόσο υπόθεση ότι $t = \gamma > \frac{\delta}{\log q}$. Αντικαθιστώντας στη παραπάνω σχέσεις και εκτελώντας τις πράξεις, καταλήγουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\gamma > \frac{\delta}{\log q}$, τότε αν η $\beta + i\gamma$ είναι ρίζα της $L(s,\chi)$, έπεται ότι

$$\beta < 1 - \frac{C(\delta)}{\log q(t+2)}$$

Η υπόθεση ότι ο πραγματικός χαρακτήρας χ είναι πρωταρχικός μπορεί τώρα να απαλειφεί εντελώς όμοια με την μιγαδική περίπτωση.

Αποδεικνύεται σχετικά εύκολα ότι αν $\gamma < \frac{\delta}{\log q}$, η $L(s,\chi)$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα στο σύνολο $\Re(s) > 1 - \frac{\delta'}{\log q}$ για κάποια σταθερά δ'. Επιπλέον, ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 9. ***(Landau)*** *Έστω q θετικός ακέραιος. Υπάρχει απόλυτη σταθερά C_2 τέτοια ώστε αν χ_1, χ_2 είνα δύο διακεκριμένοι πρωταρχικοί χαρακτήρες $\mod q$, τότε για οποιεσδήποτε πραγματικές ρίζες τους β_1, β_2 αντίστοιχα, ισχύει*

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{C_2}{\log q}$$

Κατά συνέπεια, προσαρμόζοντας κατάλληλα τις σταθερές, συνάγουμε το παρακάτω θεώρημα, που συνοψίζει τα όσα αναπτύξαμε σε αυτή τη παράγραφο.

Θεώρημα 10. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε αν χ μιγαδικός χαρακτήρας, τότε η $L(s,\chi)$ δεν έχει ρίζες στην περιοχή*

$$\Re(s) \geq 1 - \frac{C}{\log q(|t|+2)} \tag{2.18}$$

ενώ αν χ μη κύριος πραγματικός χαρακτήρας, έχει το πολύ μία ρίζα στην παραπάνω περιοχή, και αν αυτό συμβαίνει, είναι ο μοναδικός χαρακτήρας $\mod q$ με την ιδιότητα αυτή.

2.4 Οι ασυμπτωτικοί τύποι των συναρτήσεων $\psi(x,\chi)$ και $N(T,\chi)$

Με την προετοιμασία της προηγούμενης παραγράφου, είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε δύο βασικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του θεωρήματος Siegel-Walfisz.

Ορισμός 12. *Έστω q ένας θετικός ακέραιος και χ ένας μη κύριος χαρακτήρας $\bmod q$. Ορίζουμε*

$$\psi(x,\chi)=\sum_{n\leq x}\chi(n)\Lambda(n)$$

Ορισμός 13. *Έστω q θετικός ακέραιος και χ ένας μη κύριος χαρακτήρας $\bmod q$. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$N(T,\chi) \quad = \quad \#\{s=\beta+i\gamma \ : \ L(s,\chi)=0 \text{ και } 0<\beta<1,\ |\gamma|<T\}$$

Θα αρκεστούμε απλώς στην παράθεση των ασυμπτωτικών τύπων των δύο αυτών συναρτήσεων, χωρίς αποδείξεις, καθώς δεν αποτελούν τον κύριο στόχο της παρούσας εργασίας. Για τις αποδείξεις των επόμενων θεωρημάτων, παραπέμπουμε στο [3].

Θεώρημα 11. *Έστω q ένας θετικός ακέραιος, χ ένας μη κύριος χαρακτήρας $\bmod q$ και $2\leq T\leq x$. Τότε ισχύει ο παρακάτω ασυμπτωτικός τύπος για την $\psi(x,\chi)$.*

$$\psi(x,\chi)=-\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}-\sum_{\substack{|\Im(\rho)|<T\\ \rho\neq 1-\beta_0}}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(x^{\frac{1}{4}}\log x+xT^{-1}\log^2 qx\right) \tag{2.19}$$

όπου ο όρος $-\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}$ ενδέχεται να εμφανίζεται για το πολύ έναν πραγματικό χαρακτήρα $\bmod q$ (με βάση τη προηγούμενη παράγραφο), ο δεύτερος όρος αθροίζει πάνω από τις ρίζες της $L(s,\chi)$ υπό τους περιορισμούς που αναφέρονται, και για το β_0 (αν υπάρχει) ισχύει

$$\beta_0>1-\frac{C}{\log qT}.$$

Θεώρημα 12. *Έστω q θετικός ακέραιος και χ ένας μη κύριος χαρακτήρας Dirichlet $\bmod q$. Τότε ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος*

$$N(T,\chi) \quad = \quad \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}+O(T\log q)$$

2.5 Το Θεώρημα Siegel-Walfisz

Ερχόμαστε τώρα να κοιτάξουμε λίγο πιο προσεκτικά τη σχέση (2.19). Για κάθε όρο στο άθροισμα των ριζών, έχουμε ότι αν $D=\frac{C}{2}$, όπου C η σταθερά στη σχέση (2.18), τότε $\Re(\rho)<1-\frac{D}{\log qT}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}|x^\rho| &= \chi^{\Re(\rho)}\\ &\leq x^{1-\frac{D}{\log qT}}\\ &= xe^{-D\frac{\log x}{\log qT}}\end{aligned}$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{\substack{|\Im(\rho)|<T\\ \rho\neq 1-\beta_0}}\frac{x^\rho}{\rho}\ll xe^{-D\frac{\log x}{\log qT}}\sum_{|\Im(\rho)|<T}\frac{1}{|\rho|}$$

Έχουμε τώρα για το κομμάτι του αθροίσματος όπου $\Im(\rho) \geq 1$ ότι

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq|\Im(\rho)|<T}\frac{1}{|\rho|} &\leq \sum_{1\leq|\Im(\rho)|<T}\frac{1}{|\Im(\rho)|}\\ &= \sum_{k=1}^{T-1}\sum_{k\leq|\Im(\rho)|<k+1}\frac{1}{|\Im(\rho)|}\\ &\leq \sum_{k=1}^{T-1}\frac{1}{k}\left(N(k+1,\chi)-N(k,\chi)\right)\\ &= \sum_{k\leq T-1}\frac{a(k)}{k}\end{aligned}$$

με $a(k) = N(k+1,\chi) - N(k,\chi)$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k\leq y} a(k) \leq N(y+1,\chi)$$

διότι το άθροισμα είναι τηλεσκοπικό και φυσικά $N(1,\chi) \geq 0$. Εφαρμόζουμε τώρα άθροιση κατά μέρη και λαμβάνουμε

$$\sum_{k\leq T-1}\frac{a(k)}{k} \leq \frac{1}{T-1}N(T,\chi) + \int_1^{T-1}\frac{1}{t^2}N(t+1,\chi)dt$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το γεγονός ότι $N(t,\chi) \ll t\log qt$, οπότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq T-1}\frac{a(k)}{k} &\ll \log qT + \int_1^T \frac{1}{t^2}t\log qt dt\\ &\ll \log qT + (\log qT)^2\\ &\ll (\log qx)^2.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν καταλήξει στην παρακάτω εκτίμηση

$$\sum_{1\leq|\Im(\rho)|<T}\frac{1}{|\rho|} \ll (\log qx)^2$$

Από την άλλη, έχουμε ότι

$$\sum_{\substack{|\Im(\rho)|<1\\ \rho\neq 1-\beta_0}}\frac{1}{|\rho|} \leq \sum_{\substack{|\Im(\rho)|<1\\ \rho\neq 1-\beta_0}}\frac{1}{\Re(\rho)}$$

Τώρα έχουμε ότι για κάθε ρίζα ρ του παραπάνω αθροίσματος, το $1-\rho$ είναι επίσης ρίζα. Οπότε γνωρίζουμε ότι

$$1-\Re(\rho) < 1 - \frac{C}{\log q(|\Im(\rho)|+2)}$$

επομένως $\Re(\rho) \gg \frac{1}{\log q}$, με την επαγόμενη σταθερά να είναι απόλυτη. Κατά συνέπεια,

$$\sum_{\substack{|\Im(\rho)|<1\\ \rho\neq 1-\beta_0}}\frac{1}{|\rho|} \ll N(1,\chi)\log q$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι $N(T,\chi) \ll T\log qT$ έχουμε ότι $N(1,\chi) \ll \log q$. Επομένως,

$$\sum_{\substack{|\Im(\rho)|<1\\ \rho\neq 1-\beta_0}} \frac{1}{|\rho|} \ll \log^2 q$$

Συνοψίζοντας, έχουμε αποδείξει ότι

$$\sum_{\substack{|\Im(\rho)|<T\\ \rho\neq 1-\beta_0}} \frac{x^\rho}{\rho} \ll xe^{-D\frac{\log x}{\log qT}}(\log qx)^2$$

Επομένως παίρνουμε την σχέση

$$\psi(x,\chi) \quad = \quad -\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} + O\left(xe^{-D\frac{\log x}{\log qT}}(\log qx)^2 + x^{\frac{1}{4}}\log x + xT^{-1}\log^2 qx\right) \tag{2.20}$$

Το επόμενο θεώρημα θα μας επιτρέψει, ακόμα και αν η ρίζα β_0 υπάρχει, να μπορέσουμε να ελέγξουμε τον όρο $-\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}$.

Θεώρημα 13. ***(Siegel)*** *Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $C(\epsilon)$ ώστε για κάθε μη κύριο πραγματικό χαρακτήρα $\chi \mod q$ αν ρ μία πραγματική ρίζα της $L(s,\chi)$, τότε*

$$\rho < 1 - \frac{C(\epsilon)}{q^\epsilon}.$$

Έστω λοιπόν ένα $\epsilon > 0$, ένας θετικός ακέραιος q και ένας μη κύριος πραγματικός χαρακτήρας $\chi \mod q$. Αν υπάρχει η ρίζα β_0 της σχέσης (2.20) για τον χ, έχουμε ότι

$$\beta_0 < 1 - \frac{C_0(\epsilon)}{q^\epsilon}$$

και ταυτόχρονα

$$\beta_0 > 1 - \frac{C}{\log qT} \gg 1$$

Με την επαγόμενη σταθερά να είναι απόλυτη, καθώς $T \geq 2$ και $q \geq 3$, λόγω της υπόθεσης ότι έχουμε μη κύριους χαρακτήρες $\mod q$.. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} \ll x^{-C_0(\epsilon)q^{-\epsilon}}x$$

Θέτουμε τον περιορισμό $q \leq (\log x)^B$ και έχουμε ότι το παραπάνω άνω φράγμα, φράσσεται από

$$xe^{-C_0(\epsilon)\frac{\log x}{(\log x)^{\epsilon B}}}$$

Επιλέγουμε τώρα $\epsilon = \frac{1}{2B}$, οπότε καταλήγουμε ότι

$$\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} \quad \ll \quad xe^{-C_0(B)\sqrt{\log x}}$$

Τέλος, επιλέγουμε και στην σχέση (2.20) $T = e^{\sqrt{\log x}}$ οπότε καταλήγουμε ότι όταν $q \leq (\log x)^B$, υπάρχει σταθερά $C(B)$ τέτοια ώστε

$$\psi(x,\chi) \ll xe^{-C(B)\sqrt{\log x}} \tag{2.21}$$

Έστω a μια πρωταρχική κλάση υπολοίπων $\mod q$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \mod q}} \Lambda(n)$$

Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\psi(x;q,a) &= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\sum_{\chi}\chi(n)\overline{\chi(a)} && (2.22)\\
&= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}\overline{\chi(a)}\sum_{n\leq x}\chi(n)\Lambda(n)\\
&= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}\overline{\chi(a)}\psi(x,\chi)\\
&= \frac{\psi(x,\chi_0)}{\phi(q)} + O\left(\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\psi(x,\chi)|\right) && (2.23)
\end{aligned}$$

Για τον κύριο όρο, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(x,\chi_0)}{\phi(q)} &= \frac{\psi(x) - \sum_{n\leq x}\Lambda(n)(1-I((n,q)))}{\phi(q)}\\
&= \frac{x}{\phi(q)} + O\left(\frac{xe^{-C\sqrt{\log x}}}{\phi(q)}\right)
\end{aligned}$$

διότι, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ισχύει

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ (n,q)>1}}\Lambda(n) \ll \log x \log q$$

που είναι αμελητέος όρος στη παραπάνω σχέση (σημειώνουμε ότι για την ψ κάναμε χρήση του θεωρήματος των πρώτων αριθμών). Για τον όρο του σφάλματος στην (2.22) έχουμε χρησιμοποιώντας την (2.21) ότι είναι τάξεως

$$O_B\left(\frac{1}{\phi(q)}(\phi(q)-1)xe^{-C'(B)\sqrt{\log x}}\right) = O_B\left(xe^{-C'(B)\sqrt{\log x}}\right)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.22), καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 14. ***(Siegel-Walfisz)*** *Έστω $B>0$. Για κάθε $q\leq(\log x)^B$ υπάρχει σταθερά $C(B)$ τέτοια ώστε για κάθε $(a,q)=1$ να ισχύει*

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\phi(q)} + O_B\left(xe^{-C(B)\sqrt{\log x}}\right)$$

Το παραπάνω θεώρημα ονομάζεται και **θεώρημα των πρώτων αριθμών σε αριθμητικές προόδους**.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία κοσκίνων

Στο κεφάλαιο αυτό σκοπός μας είναι μια στοιχειώδης εισαγωγή σε μία απο τις πιο κεντρικές μεθόδους της αναλυτικής θεωρίας αριθμών, την θεωρία κοσκίνων, οι ιδέες της οποίας θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στην επίτευξη του βασικού στόχου της εργασίας. Θα συμβουλευτούμε κυρίως τις αναφορές [2, 3, 4, 13].

3.1 Τα αξιώματα της Θεωρίας κοσκίνων

Στη παράγραφο αυτή θα δώσουμε μία αξιωματική εισαγωγή στην Θεωρία κοσκίνων, ακολουθώντας κατά κύριο λόγο την αναφορά [13] και δευτερευόντως την [4]. Πιο συγκεκριμένα, θα αναπτύξουμε ορισμένες γενικές μεθόδους προκειμένου να μελετήσουμε το εξής πρόβλημα: Έστω $\mathcal{A}$ ένα σύνολο ακέραιων αριθμών και $\mathcal{P}$ ένα σύνολο πρώτων αριθμών. Θέτουμε

$$P(z) = \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\leq z}} p$$

και

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \{n\in\mathcal{A}:\ (n,P(z))=1\}.$$

Πως μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του συνόλου $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$;

Για κάθε ελεύθερο τετραγώνων d με πρώτους διαιρέτες μόνο από την οικογένεια $\mathcal{P}$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\mathcal{A}_d = \{n\in\mathcal{A} : d \mid n\}.$$

Μία απλή εφαρμογή της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού μας δίνει

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) &= \sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ (n,P(z))=1}} 1 \\ &= \sum_{n\in\mathcal{A}} I((n,P(z))) \\ &= \sum_{n\in\mathcal{A}}\sum_{d\mid(n,P(z))} \mu(d) \\ &= \sum_{d\mid P(z)} \mu(d) \sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ d\mid n}} 1 \\ &= \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)|\mathcal{A}_d|. \end{aligned}$$

Προκειμένου να μπορέσουμε να συνεχίσουμε, θα χρειαστεί να ορίσουμε τρία αξιώματα για τις ποσότητες $\mathcal{A}_d$, στη βάση των οποίων θα στηρίξουμε κάποια γενικά συμπεράσματα.

Αξίωμα 1: *Για κάθε ελεύθερο τετραγώνων αριθμό d με πρώτους διαιρέτες μόνο από το $\mathcal{P}$, υπάρχει μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση $\nu(d)$ με $\nu(p) < p$ για κάθε πρώτο $p \in \mathcal{P}$ τέτοια ώστε*

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{\nu(d)}{d}X + R_d,$$

όπου X είναι μια εκτίμηση για το σύνολο $\mathcal{A}$ και $R_d \in \mathbb{R}$.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αναφέρουμε μερικές επεξηγήσεις σχετικά με αυτό το πρώτο Αξίωμα. Ο αριθμός $\nu(p)$ μας δείχνει το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας $\bmod p$ που πρέπει να κοσκινίσουμε προκειμένου να εντοπίσουμε στοιχεία του $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{n(n+2),\ n \leq X\}. \tag{3.1}$$

και $\mathcal{P}$ το σύνολο όλων των πρώτων αριθμών. Τότε αν $n(n+2) \in S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ έπεται ότι $(n(n+2), P(z)) = 1$, δηλαδή για κάθε πρώτο $p \leq z$ έχουμε ότι ο n δεν ανήκει στις κλάσεις υπολοίπων $0, -2 \mod p$, οι οποίες είναι διακεκριμένες αν και μόνον αν $p \neq 2$. Τότε

$$\nu_2(p) = \begin{cases} 2 & \text{αν} \quad p \neq 2, \\ 1 & \text{αν} \quad p = 2. \end{cases}$$

Πράγματι, αν θέλαμε να κάνουμε μία εκτίμηση για το $\mathcal{A}_p$, θα είχαμε ότι

$$p \mid n(n+2) \Rightarrow n \equiv 0, -2 \mod p.$$

Για $p \neq 2$ λοιπόν, από το Κινέζικο θεώρημα υπολοίπων, έχουμε 2 τέτοια στοιχεία ανά p αριθμούς. Συνεπώς

$$|\mathcal{A}_p| = 2\left\lfloor \frac{X}{p} \right\rfloor + O(1) = \frac{2X}{p} + O(1),$$

ενώ αντίστοιχα για $p = 2$, όπου οι δύο κλάσεις ταυτίζονται, έχουμε

$$\mathcal{A}_p = \frac{X}{p} + O(1).$$

Τώρα, για έναν $d \mid P(z)$ έχουμε ότι η συνθήκη $d \mid n(n+2)$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα ισοτιμιών $p \mid n(n+2)$ για κάθε $p \mid d$. Κάθε μία έχει $\nu(p)$ μη ισοδύναμες λύσεις $\bmod p$ και από το Κινέζικο θεώρημα υπολοίπων έχουμε $\nu(d)$ λύσεις $\bmod d$. Συνεπώς

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{\nu_2(d)}{d}X + O(\nu_2(d)).$$

Το δεύτερο αξίωμά μας λοιπόν, θα έχει να κάνει με τον έλεγχο του $\nu_2(p)$. Έχουμε ήδη κάνει την παραδοχή ότι $\nu_2(p) < p$ αφού φυσικά δεν μπορούμε να κοσκινίσουμε όλες τις κλάσεις $\bmod p$, αλλά προκειμένου να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε καλά το $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$, το $\nu_2(p)$ οφείλει να μην γίνεται πολύ μεγάλο, έστω και κατά μέσον όρο. Αυτό προβλέπεται από την παρακάτω απαίτηση.

Αξίωμα 2 (Διάσταση του κοσκίνου) *Για κάθε $2 \leq y_1, y_2 \leq z$ ισχύει ομοιόμορφα*

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ y_1 \leq p \leq y_2}} \left(1 - \frac{\nu(p)}{p}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{C}{\log y_1}\right)\left(\frac{\log y_2}{\log y_1}\right)^{\kappa},$$

για κάποιες σταθερές $C > 0$ και $\kappa \geq 0$.

Ας δούμε πως ικανοποιείται το αξίωμα αυτό στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου $\mathcal{A} = \{n(n+2),\ n \leq X\}$. Κατ' αρχάς, έχουμε γενικά

$$\begin{aligned}
\prod_{2<p\leq R}\left(1-\frac{2}{p}\right)^{-1} &= \prod_{2<p\leq R}\frac{\left(1-\frac{2}{p}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}}\prod_{2<p\leq R}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\\
&= \prod_{p\leq R}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\left(C_0+O\left(\frac{1}{R}\right)\right)\\
&= \left(C_1\log^2 R+O(\log R)\right)\left(C_0+O\left(\frac{1}{R}\right)\right)\\
&= D\log^2 R+O(\log R),
\end{aligned}$$

λόγω του θεωρήματος Mertens, όπου για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned}
\prod_{p>R}\frac{1-\frac{2}{p}}{(1-\frac{1}{p})^2} &= \prod_{p>R}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\\
&= 1+O\left(\sum_{q>R}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}\right)\\
&= 1+O\left(\frac{1}{R}\right)
\end{aligned}$$

Η οποία ειδικότερα μας δίνει ότι το παραπάνω απειρογινόμενο συγκλίνει. Επομένως, αν $y_1 > 2$ παίρνουμε το φράγμα

$$\begin{aligned}
\prod_{y_1\leq p\leq y_2}\left(1-\frac{2}{p}\right)^{-1} &= \left(\frac{\log y_2}{\log y_1}\right)^2\left(\frac{1+O(\log^{-1} y_2)}{1+O(\log^{-1} y_1)}\right)\\
&\leq \left(1+\frac{C'}{\log y_1}\right)\left(\frac{\log y_2}{\log y_1}\right)^2
\end{aligned}$$

για κάποια κατάλληλη σταθερά $C' > 0$. Αν τώρα $y_1 = 2$ τότε επιλέγουμε C'' ώστε

$$2\prod_{2<p\leq y_2}\left(1-\frac{2}{p}\right)^{-1} \leq \left(1+\frac{C''}{\log 2}\right)\left(\frac{\log y_2}{\log 2}\right)^2$$

το οποίο φυσικά είναι εφικτό, καθώς όπως εξηγήσαμε

$$\prod_{2<p\leq y_2}\left(1-\frac{2}{p}\right)^{-1} \sim D(\log y_2)^2$$

Επιλέγοντας τώρα C να είναι η μέγιστη εκ των C', C'', έχουμε αποδείξει ότι ικανοποιείται το Αξίωμα 2 με $\kappa = 2$.

Ορισμός 14. *Το infimum όλων των αριθμών κ για τους οποίους ικανοποιείται το Αξίωμα 2 θα ονομάζεται* ***διάσταση του κοσκίνου.***

Να σημειώσουμε επίσης ότι πολύ συχνά έχουμε έναν "σημειακό" έλεγχο του $\nu(p)$ ισχυρότερο από την απαίτηση του παραπάνω αξιώματος. Συγκεκριμένα, αν υπάρχει r ώστε $\nu(p) \leq r$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$ και ταυτόχρονα ένα $A \geq 1$ ώστε $\frac{\nu(p)}{p} < 1 - \frac{1}{A}$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$, τότε ικανοποιείται το Αξίωμα 2 με $\kappa = r$.

Η τελευταία απαίτηση που θα υποθέσουμε σχετίζεται φυσιολογικά με τον έλεγχο του μεγέθους των όρων

$$R_d = |\mathcal{A}_d| - \frac{\nu(d)}{d}X.$$

Συγκεκριμένα, επιθυμούμε και πάλι μία κατά μέσον όρο συνθήκη.

Αξίωμα 3 (Επίπεδο κατανομής) *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ και αριθμός $D \geq 2$ ώστε*

$$\sum_{\substack{d\leq D\\ d|P(z)}} |R_d| \leq \frac{X}{(\log X)^C}$$

Ο αριθμός D ονομάζεται επίπεδο κατανομής του συνόλου $\mathcal{A}$.

Είναι σύνηθες, μαζί με τη συνθήκη $\nu(p) \leq \min(1-\frac{1}{A}, r)$ που αναφέραμε παραπάνω, να έχουμε και τη συνθήκη $|R_d| \ll \nu(d)$. Οι δύο αυτές συνθήκες μας δίνουν έναν σημειακό έλεγχο των $\nu(d), R_d$, ο οποίος, μιλώντας κάπως ελεύθερα, είναι ισχυρότερος από τις απαιτήσεις των Αξιωμάτων 2 και 3.

Για παράδειγμα, υπό τις συνθήκες αυτές έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\leq D\\ d|P(z)}} |R_d| &\ll \sum_{\substack{d\leq D\\ d|P(z)}} d\frac{\nu(d)}{d} \\
&\ll D\sum_{\substack{d\leq D\\ d|P(z)}} \prod_{p|d}\frac{r}{p} \\
&\ll D\prod_{p\leq z}\left(1+\frac{r}{p}\right) \\
&\ll D(\log X)^r
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία σχέση δικαιολογείται αφ'ενός από το γεγονός ότι $z < X$ (όπως συμβαίνει στις εφαρμογές) και αφ'ετέρου από τη σχέση

$$\begin{aligned}
\prod_{p\leq z}\left(1+\frac{r}{p}\right) &= \prod_{p\leq z}\left(1+\frac{r}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^r \prod_{p\leq z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-r} \\
&= \prod_{p\leq z}\left(1+O(\frac{1}{p^2})\right)(\log z)^r \\
&\ll (\log z)^r
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Mertens καθώς και τη σύγκλιση του τελευταίου απειρογινομένου. Το φράγμα αυτό λοιπόν για το άθροισμα των σφαλμάτων R_d μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν επιλέξουμε

$$D = \frac{X}{(\log X)^{C+r}} = X^{1-o(1)}$$

τότε ικανοποιείται το Αξίωμα 3, και αυτή η επιλογή είναι κατ'ουσίαν η καλύτερη δυνατή στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν. Για παράδειγμα, στη περίπτωση των δίδυμων πρώτων την οποία εξετάζουμε, έχουμε ότι $\nu_2(p) \leq \min(1-\frac{1}{3}, 2)$ και $|R_d| \ll \nu_2(d)$, συνεπώς έχουμε επίπεδο κατανομής $D = X^{1-o(1)}$.

Έχοντας υπόψιν μας τα τρία αυτά Αξιώματα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) &= \sum_{d|P(z)} \mu(d)|\mathcal{A}_d| \\
&= X\sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\nu(d)}{d} + O\left(\sum_{d|P(z)}|R_d|\right).
\end{aligned}$$

Αυτός ο απλός τρόπος αντιμετώπισης ωστόσο δεν επιτρέπει τον έλεγχο του όρου του σφάλματος για "μεγάλα" z (το οποίο συνήθως σημαίνει $z = X^a$ για $a > 0$). Εξετάζοντας το παράδειγμα των δίδυμων πρώτων, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Mertens παίρνουμε έναν κύριο όρο

$$C\frac{X}{(\log z)^2},$$

ενώ για τον όρο του σφάλματος έχουμε $|R_d| \ll \nu(d) \ll 2^{\omega(d)}$. Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}\sum_{d|P(z)} |R_d| &\ll \sum_{d|P(z)} 2^{\omega(d)} \\ &= (\tau_2 * u)(P(z)) \\ &= 3^{\pi(z)}.\end{aligned}$$

Εάν θέλουμε ο όρος του σφάλματος να είναι μικρότερης τάξης από τον κύριο όρο, παρατηρούμε ότι η επιλογή $z = X^a$ δεν επιτρέπεται για κανένα $a > 0$. Άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το κόσκινο για αρκετούς πρώτους.

Αντί όμως για αυτόν τον άμεσο τρόπο αντιμετώπισης, η καινούρια ιδέα εδώ είναι να επιλεγούν υποσύνολα V^+ και V^- του συνόλου $\{d \mid P(z),\ d \le D\}$ (όπου D το επίπεδο κατανομής του $\mathcal{A}$) προκειμένου να πετύχουμε μία σχέση της μορφής

$$X\sum_{d\in V^-}\mu(d)\frac{\nu(d)}{d} + O\left(\sum_{d\in V^-}|R_d|\right) \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le X\sum_{d\in V^+}\mu(d)\frac{\nu(d)}{d} + O\left(\sum_{d\in V^+}|R_d|\right),$$

τέτοια ώστε επιπλεόν το κάτω και το άνω φράγμα να προσεγγίζουν τον κύριο όρο του $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$, δηλαδή

$$\sum_{d\in V^\pm}\mu(d)\frac{\nu(d)}{d} \sim \sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\nu(d)}{d} = \prod_{p|P(z)}\left(1-\frac{\nu(p)}{p}\right).$$

Η γενική Θεωρία κοσκίνων δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω στην παρούσα εργασία. Αναφέρουμε απλώς για λόγους πληρότητας, το λεγόμενο Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Κοσκίνων, το οποίο συμπυκνώνει τα συμπεράσματα που αντλεί κανείς κοσκινίζοντας κατάλληλα, με τον τρόπο που περιγράψαμε.

Θεώρημα 15. ***(Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας κοσκίνων)*** *Έστω ότι τα σύνολα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{P}$ ικανοποιούν τα Αξιώματα 1 και 2, με διάσταση κοσκινίσματος κ. Τότε*

1) Για κάθε $u \ge 1$

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = X(1+O(u^{-\frac{u}{2}}))\prod_{p|P(z)}\left(1-\frac{\nu(p)}{p}\right) + O\left(\sum_{\substack{d\le z^u\\ d|P(z)}}|R_d|\right).$$

2) Αν επιπλέον ικανοποιείται το Αξίωμα 3 για κάποιο $C \ge \kappa+1$, $u_\kappa = 1 + 2/(e^{0.53/\kappa}-1)$ και $z \le D^{\frac{1}{u_\kappa}}$, τότε ισχύει

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \asymp X\prod_{p|P(z)}\left(1-\frac{\nu(p)}{p}\right).$$

3.2 Το κόσκινο του Selberg

Ας θεωρήσουμε πάλι το περιβάλλον της προηγούμενης παραγράφου, σε ένα λίγο πιο γενικό πλαίσιο. Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{A}$ θετικών ακεραίων, καθώς και ένα σύνολο $\mathcal{P}$ πρώτων αριθμών. Για κάθε $p \in \mathcal{P}$

θεωρούμε ένα σύνολο $\mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$ και για κάθε ελεύθερο τετραγώνων αριθμό d με την ιδιότητα $p \mid d \Rightarrow p \in \mathcal{P}$ ορίζουμε

$$\mathcal{A}_d = \bigcap_{p|d} \mathcal{A}_p.$$

Το σύνολο αυτών των d θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$. Παρατηρούμε ότι αν $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ τότε (d_1, d_2) , $[d_1, d_2] \in \mathcal{D}$. Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τον πληθάριθμο του συνόλου

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \{a \in \mathcal{A} \mid a \notin \mathcal{A}_p \ \ \forall p \in \mathcal{P}, p \leq z\}$$

υποθέτοντας στη παρούσα παράγραφο μόνο το Αξίωμα 1 της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχει πολλαπλασιαστική συνάρτηση f και κάποιο $X > 0$, το οποίο σκεφτόμαστε ως εκτίμηση του πληθαρίθμου του $\mathcal{A}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &1) \quad |\mathcal{A}_d| = \frac{X}{f(d)} + R_d \ , \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad R_d \in \mathbb{R}, \\ &2) \quad f(p) > 1, \ \forall p \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τις εξής ποσότητες, οι οποίες θα μας χρειαστούν παρακάτω:

- $P(z) = \prod\limits_{\substack{p \leq z \\ p \in \mathcal{P}}} p,$
- $B(a) = \prod\limits_{a \in \mathcal{A}_p} p.$

Με αυτούς τους ορισμούς, παρατηρούμε ότι

$$a \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \iff (B(a), P(z)) = 1.$$

Επομένως, γενικεύοντας την ιδέα που είδαμε και στην προηγούμενη υποενότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) &= \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ (B(a), P(z))=1}} 1 \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} I((B(a), P(z))) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{d|(B(a), P(z))} \mu(d). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Η κεντρική ιδέα του Selberg ήταν η εξής απλή παρατήρηση: αν η $(\lambda_d)_{d=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lambda_1 = 1$, τότε

$$\sum_{d|n} \mu(d) \leq \left(\sum_{d|n} \lambda_d \right)^2 .$$

Συνεπώς, από την (3.2) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\sum_{d|(B(a), P(z))} \lambda_d \right)^2 \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\sum_{d_1|(B(a), P(z))} \lambda_{d_1} \right) \left(\sum_{d_2|(B(a), P(z))} \lambda_{d_2} \right) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{d_1, d_2|(B(a), P(z))} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Αλλάζοντας τη σειρά της άθροισης, λαμβάνουμε

$$\sum_{d_1,d_2|P(z)} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ [d_1,d_2]|B(a)}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ [d_1,d_2]|B(a)}} 1 \tag{3.4}$$

$$= \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}|\mathcal{A}_{[d_1,d_2]}|, \tag{3.5}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι για τυχαίο θετικό ακέραιο k και $a \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$k \mid B(a) \iff a \in \mathcal{A}_p,\ \forall\, p \mid k \iff a \in \mathcal{A}_k.$$

Από την πρώτη προϋπόθεση που θέσαμε, η τελευταία ποσότητα παίρνει την μορφή

$$\sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\left(\frac{X}{f([d_1,d_2])} + R_{[d_1,d_2]}\right) = X \sum_{d_1,d_2|P(z)} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{f([d_1,d_2])} + \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}R_{[d_1,d_2]}. \tag{3.6}$$

Για τη δεύτερη ποσότητα, σημειώνουμε ότι

$$\left|\sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}R_{[d_1,d_2]}\right| \le \sum_{d_1,d_2|P(z)} \left|\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}R_{[d_1,d_2]}\right|. \tag{3.7}$$

Θα ασχοληθούμε τώρα με τη πρώτη ποσότητα. **Επιλέγουμε για απλότητα τα λ_d να είναι μηδέν για** $d > z$ και αποδεικνύουμε δυο λήμματα που θα μας βοηθήσουν στη διαχείριση του κύριου όρου.

Λήμμα 1. *Έστω μία πολλαπλασιαστική συνάρτηση f. Για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους m και n ισχύει ότι*

$$f((m,n))f\left([m.n]\right) = f(m)f(n).$$

Απόδειξη. Έστω $m = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$ και $n = (q_1^{b_1}\dots q_r^{b_r})q_{r+1}^{b_{r+1}}\dots q_s^{b_s}$, όπου τα $q_1, q_2, ..., q_r$ είναι κάποια από τα $p_1, p_2, ..., p_k$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $p_i = q_i$ για κάθε $i = 1, 2..., r$), με $0 \le r \le \min\{k, s\}$ και τα $q_{r+1}, ..., q_s$ δεν ανήκουν στο σύνολο $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$.Εχουμε

- $f((m,n)) = f(q_1^{c_1}q_2^{c_2}\dots q_r^{c_r}) = f(q_1^{c_1})\dots f(q_r^{c_r})$, με $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ για κάθε $i = 1, 2..., r$.
- $f([m,n]) = \left(f(q_1^{d_1})\dots f(q_r^{d_r})\right)\left(f(q_{r+1}^{b_{r+1}})\dots f(q_s^{b_s})\right)\left(f(p_{r+1}^{a_{r+1}})\dots f(p_k^{a_k})\right)$,

  με $d_i = \max\{a_i, b_i\}$ για κάθε $i = 1.2..., r$.

Καθώς τώρα $\{a_i, b_i\} = \{c_i, d_i\}$ για κάθε $i = 1, 2..., r$, έχουμε ότι το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης ισούται με

$$\left(\prod_{i=1}^{r} f(q_i^{a_i})f(q_i^{b_i})\right) f(q_{r+1}^{b_{r+1}})...f(q_s^{b_s})f(p_{r+1}^{a_{r+1}})...f(p_k^{a_k}), \tag{3.8}$$

ενώ για το δεξί μέλος έχουμε

$$\begin{aligned} f(m)f(n) &= \left(f(q_1^{a_1})f(q_2^{a_2})\dots f(q_r^{a_r})f(p_{r+1}^{a_{r+1}})\dots f(p_k^{a_k})\right)\left(f(q_1^{b_1})f(q_2^{b_2})\dots f(q_r^{b_r})f(q_{r+1}^{b_{r+1}})\dots f(q_s^{b_s})\right) \\ &= \left(f(q_1^{a_1})f(q_2^{a_2})\dots f(q_r^{a_r})f(q_1^{b_1})f(q_2^{b_2})\dots f(q_r^{b_r})\right)\left(f(p_{r+1}^{a_{r+1}})\dots f(p_k^{a_k})f(q_{r+1}^{b_{r+1}})\dots f(q_s^{b_s})\right) \end{aligned}$$

πού είναι ακριβώς η ποσότητα (3.8), και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Λήμμα 2. *Έστω Y και L δύο αριθμητικές συναρτήσεις, με φορέα υποσύνολο των ελεύθερων τετραγώνων αριθμών. Τότε ισχύει ο παρακάτω νόμος αντιστροφής*

$$Y(r) = \mu(r) \sum_{r|d} L(d) \Longrightarrow \quad L(d) = \mu(d) \sum_{d|r} Y(r)$$

Ἀπόδειξη. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\mu(d) \sum_{d|r} Y(r) &= \mu(d) \sum_{d|r} \mu(r) \sum_{r|s} L(s) \\
&= \mu(d) \sum_{d|s} L(s) \sum_{d|r|s} \mu(r) \\
&= \mu^2(d) \sum_{d|s} L(s) \sum_{a|\frac{s}{d}} \mu(a) \\
&= \sum_{d|s} L(s) I\left(\frac{s}{d}\right) \\
&= L(d),
\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Επανερχόμαστε τώρα στον κύριο όρο του αθροίσματος (3.6). Από το Λήμμα 1 λαμβάνουμε

$$\sum_{d_1,d_2|P(z)} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{f([d_1,d_2])} = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{f(d_1)f(d_2)} f((d_1,d_2)).$$

Θέτουμε $g = f * \mu$, οπότε η τελευταία έκφραση παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
\sum_{d_1,d_2|P(z)} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{f([d_1,d_2])} &= \sum_{d_1,d_2|P(z)} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{f(d_1)f(d_2)} \sum_{m|(d_1,d_2)} g(m) \\
&= \sum_{m|P(z)} \sum_{\substack{m|(d_1,d_2) \\ [d_1,d_2]|P(z)}} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{f(d_1)f(d_2)} g(m) \\
&= \sum_{m|P(z)} g(m) \left(\sum_{\substack{m|d \\ d|P(z)}} \frac{\lambda_d}{f(d)} \right)^2 \\
&= \sum_{m|P(z)} g(m) y_m^2,
\end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει

$$y_m = \mu(m) \sum_{\substack{m|d \\ d\le z}} \frac{\lambda_d}{f(d)}. \tag{3.9}$$

Από το Λήμμα 2 παίρνουμε

$$\lambda_d = f(d)\mu(d) \sum_{\substack{d|m \\ m\le z}} y_m. \tag{3.10}$$

Σκοπός μας τώρα είναι να επιλέξουμε τα λ_d ώστε η ποσότητα

$$\sum_{m|P(z)} g(m) y_m^2$$

να γίνει η ελάχιστη δυνατή. Υπενθυμίζουμε οτι τα λ_d έχουν επιλεχθεί να είναι ίσα με μηδέν όποτε $d > z$, επομένως η ποσότητα που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η

$$\sum_{\substack{m\leq z\\ m\mid P(z)}} g(m)y_m^2,$$

αφού από τη σχέση (3.9) για $m > z$ έχουμε $y_m = 0$. Έχουμε επίσης τη συνθήκη $\lambda_1 = 1$, η οποία από τη σχέση (3.10) για $m = 1$ δίνει

$$\sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d\leq z}} y_d\mu(d) = 1.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$H(x_1, ..., x_{\lfloor z\rfloor}) = \sum_{\substack{m\leq \lfloor z\rfloor\\ m\mid P(z)}} g(m)x_m^2.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για την H υπό τη συνθήκη

$$\sum_{\substack{d\leq \lfloor z\rfloor\\ d\mid P(z)}} \mu(d)x_d = 1,$$

έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} 2g(i)x_i + \lambda\mu(i) &= 0, \quad \forall\, i \leq z \text{ ώστε } \ i \mid P(z),\\ \sum_{\substack{d\leq \lfloor z\rfloor\\ d\mid P(z)}} \mu(d)x_d &= 1. \end{aligned}$$

Οι πρώτες εξισώσεις μας δίνουν

$$x_i = -\frac{\lambda\mu(i)}{2g(i)} \quad \forall\, i \leq z \quad \text{ώστε } \ i \mid P(z).$$

Με αντικατάσταση στη τελευταία εξίσωση παίρνουμε

$$-\frac{\lambda}{2}\sum_{\substack{d\leq \lfloor z\rfloor\\ d\mid P(z)}} \frac{\mu(d)^2}{g(d)} = 1 \implies \lambda = -\frac{2}{\sum\limits_{\substack{d\leq \lfloor z\rfloor\\ d\mid P(z)}} \frac{1}{g(d)}},$$

διότι κάθε αριθμός $d \mid P(z)$ είναι ελεύθερος τετραγώνων και συνεπώς $\mu^2(d) = 1$. Για διευκόλυνση μας, θέτουμε τη ποσότητα στον παρονομαστή ίση με $W(z)$. Έτσι τελικά έχουμε

$$x_i = \frac{\mu(i)}{g(i)W(z)}, \quad \forall\, i \leq z \quad \text{ώστε } i \mid P(z).$$

Επομένως, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα που μας ενδιαφέρει, επιλέγουμε

$$y_d = \frac{\mu(d)}{g(d)W(z)}, \quad \forall\ d \leq z \ \text{ ώστε } d \mid P(z).$$

Από τη σχέση (3.10) αυτό σημαίνει ότι επιλέγουμε τα λ_d ως

$$\lambda_m = \mu(m)f(m)\sum_{\substack{m\mid d\\ d\leq z}} \frac{\mu^2(d)}{g(d)W(z)}. \tag{3.11}$$

Για αυτή την επιλογή, ο κύριος όρος γίνεται

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\le z\\ m\mid P(z)}} g(m)\left(\frac{\mu(m)}{g(m)W(z)}\right)^2 &= \sum_{\substack{m\le z\\ m\mid P(z)}} \frac{1}{g(m)W^2(z)}\\ &= \frac{1}{W^2(z)}\sum_{\substack{m\le z\\ m\mid P(z)}}\frac{1}{g(m)}\\ &= \frac{1}{W^2(z)}W(z)\\ &= \frac{1}{W(z)}.\end{aligned}$$

Αυτό που απομένει είναι να κάνουμε μία καλή εκτίμηση για το σφάλμα, υπό την επιλογή αυτών των λ_d. Έτσι λοιπόν εχουμε

$$|\lambda_m| = \left|\frac{f(m)}{W(z)}\right|\left|\sum_{\substack{m\mid d\\ d\le z}}\frac{\mu(d)}{g(d)}\mu\left(\frac{d}{m}\right)\right| \overset{d=sm}{=} \left|\frac{f(m)}{W(z)}\right|\left|\sum_{s\le\frac{z}{m}}\frac{\mu(sm)}{g(s)g(m)}\mu(s)\right|$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $d \mid P(z)$ ισχύει ότι $g(d) > 0$. Πράγματι, εφόσον κάθε τέτοιος d είναι ελεύθερος τετραγώνων, ο $g(d)$ είναι γινόμενο όρων της μορφής $g(p)$ με $p \mid P(z)$. Από τη σχέση

$$g(p) = f(1)\mu(p) + f(p)\mu(1) \Rightarrow g(p) = -1 + f(p) > 0$$

έχουμε το ζητούμενο.

Η τελευταία έκφραση γίνεται επομένως

$$\begin{aligned}\frac{f(m)}{W(z)}\sum_{\substack{(s,m)=1\\ s\le\frac{z}{m}}}\frac{\mu^2(s)}{g(s)g(m)} &= \frac{\mu^2(s)}{W(z)}\sum_{d_1\mid m} g(d_1)\sum_{\substack{(s,m)=1\\ s\le\frac{z}{m}}}\frac{\mu^2(s)}{g(s)g(m)}\\ &= \frac{1}{W(z)}\sum_{d_1\mid m}\sum_{\substack{(s,m)=1\\ s\le\frac{z}{m}}}\frac{\mu^2(s)g(d_1)}{g(s)g(m)}\end{aligned}$$

Τώρα, καθώς ο m είναι ελεύθερος τετραγώνων, ισχύει ότι $(d_1, \frac{m}{d_1}) = 1$. Έπεται ότι $\frac{g(d_1)}{g(m)} = \frac{1}{g(\frac{m}{d_1})}$. Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στη προηγούμενη έκφραση, λαμβάνουμε

$$|\lambda_m| = \frac{1}{W(z)}\sum_{d_1\mid m}\sum_{\substack{(s,m)=1\\ s\le\frac{z}{m}}}\frac{\mu^2(s)}{g(\frac{sm}{d_1})}$$

Όμως, για κάθε d_1, s στο σύνολο άθροισης, έχουμε ότι

- $\frac{sm}{d_1} \le sm \le z$,
- $\frac{sm}{d_1} \mid sm \mid P(z)$
- αν (s, d_1) και (s', d_1') δυο διαφορετικά ζευγάρια (τουλάχιστον κατά μία συντεταγμένη) στο σύνολο άθροισης, τότε $\frac{sm}{d_1} \ne \frac{s'm}{d_1'}$. Πράγματι, αν ίσχυε η ισότητα θα παίρναμε $sd_1' = s'd_1$.Όμως $(s, d_1) = 1$ και $(s', d_1') = 1$, συνεπώς $s = s'$ και $d_1 = d_1'$, άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι δεν λαμβάνουμε τον ίδιο αριθμό με πάνω από έναν τρόπο.

Επομένως,

$$|\lambda_m| = \frac{1}{W(z)} \sum_{d_1|m} \sum_{\substack{(s,m)=1 \\ s\le \frac{z}{m}}} \frac{\mu^2(s)}{g(\frac{sm}{d_1})} \quad \le \quad \frac{1}{W(z)} \sum_{\substack{d|P(z) \\ d\le z}} \frac{1}{g(d)} = 1$$

Συνεπώς, $|\lambda(m)| \le 1$ και τελικά ο όρος του σφάλματος (έχοντας υπόψιν ότι $\lambda_d = 0$ όταν $d > z$) είναι:

$$\left| \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} R_{[d_1,d_2]} \right| \le \sum_{d_1,d_2|P(z)} \left|\lambda_{d_1}\lambda_{d_2} R_{[d_1,d_2]}\right| \le \sum_{d_1,d_2\le z} \left|R_{[d_1,d_2]}\right|$$

Έχουμε αποδείξει λοιπόν το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα. *Με τους ορισμούς που έχουν δοθεί για τα σύνολα $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_d$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$, αν $X > 0$ μια εκτίμηση του $|\mathcal{A}|$ και f μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση, ώστε $f(p) > 1 \ \forall\ p \in P$, και για κάθε $d \in \mathcal{D}$ ισχύει*

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{X}{f(d)} + R_d, \quad R_d \in \mathbb{R}$$

Αν

$$g(n) = (f * \mu)(n)$$

και

$$W(z) = \sum_{d\le z} \frac{\mu^2(d)}{g(d)}$$

τότε

$$\mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le \frac{X}{W(z)} + O\left(\sum_{d_1,d_2\le z} |R_{[d_1,d_2]}| \right).$$

3.3 Εφαρμογή στις πρώτες $k-$άδες

Έστω ένα σύνολο $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ διακεκριμένων μη αρνητικών ακεραίων, έτσι ώστε για κάθε p να υπάρχει $a_p \mod p$ με την ιδιότητα $h \not\equiv a_p \mod p,\ \forall h \in \mathcal{H}$. Έστω επίσης $\mathcal{H}_n = \{n+h_1, n+h_2, \dots, n+h_k\}$, $n \ge 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\pi_k(x) = \#\{n \le x : \text{ κάθε στοιχείο της } \mathcal{H}_n \text{ είναι πρώτος}\}.$$

Έστω επίσης $\mathcal{A} = \#\{(n+h_1)\dots(n+h_k),\ n \le x\}$ και $\mathcal{P}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών. Παρατηρούμε ότι

$$\pi_k(x) \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$$

για $z \le x$. Αν $\nu_{\mathcal{H}}(p)$ το πλήθος των υπολοίπων $\mod p$ που εμφανίζονται στην $\mathcal{H}$, εξ υποθέσεως $\nu_{\mathcal{H}}(p) < p$. Επεκτείνουμε τη συνάρτηση πολλαπλασιαστικά στους ελεύθερους τετραγώνων αριθμούς και παρατηρούμε ότι η σχέση

$$p \mid (n+h_1)\dots(n+h_k)$$

έχει $\nu_{\mathcal{H}}(p)$ λύσεις $\mod p$. Για τυχαίο $d \mid P(z)$ ελεύθερο τετραγώνων, από το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων έχουμε $\nu_{\mathcal{H}}(d)$ λύσεις $\mod d$ για την $d \mid n(n+2)$.

Συνεπώς για $d \mid P(z)$

$$\mathcal{A}_d = \nu_{\mathcal{H}}(d)\frac{x}{d} + O(\nu_{\mathcal{H}}(d))$$

Από το κόσκινο του Selberg λαμβάνουμε

$$\pi_k(x) \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le \frac{x}{W(z)} + O(z^2(\log z)^{C(k)})$$

όπου ο όρος $O(z^2(\log z)^{C(k)})$ προέκυψε ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sum_{[d_1,d_2]\leq z} |R_{[d_1,d_2]}| &\ll \sum_{d_1,d_2\leq z} \nu_{\mathcal{H}}([d_1,d_2]) \\
&\ll \sum_{d_1,d_2\leq z} \frac{\nu_{\mathcal{H}}(d_1)\nu_{\mathcal{H}}(d_2)}{\nu_{\mathcal{H}}((d_1,d_2))} \\
&\ll \left(\sum_{d\leq z} \nu_{\mathcal{H}}(d)\right)^2 \\
&\ll \left(\sum_{d\leq z} \mu^2(d)k^{\omega(d)}\right)^2 \\
&\ll z^2(\log z)^{C(k)}
\end{aligned}$$

διότι όταν d ελεύθερος τετραγώνων, ισχύει $\tau_k(d) = k^{\omega(d)}$. Αν $f(d) = \frac{d}{\nu_{\mathcal{H}}(d)}$ τότε

$$g(p) = f(p) - 1 = \frac{p - \nu_{\mathcal{H}}(p)}{\nu_{\mathcal{H}}(p)}$$

Συνεπώς

$$W(z) = \sum_{d\leq z} \mu^2(d) \prod_{p|d} \frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p - \nu_{\mathcal{H}}(p)} \tag{3.12}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 9 του Κεφαλαίου 5, με $\gamma(p) = \nu_{\mathcal{H}}(p)$, έχουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του για $A = 2k$ και για k φυσικά τον πληθάριθμο της $\mathcal{H}$ (όπως θα δούμε πιο αναλυτικά και στο Κεφάλαιο 5). Επομένως ισχύει

$$W(z) \gg (\log z)^k$$

Χρησιμοποιώντας τώρα αυτό το κάτω φράγμα για την $W(z)$ λαμβάνουμε

$$\pi_k(x) \leq C_1 \frac{x}{(\log z)^k} + O(z^2(\log z)^{C(k)})$$

επιλέγουμε $z = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^{(k+C(k))/2}}$ και καταλήγουμε

$$\pi_k(x) \ll \frac{x}{(\log x)^k} \tag{3.13}$$

Ως πόρισμα μπορούμε να λάβουμε το παρακάτω πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα του Brun για τους δίδυμους πρώτους.

Πόρισμα 1. *(Θεώρημα Brun) Έστω T το σύνολο των θετικών ακέραιων n ώστε οι $n, n+2$ να είναι πρώτοι. Τότε*

$$\sum_{p\in T} \frac{1}{p} < \infty$$

Απόδειξη. Από την (3.13) λαμβάνουμε ότι, αν $\mathcal{H} = \{0, 2\}$ και $\pi_2(x) = \#\{T \cap [1, x]\}$ τότε

$$\pi_2(x) \ll \frac{x}{(\log x)^2}$$

Κατά συνέπεια με άθροιση κατά μέρη

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\in T\\ p\le x}}\frac{1}{p} &= \frac{1}{x}\pi_2(x)+\int_2^x\frac{1}{t^2}\pi_2(t)dt\\ &\ll \frac{1}{(\log x)^2}+\int_2^x\frac{1}{t\log^2 t}dt\\ &= O(1)\end{aligned}$$

Αφήνοντας $x\to\infty$ έχουμε το ζητούμενο. □

3.4 Το μεγάλο κόσκινο

Στη παράγραφο αυτή, θα παρουσιάσουμε μια γενική θεωρία για την διαχείριση εκθετικών αθροισμάτων, η οποία με διαφορετικό τρόπο απο αυτούς που έχουμε δει μεχρι τώρα, θα μας επιτρέψει να διατυπώσουμε μια μέθοδο κοσκινίσματος.

Θεωρούμε την 1-περιοδική συνάρτηση

$$S(a)=\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e(na)$$

όπου N,M ακέραιοι, $a_n\in\mathbb{C}$.

Σκοπός μας είναι για $b_1,\dots,b_s\in[0,1]$ υπό κάποιες προϋποθέσεις, να επιτύχουμε ένα φράγμα της μορφής

$$\sum_{k\le s}|S(b_k)|^2\le\Delta\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

Με το Δ να είναι ανεξάρτητο της επιλογής των b_k, αλλά και από το πλήθος τους.

Αρχίζουμε αποδεικνύοντας το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 3. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ μία C^1 συνάρτηση. Για τυχόν $a\in\mathbb{R}$ και $\epsilon>0$ ισχύει η ανισότητα*

$$|f(a)|\le\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon}\frac{1}{2\epsilon}|f(x)|+\frac{|f'(x)|}{2}dx$$

Ἀπόδειξη. Ξεκινάμε με την εξής απλή παρατήρηση: Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ μία C^1 συνάρτηση, τότε

$$g(x)=\int_0^1 g(u)du+\int_0^x ug'(u)du+\int_x^1(u-1)g'(u)du,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

το οποίο επαληθεύεται άμεσα με παραγοντική ολοκλήρωση. Έπεται ότι

$$\left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le\int_0^1|g(u)|du+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}|g'(u)|du+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{2}|g'(u)|du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right|\le\int_0^1|g(u)|du+\frac{1}{2}\int_0^1|g'(u)|du \tag{3.14}$$

Θεωρώντας λοιπόν την $g(x)=f(a+(2x-1)\epsilon)$ και εφαρμόζοντας την (3.14) για την g, εφόσον $g(\frac{1}{2})=f(a)$ λαμβάνουμε

$$|f(a)|\le\int_0^1|f(a+(2u-1)\epsilon)|du+\frac{1}{2}\int_0^1 2\epsilon\,|f'(a+(2u-1)\epsilon)|\,du$$

Εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = a + (2u-1)\epsilon$ και στα δύο ολοκληρώματα και λαμβάνουμε

$$|f(a)| \leq \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{1}{2\epsilon}|f(x)|dx + \frac{1}{2}\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon}|f'(x)|dx$$

□

Δίνουμε στο σημείο αυτό τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 15. *Έστω ένας αριθμός $a \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε*

$$||a|| = min\{a - \lfloor a \rfloor, \lceil a \rceil - a\}$$

δηλαδή την απόσταση του a από τον κοντινότερο ακέραιο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα σύνολο διακεκριμένων σημείων $b_1, b_2, ..., b_s$ στο $[0,1]$ και έστω $\delta = \min_{r \neq k}||b_k - b_r|| > 0$. Η συνάρτηση $S^2(a)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος 3 και επομένως, επιλέγοντας $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ έχουμε

$$|S^2(a)| \leq \int_{a-\frac{\delta}{2}}^{a+\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\delta}|S^2(x)| + |S(x)S'(x)|dx$$

Έστω τώρα $b_1 < b_2 < ... < b_s$. Θέτουμε $a = b_k$ στη τελευταία σχέση και παίρνουμε άθροισμα πάνω από όλα τα k, οπότε έχουμε

$$\sum_{k\leq s}|S(b_k)|^2 \leq \sum_{k\leq s}\int_{b_k-\frac{\delta}{2}}^{b_k+\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx \tag{3.15}$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι τα διαστήματα ολοκλήρωσης είναι ανά δύο μη επικαλυπτόμενα (υπό την έννοια ότι είναι ξένα ως ανοιχτά), αφού αν

$$r \neq k \text{ και } y \in \left(b_k - \frac{\delta}{2}, b_k - \frac{\delta}{2}\right) \cap \left(b_r - \frac{\delta}{2}, b_r + \frac{\delta}{2}\right)$$

τότε

$$|b_k - y| < \frac{\delta}{2} \text{ και } |b_r - y| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \delta > |b_k - b_r| \geq ||b_k - b_r|| \geq \delta$$

άτοπο. Τώρα εξετάζουμε το πρώτο και το τελευταίο ολοκλήρωμα. Αν $b_1 - \frac{\delta}{2} > 0$ και ταυτόχρονα $b_s + \frac{\delta}{2} < 1$ τότε στην (3.15) τα διαστήματα ολοκλήρωσης είναι ανά δύο μη επικαλυπτόμενα και περιέχονται στο $[0,1]$, επομένως

$$\sum_{k\leq s}|S(b_k)|^2 \leq \int_0^1 \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx \tag{3.16}$$

Αν $b_s + \frac{\delta}{2} > 1$ τότε γράφουμε

$$\int_{b_s-\frac{\delta}{2}}^{b_s+\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx = \int_{b_s-\frac{\delta}{2}}^{1} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx + \int_0^{b_s+\frac{\delta}{2}-1} \frac{1}{\delta}|S(u+1)|^2 + |S(u+1)S'(u+1)|du$$

και εφόσον οι S, S' είναι 1-περιοδικές, έχουμε

$$\int_{b_s-\frac{\delta}{2}}^{b_s+\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx = \int_{b_s-\frac{\delta}{2}}^{1} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx + \int_0^{b_s+\frac{\delta}{2}-1} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το διάστημα $(0, b_s + \frac{\delta}{2} - 1)$ δεν επικαλύπτει κανένα άλλο από τα $(b_r - \frac{\delta}{2}, b_r + \frac{\delta}{2})$. Πράγματι, αν $y \in (0, b_s + \frac{\delta}{2} - 1) \cap (b_r - \frac{\delta}{2}, b_r + \frac{\delta}{2})$, τότε

$$y < b_s + \frac{\delta}{2} - 1 \text{ και } |y - b_r| < \frac{\delta}{2}$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις, έχουμε

$$\begin{aligned} b_r &< \frac{\delta}{2} + y \\ &< \frac{\delta}{2} + b_s + \frac{\delta}{2} - 1 \\ &< b_s + \delta - 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στη σχέση

$$1 - (b_s - b_r) < \delta \Rightarrow ||b_s - b_r|| < \delta$$

καθώς $b_s - b_r < 1$, επομένως $1 - (b_s - b_r) = |1 - (b_s - b_r)|$. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο. Ειδικότερα, $b_1 - \frac{\delta}{2} > 0$, αφού σε διαφορετική περίπτωση θα ίσχυε ότι το διάστημα $(b_1 - \frac{\delta}{2}, b_1 + \frac{\delta}{2})$ θα είχε μη κενή τομή με το διάστημα $(0, b_s + \frac{\delta}{2} - 1)$. Αντικαθιστώντας στην (3.15) έχουμε

$$\sum_{k \le s} |S(b_k)|^2 \le \sum_{k<s} \int_{b_k - \frac{\delta}{2}}^{b_k + \frac{\delta}{2}} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx + \int_{b_s - \frac{\delta}{2}}^{1} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx +$$

$$+ \int_{0}^{b_s + \frac{\delta}{2} - 1} \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx$$

όπου τώρα τα διαστήματα είναι ανά δύο μη επικαλυπτόμενα και περιέχονται στο $[0,1]$, συνεπώς

$$\sum_{k \le s} |S(b_k)|^2 \le \int_0^1 \frac{1}{\delta}|S(x)|^2 + |S(x)S'(x)|dx$$

δηλαδή λαμβάνουμε και πάλι την (3.16). Εντελώς όμοια χειριζόμαστε τη περίπτωση $b_1 - \frac{\delta}{2} < 0$, οπότε καταλήγουμε στην ανισότητα (3.16) σε κάθε περίπτωση. Έχουμε τώρα

- $\int_0^1 |S(x)|^2 dx = \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$, από την ταυτότητα Parseval γιά την S
- $\int_0^1 |S(x)||S'(x)|dx \le \left(\int_0^1 |S(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |S'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(\sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=M+1}^{M+N} |2\pi i n a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

όπου στην ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την Cauchy-Schwarz και στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ταυτότητα Parseval για τις S, S'.
Για το δεύτερο άθροισμα έχουμε

$$2\pi \left(\sum_{n=M+1}^{M+N} |n a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\pi \max\{|M+1|, |M+N|\} \left(\sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Συνεπώς

$$\int_0^1 |S(x)||S'(x)|dx \le 2\pi \max\{|M+1|, |M+N|\} \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

Επιστρέφοντας λοιπόν στην (3.16) έχουμε

$$\sum_{k \le s} |S(b_k)|^2 \le \left(\frac{1}{\delta} + 2\pi \max\{|M+1|, |M+N|\}\right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 \tag{3.17}$$

Τέλος, για να πετύχουμε ομοιομορφία ως προς M στον συντελεστή, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η S είναι 1-περιοδική. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε

$$S_1(a) = \sum_{n=M_1+1}^{M_1+N} c_n e(na)$$

όπου έχουμε επιλέξει τα c_n ως

$$c_n = a_{n-M_1+M}, n \in [M_1+1, M_1+N] \iff a_m = c_{m-M+M_1}, m \in [M+1, M+N].$$

Εφαρμόζουμε στο άθροισμα την αλλαγή μεταβλητής $m = n - M_1 + M$ και παίρνουμε

$$S_1(a) = \sum_{m=M+1}^{M+N} a_m e((m+M_1-M)a) = \sum_{m=M+1}^{M+N} a_m e(ma) = S(a)$$

λόγω της 1-περιοδικότητας. Εντελώς όμοια

$$\sum_{n=M_1+1}^{M_1+N} |c_n|^2 = \sum_{m=M+1}^{M+N} |a_m|^2$$

Εφαρμόζουμε την (3.17) για την S_1 και χρησιμοποιώντας τις ισότητες που μόλις δείξαμε, παίρνουμε

$$\sum_{k\le s} |S(b_k)|^2 \le \left(\frac{1}{\delta} + 2\pi \max\{|M_1+1|, |M_1+N|\}\right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$$

Τώρα το M_1 είναι ελεύθερο προς επιλογή, επομένως παίρνοντας $M_1 = -\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ έχουμε

- $|-\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor + 1| = \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor - 1 \le \frac{N+1}{2} - 1 < \frac{N}{2}$
- $|-\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor + N| = -\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor + N \le -\frac{N}{2} + N = \frac{N}{2}$

Καταλήγουμε λοιπόν στο παρακάτω

Θεώρημα. *(Ανισότητα Μεγάλου Κοσκίνου)*
Αν $b_1, b_2, ..., b_s \in [0,1]$ *με* $\min_{r\neq k} ||b_r - b_k|| = \delta$, *έχουμε*

$$\sum_{k\le s} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(nb_k) \right|^2 \le \left(\frac{1}{\delta} + N\pi\right) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη γενική ανισότητα προκειμένου να πάρουμε μια μέθοδο κοσκίνου. Ας επιλέξουμε τα b_k να είναι οι αριθμοί $\frac{p}{q}$ όπου $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $(p,q) = 1$, $p \le q$ και $q \le Q$. Παρατηρούμε ότι αν $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$ δύο διαφορετικά τέτοια στοιχεία, τότε

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right| = \left| \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2} \right| \ge \frac{1}{Q^2}$$

διότι $q_1 q_2 \le Q^2$ και $|p_1 q_2 - p_2 q_1| \in \mathbb{N}$ με τη περίπτωση να είναι μηδέν να συμβαίνει όταν

$$p_1 q_2 = p_2 q_1 \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$$

αλλά τα επιλέξαμε διακεκριμένα, οπότε $|p_1 q_2 - p_2 q_1| \ge 1$. Ομοίως

$$\left| 1 - \frac{p_1}{q_2} + \frac{p_2}{q_2} \right| = \left| \frac{q_1 q_2 - p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2} \right| \ge \frac{1}{Q^2}$$

αφού αν ο αριθμητής είναι μηδέν, παίρνουμε

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = 1$$

άτοπο. Συνεπώς

$$\left|\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right|\right| \geq \frac{1}{Q^2}$$

Εφαρμόζοντας την γενική ανισότητα που έχουμε αποδείξει, καταλήγουμε στο παρακάτω

Πόρισμα. *(Αριθμητικό Μεγάλο Κόσκινο)*

Με τις προϋποθέσεις που έχουμε για τα $\frac{p}{q}$*, για οποιαδήποτε* $a_{M+1}, ..., a_{M+N} \in \mathbb{C}$*,έχουμε*

$$\sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{p\leq q \\ (p,q)=1}} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{p}{q}n\right)\right|^2 \leq (Q^2 + \pi N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $q \leq Q$ και έχουμε για το αριστερό μέλος

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\leq q \\ (p,q)=1}} \left(\sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{p}{q}n\right) \sum_{m=M+1}^{M+N} \overline{a_m} e\left(-\frac{p}{q}m\right)\right) &= \sum_{\substack{p\leq q \\ (p,q)=1}} \left(\sum_{m,n} a_n \overline{a_m} e\left(\frac{p}{q}(n-m)\right)\right) \\
&= \sum_{m,n} a_n \overline{a_m} \sum_{\substack{p\leq q \\ (p,q)=1}} e\left(\frac{p}{q}(n-m)\right) \\
&= \sum_{m,n} a_n \overline{a_m} c_q(n-m) \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Η διαχείριση της τελευταίας ποσότητας με κατάλληλο τρόπο θα μας βοηθήσει να εξάγουμε μια μέθοδο κοσκίνου από αυτές τις γενικότερες ανισότητες.

Έστω $\mathcal{A}$ ένα σύνολο ακεραίων στο $[M+1, M+N]$ και ένα σύνολο πρώτων $\mathcal{P}$. Για κάθε $p \in \mathcal{P}$ ορίζουμε Ω_p ένα σύνολο υπολοίπων $mod(p)$ με πληθάριθμο $\omega(p)$ ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι γνήσια μικρότερος από p για κάθε $p \in \mathcal{P}$. Έστω επίσης $\Omega = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} \Omega_p$. Σκοπός μας είναι ένα άνω φράγμα για την ποσότητα

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, \Omega, \mathcal{P}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a \not\equiv r \ (mod p), \ \forall \ r \in \Omega_p, \ \forall \ p \in \mathcal{P}\}$$

Σε όλα τα παρακάτω, θα έχουμε $a_n = 0$ αν $n \notin \mathcal{S}(\mathcal{A}, \Omega, \mathcal{P})$. Εξετάζουμε πρώτα το άθροισμα

$$\sum_{m.n} a_n \overline{a_m} c_q(n-m)$$

όταν ο q είναι πρώτος και ανήκει στο $\mathcal{P}$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αθροισμάτων Ramanujan παίρνουμε

$$\sum_{n\equiv m(mod q)} a_n \overline{a_m} c_q(n-m) + \sum_{(q,n-m)=1} a_n \overline{a_m} c_q(n-m) =$$

$$\sum_{n\equiv m(mod q)} a_n \overline{a_m} \phi(q) + \sum_{(q,n-m)=1} a_n \overline{a_m} \mu(q) = (q-1) \sum_{n\equiv m(mod q)} a_n \overline{a_m} - \sum_{(q,n-m)=1} a_n \overline{a_m} =$$

$$= q \sum_{n\equiv m(mod q)} a_n \overline{a_m} - \sum_{n.m} a_n \overline{a_m}.$$

Τώρα, εφόσον τα υπόλοιπα $modq$ που δίνουν συνεισφορά είναι αυτά ακριβώς που δεν ανήκουν στο Ω_q (και είναι $q-\omega(q)$ το πλήθος), έχουμε

$$q\sum_{n\equiv m(modq)} a_n\overline{a_m} - \sum_{n,m} a_n\overline{a_m} = q\sum_{h\notin\Omega_q}\sum_{n\equiv m\equiv h(modq)} a_n\overline{a_m} - \left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2 =$$

$$= q\sum_{h\notin\Omega_q}\left|\sum_{n\equiv h(modq)} a_n\right|^2 - \left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2 \tag{3.19}$$

Απο την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}(q-\omega(q))\sum_{h\notin\Omega_q}\left|\sum_{n\equiv h \mod q} a_n\right|^2 &\geq \left(\sum_{h\notin\Omega_q}\left|\sum_{n\equiv h(modq)} a_n\right|\right)^2\\ &\geq \left|\sum_{h\notin\Omega_q}\sum_{n\equiv h(modq)} a_n\right|^2\\ &= \left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2\end{aligned}$$

Άρα από την (3.19) καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{m.n} a_n\overline{a_m}c_q(n-m) &\geq \frac{q}{q-\omega(q)}\left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2 - \left|\sum_{n\in\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2\\ &= \frac{\omega(q)}{q-\omega(q)}\left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2\end{aligned} \tag{3.20}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε αποδείξει ότι αν

$$S(\alpha) = \sum_{n\in S(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n e(\alpha n)$$

τότε αν q πρώτος, ισχύει

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(p,q)=1\\ p\leq q}}\left|S\left(\frac{p}{q}\right)\right|^2 &= \sum_{m,n\in S(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\overline{a_m}c_q(n-m)\\ &\geq \frac{\omega(q)}{q-\omega(q)}\left|\sum_{n\in S(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2\\ &= \prod_{p|q}\frac{\omega(q)}{q-\omega(q)}|S(0)|^2\end{aligned} \tag{3.21}$$

Έχουμε γράψει τετριμμένα το τελευταίο γινόμενο πάνω από τους πρώτους διαιρέτες του q (στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι πρώτος) προκειμένου να έχουμε μια ενιαία αναφορά στη παραπάνω ανισότητα, για οποιοδήποτε q. Η ανισότητα αποδείχθηκε τώρα για πρώτο q και για οποιαδήποτε ακολουθία a_n με $a_n = 0$ όταν $n \notin S(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})$. Προκειμένου να περάσουμε την ανισότητα σε ελεύθερους τετραγώνων αριθμούς q, χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 4. *Έστω $q = q_1 q_2$ με $(q_1, q_2) = 1$. Αν οι q_1, q_2 ικανοποιούν τη σχέση (3.21), τότε την ικανοποιεί και ο q.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία a_n ώστε $a_n = 0$ όταν $n \notin S(\mathcal{A}, \Omega, \mathcal{P})$. Έχουμε ότι

$$\sum_{(p,q)=1} \left| S\left(\frac{p}{q}\right)\right|^2 = \sum_{(p_1,q_1)=1} \sum_{(p_2,q_2)=1} \left| S\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\right|^2$$

καθώς οι αριθμοί $p_1q_2 + p_2q_1$ με τα $p_1 \leq q_1$ και $p_2 \leq q_2$ να διατρέχουν τις πρωταρχικές κλάσεις $\bmod q_1, q_2$ αντίστοιχα, διατρέχουν όλες τις πρωταρχικές κλάσεις $\bmod q$ χωρίς επαναλήψεις. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχουν $\phi(q_1)\phi(q_2)$ επιλογές για το ζεύγος (p_1, p_2) και για μια τέτοια επιλογή, ο $p_1q_2 + p_2q_1$ καταλαμβάνει μια μοναδική πρωταρχική κλάση $\bmod q$.

Πράγματι, αν δεν καταλαμβάνει πρωταρχική κλάση $\bmod q$, υπάρχει p_0 πρώτος ώστε $p_0 \mid q$ και ταυτόχρονα $p_0 \mid p_1q_2 + p_2q_1$. Η πρώτη σχέση μας δίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $p_0 \mid q_1$, οπότε από τη δεύτερη σχέση λαμβάνουμε $p_0 \mid p_1q_2$, το οποίο είναι άτοπο καθώς $(p_1q_2, q_1) = 1$. Τέλος, οι κλάσεις που καταλαμβάνονται είναι ανά δύο διαφορετικές, καθώς αν

$$p_1q_2 + p_2q_1 = p_1'q_2 + p_2'q_1$$

τότε

$$(p_1 - p_1')q_2 = (p_2' - p_2)q_1$$

το οποίο μας δίνει $q_2 \mid p_2 - p_2'$, δηλαδή $p_2 = p_2'$ και αντίστοιχα $p_1 = p_1'$.

Τέλος, υπάρχουν $\phi(q)$ πρωταρχικές κλάσεις $\bmod p$ και καθώς $\phi(q) = \phi(q_1)\phi(q_2)$ έπεται ότι καταλαμβάνονται όλες ακριβώς μία φορά, επομένως ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

Θεωρώντας τώρα το p_1 σταθεροποιημένο,έχουμε ότι

$$\sum_{(p_2,q_2)=1} \left| S\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\right|^2 = \sum_{(p_2,q_2)=1} \left| S_1\left(\frac{p_2}{q_2}\right)\right|^2$$

όπου

$$\begin{aligned} S_1(\alpha) &= S\left(\frac{p_1}{q_1} + \alpha\right) \\ &= \sum_{n \in S(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n e\left(n\frac{p_1}{q_1}\right) e(n\alpha) \end{aligned}$$

καθώς τώρα ο q_2 ικανοποιεί την (3.21) για κάθε ακολουθία a_n, αν επιλέξουμε την $a_n e\left(n\frac{p_1}{q_1}\right)$ στον ρόλο αυτής της ακολουθίας, λαμβάνουμε

$$\sum_{(p_2,q_2)=1} \left| S_1\left(\frac{p_2}{q_2}\right)\right|^2 \geq \prod_{p \mid q_2} \frac{\omega(q_2)}{q_2 - \omega(q_2)} |S_1(0)|^2$$

αντικαθιστώντας τον ορισμό μας για την S_1 τώρα η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\sum_{(p_2,q_2)=1} \left| S\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\right|^2 \geq \prod_{p \mid q_2} \frac{\omega(q_2)}{q_2 - \omega(q_2)} \left| S\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|^2$$

Αθροίζουμε τώρα στη παραπάνω σχέση και πάνω απο τα (p_1, q_1) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι και ο q_1 ικανοποιεί την (3.21) λαμβάνουμε τελικά

$$\sum_{(p_1,q_1)=1} \sum_{(p_2,q_2)=1} \left| S\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right)\right|^2 \geq \prod_{p \mid q_2} \frac{\omega(q_2)}{q_2 - \omega(q_2)} \prod_{p \mid q_1} \frac{\omega(q_1)}{q_1 - \omega(q_1)} |S(0)|^2$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $q = q_1q_2$ και ότι (q_1, q_2) ολοκληρώνουμε την απόδειξη.

□

Άμεση συνέπεια αυτού του λήμματος είναι το παρακάτω, που το γράφουμε ως λήμμα χάριν καλύτερης ροής.

Λήμμα 5. *Για έναν ελεύθερο τετραγώνων q, αν*

$$S(\alpha) \quad = \quad \sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n e(n\alpha)$$

τότε

$$\sum_{(p,q)=1} \left|S\left(\frac{p}{q}\right)\right|^2 \geq \prod_{p|q} \frac{\omega(p)}{p-\omega(p)} \left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2$$

Ἀπόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο πλήθος των πρώτων διαιρετών του q. Αν αυτό είναι 1, τότε ο q είναι πρώτος και η ζητούμενη σχέση είναι ακριβώς η (3.20), την οποία έχουμε ήδη αποδείξει. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για ελεύθερους τετραγώνων αριθμούς που έχουν k το πλήθος πρώτους διαιρέτες. Αν q ένας ελεύθερος τετραγώνων με $k+1$ το πλήθος πρώτους διαιρέτες. τότε αν p_0 ένας πρώτος διαιρέτης του, ισχύει ότι $(\frac{q}{p_0}, p_0) = 1$, και ο $\frac{q}{p_0}$ έχει k το πλήθος πρώτους διαιρέτες. Επομένως από την επαγωγική υπόθεση, ικανοποιεί την σχέση (3.21) Την αντίστοιχη σχέση ικανοποιεί φυσικά και ο p, επομένως από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε το ζητούμενο □

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω

Θεώρημα. *Με τους ορισμούς που έχουμε δώσει για τα σύνολα $\mathcal{A}, \mathcal{P}, \Omega_p, \Omega, \mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})$ και για τις ποσότητες $\omega(p)$ για $p \in \mathcal{P}$, έχουμε*

$$\left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2 \leq \frac{\pi N + Q^2}{\sum\limits_{q\leq Q} H(q)} \sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} |a_n|^2,$$

όπου $H(q) = \prod\limits_{p|q} \frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}$,για q ελεύθερο τετραγώνων και $H(q) = 0$ αλλιώς.

Ἀπόδειξη. Από το πόρισμα της ανισότητας μεγάλου κοσκίνου, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{q\leq Q} \mu^2(q) \sum_{\substack{p\leq q\\(p,q)=1}} \left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n e\left(\frac{p}{q}n\right)\right|^2 \quad &\leq \quad \sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{p\leq q\\(p,q)=1}} \left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n e\left(\frac{p}{q}n\right)\right|^2 \\ &\leq \quad (Q^2+\pi N) \sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} |a_n|^2\end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε ότι

$$\sum_{q\leq Q} \mu^2(q) \sum_{(p,q)=1} \left|S\left(\frac{p}{q}\right)\right|^2 \leq (\pi N + Q^2) \sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} |a_n|^2$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5 και λαμβάνουμε ότι το αριστερό μέλος είναι μεγαλύτερο από

$$\left|\sum_{n\in\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})} a_n\right|^2 \sum_{q\leq Q} H(q)$$

και συνεπώς έχουμε τη ζητούμενη σχέση. □

Ειδικότερα, παίρνουμε το παρακάτω

Πόρισμα.

$$|\mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})| \leq \frac{\pi N + Q^2}{\sum\limits_{q\leq Q} H(q)}$$

Ισχύει το άνω φράγμα

Ἀπόδειξη. Επιλέγουμε $a_n = 1$ για κάθε $n \in \mathcal{S}(\mathcal{A},\Omega,\mathcal{P})$. □

Ολοκληρώνουμε τη συζήτηση μας διατυπώνοντας μια εκδοχή του μεγάλου κοσκίνου η οποία θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στο μέλλον.

Πρόταση. ***(Gallagher)*** *Έστω $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in [M+1, M+N]$. Ισχύει ότι*

$$\sum_{q\leq Q} \frac{q}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \leq (\pi N + Q^2) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2$$

όπου το σύμβολο $\sum^*$ δηλώνει άθροιση πάνω από τους πρωταρχικούς χαρακτήρες.

Ἀπόδειξη. Θεωρούμε την

$$S(a) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(na)$$

Σταθεροποιούμε ένα $q \leq Q$ και έναν πρωταρχικό χαρακτήρα χ $(mod q)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m=1}^{q} \chi(m) S\left(\frac{m}{q}\right) \right|^2 &= \left| \sum_{m}^{q} \chi(m) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{mn}{q}\right) \right|^2 \\
&= \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e\left(\frac{mn}{q}\right) \right|^2 \\
&= \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n G(n,\chi) \right|^2
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη διαχωρισιμότητα του αθροίσματος Gauss λαμβάνουμε ότι η τελευτάια ποσότητα είναι ίση με

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \overline{\chi(n)} G(1,\chi) \right|^2 &= |G(1,\chi)|^2 \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \overline{\chi(n)} \right|^2 \\
&= q \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \overline{\chi(n)} \right|^2
\end{aligned}$$

Αθροίζουμε πάνω από όλους τους πρωταρχικούς χαρακτήρες και λαμβάνουμε

$$\sideset{}{^*}\sum_{\chi} \left| \sum_{m=1}^{q} \chi(m) S\left(\frac{m}{q}\right) \right|^2 = q \sideset{}{^*}\sum_{\chi} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \overline{\chi(n)} \right|^2 \tag{3.22}$$

Δεδομένου ότι όταν ο χ διατρέχει τους πρωταρχικούς χαρακτήρες το ίδιο κάνει και ο $\overline{\chi}$, το δεύτερο μέλος της (3.22) γράφεται

$$q \sideset{}{^*}\sum_{\chi} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n) \right|^2$$

Για το πρώτο μέλος της (3.22), έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi}^{*}\left|\sum_{m=1}^{q}\chi(m)S\left(\frac{m}{q}\right)\right|^2 &\leq \sum_{\chi}\left|\sum_{m=1}^{q}\chi(m)S\left(\frac{m}{q}\right)\right|^2 \\
&= \sum_{\chi}\sum_{m,k}\chi(m)\overline{\chi(k)}S\left(\frac{m}{q}\right)\overline{S\left(\frac{k}{q}\right)} \\
&= \sum_{m,k}S\left(\frac{m}{q}\right)\overline{S\left(\frac{k}{q}\right)}\sum_{\chi}\chi(m)\overline{\chi(k)} \\
&= \sum_{\substack{(m,q)=1\\(k,q)=1\\m\equiv k \mod q}} S\left(\frac{m}{q}\right)\overline{S\left(\frac{k}{q}\right)}\phi(q)
\end{aligned}$$

Όμως $1 \leq m,k \leq q$ οπότε $m \equiv k \mod q \Rightarrow m = k$, επομένως η τελευταία έκφραση είναι ίση με

$$\phi(q)\sum_{(m,q)=1}\left|S\left(\frac{m}{q}\right)\right|^2$$

Συνοψίζοντας, επανερχόμενοι στην (3.22), έχουμε δείξει ότι

$$\sum_{(m,q)=1}\left|S\left(\frac{m}{q}\right)\right|^2 \geq \frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2$$

Αθροίζουμε πάνω από όλα τα $q \leq Q$ και παίρνουμε

$$\sum_{q\leq Q}\sum_{(m,q)=1}\left|S\left(\frac{m}{q}\right)\right|^2 \geq \sum_{q\leq Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2$$

Εφαρμόζοντας το Αριθμητικό μεγάλο κόσκινο για το αριστερό μέλος έχουμε το ζητούμενο.

□

Κεφάλαιο 4

Το Θεώρημα Bombieri-Vinogradov και το επίπεδο κατανομής των πρώτων αριθμών

Όπως έχουμε ήδη δει, το Θεώρημα Siegel-Walfisz μας δίνει ότι για $q \leq (\log x)^B$, όπου $B > 0$, ισχύει

$$\psi(x; q, a) - \frac{x}{\phi(q)} = O_B\left(xe^{-C(B)\sqrt{\log x}}\right).$$

Ειδικότερα, συμπεραίνουμε πως το σφάλμα είναι τάξεως

$$O_{A,B}\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right)$$

για οποιοδήποτε $A > 0$. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του σφάλματος

$$\psi(x; q, a) - \frac{x}{\phi(q)}$$

κατά μέσο όρο, και θα δούμε ότι στην πραγματικότητα το σφάλμα αυτό συμπεριφέρεται σύμφωνα με αυτό που προβλέπει η Γενικευμένη Υπόθεση Riemann. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το ακόλουθο σημαντικότατο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 16 (Bombieri-Vinogradov)**.** *Έστω $A > 0$. Τότε υπάρχει $B = B(A) > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y \leq x} \left|\psi(y; q, a) - \frac{y}{\phi(q)}\right| \ll_A \frac{x}{\log^A(x)},$$

όπου $Q = x^{\frac{1}{2}} \log^{-B}(x)$.

Στο κεφάλαιο αυτό έχουμε συμβουλευτεί κυρίως τις αναφορές [3, 12].

4.1 Η συνάρτηση διακύμανσης

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας σε ένα γενικότερο πλαίσιο.

Ορισμός 16. *Έστω f μία αριθμητική συνάρτηση. Για $(a, q) = 1$ ορίζουμε την discrepancy συνάρτηση (συνάρτηση διασποράς ή συνάρτηση διακύμανσης) της f ως*

$$D_f(N; q, a) = \sum_{\substack{n \leq N \\ n \equiv a \mod q}} f(n) - \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\substack{n \leq N \\ (n,q)=1}} f(n).$$

Η συνάρτηση αυτή μας δείχνει πόσο απέχει η συνάρτηση f απο το να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη κατά μέσο όρο, πάνω απο τις πρωταρχικές κλάσεις υπολοίπων $\bmod q$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} D_f(N;q,a) &= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{n\le N} f(n)\sum_{\chi}\chi(n)\overline{\chi(a)} - \frac{1}{\phi(q)}\sum_{n\le N} f(n)\chi_0(n) \\ &= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{n\le N} f(n)\left(\sum_{\chi}\chi(n)\overline{\chi(a)} - \chi_0(n)\right) \\ &= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{n\le N} f(n)\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(n)\overline{\chi(a)} \\ &= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(a)}\sum_{n\le N} f(n)\chi(n). \end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν να μεταφέρουμε την μελέτη του Θεωρήματος Bombieri-Vinogradov στη μελέτη τέτοιων συναρτήσεων, όπως αποδεικνύουμε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 9. *Το Θεώρημα Bombieri-Vinogradov είναι ισοδύναμο με την εκτίμηση*

$$\sum_{q\le Q}\max_{(a,q)=1}\max_{y\le x}|D_\Lambda(y;q,a)| \ll_A \frac{x}{\log^A(x)}$$

όπου $Q = x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}(x)$.

Ἀπόδειξη. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \psi(y;q,a) - \frac{y}{\phi(q)} &= \sum_{\substack{n\le y\\ n\equiv a \bmod q}}\Lambda(n) - \frac{y}{\phi(q)} \\ &= D_\Lambda(y;q,a) + \left(\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\substack{n\le y\\ (n,q)=1}}\Lambda(n) - \frac{y}{\phi(q)}\right) \\ &= D_\Lambda(y;q,a) + \frac{1}{\phi(q)}O\left(\frac{y}{\log^{A+1}(y)}\right). \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα των πρώτων αριθμών παίρνουμε

$$\sum_{q\le Q}\max_{(a,q)=1}\max_{y\le x}\frac{1}{\phi(q)}\frac{y}{\log^{A+1}(y)} \ll \frac{x}{\log^{A+1}(x)}\log x \ll \frac{x}{\log^A(x)},$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Για να μπορέσουμε λοιπόν να αποδείξουμε το Θεώρημα Bombieri-Vinogradov, αρκεί να αποδείξουμε την εκτίμηση της Πρότασης 9.

Λήμμα 6. *Έστω* $\beta = (\beta_n)_{n\le N}$ *ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $0 < \Delta \le 1$ *τέτοιο ώστε*

$$\max_{(a,q)=1}\max_{y\le N}|D_\beta(y;q,a)| \le \|\beta\|_2\Delta^9 N^{\frac{1}{2}},$$

όπου

$$\|\beta\|_2 = \left(\sum_n|\beta_n|^2\right)^{1/2}.$$

Τότε, αν ο χ είναι ένας μη κύριος χαρακτήρας $\bmod q$*, για κάθε θετικό ακέραιο s έχουμε*

$$\max_{y\le N}\left|\sum_{\substack{(n,s)=1\\ n\le y}}\chi(n)\beta_n\right| \le q\|\beta\|_2 N^{\frac{1}{2}}\Delta^3\tau(s).$$

Απόδειξη. Αρχικά απαλείφουμε τη συνθήκη $(n,s)=1$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mu * u = I$, και παίρνουμε

$$\sum_{n\le y}\chi(n)\beta_n\sum_{d|(n,s)}\mu(d) = \sum_{d|s}\mu(d)\sum_{\substack{d|n\\ n\le y}}\chi(n)\beta_n.$$

Έστω τώρα μία παράμετρος $D>0$ (την τιμή της οποίας θα επιλέξουμε αργότερα). Χωρίζουμε το παραπάνω άθροισμα ως εξής:

$$\sum_{\substack{d|s\\ d\le D}}\mu(d)\sum_{\substack{d|n\\ n\le y}}\chi(n)\beta_n + \sum_{\substack{d|s\\ d> D}}\mu(d)\sum_{\substack{d|n\\ n\le y}}\chi(n)\beta_n. \tag{4.1}$$

Για το δεύτερο άθροισμα, εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\substack{d|s\\ d>D}}\mu(d)\sum_{\substack{d|n\\ n\le y}}\chi(n)\beta_n\right| &\le \sum_{\substack{d|s\\ d>D}}\sum_{\substack{d|n\\ n\le y}}|\beta_n|\\ &\le \|\beta\|_2\sum_{\substack{d|s\\ d>D}}\left(\sum_{\substack{d|n\\ n\le y}}1\right)^{1/2}\\ &\le \|\beta\|_2\sum_{\substack{d|s\\ d>D}}\left(\frac{y}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \le \|\beta\|_2 N^{\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}}\tau(s).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Για το πρώτο άθροισμα της (4.1), κάνουμε αρχικά την εξής παρατήρηση: για μία αριθμητική συνάρτηση f και έναν αριθμό d που είναι ελεύθερος τετραγώνων έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d|n\\ n\le z}}f(n) &= \sum_{n\le z}f(n)I\left(\frac{d}{(n,d)}\right)\\ &= \sum_{n\le z}f(n)\sum_{m|\frac{d}{(n,d)}}\mu(m)\\ &= \sum_{m|d}\mu(m)\sum_{\substack{((n,d),m)=1\\ n\le z}}f(n).\end{aligned}$$

Για $m|d$ όμως έχουμε ότι $((n,d),m)=(n,m)$. Άρα

$$\sum_{\substack{d|n\\ n\le z}}f(n) = \sum_{m|d}\mu(m)\sum_{\substack{(n,m)=1\\ n\le z}}f(n).$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη παρατήρηση, το πρώτο άθροισμα στην (4.1) παίρνει την μορφή (για μικρά d η αρχική συνθήκη βοηθάει, οπότε την επαναφέρουμε):

$$\sum_{\substack{d|s\\ d\le D}}\mu(d)\sum_{\substack{d|n\\ n\le y}}\chi(n)\beta_n = \sum_{\substack{d|s\\ d\le D}}\mu(d)\sum_{m|d}\mu(m)\sum_{\substack{(n,m)=1\\ n\le y}}\chi(n)\beta_n. \tag{4.3}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{(a,mq)=1} \chi(a) D_\beta(y; mq, a) = \sum_{(a,mq)=1} \sum_{\substack{n \le y \\ n \equiv a \pmod{(mq)}}} \beta_n \chi(a) - \frac{1}{\phi(mq)} \sum_{\substack{(n,mq)=1 \\ n \le y}} \beta_n \sum_{(a,mq)=1} \chi(a).$$

Για τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους παρατηρούμε ότι αν $\psi(n) = \chi(n)\chi_0(n)$, όπου $\chi_0(n)$ ο κύριος χαρακτήρας $\bmod (mq)$, τότε αφού ο ψ δεν είναι κύριος έχουμε ότι

$$0 = \sum_{(a,mq)=1} \psi(a) = \sum_{(a,mq)=1} \chi(a).$$

Συνεπώς απομένει να χειριστούμε τον πρώτο όρο. Παρατηρούμε ότι για έναν $n \le y$ ισχύει ότι

$$(n, mq) = 1 \iff n \equiv a \pmod{(mq)}, \text{ για κάποιο } (a, mq) = 1.$$

Επίσης έχουμε ότι αν $n \equiv a \pmod{(mq)}$ τότε $n \equiv a \pmod{(q)}$, οπότε $\chi(n) = \chi(a)$. Κατά συνέπεια λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{(a,mq)=1} \chi(a) D_\beta(y; mq, a) &= \sum_{(a,mq)=1} \sum_{\substack{n \le y \\ n \equiv a \pmod{(mq)}}} \beta_n \chi(a) \\ &= \sum_{\substack{(n,mq)=1 \\ n \le y}} \beta_n \chi(n) = \sum_{\substack{(n,m)=1 \\ n \le y}} \beta_n \chi(n). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση για τη συνάρτηση διακύμανσης της β_n έχουμε

$$\max_{y \le N} \left| \sum_{\substack{(n,m)=1 \\ n \le y}} \beta_n \chi(n) \right| \le \sum_{(a,mq)=1} \Delta^9 N^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_2 = \Delta^9 N^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_2 \phi(mq).$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (4.3) παίρνουμε το φράγμα

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{d|s \\ d \le D}} \mu(d) \sum_{\substack{d|n \\ n \le y}} \chi(n) \beta_n \right| &\le \sum_{\substack{d|s \\ d \le D}} \sum_{m|d} \left| \sum_{\substack{(n,m)=1 \\ n \le y}} \chi(n) \beta_n \right| \\ &\le \Delta^9 N^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_2 \sum_{\substack{d|s \\ d \le D}} \sum_{m|d} \phi(mq). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\phi(mq) \le m\phi(q)$ και συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα στο δεξί μέλος φράσσεται από

$$\phi(q) \sum_{\substack{d|s \\ d \le D}} \sum_{m|d} m \le \phi(q) \sum_{m|s} m \frac{D}{m} = \phi(q)\, D\, \tau(s).$$

Συνεπώς το πρώτο κομμάτι φράσσεται από

$$\phi(q) \Delta^9 N^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_2\, D\, \tau(s). \tag{4.4}$$

Αθροίζοντας τα φράγματα (4.2) και (4.4), συμπεραίνουμε ότι

$$\max_{y \le N} \left| \sum_{\substack{(n,s)=1 \\ n \le y}} \chi(n) \beta_n \right| \le \tau(s) \|\beta\|_2 N^{\frac{1}{2}} (D^{-\frac{1}{2}} + \phi(q) D \Delta^9).$$

Αφού $q > 1$ έχουμε $\phi(q) < q$, και επιλέγοντας $D = \Delta^{-6}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Είμαστε λοιπόν τώρα σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 17. *Έστω β_n, $n \le N$ τέτοια ώστε*

$$\max_{(a,q)=1} \max_{y \le N} |D_\beta(y;q,a)| \le \Delta^9 N^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_2$$

για κάποιο $0 < \Delta \le 1$ και για κάθε $q \le \Delta^{-1}$. Έστω επίσης ακολουθία $\alpha = (\alpha_m)_{m \le M}$. Τότε, για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι

$$\sum_{q \le Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y \le x} |D_{\alpha * \beta}(y;q,a)| \ll \left(\Delta(MN)^{\frac{1}{2}} + M^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}} + Q\right) \log^2(Q) \log(2MN) \|\alpha\|_2 \|\beta\|_2.$$

Απόδειξη. Αρχικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \le MN$ λόγω των φορέων των ακολουθιών α_m και β_n. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} D_{\alpha*\beta}(y;q,a) &= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi(a)} \sum_{k \le y} \chi(k) \sum_{mn=k} \alpha_m \beta_n \\ &= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi(a)} \sum_{mn \le y} \alpha_m \beta_n \chi(m) \chi(n). \end{aligned}$$

Επομένως

$$\max_{(a,q)=1} \max_{y \le x} |D_{\alpha*\beta}(y;q,a)| \le \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \max_{y \le x} \left| \sum_{mn \le y} \alpha_m \beta_n \chi(m) \chi(n) \right|. \tag{4.5}$$

Σκοπός μας τώρα είναι να αθροίσουμε μόνο πάνω από πρωταρχικούς χαρακτήρες, έχοντας υπόψιν το μεγάλο κόσκινο. Για ένα δεδομένο q έχουμε ότι για κάθε πολλαπλάσιο τού sq με $s \le \frac{Q}{q}$ και κάθε μη πρωταρχικό χαρακτήρα $\chi \mod (sq)$ με conductor q ισχύει

$$\chi(k) = \chi_1(k)\chi_0(k),$$

όπου ο χ_1 είναι ο πρωταρχικός χαρακτήρας $\mod (q)$ που επάγει τον χ και χ_0 ο κύριος χαρακτήρας $\mod (sq)$. Στο εσωτερικό άθροισμα της (4.5), για έναν τέτοιο χαρακτήρα χ μας ενδιαφέρουν μόνο τιμές m, n αντίστοιχα, σχετικά πρώτες προς το sq. Σε αυτή τη περίπτωση, από τη παραπάνω σχέση παίρνουμε $\chi(k) = \chi_1(k)$. Κατά συνέπεια το άθροισμα γράφεται

$$\sum_{\substack{mn \le y \\ (mn,s)=1}} \chi_1(m)\chi_1(n)\alpha_m\beta_n.$$

Συνεπώς μπορούμε να εκφράσουμε πλήρως το άθροισμα που μας ενδιαφέρει χρησιμοποιώντας μόνο κάποιον πρωταρχικό χαρακτήρα. Από αυτή την συζήτηση λοιπόν γίνεται φανερό ότι, αφού αθροίσουμε και πάνω από όλα τα $q \le Q$, το δεξί μέλος της (4.5) ισούται με

$$\sum_{q \le Q} \sum_{s \le \frac{Q}{q}} \frac{1}{\phi(sq)} \sum_{\chi}^{*} \max_{y \le x} \left| \sum_{\substack{mn \le y \\ (mn,s)=1}} \chi(m)\chi(n)\alpha_m\beta_n \right|,$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο $\sum^*$ δηλώνει άθροιση μόνο πάνω απο πρωταρχικούς χαρακτήρες. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\phi(sq) \ge \phi(s)\phi(q)$, παίρνουμε ότι

$$\sum_{q \le Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y \le x} |D_{\alpha*\beta}(y;q,a)| \le \sum_{s \le Q} \frac{1}{\phi(s)} \sum_{q \le Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi}^{*} \max_{y \le x} \left| \sum_{\substack{mn \le y \\ (mn,s)=1}} \chi(m)\chi(n)\alpha_m\beta_n \right|. \tag{4.6}$$

Στο εξής θα ασχοληθούμε με το εσωτερικό άθροισμα, δηλαδή με την ποσότητα

$$\sum_{q\le Q}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi}\max_{y\le x}\left|\sum_{\substack{mn\le y\\(mn,s)=1}}\chi(m)\chi(n)\alpha_m\beta_n\right|. \tag{4.7}$$

Γιά $q\le Q_1=\Delta^{-1}$ γράφουμε

$$\sum_{q\le Q_1}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi}\max_{y\le x}\left|\sum_{\substack{mn\le y\\(mn,s)=1}}\chi(m)\chi(n)\alpha_m\beta_n\right|=\sum_{q\le Q_1}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi}\max_{y\le x}\left|\sum_{\substack{m\le M\\(m,s)=1}}\chi(m)\alpha_m\sum_{\substack{n\le\frac{y}{m}\\(n,s)=1}}\beta_n\chi(n)\right|.$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 6. Η ποσότητα μας είναι μικρότερη από

$$\sum_{q\le Q_1}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi}\max_{y\le x}\sum_{m\le M}|\alpha_m|\left|\sum_{\substack{(n,s)=1\\n\le\frac{y}{m}}}\beta_n\chi(n)\right|\le\Delta^3\tau(s)\|\beta\|N^{\frac12}\sum_{q\le Q_1}\frac{q}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi}\sum_{m\le M}|\alpha_m|.$$

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι χαρακτήρες $\bmod(q)$ είναι $\phi(q)$ στο πλήθος και εν συνεχεία εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz, οπότε φράσσουμε την τελευταία ποσότητα από

$$\begin{aligned}N^{\frac12}\Delta^3\tau(s)\|\beta\|\sum_{q\le Q_1}q\left(\sum_{m\le M}|\alpha_m|^2\right)^{\frac12}M^{\frac12}&\le(MN)^{\frac12}\Delta^3\tau(s)\|\beta\|\alpha\|\sum_{q\le Q_1}q\\&\le\Delta^3(MN)^{\frac12}\tau(s)Q_1^2\|\alpha\|\|\beta\|.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Θα εστιάσουμε τώρα στο υπόλοιπο κομμάτι του αθροίσματος (4.7), δηλαδή στο άθροισμα

$$\sum_{Q_1<q\le Q}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi}\max_{y\le x}\left|\sum_{\substack{mn\le y\\(mn,s)=1}}\chi(m)\chi(n)\alpha_m\beta_n\right|. \tag{4.9}$$

Σκοπός μας είναι να απαλλαχθούμε απο την περιοριστική συνθήκη $mn\le y$ αλλά και από το max. Για τον λόγο αυτόν, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής εκτίμηση:

$$\int_{-T}^{T}e^{ita}\frac{\sin tb}{t}dt=\begin{cases}\pi+O(T^{-1}|b-|a||^{-1}),\\ \text{αν}\\ |a|<b,\\ O\left(T^{-1}|b-|a||^{-1}\right),\\ \text{αν}\\ |a|>b.\end{cases}$$

Απο αυτή τη σχέση βλέπουμε έναν τρόπο να παίρνουμε συνεισφορά μόνο όταν $|a|<b$. Επιλέγουμε $a=\log mn$ και $b=\log y$, οπότε

$$\int_{-T}^{T}(mn)^{it}\frac{\sin(t\log(y))}{t}dt=\pi+O\left(T^{-1}\left(\log\frac{y}{mn}\right)^{-1}\right),\ \ mn\le y$$

και

$$\int_{-T}^{T}(mn)^{it}\frac{\sin(t\log(y))}{t}dt=O\left(T^{-1}\left(\log\frac{y}{mn}\right)^{-1}\right),\quad\text{αλλιώς.}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\le M}\sum_{n\le N}\alpha_m\beta_n\chi(m)\chi(n)\int_{-T}^{T}(mn)^{it}\frac{\sin(t\log(y))}{\pi t}dt\\
&=\sum_{mn\le y}\alpha_m\beta_n\chi(m)\chi(n)\left(1+O\left(T^{-1}\left(\log\frac{y}{mn}\right)^{-1}\right)\right)\\
&+\sum_{mn>y}\alpha_m\beta_n\chi(m)\chi(n)O\left(T^{-1}\left|\log\frac{y}{mn}\right|^{-1}\right)\\
&=\sum_{mn\le y}\alpha_m\beta_n\chi(m)\chi(n)+O\left(\sum_{m\le M}\sum_{n\le N}|\alpha_m\beta_n|T^{-1}\left|\log\frac{y}{mn}\right|^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{mn\le y}\alpha_m\beta_n\chi(m)\chi(n) &= \sum_{m\le M}\sum_{n\le N}\alpha_m\beta_n\chi(m)\chi(n)\int_{-T}^{T}(mn)^{it}\frac{\sin(t\log y)}{\pi t}dt\\
&+O\left(\sum_{m\le M}\sum_{n\le N}|\alpha_m\beta_n|T^{-1}\left|\log\frac{y}{mn}\right|^{-1}\right). \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Θέτουμε $A(t,\chi)=\sum_{m\le M}\alpha_m\chi(m)m^{it}$ και αντίστοιχα $B(t,\chi)=\sum_{n\le N}\beta_n\chi(n)n^{it}$ οπότε ο κύριος όρος γράφεται

$$\int_{-T}^{T}A(t,\chi)B(t,\chi)\frac{\sin(t\log y)}{\pi t}dt.$$

Αρχικά απαλείφουμε την εξάρτηση από το y χρησιμοποιώντας το φράγμα

$$\left|\frac{\sin(t\log y)}{\pi t}\right|\ll\min\left\{\log(2MN),\frac{1}{|t|}\right\},$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε τον όρο $2MN$ αντί για MN για να αποφύγουμε τη περίπτωση $MN=1$ που μηδενίζει τον λογάριθμο). Συνεπώς ο κύριος όρος φράσσεται από

$$\ll\int_{-T}^{T}|A(t,\chi)\|B(t,\chi)|\min\left\{\log(2MN),\frac{1}{|t|}\right\}dt.$$

Επίσης, απαλείφουμε την εξάρτηση από το y στον όρο του σφάλματος ως εξής. Μπορούμε να πάρουμε $y=k+\frac{1}{2},\ k\in\mathbb{Z}_{>0}$ (εφόσον μας ενδιαφέρουν ακέραιες τιμες για το mn) και έτσι $|y-mn|\ge\frac{1}{2}$, επομένως γράφουμε:

- αν $y>mn$ έχουμε ότι
$$\log\left(\frac{y}{mn}\right)\ge 1-\frac{mn}{y}=\frac{y-mn}{y}\ge\frac{1}{2MN},$$
- αν $y<mn$ έχουμε ότι
$$\log\left(\frac{mn}{y}\right)\ge 1-\frac{y}{mn}=\frac{mn-y}{mn}\ge\frac{1}{2MN}.$$

Δηλαδή $\left|\log\frac{y}{mn}\right|^{-1}\ll MN$. Συνεπώς, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\max_{y\le x}\left|\sum_{mn\le y}\alpha_m\beta_n\chi(m)\chi(n)\right| &\ll \int_{-T}^{T}|A(t,\chi)\|B(t,\chi)|\min\left\{\log(2MN),\frac{1}{|t|}\right\}dt\\
&+\frac{MN}{T}\sum_{m\le M}\sum_{m\le N}|\alpha_m\|\beta_n|. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Επανερχόμαστε τώρα στο άθροισμα (4.9). Χρησιμοποιώντας δυαδική άθροιση με $U = 2^j$, $j_0 \leq j \leq j_1$ με $2^{j_0} \leq Q_1 < 2^{j_0+1}$ και $2^{j_1} \leq Q < 2^{j_1+1}$, για τον πρώτο όρο παίρνουμε

$$\sum_{Q_1 \leq q \leq Q} \frac{1}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |A(t,\chi)\|B(t,\chi)| min\left\{\log(2MN), \frac{1}{|t|}\right\} dt$$
$$\leq \int_{-T}^{T} \min\left\{\log(2MN), \frac{1}{|t|}\right\} \sum_{U} \frac{1}{U} \sum_{U<q\leq 2U} \frac{q}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} |A(t,\chi)\|B(t,\chi)|dt. \tag{4.12}$$

Σε κάθε δυαδικό διάστημα $U < q \leq 2U$ εφαρμόζουμε την Cauchy-Schwarz και στη συνέχεια το μεγάλο κόσκινο, έχοντας υπόψιν ότι $|\alpha_m m^{it}| = |\alpha_m|$ και αντίστοιχα για τα β_n:

$$\begin{aligned}\sum_{U<q\leq 2U} \frac{q}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} |A(t,\chi)\|B(t,\chi)| &\leq \left(\sum_{U<q\leq 2U} \frac{q}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} |A(t,\chi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{U<q\leq 2U} \frac{q}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} |B(t,\chi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll (M+U^2)^{\frac{1}{2}}(N+U^2)^{\frac{1}{2}}\|\alpha_m\|\|\beta_n\|.\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{U} \frac{1}{U} \sum_{U<q\leq 2U} \frac{q}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} |A(t,\chi)\|B(t,\chi)| &\ll \|\alpha_m\|\|\beta_n\| \sum_{U} \frac{1}{U}(M^{\frac{1}{2}}+U)(N^{\frac{1}{2}}+U) \\ &\ll \|\alpha_m\|\|\beta_n\| \left((MN)^{\frac{1}{2}}Q_1^{-1} + M^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}} + Q\right)\log(Q).\end{aligned}$$

Συνεπώς το δεξί μέλος στην εξίσωση (4.12) φράσσεται από

$$\|\alpha_m\|\|\beta_n\| \left((MN)^{\frac{1}{2}}Q_1^{-1} + M^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}} + Q\right)\log(Q) \int_{-T}^{T} \min\left\{\log(2MN), \frac{1}{|t|}\right\} dt.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα, εφόσον η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε είναι άρτια, συμπεραίνουμε ότι φράσσεται από

$$\ll \int_{0}^{\log^{-1}(2MN)} \log(2MN)dt + \int_{\log^{-1}(2MN)}^{T} \frac{1}{t}dt \ll \log(T).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην εκτίμηση

$$\sum_{Q_1 \leq q \leq Q} \frac{1}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |A(t,\chi)\|B(t,\chi)| min\left\{\log(2MN), \frac{1}{|t|}\right\} dt$$
$$\ll \|\alpha_m\|\|\beta_n\| \left((MN)^{\frac{1}{2}}Q_1^{-1} + M^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}} + Q\right)\log(Q)\log(T). \tag{4.13}$$

Για τον δεύτερο όρο στην (4.11), εφαρμόζουμε Cauchy-Schwarz για να πάρουμε

$$\sum_{m\leq M}\sum_{n\leq N} |\alpha_m\|\beta_n| \leq (MN)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m\leq M}\sum_{n\leq N} |\alpha_m|^2|\beta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (MN)^{\frac{1}{2}}\|\alpha_m\|\|\beta_n\|.$$

Άρα η συνεισφορά του δεύτερου όρου της (4.11) στην (4.9) είναι

$$\ll (MN)^{\frac{3}{2}}T^{-1}\|\alpha_m\|\|\beta_n\| \sum_{Q_1<q\leq Q} \frac{1}{\phi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi} 1 \ll (MN)^{\frac{3}{2}}T^{-1}\|\alpha_m\|\|\beta_n\|Q. \tag{4.14}$$

Μαζεύοντας ολές τις εκτιμήσεις (4.8), (4.13) και (4.14) λαμβάνουμε στην (4.7) το φράγμα

$$\begin{aligned}&\ll (MN)^{\frac{3}{2}}T^{-1}\|\alpha_m\|\|\beta_n\|Q \\ &+\|\alpha_m\|\|\beta_n\| \left((MN)^{\frac{1}{2}}Q_1^{-1} + M^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}} + Q\right)\log(Q)\log(T) \\ &+\Delta^3(MN)^{\frac{1}{2}}\tau(s)Q_1^2\|\alpha_m\|\|\beta_n\|.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $T = (2MN)^{\frac{3}{2}}$ ο πρώτος όρος γίνεται αμελητέος. Τέλος, αθροίζοντας πάνω από τα $s \leq Q$ στην (4.6) και χρησιμοποιώντας ότι

$$\sum_{s\leq Q} \frac{1}{\phi(s)} \ll \log(Q),$$

παίρνουμε το άνω φράγμα

$$\sum_{s\leq Q} \frac{\tau(s)}{\phi(s)} = \sum_{s\leq Q} \frac{1}{\phi(s)} \sum_{d|s} 1 \leq \sum_{d\leq Q} \frac{1}{\phi(d)} \sum_{r\leq \frac{Q}{d}} \frac{1}{\phi(r)} \ll \sum_{d\leq Q} \frac{1}{\phi(d)} \log(Q) \ll \log^2(Q).$$

Έτσι, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y\leq x} |D_{\alpha*\beta}(y;q,a)| \\
&\ll \|\alpha_m\|\|\beta_n\| \log^2(Q) \left(\left((MN)^{\frac{1}{2}} Q_1^{-1} + M^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}} + Q \right) \log(2MN) + \Delta^3 (MN)^{\frac{1}{2}} Q_1^2 \right).
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $Q_1 = \Delta^{-1}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

4.2 Απόδειξη του Θεωρήματος Bombieri-Vinogradov

Η απόδειξη του Θεωρήματος Bombieri-Vinogradov που θα δώσουμε θα στηριχτεί σε μια κατάλληλη αποσύνθεση της συνάρτησης Von Mangoldt. Για τον σκοπό αυτόν, για κάθε αριθμητική συνάρτηση f συμβολίζουμε με f_A τη συνάρτηση $f|_A$ (δηλαδή τον περιορισμό της συνάρτησης f σε κάποιο σύνολο A). Αρχικώς, έχουμε την ακόλουθη πολύ χρήσιμη ταυτότητα.

Πρόταση 10. *(Ταυτότητα Vaughan) Για κάθε $U, V \geq 1$ έχουμε*

$$\Lambda = \mu_{\leq V} * \log - (\mu_{\leq V} * \Lambda_{\leq U}) * u + (\Lambda_{>U} * \mu_{>V}) * u + \Lambda_{\leq U}.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \mu * \log = \mu_{\leq V} * \log + \mu_{>V} * \log = \mu_{\leq V} * \log + \mu_{>V} * (\Lambda * u) \\
&= \mu_{\leq V} * \log + (\Lambda_{>U} * \mu_{>V}) * u + (\Lambda_{\leq U} * \mu_{>V}) * u \\
&= \mu_{\leq V} * \log + (\Lambda_{>U} * \mu_{>V}) * u + (\Lambda_{\leq U} * (\mu - \mu_{\leq V})) * u \\
&= \mu_{\leq V} * \log - (\Lambda_{\leq U} * \mu_{\leq V}) * u + (\Lambda_{>U} * \mu_{>V}) * u + \Lambda_{\leq U}.
\end{aligned}$$

□

Για λόγους ευκολίας, συμβολίζουμε με Λ_i (όπου $i = 1, 2, 3, 4$) τον $i-$οστό όρο στο παραπάνω άθροισμα. Θα ασχοληθούμε με την συνάρτηση διακύμανσης του κάθε όρου ξεχωριστά.

4.2.1 Εκτιμήσεις για τους όρους D_{Λ_4} και D_{Λ_1}

Για το D_{Λ_4} έχουμε τετριμμένα

$$|D_{\Lambda_4}(y;q,a)| = \left| \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi(a)} \sum_{n\leq \min\{y,U\}} \chi(n)\Lambda(n) \right| \ll U, \tag{4.15}$$

λόγω του Θεωρήματος των πρώτων αριθμών. Επομένως

$$\sum_{q\leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y\leq x} |D_{\Lambda_4}(y;q,a)| \ll QU. \tag{4.16}$$

Για το D_{Λ_1} σημειώνουμε αρχικά ότι

$$D_{\Lambda_1}(y;q,a) \ll \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{n \leq y} (\mu_{\leq V} * \log(n)) \chi(n) \right|.$$

Για το εσωτερικό άθροισμα, έχουμε

$$\sum_{n \leq y} \chi(n) \sum_{\substack{d|n \\ d \leq V}} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \leq V} \chi(d)\mu(d) \sum_{s=1}^{\frac{y}{d}} \chi(s) \log(s).$$

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \sum_{s \leq \frac{y}{d}} \chi(s) \int_1^s \frac{1}{t}\, dt &= \sum_{s \leq \frac{y}{d}} \int_1^y \chi(s) \frac{1}{t} \mathbb{1}_{t \leq s}\, dt = \int_1^y \frac{1}{t} \left(\sum_{t \leq s \leq \frac{y}{d}} \chi(s) \right) dt \\ &\ll \int_1^y \frac{1}{t} \left| \sum_{t \leq s \leq \frac{y}{d}} \chi(s) \right| dt \ll q^{\frac{1}{2}} \log(q) \log(y) \end{aligned}$$

από την ανισότητα Polya. Επομένως έχουμε ότι

$$D_{\Lambda_1}(y;q,a) \ll \log(y) q^{\frac{1}{2}} \log(q) V.$$

Κατα συνέπεια,

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y \leq x} |D_{\Lambda_1}(y;q,a)| \ll \log^2(x) V Q^{\frac{3}{2}}. \tag{4.17}$$

4.2.2 Εκτίμηση του όρου D_{Λ_3}

Περνάμε τώρα στη μελέτη του D_{Λ_3}. Αρχικά να παρατηρήσουμε ότι καθώς μας ενδιαφέρουν οι αριθμοί $n \leq x$, οι δύο συνθήκες $> U$ και $> V$ μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η $\Lambda_{>U}$ μπορει να θεωρηθεί ότι έχει φορέα το $[U, \frac{x}{V}]$ και η $\mu_{>V}$ ότι έχει φορέα το $[V, \frac{x}{U}]$. Σε διαφορετική περίπτωση, οι όροι της συνέλιξης μηδενίζονται. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει "καλά" άνω φράγματα για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 17.

Για αυτόν τον σκοπό, γράφουμε $\Lambda_3 = \Lambda_{>U} * (\mu_{>V} * u) = \Lambda_{>U} * \gamma$ και θα δείξουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 17.

Λήμμα 7. *Έστω θετικοί ακέραιοι $2 \leq U < N$. Για κάθε $B > 0$ υπάρχει $C(B) > 0$ ώστε η συνάρτηση Λ περιορισμένη στο $(U, N]$ να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 17 για $\Delta = C(B) \log^{-B}(N)$ και $N > N(B)$.*

Απόδειξη. Έστω $B > 0$. Τότε:

$$\begin{aligned} |D_{\Lambda_{(U,N]}}(y;q,a)| &= \frac{1}{\phi(q)} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)} \sum_{U < n \leq y} \chi(n)\Lambda(n) \right| \\ &\leq \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{U < n \leq y} \chi(n)\Lambda(n) \right| \\ &\leq \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\psi(y,\chi)| + |\psi(U,\chi)|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ας δούμε αρχικά πως μπορούμε να φράξουμε τον όρο $\psi(z,\chi)$, όταν $z \leq N$.

1. Αν $z \leq \frac{N}{\log^{18B}(N)}$, τότε από το Θεώρημα των πρώτων αριθμών παίρνουμε

$$\left|\sum_{n\leq z}\chi(n)\Lambda(n)\right| \leq C\frac{N}{\log^{18B}(N)}. \tag{4.19}$$

2. Αν $\frac{N}{\log^{18B}(N)} < z \leq N$ τότε αν επιλέξουμε $q < (\log N)^B$ έχουμε

$$z > \frac{N}{\log^{18B}(N)} > N^{\frac{1}{2}}, \quad N > N_1(B),$$

οπότε

$$q < (\log N)^B < 2^B(\log z)^B < (\log z)^{2B}.$$

Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε το θεώρημα Siegel-Walfisz για να πάρουμε

$$|\psi(z,\chi)| \leq C_1(B)\frac{z}{\log^{18B}(z)} \leq C_1(B)\frac{N}{\log^{18B}(N)} \tag{4.20}$$

για $N > N_2(B)$. Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (4.19) και (4.20) παίρνουμε ότι για $q < (\log N)^B$

$$\max_{z\leq N}|\psi(z,\chi)| \leq C_0(B)\frac{N}{\log^{18B}(N)}, \quad N > N_0(B). \tag{4.21}$$

Επανερχόμαστε τώρα στην (4.18). Αν $U \leq N - \frac{N}{\log^{18B}(N)} = U_0$ παρατηρούμε ότι

$$\|\Lambda_{(U,N]}\|_2 \geq \left(\sum_{U<n\leq N}\Lambda(n)\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{U_0<n\leq N}\Lambda(n)\right)^{\frac{1}{2}} \geq C_2(B)N^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\log^{9B}(N)}, \quad N > N_3(B)$$

από το Θεώρημα των πρώτων αριθμών, για κάποια σταθερά $C_2(B)$. Άρα, χρησιμοποιώντας για τον U-όρο και τον $y-$όρο στην (4.18) την εκτίμηση (4.21), έχουμε ότι για $q < (\log N)^B$:

$$|D_{\Lambda_{(U,N]}}(y;q,a)| \leq C_3(B)\frac{N}{\log^{18B}(N)} \leq \Delta_1^9 N^{\frac{1}{2}}\|\Lambda_{(U,N]}\|_2.$$

Όπου $\Delta_1 = C'(B)\log^{-B}(N)$, με την $C'(B)$ να είναι κατάλληλη σταθερά την οποία μπορούμε φυσικά να επιλέξουμε μεγαλύτερη του 1, έτσι ώστε

$$q < \Delta_1^{-1} < (\log N)^B.$$

Με αυτή την επιλογή, η παραπάνω εκτίμηση ισχύει για $q < \Delta_1^{-1}$. Αν $U > N - \frac{N}{\log^{18B}(N)}$ τότε εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για να λάβουμε

$$\begin{aligned}
|D_{\Lambda_{(U,N]}}(y;q,a)| &\leq \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{U<n\leq y}\chi(n)\Lambda(n)\right| \\
&\leq \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}(y-U+1)^{\frac{1}{2}}\|\Lambda_{(U,N]}\|_2 \\
&\leq C''(B)\|\Lambda_{(U,N]}\|_2 N^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\log^{9B}(N)} \\
&= \Delta_2^9 N^{\frac{1}{2}}\|\Lambda_{(U,N]}\|_2
\end{aligned}$$

Μαζεύοντας όλες τις εκτιμήσεις και επιλέγοντας $\Delta = \max\{\Delta_1,\Delta_2\}$ καθώς και $N(B)$ το μέγιστο των $N_0(B), N_1(B), N_2(B)$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Έχοντας υπόψιν το προηγούμενο λήμμα, γράφουμε

$$D_{\Lambda_3}(y;q,a)=\sum_N \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(a)}\sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ U<n\leq\frac{y}{V}}}\Lambda(n)\sum_{m\leq\frac{y}{n}}\gamma(m)\chi(mn)=\sum_N D_{\Lambda_N*\gamma}(y;q,a),$$

όπου Λ_N η συνάρτηση Λ περιορισμένη στο $(N,2N]\cap(U,\frac{x}{V}]$. Η παραπάνω ισότητα ισχύει καθώς όταν τα τμήματα $(N,2N]$ καλύψουν το $(U,\frac{y}{V}]$, λόγω του περιορισμού $U<n\leq\frac{y}{V}$ δεν θα υπάρχει συνεισφορά στο άθροισμα. Ισχύει ότι

$$\sum_{q\leq Q}\max_{(a,q)=1}\max_{y\leq x}|D_{\Lambda_3}(y;q,a)|\leq\sum_N\sum_{q\leq Q}\max_{(a,q)=1}\max_{y\leq x}|D_{\Lambda_N*\gamma}(y;q,a)|.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 17 και παίρνουμε ότι για οποιοδήποτε $B>0$, αν $\Delta=C(B)\log^{-B}(N)$ τότε

$$\sum_{q\leq Q}\max_{(a,q)=1}\max_{y\leq x}|D_{\Lambda_N*\gamma}(y;q,a)|\ll_B\left(x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}(x)+N^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x}{N}\right)^{\frac{1}{2}}+Q\right)\log^2(Q)\ \log x\|\gamma_{\leq\frac{x}{N}}\|_2\|\Lambda_N\|_2. \tag{4.22}$$

Για τις δύο νόρμες έχουμε

$$\left(\sum_{N<n\leq 2N}(\Lambda_N(n))^2\right)^{\frac{1}{2}}\ll(N\log N)^{\frac{1}{2}}$$

και για $m\in(V,\frac{x}{N}]$

$$|\gamma(m)|=\left|\sum_{\substack{d>V\\ d|m}}\mu(d)\right|\leq\sum_{d|m}|\mu(d)|\leq\tau(m),$$

επομένως

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{\leq\frac{x}{N}}\|_2^2 &= \sum_{m<\frac{x}{N}}|\sum_{\substack{d>V\\ d|m}}\mu(d)|^2\\
&\leq \sum_{m\leq\frac{x}{N}}\tau(m)^2=\sum_{m\leq\frac{x}{N}}\sum_{[d_1,d_2]|m}1\\
&\ll \frac{x}{N}\sum_{d_1,d_2\leq\frac{x}{N}}\frac{1}{[d_1,d_2]}\\
&= \frac{x}{N}\sum_{d_1,d_2\leq\frac{x}{N}}\frac{1}{d_1d_2}\sum_{k|(d_1,d_2)}\phi(k)\\
&= \frac{x}{N}\sum_{k\leq\frac{x}{N}}\frac{\phi(k)}{k^2}\sum_{r,s\leq\frac{x}{Nk}}\frac{1}{rs}\\
&\ll \frac{x}{N}(\log x)^2\sum_{k\leq\frac{x}{N}}\frac{\phi(k)}{k^2}\ll\frac{x}{N}(\log x)^3.
\end{aligned}$$

Άρα τελικά η ποσότητα στο αριστερό μέλος της (4.22) φράσσεται από

$$\begin{aligned}
&\ll\left(x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}(x)+N^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x}{N}\right)^{\frac{1}{2}}+Q\right)\log^2(Q)\log x(N\log N)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{N}(\log x)^3\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\ll(\log x)^3(\log Q)^2\left(x\log^{-B}(x)+x^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}+xN^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}Q\right).
\end{aligned}$$

Αθροίζουμε πάνω από όλα τα $N=2^j$ και παίρνουμε

$$\sum_{q\leq Q}\max_{(a,q)=1}\max_{y\leq x}|D_{\Lambda_3}(y;q,a)|\ll(\log x)^4(\log Q)^2(x\log^{-B}(x)+xV^{-\frac{1}{2}}+xU^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}Q). \tag{4.23}$$

4.2.3 Εκτίμηση του όρου D_{Λ_2}

Τέλος, για το $D_{\Lambda_2}(y;q,a)$ θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω γενικότερο λήμμα.

Λήμμα 8. *Έστω αριθμητικές συναρτήσεις f και g με την f να έχει φορέα το $[1,z]$. Αν ισχύει το άνω φράγμα*

$$\max_{(a,q)=1}\max_{y}|D_g(y;q,a)|\le K,$$

τότε έχουμε το φράγμα

$$\max_{(a,q)=1}\max_{y}|D_{f*g}(y;q,a)|\le K\|f\|_1,$$

όπου $\|f\|_1=\sum_{m\le z}|f(m)|$. Ειδικότερα, $\max_{(a,q)=1}\max_{y}|D_{f*u}(y;q,a)|\le\|f\|_1$.

Ἀπόδειξη. Έστω $y\ge 1$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
D_{f*g}(y;q,a) &= \sum_{\substack{n\le y\\ n\equiv a \mod q}}(f*g)(n)-\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\substack{n\le y\\(n,q)=1}}(f*g)(n)\\
&= \sum_{\substack{dm\le y\\ dm\equiv a \mod q}}f(d)g(m)-\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\substack{dm\le y\\(dm,q)=1}}f(d)g(m)\\
&= \sum_{\substack{d\le y\\(d,q)=1}}f(d)\sum_{\substack{m\le \frac{y}{d}\\ m\equiv d^{-1}a \mod q}}g(m)-\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\substack{d\le y\\(d,q)=1}}f(d)\sum_{\substack{m\le\frac{y}{d}\\(m,q)=1}}g(m),
\end{aligned}$$

το οποίο είναι ίσο με

$$\sum_{\substack{d\le y\\(d,q)=1}}f(d)\left(\sum_{\substack{m\le\frac{y}{d}\\ m\equiv d^{-1}a \mod q}}g(m)-\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\substack{m\le\frac{y}{d}\\(m,q)=1}}g(m)\right)=\sum_{\substack{d\le y\\(d,q)=1}}f(d)D_g\left(\frac{y}{d};q,d^{-1}a\right),$$

όπου με d^{-1} συμβολίζουμε τον αντίστροφο του $d \mod q$. Επομένως

$$|D_{f*g}(y;q,a)|\le\sum_{\substack{d\le y\\(d,q)=1}}|f(d)|\left|D_g\left(\frac{y}{d};q,d^{-1}a\right)\right|\le K\|f\|_1.$$

Αν τώρα επιλέξουμε $g=u$, παίρνουμε $K=1$:

$$|D_u(y;q,a)|=\left|\sum_{\substack{n\le y\\ n\equiv a \mod q}}1-\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\substack{n\le y\\(n,q)=1}}1\right|=\left|\left\lfloor\frac{y}{q}\right\rfloor+\delta-\frac{1}{\phi(q)}\left(\phi(q)\left\lfloor\frac{y}{q}\right\rfloor+k\right)\right|,$$

όπου $\delta=0$ ή 1, αναλόγως εάν στους επιπλέον αριθμούς n που βρίσκονται μεταξύ $q\lfloor\frac{y}{q}\rfloor$ και y εμφανίζεται η κλάση $a \mod q$, ο αριθμός $0\le k\le\phi(q)$ είναι το πλήθος των αριθμών $(n,q)=1$ που βρίσκονται στο ίδιο διάστημα και ο όρος μέσα στη παρένθεση ισούται με

$$\left|\delta-\frac{k}{\phi(q)}\right|=\frac{|\delta\phi(q)-k|}{\phi(q)}\le 1.$$

□

Τώρα, για την συνάρτηση $f = \mu_{\leq V} * \Lambda_{\leq U}$ και για $z = UV$ (αφού φυσικά αυτός είναι ο φορέας της f) λαμβάνουμε

$$\max_{(a,q)=1} \max_{y\leq x} |D_{\Lambda_2}(y;q,a)| \ll \sum_{m\leq UV} \sum_{\substack{sd=m \\ s\leq U \\ d\leq V}} \Lambda(s) = \sum_{\substack{s\leq U \\ d\leq V}} \Lambda(s) = \sum_{d\leq V} \sum_{s\leq U} \Lambda(s) \ll UV.$$

Ως εκ τούτου,

$$\sum_{q\leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y\leq x} |D_{\Lambda_2}(y;q,a)| \ll QUV. \tag{4.24}$$

4.2.4 Ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος Bombieri-Vinogradov

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 16) Μαζεύοντας τις εκτιμήσεις (4.16), (4.17), (4.23), (4.24) συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα

$$\sum_{q\leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y\leq x} |D_{\Lambda}(y;q,a)| \tag{4.25}$$

φράσσεται από

$$QUV + \log^2(x)VQ^{\frac{3}{2}} + \log^6(x)\left(x\log^{-B}(x) + xV^{-\frac{1}{2}} + xU^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}Q\right).$$

Επιλέγουμε $U = V = x^{\frac{1}{4}}$, $B = A + 6$ και $Q = x^{\frac{1}{2}}\log^{-A-6}(x)$ και παίρνουμε ότι η παραπάνω ποσότητα (4.25) φράσσεται από πάνω από

$$\ll_A \frac{x}{\log^A(x)},$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

Όπως και με το θεώρημα Siegel-Walfisz, το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα και για την συνάρτηση $\pi(x;q,a)$.

Πόρισμα 2. *Αν $A > 0$ τότε υπάρχει $B = B(A) > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\sum_{q\leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y\leq x} \left|\pi(y;q,a) - \frac{Li(y)}{\phi(q)}\right| \ll_A \frac{x}{\log^A(x)}$$

όπου $Q = x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}(x)$.

Απόδειξη. Αρκεί όπως και πριν, να αποδείξουμε ότι

$$\sum_{q\leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y\leq x} |D_{\chi_{\mathcal{P}}}(y;q,a)| \ll_A \frac{x}{\log^A(x)},$$

όπου $\chi_{\mathcal{P}}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση των πρώτων. Έχουμε ότι

$$D_{\chi_{\mathcal{P}}}(y;q,a) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi(a)} \sum_{n\leq y} \chi(n)\chi_{\mathcal{P}}(n).$$

Για το εσωτερικό άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq y} \chi(n)\chi_P(n)\Lambda(n)\frac{1}{\log(n)} &= \frac{1}{\log y}\sum_{p\leq y}\chi(p)\Lambda(p) + \int_2^y \frac{1}{t\log^2(t)}\left(\sum_{p\leq t}\chi(p)\Lambda(p)\right)dt \\
&= \frac{1}{\log y}\psi(y,\chi) - \frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=p^m\leq y \\ m\geq 2}}\chi(n)\Lambda(n) \\
&+ \int_2^y \frac{1}{t\log^2(t)}\psi(t,\chi)dt - \int_2^y \frac{1}{t\log^2(t)}\left(\sum_{\substack{n=p^m\leq t \\ m\geq 2}}\chi(n)\Lambda(n)\right)dt.
\end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να χωρίσουμε την μελέτη του

$$\max_{(a,q)=1}\max_{y\leq x}|D_{\chi_{\mathcal{P}}}(y;q,a)|$$

σε τέσσερα προφανή μέρη. Για τον πρώτο όρο, αθροίζουμε πάνω από τα $q\leq Q$ και συμπεραίνουμε ότι φράσσεται από

$$\ll\sum_{q\leq Q}\max_{(a,q)=1}\max_{y\leq x}|D_{\Lambda}(y;q,a)|\ll\frac{x}{\log^{A}(x)}.$$

Από το θεώρημα Bombieri-Vinogradov, όταν $Q=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}(x)$, όπου όπως είδαμε μπορούμε να επιλέξουμε $B=A+6$. Σημειώνουμε ότι

$$\sum_{\substack{n=p^{m}\leq y\\ m\geq 2}}\chi(n)\Lambda(n)\ll y^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως ο δεύτερος όρος είναι τάξης μεγέθους

$$\sum_{q\leq Q}\max_{(a,q)=1}\max_{y\leq x}\frac{1}{\phi(q)}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(a)}\sum_{\substack{n=p^{m}\leq y\\ m\geq 2}}\chi(n)\Lambda(n)\right|\ll x^{\frac{1}{2}}\sum_{q\leq Q}1\ll x^{\frac{1}{2}}Q.$$

Ομοίως ο τέταρτος όρος είναι $\ll x^{\frac{1}{2}}\log^{-2}(x)$, οπότε αφού αθροίσουμε και πάνω από τα $q\leq Q$ παίρνουμε ότι δίνει συνεισφορά $\ll x^{\frac{1}{2}}Q\log^{-2}(x)$. Με την επιλογή $Q=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}(x)$ λοιπόν ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος γίνονται αμελητέοι.

Τέλος, για τον τρίτο όρο έχουμε

$$\left|\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(a)}\int_{2}^{y}\frac{1}{t\log^{2}(t)}\psi(t,\chi)dt\right|\ll\int_{2}^{x}\frac{1}{t\log^{2}(t)}\max_{(a,q)=1}|D_{\Lambda}(t;q,a)|dt,$$

επομένως

$$\sum_{q\leq Q}\int_{2}^{x}\frac{1}{t\log^{2}(t)}\max_{(a,q)=1}|D_{\Lambda}(t;q,a)|dt\ll\frac{x}{\log^{A}(x)}\int_{2}^{x}\frac{1}{t\log^{2}(t)}dt\ll\frac{x}{\log^{A}(x)},$$

άρα είναι αμελητέος. □

Το Θεώρημα Bombieri-Vinogradov μας λέει ότι για ένα οποιοδήποτε $\epsilon>0$, αν $A>0$ τότε

$$\sum_{q\leq x^{\frac{1}{2}-\epsilon}}\max_{(a,q)=1}\max_{y\leq x}\left|\psi(y;q,a)-\frac{y}{\phi(q)}\right|\ll_{\epsilon}\frac{x}{(\log x)^{A}}$$

Λέμε τότε ότι οι πρώτοι αριθμοί έχουν επίπεδο κατανομής (level of distribution) $\theta=\frac{1}{2}$. Γενικότερα, αν στη θέση του $1/2$ στον εκθέτη του x μπορούμε να βάλουμε τον αριθμό θ, τότε λέμε ότι οι πρώτοι αριθμοί έχουν επίπεδο κατανομής θ. Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, η έννοια του επιπέδου κατανομής είναι τεράστιας αξίας στο εγχείρημα εύρεσης φραγμένων κενών μεταξύ των πρώτων αριθμών.

Στην εργασία [5] οι Friedlander και Granville αποδεικνύουν, μεταξύ άλλων, ότι $\theta\leq 1$. Η εικασία Elliott-Halberstam ισχυρίζεται ότι μπορούμε να έχουμε ακριβώς $\theta=1$, κάτι που, για την ώρα, απέχει πολύ από το να αποδειχθεί έστω και προσεγγιστικά (χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι το $\theta=1/2$ που μας δίνει το θεώρημα Bombieri-Vinogradov, δεν έχει βελτιωθεί έκτοτε).

Κεφάλαιο 5

Η μέθοδος Goldston-Pintz-Yildirim

Το βασικό πρόβλημα στο οποίο καλούμαστε να δώσουμε απάντηση έχει ως εξής: Έστω μια $k-$άδα μη αρνητικών διακεκριμένων ακέραιων αριθμών $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, ..., h_k\}$. Υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι n ώστε η $k-$αδα $\mathcal{H}_n = \{n+h_1, n+h_2, ..., n+h_k\}$ να είναι πρώτη (δηλαδή κάθε στοιχείο της να είναι πρώτος αριθμός);

Η παρουσίαση μας σε αυτό το κεφάλαιο ακολουθεί την έκθεση των κύριων ιδεών όπως περιγράφονται στις εργασίες [7, 8, 9, 10].

5.1 Περιγραφή της μεθόδου

Αρχικά να παρατηρήσουμε ότι αν υπάρχει πρώτος αριθμός $p \leq k$ τέτοιος ώστε όλα τα υπόλοιπα $\mod p$ να εμφανίζονται στην αρχική $k-$άδα, τότε η απάντηση είναι σίγουρα αρνητική, αφού για κάθε n το υπόλοιπο $-n \mod p$ θα εμφανίζεται σε κάποιο στοιχείο της $\mathcal{H}$ και άρα με την πρόσθεση του n σε αυτό θα πάρουμε στοιχείο που διαιρείται με το p. Επομένως, αναγκαία συνθήκη για να ικανοποείται το ζητούμενο είναι να ικανοποιείται η παρακάτω ιδιότητα

Ορισμός 17. *Μια $k-$άδα $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, .., h_k\}$ θα ονομάζεται admissible (αποδεκτή) αν για κάθε πρώτο p υπάρχει υπόλοιπο $a_p \mod p$ ώστε $h \not\equiv a_p \mod p$ για κάθε $h \in \mathcal{H}$.*

Είναι σαφές ότι για κάθε πρώτο $p > k$ το παραπάνω είναι αυτομάτως αληθές. Συμβολίζουμε με $\nu_{\mathcal{H}}(p)$ το πλήθος των κλάσεων $\mod p$ που καταλαμβάνει η $\mathcal{H}$ και παρατηρούμε ότι $\nu_{\mathcal{H}}(p) < p$ αν και μόνο αν η $\mathcal{H}$ είναι admissible. Παρατηρούμε επίσης ότι $\nu_{\mathcal{H}}(p) = k$ όταν

$$p > \max_{h \in \mathcal{H}} h,$$

διότι τα στοιχεία της $\mathcal{H}$ είναι ανά δύο διαφορετικά. Ακόμα, ορίζουμε την ποσότητα

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p}\right)$$

η οποία ονομάζεται singular series της $\mathcal{H}$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(1+x)^{-n} = \sum_{m \geq 0} \binom{-n}{m} x^m$$

παίρνουμε $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} = 1 + \frac{k}{p} + O_k\left(\frac{1}{p^2}\right)$. Άρα ο p-όρος του γινομένου για $p > \max_{h \in \mathcal{H}} h$, είναι

$$1 + O_k\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

καθώς $\nu_{\mathcal{H}}(p) = k$ για κάθε $p > \max_{h\in\mathcal{H}} h$. Επομένως το γινόμενο συγκλίνει, και $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \neq 0$ αν και μόνο αν $\nu_{\mathcal{H}}(p) < p$ για κάθε πρώτο p, δηλαδή αν και μόνο αν η $\mathcal{H}$ είναι admissible. Η εικασία Hardy-Littlewood ισχυρίζεται ότι ο ορισμός της admissible $k-$άδας είναι, εκτός απο αναγκαία, και ικανή συνθήκη:

Εικασία 1. *Αν η $\mathcal{H}$ είναι μια admissible $k-$άδα, τότε υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι n ώστε η $k-$άδα $\mathcal{H}_n$ να είναι πρώτη. Μάλιστα*

$$\#\{n \leq N : \mathcal{H}_n \text{ πρώτη}\} \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})\frac{N}{(\log N)^k}.$$

Αν η εικασία αυτή αποδειχθεί αληθής, ως πόρισμα λαμβάνουμε την εικασία των δίδυμων πρώτων, αφού η δυάδα $\mathcal{H} = \{0, 2\}$ είναι admissible. Σημειώνουμε ότι στο κεφάλαιο 3 δείξαμε το άνω φράγμα

$$\#\{n \leq N : \mathcal{H}_n \text{ πρώτη}\} \ll \frac{N}{(\log N)^k}.$$

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η παρουσίαση της βασικής μεθόδου εντοπισμού πρώτων σε $k-$άδες, που οφείλεται στους Goldston, Pintz και Yildirim. Η βασική ιδέα είναι η εξής:

Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών και μία admissible $k-$άδα $\mathcal{H} = \{h_1, ..., h_k\}$. Θεωρούμε την ποσότητα

$$S(N, \nu) = \sum_{N<n\leq 2N} \left(\sum_{h\in\mathcal{H}} \chi_{\mathcal{P}}(n + h) - \nu\right) W_n \tag{5.1}$$

όπου $\nu > 0$ και $W_n \geq 0$. Αυτό που πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι αν $S(N, \nu) > 0$, τότε τουλάχιστον ένας όρος του αθροίσματος οφείλει να είναι θετικός. Συνεπώς, υπάρχει $n \in [N, 2N]$ ώστε τουλάχιστον $\lfloor\nu+1\rfloor$ από τα στοιχεία της $\mathcal{H}_n$ να είναι πρώτοι. Η ιδέα είναι να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της παραπάνω ποσότητας και να δούμε πότε αυτή γίνεται θετική. Οι συντελεστές W_n (sieve weights) είναι αυτοί που παίζουν τον κυρίαρχο ρόλο σε αυτό το εγχείρημα. Κατ' ουσίαν, με βάση τη παραπάνω συζήτηση, πρέπει να επιλεχθούν με τέτοιον τρόπο ώστε:

1. Η ποσότητα $S(N, \nu)$ να μπορεί να μελετηθεί ασυμπτωτικά,
2. Να έχουμε $W_n \neq 0$ μόνο όταν η $\mathcal{H}_n$ περιέχει "πολλούς πρώτους", ώστε να αναμένεται ασυμπτωτικά $S(N, \nu) > 0$ για όσο το δυνατόν μεγαλύτερο ν. Σε διαφορετική περίπτωση, η συνεισφορά αρνητικών όρων θα επηρεάσει αυτό το αποτέλεσμα.

Αν θέλουμε να ποσοτικοποιήσουμε την τελευταία απαίτηση λίγο περισσότερο, μπορούμε να θεωρήσουμε τα αθροίσματα

$$S_1 = \sum_{N<n\leq 2N} W_n$$

και

$$S_2 = \sum_{N<n\leq 2N} \left(\sum_{h\in\mathcal{H}} \chi_{\mathcal{P}}(h)\right) W_n,$$

έτσι ώστε να ισχύει

$$S(N, \nu) = S_2 - \nu S_1.$$

Η επιθυμητή συνθήκη $S(N, \nu) > 0$ είναι ισοδύναμη με την συνθήκη $\nu < \frac{S_2}{S_1}$. Συνεπώς, το ζητούμενο είναι η επιλογή των W_n να γίνει με τρόπο που να μεγιστοποιεί αυτό το πηλίκο, ούτως ώστε το ν να μπορεί να επιλεχθεί όσο το δυνατό μεγαλύτερο. Ειδικότερα, αν μπορούμε να έχουμε $\nu = 1 + \epsilon$ για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, τότε θα έχουμε εντοπίσει 2 πρώτους στην $\mathcal{H}$, οι οποίοι επομένως θα έχουν απόσταση

$$\leq \max_{h,\tilde{h}\in\mathcal{H}} \left|h - \tilde{h}\right|.$$

Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$P_{\mathcal{H}}(n) = \prod_{h\in\mathcal{H}} (n + h).$$

Σκοπός μας είναι να εντοπίσουμε εκείνα τα n για τα οποία το πολυώνυμο έχει ακριβώς k πρώτους διαιρέτες, έτσι ώστε να είναι $k-$άδα με στοιχεία δυνάμεις πρώτων. Ακολουθώντας το σκεπτικό του κοσκίνου του Selberg θέλουμε να επιλέξουμε

$$W_n = \left(\sum_{\substack{d | P_{\mathcal{H}}(n) \\ d \leq R}} \lambda_d \right)^2$$

όπου τα λ_d θα επιλεχθούν με τον βέλτιστο τρόπο. Μία λογική επιλογή είναι η

$$W_n = \prod_{h \in \mathcal{H}} \Lambda(n+h),$$

η οποία ωστόσο καθιστά δύσκολο τον ασυμπτωτικό υπολογισμό της ποσότητας που μας ενδιαφέρει. Από την άλλη, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right),$$

μία λογική σκέψη είναι να επιλέξουμε την "περικεκομμένη" συνάρτηση Von Mangoldt

$$\Lambda_R(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq R}} \mu(d) \log\left(\frac{R}{d}\right)$$

για κάποιο κατάλληλο R (το οποίο θα επιλεγεί αργότερα). Παρατηρούμε ότι η Λ_R δεν είναι κατ' ανάγκη μη αρνητική. Οι Goldston και Yildirim στην εργασία τους [7] επιλέγουν

$$W_n = \left(\prod_{h \in \mathcal{H}} \Lambda_R(n+h) \right)^2.$$

Με αυτή την επιλογή, αποδεικνύουν ότι

$$S_1(N) \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})(\log R)^k N, \quad \text{για} \quad R \leq N^{\frac{1}{2k}(1-\epsilon)}$$

και

$$S_2(N) \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \frac{(\log R)^{k+1} k N}{\log N}, \quad \text{για} \quad R \leq N^{\frac{\theta}{2k}(1-\epsilon)}.$$

όπου θ το επίπεδο κατανομής των πρώτων. Συνεπώς

$$\frac{S_2(N)}{S_1(N)} \sim \frac{k \log R}{\log N}, \quad \text{για} \;\; R \;\leq N^{\frac{\theta}{2k}(1-\epsilon)}.$$

Άρα, η επιλογή $R = N^{\frac{\theta_0}{2k}}$ με $\theta_0 < \theta$ μας δίνει

$$\frac{S_2(N)}{S_1(N)} \sim \frac{\theta_0}{2}.$$

Ακόμα και με την υπόθεση ότι $\theta = 1$ λοιπόν, η επιλογή αυτή αποτυγχάνει κατά πολύ να εντοπίσει δύο πρώτους στην ίδια $k-$αδα. Μια εναλλακτική επιλογή όμως είναι η εξής. Μπορούμε να ξεκινήσουμε με την γενικευμένη συνάρτηση Von Mangoldt

$$\Lambda_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right)^k,$$

η οποία μηδενίζεται όταν $\omega(n) > k$. Συνεπώς η συνάρτηση $\Lambda_k(P_{\mathcal{H}}(n))$ μηδενίζεται όταν έχουμε περισσότερους από k διακεκριμένους πρώτους διαιρέτες για το $P_{\mathcal{H}}(n)$. Σε αντιστοιχία με την προηγούμενη απόπειρα, θεωρούμε το περικεκομμένο άθροισμα

$$\Lambda_{k,R}(n) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{d|n \\ d\leq R}} \mu(d) \log\left(\frac{R}{d}\right)^k,$$

όπου ο όρος $\frac{1}{k!}$ εισάγεται απλά επειδή εξυπηρετεί την απλοποίηση των αποτελεσμάτων. Τώρα ορίζουμε

$$\Lambda_{k,R}(n,\mathcal{H}) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{d|P_{\mathcal{H}}(n) \\ d\leq R}} \mu(d) \log\left(\frac{R}{d}\right)^k.$$

Θέτοντας λοιπόν $W_n = (\Lambda_{k,R}(n;\mathcal{H}))^2$, η αντίστοιχη ασυμπτωτική συμπεριφορά των S_1, S_2 δίνεται από τις ποσότητες

$$S_1(N) \sim \frac{(\log R)^k}{k!}\mathfrak{S}(\mathcal{H})N, \quad \text{για} \quad R \leq N^{\frac{1}{2}-\epsilon}$$

και

$$S_2(N) \sim 2\frac{(\log R)^{k+1}}{(k+1)!}\mathfrak{S}(\mathcal{H})\frac{N}{\log N} \quad \text{για} \quad R \leq N^{\frac{\theta}{2}-\epsilon}.$$

Επομένως για $R = N^{\frac{\theta_0}{2}}$, όπου $\theta_0 < \theta$, παίρνουμε

$$\frac{S_2(N)}{S_1(N)} \sim \frac{k}{k+1}\theta_0,$$

όπου φυσικά για μεγάλο k ο συντελεστής τείνει στο 1. Παρατηρούμε λοιπόν ότι με τη μέθοδο αυτή παίρνουμε ασυμπτωτικά δύο φορές μεγαλύτερο πηλίκο σε σχέση με πριν. Δυστυχώς, ακόμα και με την υπόθεση ότι η Εικασία Elliott-Halberstam είναι αληθής, μόλις που αποτυγχάνουμε να εντοπίσουμε δύο πρώτους. Αν ήταν εφικτό να πάρουμε $\theta > 1$ τότε για $\theta_0 = 1 + \delta$ το παραπάνω πηλίκο θα έδινε $\nu > 1$ για κάποιο αρκετά μεγάλο k.

Ερχόμαστε τώρα στο βασικό αποτέλεσμα της μεθόδου στην αρχική της μορφή. Στην εργασία τους [8] οι Goldston, Pintz και Yildirim πρόσθεσαν στην επιλογή της παραπάνω συνάρτησης $\Lambda_{k,R}(n;\mathcal{H})$ την εξής καθοριστική ιδέα: αντί να προσπαθούν να εντοπίσουν ακριβώς k διακεκριμένους πρώτους, θεώρησαν τη συνάρτηση

$$\Lambda_{k,R}(n;\mathcal{H},m) = \frac{1}{(k+m)!} \sum_{\substack{d|P_{\mathcal{H}}(n) \\ d\leq R}} \mu(d) \log\left(\frac{R}{d}\right)^{k+m}$$

με $m = o(k)$, η οποία εντοπίζει τις $\mathcal{H}_n$ με "λίγους" επιπλέον πρώτους διαιρέτες. Όπως θα δούμε στις δύο παρακάτω προτάσεις, η ιδέα αυτή αποδεικνύεται πολύ αποδοτική.

Πρόταση 11. *Έστω $\mathcal{H} = \{h_1, ..., h_k\}$ μία admissible $k-$αδα. Αν $R \leq N^{\frac{1}{2}-\epsilon}$, τότε*

$$\sum_{n\leq N} (\Lambda_{k,R}(n;\mathcal{H},m))^2 \sim \binom{2m}{m} \frac{(\log R)^{k+2m}}{(k+2m)!}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})\,N.$$

Πρόταση 12. *Έστω $\mathcal{H} = \{h_1, ..., h_k\}$ μία admissible $k-$αδα και $h_0 \in \mathcal{H}$. Αν $R \leq N^{\frac{\theta}{2}-\epsilon}$, τότε*

$$\sum_{n\leq N} (\Lambda_{k,R}(n;\mathcal{H},m))^2\, \chi_P(n+h_0) \sim \binom{2m+2}{m+1} \frac{(\log R)^{k+2m+1}}{(k+2m+1)!}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})\,\frac{N}{\log N}.$$

Μετην επιλογή λοιπόν αυτών των W_n παίρνουμε $R = N^{\frac{\theta}{2}-\epsilon}$, και έτσι παίρνουμε, χωρίς καμία έξτρα προϋπόθεση, την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\begin{aligned}\frac{S_2}{S_1} &\sim \left(\frac{\theta}{2}-\epsilon\right)\frac{k\binom{2m+2}{m+1}}{(k+2m+1)\binom{2m}{m}} \\ &\sim \left(\frac{\theta}{2}-\epsilon\right)\frac{2k}{k+2m+1}\frac{2m+1}{m+1}.\end{aligned}$$

Παίρνοντας τώρα $m,\ k\to\infty$ τέτοια ώστε $m=o(k)$ λαμβάνουμε τελικά ότι

$$\frac{S_2}{S_1}\sim 2\theta-4\epsilon.$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι για $\theta=\frac{1}{2}$ μόλις που αποτυγχάνουμε να εντοπίσουμε δύο πρώτους, ωστόσο για οποιοδήποτε $\theta>\frac{1}{2}$ πράγματι εντοπίζουμε δύο πρώτους. Συνεπώς καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 18 (Goldston - Pintz - Yildirim (GPY))**.** *Αν οι πρώτοι αριθμοί έχουν επίπεδο κατανομής $\theta>\frac{1}{2}$, τότε*

$$\liminf_n (p_{n+1}-p_n)<\infty.$$

Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε ότι η μέθοδος GPY των Goldston, Pintz και Yildirim δεν μας δίνει μόνο το προηγούμενο αποτέλεσμα υπό προϋπόθεση, αλλά κάνοντας μία κατάλληλη τροποποίηση μας δίνει και ένα επιπλέον σημαντικό αποτέλεσμα χωρίς καμία έξτρα προϋπόθεση. Για τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία του κοσκίνου του Selberg προκειμένου να επιλέξουμε κατάλληλα τα W_n, καταλήγοντας ουσιαστικά στην επιλογή των GPY η οποία στο συγκεκριμένο πλαίσιο είναι κατ'ουσίαν βέλτιστη.

Σκοπός μας λοιπόν στις επόμενες δύο παραγράφους είναι η σκιαγράφηση των κύριων ιδεών της μεθόδου GPY. Για αυτό τον σκοπό στην μελέτη μας θα παραμελήσουμε εντελώς τους όρους του σφάλματων υιοθετόντας μια πιο ελεύθερη παρουσίαση που θα δίνει έμφαση στις κεντρικές ιδέες. Ολόκληρο το επιχείρημα όμως θα περιγραφεί με κάθε αυστηρότητα στη πολυδιάστατη εκδοχή του στο κεφάλαιο 6.

5.2 Το Πρώτο Θεώρημα GPY

Ξεκινάμε με τη μελέτη της παράστασης (5.1). Σε όλη τη παρούσα παράγραφο θεωρούμε μία σταθεροποιημένη admissible $k-$άδα $\mathcal{H}$. Όπως εξηγήσαμε στην εισαγωγή, μπορούμε να χωρίσουμε τον όρο σε δύο αθροίσματα S_1,S_2. Για το άθροισμα S_1 έχουμε

$$\sum_{N<n\le 2N} W_n = \sum_{N<n\le 2N}\sum_{\substack{[d_1,d_2]\mid P_{\mathcal{H}}(n)\\ d_1,d_2\le R}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}.$$

Αλλάζουμε τη σειρά της άθροισης και λαμβάνουμε

$$S_1 = \sum_{d_1,d_2\le R}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ [d_1,d_2]\mid P_{\mathcal{H}}(n)}} 1. \tag{5.2}$$

Για κάθε πρώτο $p\mid[d_1,d_2]$, έχουμε $\nu_H(p)$ υπόλοιπα $\bmod p$ στην $\mathcal{H}$. Επομένως έχουμε $\nu_{\mathcal{H}}(p)$ λύσεις $\bmod p$ για την σχέση $p\mid P_{\mathcal{H}}(n)$. Από τη πολλαπλασιαστική αρχή και το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων, έχουμε $\nu_{\mathcal{H}}([d_1,d_2])$ επιλογές για το $n \bmod [d_1,d_2]$ ώστε $[d_1,d_2]\mid P_{\mathcal{H}}(n)$. Συμβολίζουμε λοιπόν με $R(D)$ το σύνολο των $\nu_{\mathcal{H}}(D)$ υπολοίπων $\bmod D$ ώστε $D\mid P_{\mathcal{H}}(n)$, όταν $n\in R(D)$. Από τα παραπάνω, η έκφραση (5.2) γίνεται

$$\sum_{\substack{d_1,d_2\le R\\ [d_1,d_2]=D}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{m\in R(D)}\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ n\equiv m \bmod D}} 1 = N\sum_{\substack{d_1,d_2\le R\\ [d_1,d_2]=D}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\nu_{\mathcal{H}}(D)}{D}+O\left(\sum_{\substack{d_1,d_2\le R\\ [d_1,d_2]=D}}|\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}|\right). \tag{5.3}$$

Θα ασχοληθούμε με τον κύριο όρο της (5.3). Από το Λήμμα 1 του κεφαλαίου 3 έχουμε ότι

$$\frac{\nu_{\mathcal{H}}(D)}{D} = \frac{\nu_H(d_1)\nu_{\mathcal{H}}(d_2)}{d_1 d_2}\frac{(d_1,d_2)}{\nu_{\mathcal{H}}((d_1,d_2))}.$$

Άρα ο κύριος όρος της (5.3) παίρνει την μορφή

$$\sum_{d_1,d_2\leq R}\frac{\lambda_{d_1}\nu_{\mathcal{H}}(d_1)}{d_1}\frac{\lambda_{d_2}\nu_{\mathcal{H}}(d_2)}{d_2}\sum_{m|(d_1,d_2)} f(m),$$

όπου f η αντίστροφη κατά Dirichlet της $\frac{n}{\nu_{\mathcal{H}}(n)}$. Θέτουμε $L(d) = \frac{\lambda_d \nu_{\mathcal{H}}(d)}{d}$ και λαμβάνουμε

$$\sum_{m\leq R} f(m)\left(\mu(m)\sum_{m|d_1} L(d_1)\right)\left(\mu(m)\sum_{m|d_2} L(d_2)\right) \quad = \quad \sum_{m\leq R} f(m)Y^2(m)$$

όπου $Y(m) = \mu(m)\sum_{m|d} L(d)$. Επιλέγουμε $Y(m) = \frac{y(m)}{f(m)}$ και παίρνουμε

$$\sum_{m\leq R}\frac{y^2(m)}{f(m)}. \tag{5.4}$$

Από το Λήμμα 2 του κεφαλαίου 3, η αλλαγή μεταβλητών μεταξύ Y και L είναι αντιστρέψιμη, έτσι ώστε ο προσδιορισμός της συνάρτησης y να προσδιορίζει τα λ_d. Για τη συνάρτηση f έχουμε ότι είναι πολλαπλασιαστική, ορισμένη μόνο στους ελεύθερους τετραγώνων αριθμούς. Ο υπολογισμός της είναι άμεσος:

$$f(p) = \frac{p}{\nu_{\mathcal{H}}(p)} - 1 \quad = \quad \frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\nu_{\mathcal{H}}(p)}.$$

Επιλέγουμε

$$y(m) = \mu^2(m)\mathfrak{S}(\mathcal{H})F\left(\frac{\log m}{\log R}\right),$$

όπου F μία λεία συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Η αιτιολόγηση για το κίνητρο της συγκεκριμένης επιλογής δεν είναι σαφής στο σημείο που βρισκόμαστε, όμως η επιλογή μας αυτή θα αιτιολογηθεί παρακάτω. Παρατηρούμε επίσης ότι αρκεί να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του αθροίσματος

$$\sum_{m\leq R}\frac{\mu^2(m)}{f(m)},$$

και τότε θα έχουμε και την ασυμπτωτική συμπεριφορά της (5.4) χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη. Θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα για την κατανομή πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων.

Λήμμα 9. *Έστω γ μία πολλαπλασιαστική συνάρτηση και θετικοί αριθμοί k, A, B, L. Αν*

$$0 \leq \frac{\gamma(p)}{p} \leq 1 - \frac{1}{A}$$

$$-L \leq \sum_{y_1<p\leq y_2}\frac{\gamma(p)\log p}{p} - k\log\frac{y_2}{y_1} \leq B$$

όταν $2 \leq y_1 < y_2$. Τότε, αν $g(n) = \prod_{p|n}\frac{\gamma(p)}{p-\gamma(p)}$, έχουμε

$$\sum_{n\leq x}\mu^2(n)g(n) = \frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}(\log x)^k\left(1+O\left(\frac{L}{\log x}\right)\right),$$

όπου $c_\gamma = \prod_p\left(1-\frac{\gamma(p)}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k$.

Ἀπόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [11] και στα Λήμματα 5.3 και 5.4, των οποίων η παραπάνω πρόταση είναι συνδυασμός. □

Πόρισμα 3. *Έστω συνάρτηση γ που ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος 9. Τότε για μία λεία συνάρτηση G ισχύει ότι*

$$\sum_{n\le x}\mu^2(n)g(n)G\left(\frac{\log n}{\log x}\right)=(\log x)^k\frac{k\,c_\gamma}{\Gamma(k+1)}\int_0^1 u^{k-1}G(u)du+O\left(\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}G_{max}L(\log x)^{k-1}\right),$$

όπου $G_{max}=\max\limits_{0\le t\le 1}(|G(t)|+|G'(t)|)$.

Ἀπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την άθροιση κατά μέρη, για μία λεία συνάρτηση G έχουμε τον υπολογισμό:

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\mu^2(n)g(n)G\left(\frac{\log n}{\log x}\right) &= G(1)\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}(\log x)^k-\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}\int_1^x G'\left(\frac{\log t}{\log x}\right)\frac{(\log t)^k}{t\log x}dt\\ &+ O\left(\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}G_{max}L(\log x)^{k-1}\right),\end{aligned}$$

όπου ο όρος του σφάλματος προκύπτει αφ'ενός από το γεγονός ότι $G(1)\le G_{max}$ και αφ'ετέρου από τη σχέση

$$\int_1^x G'\left(\frac{\log t}{\log x}\right)\frac{1}{t\log x}\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}L(\log t)^{k-1}dt=O\left(G_{max}\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}L(\log x)^{k-1}\right).$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $u=\frac{\log t}{\log x}$ το ολοκλήρωμα στον κύριο όρο παίρνει την μορφή

$$(\log x)^k\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}\int_0^1 u^kG'(u)du = (\log x)^k\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}G(1)-(\log x)^k\frac{kc_\gamma}{\Gamma(k+1)}\int_0^1 u^{k-1}G(u)du,$$

οπότε αντικαθιστώντας συνάγουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\sum_{n\le x}\mu^2(n)g(n)G\left(\frac{\log n}{\log x}\right)=(\log x)^k\frac{k\,c_\gamma}{\Gamma(k+1)}\int_0^1 u^{k-1}G(u)du+O\left(\frac{c_\gamma}{\Gamma(k+1)}G_{max}L(\log x)^{k-1}\right) \quad (5.5)$$

□

Ως συνέπεια του Πορίσματος 3 λαμβάνουμε την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 13. *Αν $h=\max(\mathcal{H})$, τότε*

$$\sum_{m\le R}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}=\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}\frac{(\log R)^k}{k!}\left(1+O\left(\frac{\log\log h}{\log R}\right)\right).$$

Ἀπόδειξη. Έχουμε ότι

$$\frac{1}{f(m)}=\prod_{p|m}\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}.$$

Επομένως, θέτουμε $\gamma(p)=\nu_{\mathcal{H}}(p)$ στο Λήμμα 9 και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\nu_{\mathcal{H}}(p)\le\min\{p-1,k\}$ παίρνουμε ότι ικανοποείται η πρώτη συνθήκη για $A=2k$.

Για τη δεύτερη συνθήκη, γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{y_1<p\le y_2}\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)\log p}{p} &= \sum_{y_1<p\le h}\frac{(\nu_{\mathcal{H}}(p)-k)\log p}{p}+k\sum_{y_1<p\le y_2}\frac{\log p}{p}\\ &= k\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)+O(1)+\sum_{y_1<p\le h}\frac{(\nu_{\mathcal{H}}(p)-k)\log p}{p}.\end{aligned}$$

Με δεδομένο ότι $\nu_{\mathcal{H}}(p) \leq k$ έχουμε ότι το άνω φράγμα για την δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται απευθείας. Μένει να μελετηθεί η ποσότητα

$$\sum_{p\leq h} \frac{(k-\nu_{\mathcal{H}}(p))\log p}{p} = \sum_{p|\Delta} \frac{(k-\nu_{\mathcal{H}}(p))\log p}{p} \ll \sum_{p|\Delta} \frac{\log p}{p},$$

όπου $\Delta = \prod_{i<j} |h_i - h_j|$. Παρατηρούμε ότι $p \mid \Delta \iff \nu_{\mathcal{H}}(p) < k$. Παρατηρούμε επίσης ότι ο αριθμός Δ είναι γινόμενο $\binom{k}{2}$ αριθμών $\leq h$. Άρα $\Delta \leq h^{k^2}$, και κατά συνέπεια $\log\Delta \ll_k \log h$. Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{p|\Delta} \frac{\log p}{p} &= \frac{\log h}{h}\sum_{p|\Delta} 1 - \int_2^h \frac{1-\log t}{t^2}\left(\sum_{\substack{p|\Delta\\ p\leq t}} 1\right) dt \\
&\leq \frac{\log h}{h}\omega(\Delta) + \int_{\omega(\Delta)}^h \frac{\log t - 1}{t^2}\omega(\Delta)dt + C_1\int_3^{\omega(\Delta)} \frac{\log t}{t^2}\frac{t}{\log t}dt \\
&\leq \frac{C_2 \log h \log\Delta}{h} + C_1\log(\omega(\Delta)) \\
&\leq \frac{\log^2 h}{h} + C_1 \log\log\Delta \ll \log\log h.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζεται λοιπόν το Λήμμα 9 με $L = C\log\log h$. Επιπλέον, ξέρουμε ότι $\Gamma(k+1) = k!$ όταν k θετικός ακέραιος, και τέλος έχουμε για την αντίστοιχη σταθερά

$$c_{\nu_{\mathcal{H}}} = \prod_p \left(1 - \frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k = \frac{1}{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}.$$

□

Για να βρούμε λοιπόν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της (5.4) έχουμε

$$\sum_{m\leq R} \frac{y^2(m)}{f(m)} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})F^2(1)\frac{(\log R)^k}{k!} - \int_1^R (y^2(t))'\frac{(\log t)^k}{\mathfrak{S}(\mathcal{H})k!}dt + E(R,h)$$

όπου το $E(R,h)$ είναι ένας όρος σφάλματος που στο παρόν κεφάλαιο δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω. Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση παίρνουμε τον κύριο όρο

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H})\int_1^R F^2\left(\frac{\log t}{\log R}\right)\frac{(\log t)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{1}{t}dt,$$

και έπειτα από την αντικατάσταση $u = \frac{\log t}{\log R}$ λαμβάνουμε

$$\sum_{m\leq R}\frac{y^2(m)}{f(m)} \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})(\log R)^k\int_0^1 F^2(u)\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}du.$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$S_1 \sim N\mathfrak{S}(\mathcal{H})(\log R)^k\int_0^1 F^2(u)\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}du. \tag{5.6}$$

Περνάμε τώρα στην μελέτη του S_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}
S_2 = \sum_{N<n\leq 2N}\left(\sum_{h\in\mathcal{H}}\chi_{\mathcal{P}}(n+h)\right)W_n &= \sum_{N<n\leq 2N}\sum_{h\in\mathcal{H}}\chi_{\mathcal{P}}(n+h)\sum_{\substack{d_1,d_2\leq R\\ [d_1,d_2]|P_{\mathcal{H}}(n)}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \\
&= \sum_{d_1,d_2\leq R}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{h\in\mathcal{H}}\sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ [d_1,d_2]|P_{\mathcal{H}}(n)}}\chi_{\mathcal{P}}(n+h).
\end{aligned}$$

Τώρα για τον εσωτερικό όρο, θέτοντας όπως πριν $D = [d_1, d_2]$, έχουμε

$$\sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ [d_1,d_2]|P_{\mathcal{H}}(n)}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h) = \sum_{m\in R^*(D)} \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ n\equiv m \mod D}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h).$$

Στο σημείο αυτό κάνουμε μία παρατήρηση. Εφόσον $h \in \mathcal{H}$, για έναν πρώτο $p \mid D$ μία απο τις κλάσεις υπολοίπων στο $R(p)$ είναι και η $[-h]$, όπου τότε $p \mid n+h$. Συνεπώς για να υπάρξει συνεισφορά θα πρέπει να ισχύει $n+h = p$. Ωστόσο, $p \leq D \leq R^2 < N$, επομένως κάτι τέτοιο δε συμβαίνει. Για όλες τις υπόλοιπες κλάσεις $m \in R(p)$, έχουμε ότι $(m+h, p) = 1$. Επομένως, για κάθε $p \mid D$ έχουμε $\nu_{\mathcal{H}}(p) - 1 = \nu^*_{\mathcal{H}}(p)$ επιλογές για το $n \mod p$, δηλαδή $\nu^*_{\mathcal{H}}(D)$ επιλογές $\mod D$, με πολλαπλασιαστική επέκταση λόγω Κινέζικου Θεωρήματος Υπολοίπων. Το σύνολο αυτών των υπολοίπων το ονομάζουμε $R^*(D)$.

Τώρα, για ένα $m \in R^*(D)$ έχουμε ότι $(m+h, D) = 1$. Πράγματι, αν $p \mid D$ τότε από τη κατασκευή του $R^*(D)$ έχουμε ότι αν $m \in R^*(D)$ τότε $m \not\equiv -h \mod p$, άρα $p \nmid n+h$. Κατά συνέπεια έχουμε,

$$\sum_{m\in R^*(D)} \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ n\equiv m \mod D}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h) = \sum_{m\in R^*(D)} \pi(2N+h; D, m+h) - \pi(N+h; D, m+h).$$

Σκοπός μας είναι να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Bombieri-Vinogradov. Έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(2N+h; D, m+h) - \pi(N+h; D, m+h) &= \frac{2N+h}{\log(2N+h)\phi(D)} - \frac{N+h}{\log(N+h)\phi(D)} \\ &+ E(2N+h; D, m+h) \\ &- E(N+h; D, m+h), \end{aligned} \tag{5.7}$$

όπου

$$E(x; q, a) = \pi(x; q, a) - \frac{x}{\log x\phi(q)}.$$

Ο κύριος όρος στην (5.7) είναι ίσος με

$$\frac{N}{\phi(D)\log N} + O\left(\frac{N}{\phi(D)\log^2 N}\right),$$

άρα στο S_2 έχουμε τον κύριο όρο

$$\frac{N}{\log N} \sum_{h\in\mathcal{H}} \sum_{d_1,d_2\leq R} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}([d_1,d_2])}{\phi([d_1,d_2])}. \tag{5.8}$$

Η ποσότητα $\nu^*_{\mathcal{H}}$ είναι ανεξάρτητη του $h \in \mathcal{H}$. Σε αντίθεση με το $\nu_{\mathcal{H}}$ όμως, υπάρχει η περίπτωση $\nu^*_{\mathcal{H}}(p) = 0$ για κάποιο p. Θέτουμε για ευκολία

$$B = \prod_{p\,:\,\nu^*_{\mathcal{H}}(p)=0} p$$

το οποίο είναι γινόμενο πάνω από πεπερασμένους το πλήθος πρώτους, αφού αν $p > \max(\mathcal{H})$, τότε $\nu^*_{\mathcal{H}}(p) = k-1$. Παρατηρούμε τώρα ότι στο εσωτερικό άθροισμα που εμφανίζεται στην σχέση (5.8), λαμβάνουμε συνεισφορά αν και μόνον αν $(d_1, B) = 1$ και $(d_2, B) = 1$. Τη συνθήκη άθροισης πάνω από ακεραίους σχετικά πρώτους προς το B θα την συμπεριλάβουμε στον συμβολισμό $\sum'$. Σε αυτή τη περίπτωση φυσικά ισχύει ότι $\nu^*_{\mathcal{H}}(p) \neq 0$, οπότε με παρόμοια επιχειρήματα όπως με το S_1, λαμβάνουμε ότι ο παραπάνω κύριος όρος είναι ίσος με

$$\begin{aligned} \frac{kN}{\log N} \sum_{d_1,d_2\leq R}{}' \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(d_1)\nu^*_{\mathcal{H}}(d_2)}{\phi(d_1)\phi(d_2)} \frac{\phi((d_1,d_2))}{\nu^*_{\mathcal{H}}((d_1,d_2))} &= \frac{kN}{\log N} \sum_{d_1,d_2\leq R}{}' L^*(d_1)L^*(d_2) \sum_{m|(d_1,d_2)} f^*(m) \\ &= \frac{kN}{\log N} \sum_{m\leq R}{}' f^*(m) \left(\mu(m) \sum_{m|d} L^*(d)\right)^2, \end{aligned}$$

όπου $f^*(m) = \left(\frac{\phi}{\nu^*_{\mathcal{H}}} * \mu\right)(m)$ για $(m, B) = 1$ και $L^*(d) = \frac{\lambda_d \nu^*_{\mathcal{H}}(d)}{\phi(d)}$.

Θέτοντας τώρα $y^*(m) = \mu(m) f^*(m) \sum_{m|d} L^*(d)$ όταν $(m, B) = 1$ και 0 αλλιώς, καταλήγουμε ότι ο κύριος όρος του S_2 είναι ίσος με

$$\frac{kN}{\log N} \sum_{m \le R}{}' \frac{y_*^2(m)}{f^*(m)}. \tag{5.9}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η επιλογή ενός εκ των λ_d, $y(m)$, $y_*(m)$ οδηγεί σε μία επιλογή των άλλων δύο, λόγω του λήμματος αντιστροφής. Κατά συνέπεια, αν θέλουμε να μεταφέρουμε το πρόβλημα στην επιλογή των y (κι αυτός ήταν ο βασικός λόγος για τον οποίον έγινε η διαγωνοποίηση), θα πρέπει να συνδέσουμε τα y, $y*$, ώστε να γνωρίζουμε με ποιόν τρόπο η επιλογή των y (που σε ένα γενικό πλαίσιο, έχει ήδη γίνει) προσδιορίζει τα y_*.

Με δεδομένο ότι τα y, y_* συνδέονται με τα λ_d, προκειμένου να τα συνδέσουμε μεταξύ τους θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα αντιστροφής δύο φορές. Έχουμε λοιπόν για $(m, B) = 1$ ότι

$$\begin{aligned}
y_*(m) = \mu(m) f^*(m) \sum_{m|d} L^*(d) &= \mu(m) f^*(m) \sum_{m|d} \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(d)}{\phi(d)} \lambda_d \\
&= \mu(m) f^*(m) \sum_{m|d} \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(d)}{\phi(d)} \frac{d\mu(d)}{\nu_{\mathcal{H}}(d)} \sum_{d|k} \frac{y(k)}{f(k)} \\
&= \mu(m) f^*(m) \sum_{m|k} \frac{y(k)}{f(k)} \sum_{m|d|k} \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(d)}{\phi(d)} \frac{d\mu(d)}{\nu_{\mathcal{H}}(d)} \\
&= f^*(m) \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(m)}{\phi(m)} \frac{m}{\nu_{\mathcal{H}}(m)} \sum_{m|k} \frac{y(k)}{f(k)} \sum_{a|\frac{k}{m}} \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(a)}{\phi(a)} \frac{a\mu(a)}{\nu_{\mathcal{H}}(a)} \\
&= f^*(m) \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(m)}{\phi(m)} \frac{m}{\nu_{\mathcal{H}}(m)} \sum_{m|k} \frac{y(k)}{f(k)} \mu\left(\frac{k}{m}\right) (h * \mu)\left(\frac{k}{m}\right)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

όπου $h(n) = \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(n)}{\phi(n)} \frac{n}{\nu_{\mathcal{H}}(n)}$. Η συνάρτηση είναι πολλαπλασιαστική, και μας ενδιαφέρουν μόνο αριθμοί που είναι ελεύθεροι τετραγώνων. Κατά συνέπεια για τον υπολογισμό της $h * \mu$ αρκούν μόνο οι πρώτοι αριθμοί. Έχουμε

$$\begin{aligned}
(h * \mu)(p) &= \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(p)}{\nu_{\mathcal{H}}(p)} \frac{p}{\phi(p)} - 1 \\
&= \frac{p\nu^*_{\mathcal{H}}(p) - \phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)} \\
&= -\frac{p - \nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$(h * \mu)\left(\frac{k}{m}\right) = \mu\left(\frac{k}{m}\right) \prod_{p|\frac{k}{m}} \frac{p - \nu_{\mathcal{H}}(p)}{\nu_{\mathcal{H}}(p)} = \mu\left(\frac{k}{m}\right) \frac{f\left(\frac{k}{m}\right)}{\phi(\frac{k}{m})}.$$

Στην (5.10) έχουμε λοιπόν (παρατηρώντας ότι $\left(\frac{k}{m}, m\right) = 1$ αφού δουλεύουμε με αριθμούς που είναι ελεύθεροι τετραγώνων)

$$\begin{aligned}
y_*(m) &= f^*(m) \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(m) m}{\nu_{\mathcal{H}}(m) f(m)} \sum_{m|k} \frac{y(k)}{\phi(k)} \\
&= f^*(m) \frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(m) m}{\nu_{\mathcal{H}}(m) f(m) \phi(m)} \sum_{s \le \frac{R}{m}} \frac{y(sm)}{\phi(s)}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $I(n,m)$ (ως προς n) ικανοποιεί το Λήμμα 9 με $k=1$ και $L=O(1)$. Σε αυτή τη περίπτωση

$$g(n)=\prod_{p|n}\frac{\gamma(p)}{p-\gamma(p)}=\frac{I(n,m)}{\phi(n)}.$$

Επομένως

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu^2(n)I(n,m)}{\phi(n)}=C\log x+O(1)$$

όπου

$$C=\prod_p\left(1-\frac{I(p,m)}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\phi(m)}{m}.$$

Εφαρμόζουμε άθροιση κατά μέρη και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{s\le\frac{R}{m}}\frac{y(sm)}{\phi(s)} &= \sum_{s\le\frac{R}{m}}\frac{\mu^2(s)I(s,m)}{\phi(s)}F\left(\frac{\log sm}{\log R}\right)\\ &\sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})\frac{\phi(m)}{m}\int_1^{\frac{R}{m}}F'\left(\frac{\log tm}{\log R}\right)\frac{1}{t\log R}\log t\ dt.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $u=\frac{\log tm}{\log R}$ (η οποία μας δίνει $\log t=u\log R-\log m$) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{s\le\frac{R}{m}}\frac{y(sm)}{\phi(s)} &\sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})\frac{\phi(m)}{m}\log R\int_{\frac{\log m}{\log R}}^1 uF'(u)du\\ &\sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})\frac{\phi(m)}{m}\log R\int_{\frac{\log m}{\log R}}^1 F(u)du,\end{aligned}\tag{5.12}$$

όπου η τελευταία σχέση προκύπτει με παραγοντική ολοκλήρωση.

Επανερχόμαστε λοιπόν στην σχέση (5.11). Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}f^*(m)\frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(m)}{\phi(m)}\frac{m}{\nu_{\mathcal{H}}(m)f(m)} &= \prod_{p|m}\frac{\phi(p)-\nu^*_{\mathcal{H}}(p)}{\nu^*_{\mathcal{H}}(p)}\frac{m\nu^*_{\mathcal{H}}(m)}{\phi(m)\nu_{\mathcal{H}}(m)}\prod_{p|m}\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}\\ &= \frac{m}{\phi(m)}.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, όταν $(m,B)=1$ και $m\to\infty$, έχουμε

$$y_*(m)\sim\mathfrak{S}(\mathcal{H})\log R\int_{\frac{\log m}{\log R}}^1 F(u)du.\tag{5.13}$$

Ερχόμαστε λοιπόν στην (5.9). Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}S_2 &\sim \frac{kN}{\log N}{\sum_{m\le R}}'\frac{y_*^2(m)}{f^*(m)}\\ &\sim \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})(\log R)^2\frac{kN}{\log N}{\sum_{m\le R}}'\frac{\mu^2(m)}{f^*(m)}\left(\int_{\frac{\log m}{\log R}}^1 F(u)du\right)^2.\end{aligned}$$

Τώρα έχουμε για ένα $(m,B)=1$ ότι

$$\frac{1}{f^*(m)}=\prod_{p|m}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(p)}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}=\prod_{p|m}\frac{w(p)}{p-w(p)},$$

με $w(p)=\frac{p\nu^*_{\mathcal{H}}(p)}{p-1}$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $p\mid B$ τότε $w(p)=0$, επομένως ισχύει ότι

$$\sum_{m\leq R}{}'\frac{\mu^2(m)}{f^*(m)} \quad = \quad \sum_{m\leq R}\mu^2(m)\prod_{p|m}\frac{w(p)}{p-w(p)}$$

Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε το Λήμμα 9 για την w, προκειμένου να υπολογίσουμε το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας, και κατ'επέκταση να υπολογίσουμε το $\sum'_{m\leq R}\frac{\mu^2(m)}{f^*(m)}$. Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται με $A=2k$, ενώ για την δεύτερη έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{y_1<p\leq y_2}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(p)\log p}{p-1} &= \sum_{y_1<p\leq y_2}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}}(p)\log p}{p}+O(1)\\ &= \sum_{y_1<p\leq y_2}\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)\log p}{p}-\log\frac{y_2}{y_1}+O(1).\end{aligned}$$

Επομένως, επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα επιχειρήματα μας, βλέπουμε ότι ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη με $L=O(\log\log h)$ και $k-1$ στη θέση του k. Συνεπώς

$$\sum_{m\leq R}{}'\frac{\mu^2(m)}{f^*(m)} \quad = \quad \frac{C_w}{(k-1)!}\left((\log R)^{k-1}+O\left(\frac{\log\log h}{\log R}\right)\right),$$

όπου για το C_w έχουμε

$$\begin{aligned}C_w &= \prod_p\left(1-\frac{w(p)}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-1}\\ &= \prod_p\left(1-\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)-1}{p-1}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-1}\\ &= \prod_p\left(\frac{p-1}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k}\\ &= \prod_p\left(\frac{p}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k}\\ &= \frac{1}{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, ομοίως με πριν, εάν θέσουμε $G(t)=\left(\int_{\frac{\log t}{\log R}}^1F(u)du\right)^2$ τότε με άθροιση κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned}S_2 &\sim \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})(\log R)^2\frac{kN}{\log N}\sum_{m\leq R}{}'\frac{\mu^2(m)}{f^*(m)}\left(\int_{\frac{\log m}{\log R}}^1F(u)du\right)^2\\ &\sim -\mathfrak{S}(\mathcal{H})(\log R)^2\frac{kN}{(k-1)!\log N}\int_1^R G'(t)(\log t)^{k-1}dt\\ &\sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})(\log R)^2\frac{kN}{\log N}\int_1^R G(t)\frac{(\log t)^{k-2}}{t(k-2)!}dt.\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $v = \frac{\log t}{\log R}$ λαμβάνουμε

$$S_2 \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})(\log R)^{k+1}\frac{kN}{\log N}\int_0^1 \frac{v^{k-2}}{(k-2)!}\left(\int_v^1 F(u)du\right)^2 dv. \tag{5.14}$$

Είμαστε λοιπόν πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα της μεθόδου GPY.

Θεώρημα 19 (Πρώτο θεώρημα GPY)**.** *Έστω ότι οι πρώτοι αριθμοί έχουν επίπεδο κατανομής $\theta > 1/2$. Τότε υπάρχει μία υπολογίσιμη σταθερά $C(\theta)$ τέτοια ώστε για κάθε $k \geq C(\theta)$, να ισχύει ότι κάθε admissible $k-$άδα περιέχει πρώτη $2-$άδα. Αν*

$$\theta > \frac{7+2\sqrt{6}}{12} \sim 0.9915,$$

τότε μπορούμε να επιλέξουμε $k = 6$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.6) και (5.14) βλέπουμε ότι

$$\frac{S_2}{S_1} \sim k\,\frac{\log R}{\log N}\,\frac{\int_0^1 \frac{v^{k-2}}{(k-2)!}\left(\int_v^1 F(u)du\right)^2 dv}{\int_0^1 F^2(u)\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}du}.$$

Επιλέγουμε $F(t) = \frac{(1-t)^m}{m!}$ και χρησιμοποιούμε τη παρακάτω ταυτότητα της συνάρτησης Βήτα

$$B(m+1,n+1) = \int_0^1 (1-t)^m t^n dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \tag{5.15}$$

προκειμένου να υπολογίσουμε τα δύο ολοκληρώματα. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\int_0^1 F^2(u)\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}du &= \frac{(2m)!}{(m!)^2}\int_0^1 \frac{(1-u)^{2m}}{(2m)!}\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}du \\ &= \frac{(2m)!}{(m!)^2}\frac{1}{(2m+k)!},\end{aligned} \tag{5.16}$$

ενώ για το δεύτερο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\int_0^1 \frac{v^{k-2}}{(k-2)!}\frac{(1-v)^{2m+2}}{((m+1)!)^2}dv = \frac{(2m+2)!}{((m+1)!)^2}\frac{1}{(2m+k+1)!}. \tag{5.17}$$

Από τις σχέσεις (5.16) και (5.17) λαμβάνουμε

$$\frac{S_2}{S_1} \sim \frac{\log R}{\log N}\frac{2k}{2m+k+1}\frac{2m+1}{m+1}. \tag{5.18}$$

Παίρνοντας $m = o(k)$ έχουμε ότι καθώς m, $k \to \infty$

$$\frac{2k}{2m+k+1} \to 2,$$

καθώς και

$$\frac{2m+1}{m+1} \to 2.$$

Συνεπώς, επιλέγοντας $R = N^{\frac{\theta_0}{2}}$ για οποιοδήποτε $\theta_0 < \theta$ παίρνουμε

$$\frac{S_2}{S_1} \sim 4\frac{\log R}{\log N} \sim 2\theta_0,$$

το οποίο δείχνει ότι για $\theta = 1/2$ μόλις που αποτυγχάνουμε να εντοπίσουμε δύο πρώτους στην $\mathcal{H}$. Με την υπόθεση ότι έχουμε επίπεδο κατανομής $\theta > \frac{1}{2}$, με βάση την (5.18) θέλουμε

$$\theta \frac{k}{k+2m+1} \frac{2m+1}{m+1} \geq 1.$$

Επιλέγοντας $k = (2m+1)^2$ λαμβάνουμε

$$\theta \left(\frac{2m+1}{m+1} \right)^2 \geq 2 \Rightarrow m \geq \frac{1}{2 - \sqrt{\frac{2}{\theta}}} - 1,$$

το οποίο σημαίνει ότι αν

$$k \geq \left(\frac{2}{2 - \sqrt{\frac{2}{\theta}}} - 1 \right)^2,$$

τότε κάθε admissible $k-$άδα $\mathcal{H}$ περιέχει πρώτη 2-άδα. Η σταθερά αυτή μας δίνει ότι για $\theta \geq \frac{7+2\sqrt{6}}{12} \sim 0.9915$ παίρνουμε ότι κάθε admissible $6-$άδα περιέχει πρώτη $2-$άδα. □

Πόρισμα 4. *Με την υπόθεση ότι ισχύει η εικασία Elliott-Halberstam, λαμβάνουμε*

$$\liminf (p_{n+1} - p_n) \leq 16.$$

Απόδειξη. Η συνθήκη $\theta > \frac{7+2\sqrt{6}}{12}$ φυσικά ικανοποείται, επομένως από το Θεώρημα 19 κάθε admissible $6-$άδα περιέχει πρώτη $2-$άδα. Η $6-$άδα

$$\mathcal{H} = \{0, 4, 6, 10, 12, 16\}$$

είναι admissible, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. □

5.3 Το Δεύτερο Θεώρημα GPY

Στη προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι αν η $\mathcal{H}$ είναι μία admissible $k-$άδα και $h \in \mathcal{H}$, τότε

$$\sum_{N < n \leq 2N} \chi_{\mathcal{P}}(n+h) W_n \sim \frac{N}{\log N} \sum_{m \leq R} \frac{y_*^2(m)}{f^*(m)}.$$

Κάνοντας μία κατάλληλη επιλογή των $y(m)$ οδηγηθήκαμε σε μία επιλογή των λ_d και κατά συνέπεια σε μια επιλογή των y_*. Από δω και πέρα σταθεροποιούμε την ίδια επιλογή των $y(m)$ (άρα και των λ_d) και θεωρούμε ένα $h_0 \notin \mathcal{H}$. Θέλουμε να εξετάσουμε την ποσότητα

$$\sum_{N < n \leq 2N} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0) W_n. \tag{5.19}$$

Εργαζόμενοι όπως και πριν, παρατηρούμε ότι η ποσότητα αυτή είναι ίση με

$$\sum_{N < n \leq 2N} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0) \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq R \\ [d_1, d_2] | P_{\mathcal{H}}(n)}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} = \sum_{d_1, d_2 \leq R} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \sum_{\substack{[d_1, d_2] | P_{\mathcal{H}}(n) \\ N < n \leq 2N}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0).$$

Όπως και προηγουμένως, για έναν πρώτο p έστω R_p το σύνολο $\{-h \mod p : h \in \mathcal{H}\}$, δηλαδή οι λύσεις $\mod p$ της $p \mid P_{\mathcal{H}}(n)$, και αντίστοιχα για d ελεύθερο τετραγώνων έστω R_d το πλήθος των λύσεων της $d \mid P_{\mathcal{H}}(n)$. Όταν είχαμε $h_0 \in \mathcal{H}$, ένα από τα υπόλοιπα ήταν σίγουρα και το $-h_0 \mod p$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως, αυτό δεν το γνωρίζουμε. Αν το $-h_0 \mod p$ εμφανίζεται στο R_p, τότε πρέπει να εξαιρέσουμε την αντίστοιχη κλάση υπολοίπων (για λόγους που έχουμε ήδη εξηγήσει). Σε αυτή

τη περίπτωση, έχουμε ότι υπάρχουν $\nu_{\mathcal{H}}(p)-1$ υπόλοιπα $\bmod p$ για το n. Αν $-h_0 \bmod p \notin R_p$, τότε δεν εξαιρούμε καμία κλάση και έχουμε $\nu_{\mathcal{H}}(p)$ υπόλοιπα $\bmod p$ για το n.

Ένας εύκολος τρόπος για να ενοποιηθούν οι δύο περιπτώσεις (ο οποίος είναι και ιδιαίτερα χρήσιμος προκειμένου να αναχθούμε στους υπολογισμούς του προηγούμενου κεφαλαίου), είναι ο εξής: θεωρούμε την $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}\cup\{h_0\}$. Το πλήθος των υπολοίπων της $\mathcal{H}_0 \bmod p$ είναι $\nu_{\mathcal{H}}(p)$ αν $h_0\in R_p$ και $\nu_{\mathcal{H}}(p)+1$ αλλιώς. Άρα, με βάση τα προηγούμενα, έχουμε σε κάθε περίπτωση $\nu_{\mathcal{H}_0}(p)-1$ επιλογές $\bmod p$ για το n. Για κάθε πρώτο p θέτουμε

$$\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p)=\nu_{\mathcal{H}_0}(p)-1$$

και επεκτείνουμε πολλαπλασιαστικά στους αριθμούς που είναι ελεύθεροι τετραγώνων. Συμβολίζουμε με $R^*_0(p)$ αυτό το σύνολο των $\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p)$ υπολοίπων.

Από την παραπάνω συζήτηση, η ποσότητα (5.19) γράφεται

$$\sum_{\substack{d_1,d_2\le R\\ [d_1,d_2]=D}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{m\in R^*_0(D)}\sum_{\substack{N+h_0<n\le 2N+h_0\\ n\equiv h_0+m \bmod D}}\chi_{\mathcal{P}}(n).$$

Όμοια με πριν (χρησιμοποιώντας δηλαδή το Θεώρημα Bombieri-Vinogradov) λαμβάνουμε τον κύριο όρο

$$\frac{N}{\log N}\sum_{\substack{d_1,d_2\le R\\ [d_1,d_2]=D}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(D)}{\phi(D)}. \tag{5.20}$$

Όπως και πριν, υπάρχει περίπτωση $\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p)=0$, επομένως θεωρούμε τον αριθμό

$$B_1=\prod_{p\,:\,\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p)=0}p$$

Και λαμβάνουμε άθροιση πάνω από όρους σχετικά πρώτους προς το B_0, συνθήκη την οποία δηλώνουμε με τον συμβολισμό $\sum'$. Αναπτύσσουμε τώρα τον όρο (5.20)

$$\begin{aligned}\frac{N}{\log N}\sum_{d_1,d_2\le R}{}'\lambda_{d_1}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(d_1)}{\phi(d_1)}\lambda_{d_2}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(d_2)}{\phi(d_2)}\frac{\phi(d_1,d_2)}{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(d_1,d_2)} &= \frac{N}{\log N}\sum_{d_1,d_2\le R}{}'L^\dagger(d_1)L^\dagger(d_2)\sum_{m|(d_1,d_2)}f^\dagger(d)\\ &= \frac{N}{\log N}\sum_{m\le R}{}'\frac{y^2_\dagger(m)}{f^\dagger(m)},\end{aligned} \tag{5.21}$$

όπου

$$f^\dagger(m)=\left(\frac{\phi}{\nu^*_{\mathcal{H}_0}}*\mu\right)(m),\ \text{όταν } (m,B_1)=1,\qquad L^\dagger(d)=\lambda_d\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(d)}{\phi(d)}$$

και για $(m,B_1)=1$

$$y_\dagger(m)=f^\dagger(m)\mu(m)\sum_{d|m}L^\dagger(d).$$

ενώ αν $(m,B_1)>1$ θέτουμε $y_\dagger(m)=0$.

Έχουμε ότι

$$f^\dagger(p)=\frac{p-\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p)-1}{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p)}.$$

Θέλουμε τώρα, όπως και με το S_2, να συνδέσουμε τα $y_\dagger$ με τα y. Εφαρμόζουμε το Λήμμα αντιστροφής (Λήμμα 2) (αφού και τα δύο συνδέονται με τα λ_d) και έχουμε για $(m, B_1) = 1$ ότι

$$\begin{aligned} y_\dagger(m) &= f^\dagger(m)\mu(m)\sum_{m|d}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(d)}{\phi(d)}\frac{d\mu(d)}{\nu_{\mathcal{H}}(d)}\sum_{d|s}\frac{y(s)}{f(s)} \\ &= f^\dagger(m)\mu(m)\sum_{m|s}\frac{y(s)}{f(s)}\sum_{m|d|s}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(d)}{\phi(d)}\frac{d\mu(d)}{\nu_{\mathcal{H}}(d)} \qquad (5.22) \\ &= \frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(m)}{\phi(m)}\frac{m\mu(m)}{\nu_{\mathcal{H}}(m)}f^\dagger(m)\mu(m)\sum_{m|s}\frac{y(s)}{f(s)}\sum_{\substack{a|\frac{s}{m}\\(a,m)=1}}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(a)}{\phi(a)}\frac{a\mu(a)}{\nu_{\mathcal{H}}(a)}. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό

$$D = \prod_{h\in\mathcal{H}}|h - h_0|,$$

και παρατηρούμε ότι $p \mid D \iff \nu_{\mathcal{H}_0}(p) = \nu_{\mathcal{H}}(p)$. Επομένως $\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p) = \nu_{\mathcal{H}}(p) - 1 \iff p \mid D$ και $\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p) = \nu_{\mathcal{H}}(p) \iff p \nmid D$.

Για το εσωτερικό άθροισμα στην (5.22) έχουμε για $p \mid D$

$$\begin{aligned} \sum_{a|p}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(a)}{\phi(a)}\frac{a\mu(a)}{\nu_{\mathcal{H}}(a)} &= 1 - \frac{p(\nu_{\mathcal{H}}(p)-1)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)} \\ &= \frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)}, \end{aligned}$$

ενώ αν $p \nmid D$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{a|p}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(a)}{\phi(a)}\frac{a\mu(a)}{\nu_{\mathcal{H}}(a)} &= 1 - \frac{p\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)} \\ &= \frac{-\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)} \\ &= \frac{-1}{\phi(p)}. \end{aligned}$$

Άρα για έναν αριθμό q που είναι ελεύθερος τετραγώνων έχουμε

$$\sum_{a|q}\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(a)}{\phi(a)}\frac{a\mu(a)}{\nu_{\mathcal{H}}(a)} = \mu\left(\frac{q}{(q,D)}\right)\prod_{p|(q,D)}\frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)}\prod_{p|\frac{q}{(q,D)}}\frac{1}{\phi(p)}.$$

Αντικαθιστώντας στην (5.22) λαμβάνουμε

$$y_\dagger(m) = \frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(m)}{\phi(m)}\frac{m}{\nu_{\mathcal{H}}(m)}f^\dagger(m)\sum_{m|s}\frac{y(s)}{f(s)}\mu\left(\frac{\frac{s}{m}}{(\frac{s}{m},D)}\right)\prod_{p|(\frac{s}{m},D)}\frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)}\prod_{p|\frac{\frac{s}{m}}{(\frac{s}{m},D)}}\frac{1}{\phi(p)}.$$

Θέτουμε $s = bm$ για να λάβουμε

$$y_\dagger(m) = \frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(m)}{\phi(m)}\frac{m}{\nu_{\mathcal{H}}(m)}\frac{f^\dagger(m)}{f(m)}\sum_{b\le\frac{R}{m}}\frac{y(bm)}{f(b)}\mu\left(\frac{b}{(b,D)}\right)\prod_{p|(b,D)}\frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)}\frac{1}{\phi\left(\frac{b}{(b,D)}\right)}. \qquad (5.23)$$

Προκειμένου να απλουστεύσουμε τη κατάσταση, παρατηρούμε αρχικά ότι έχουμε συνεισφορά μόνον όταν $(b, m) = 1$ καθώς σε διαφορετική περίπτωση έχουμε $y(bm) = 0$. Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi\left(\frac{b}{(b,D)}\right)}\prod_{p|(b,D)}\frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}{\phi(p)\nu_{\mathcal{H}}(p)} &= \frac{1}{\phi\left(\frac{b}{(b,D)}\right)}\frac{f((b,D))}{\phi((b,D))} \\ &= \frac{f((b,D))}{\phi(b)}, \end{aligned}$$

συνεπώς, αντικαθιστώνας και την επιλογή μας για τα y, το άθροισμα στην (5.23) γίνεται

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \sum_{\substack{b\leq \frac{R}{m}\\(b,m)=1}} \frac{F(\frac{\log bm}{\log R})}{\phi(b)} \frac{\mu(b)}{\mu((b,D))} \frac{f((b,D))}{f(b)}. \tag{5.24}$$

Αυτό που πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι σε αυτή τη περίπτωση δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 9, γιατί δεν ικανοποείται η συνθήκη $\gamma(p) > 0$ (λόγω της συνάρτησης μ). Στο σημείο αυτό, κάνουμε την επιλογή μας για την F, η οποία στο εξής θα είναι η

$$F(t) = \frac{(1-t)^r}{r!}$$

Για αυτή την επιλογή, έχουμε το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 10. *Έστω $F(t) = \frac{(1-t)^r}{r!}$. Τότε ισχύει ο παρακάτω ασυμπτωτικός τύπος για $(m, B_1) = 1$ καθώς $m \to \infty$.*

$$y_\dagger(m) \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(m)}{\phi(m)} \frac{m}{\nu_{\mathcal{H}}(m)} \frac{f^\dagger(m)}{f(m)} F(\frac{\log m}{\log R}) \sum_{\substack{b=1\\(b,m)=1}}^{\infty} \frac{1}{\phi(b)} \frac{\mu(b)}{\mu((b,D))} \frac{f((b,D))}{f(b)} \tag{5.25}$$

Απόδειξη. Παραλείπεται, παραπέμπουμε στο [9], Λήμμα 12. □

Τώρα, παρατηρούμε ότι θα μας επιτραπεί μια μεγάλη απλοποίηση του ασυμπτωτικού τύπου των $y_\dagger$, επειδή το άθροισμα που εμφανίζεται στην γραφή του (όπως αυτή έχει διαμορφωθεί από το προηγούμενο λήμμα) συγκλίνει. Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο λήμμα

Λήμμα 11. *Έστω $(m, B_1) = 1$. Ισχύει η παρακάτω ισότητα*

$$\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(m)}{\phi(m)} \frac{m}{\nu_{\mathcal{H}}(m)} \frac{f^\dagger(m)}{f(m)} \sum_{\substack{b=1\\(b,m)=1}}^{\infty} \frac{1}{\phi(b)} \frac{\mu(b)}{\mu((b,D))} \frac{f((b,D))}{f(b)} = \frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)}{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}$$

Απόδειξη. Έστω $h = \max(\mathcal{H})$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{b=1\\(b,m)=1}}^{x} \frac{1}{\phi(b)} \frac{\mu(b)}{\mu((b,D))} \frac{f((b,D))}{f(b)} &\ll \sum_{\substack{b=1\\(b,m)=1}}^{x} \mu^2(b) \frac{f((b,D))}{\phi(b)f(b)} \\
&\ll \prod_{p\leq x} \left(1 + \frac{f(p,D))}{(p-1)f(p)}\right) \\
&\ll C_1(h) \prod_{h<p\leq x} \left(1 + \frac{k}{(p-1)(p-k)}\right) \\
&\ll C(h) \prod_{h<p\leq x} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) \\
&= O_h(1),
\end{aligned}$$

επομένως η σειρά συγκλίνει. Άρα μπορούμε να πάρουμε το γινόμενο Euler της σειράς

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{b=1\\(b,m)=1}}^{\infty} \frac{1}{\phi(b)}\frac{\mu(b)}{\mu((b,D))}\frac{f((b,D))}{f(b)} &= \prod_{p\nmid m}\left(1-\frac{\mu((p,D))f((p,D))}{(p-1)f(p)}\right)\\
&= \prod_{\substack{p\nmid m\\ p\mid D}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid D}}\left(1-\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{(p-1)(p-\nu_{\mathcal{H}}(p))}\right)\\
&= \prod_{\substack{p\nmid m\\ p\mid D}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid D}}\frac{p(p-\nu_{\mathcal{H}}(p)-1)}{(p-1)(p-\nu_{\mathcal{H}}(p))}\\
&= \prod_{p\nmid m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid D}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{p(p-\nu_{\mathcal{H}}(p)-1)}{(p-1)(p-\nu_{\mathcal{H}}(p))}\\
&= \prod_{p\nmid m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid D}}\frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)-1}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}.
\end{aligned}$$

Από την άλλη έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{m}{\phi(m)}\frac{1}{\nu_{\mathcal{H}}(m)f(m)}\nu^*_{\mathcal{H}_0}(m)f^\dagger(m) &= \prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{p\mid m}\frac{1}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}\prod_{\substack{p\mid m\\ p\mid D}}(p-\nu_{\mathcal{H}}(p)\prod_{\substack{p\mid m\\ p\nmid D}}(p-\nu_{\mathcal{H}}(p)-1)\\
&= \prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\mid m\\ p\nmid D}}\frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)-1}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}.
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις δύο σχέσεις και λαμβάνουμε ότι το πρώτο μέλος του λήμματος ισούται με

$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{p\nmid D}\frac{(p-\nu_{\mathcal{H}}(p)-1)}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)}.$$

Τέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)}{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} &= \frac{\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k-1}\left(1-\frac{\nu_{\mathcal{H}_0}(p)}{p}\right)}{\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k}\left(1-\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p}\right)}\\
&= \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{p\nmid D}\frac{1-\frac{\nu_{\mathcal{H}_0}(p)+1}{p}}{1-\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p}}\\
&= \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{p\nmid D}\frac{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)-1}{p-\nu_{\mathcal{H}}(p)},
\end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Συνδυάζοντας τα Λήμματα 10 και 11 έχουμε τελικά, υπό την επιλογή $F(t)=\frac{(1-t)^r}{r!}$, ότι για $(m,B_1)=1$ και $m\to\infty$ ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$y_\dagger(m)\sim\frac{\mu^2(m)}{r!(\log R)^r}\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)\left(\log\frac{R}{m}\right)^r.$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{N<n\leq 2N}\chi_{\mathcal{P}}(n+h_0)W_n &\sim \frac{N}{\log N}\sum_{m\leq R}{}'\frac{y_\dagger^2(m)}{f^\dagger(m)}\\ &\sim \mathfrak{S}^2(\mathcal{H}_0)\frac{1}{(r!)^2(\log R)^{2r}}\frac{N}{\log N}\sum_{m\leq R}{}'\frac{\mu^2(m)}{f^\dagger(m)}\left(\log\frac{R}{m}\right)^{2r}. \qquad (5.26)\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το Λήμμα 9 προκειμένου να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$\sum_{m\leq R}{}'\frac{\mu^2(m)}{f^\dagger(m)}.$$

Έχουμε τώρα ότι για $p\nmid B_1$

$$\frac{1}{f\dagger(p)}=\frac{\nu^*_{\mathcal{H}_0}(p)}{p-\nu_{\mathcal{H}_0}(p)},$$

συνεπώς είμαστε ακριβώς στην ίδια θέση με την περίπτωση της f^*, με το $k+1$ στη θέση του k. Εφαρμόζοντας την ίδια επιχειρηματολογία, συμπεραίνουμε τον ασυμπτωτικό τύπο

$$\sum_{m\leq R}{}'\frac{\mu^2(m)}{f^\dagger(m)}\sim\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)}\frac{(\log R)^k}{k!}.$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε άθροιση κατά μέρη για να πάρουμε

$$\sum_{m\leq R}{}'\frac{\mu^2(m)}{f^\dagger(m)}\left(\log\frac{R}{m}\right)^{2r} \sim \frac{1}{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)}\int_1^R\frac{(\log t)^k}{k!}2r\left(\log\frac{R}{t}\right)^{2r-1}\frac{1}{t}\,dt.$$

Θέτουμε $u=\frac{\log t}{\log R}$ οπότε παίρνουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)}\int_0^1\frac{u^k}{k!}2r(\log R)^{k+2r}(1-u)^{2r-1}du,$$

το οποίο γράφεται στην μορφή

$$\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)}(\log R)^{k+2r}(2r)!\int_0^1\frac{u^k}{k!}\frac{(1-u)^{2r-1}}{(2r-1)!}dt.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα 5.15 της συνάρτησης Βήτα, καταλήγουμε ότι

$$\sum_{m\leq R}{}'\frac{\mu^2(m)}{f^\dagger(m)}\left(\log\frac{R}{m}\right)^{2r}\sim\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)}(\log R)^{k+2r}\frac{(2r)!}{(k+2r)!}.$$

Επομένως στην (5.26) λαμβάνουμε

$$\sum_{N<n\leq 2N}\chi_{\mathcal{P}}(n+h_0)W_n \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)\frac{N}{\log N}\frac{(2r)!}{(r!)^2(k+2r)!}(\log R)^k.$$

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα μας στη παρακάτω πρόταση χάριν ευκολίας.

Πρόταση 14. *Έστω admissible $k-$άδα $\mathcal{H}$ και ένας θετικός ακέραιος h_0. Έστω επίσης*

$$W_n=\left(\sum_{\substack{d\leq R\\ d|P_{\mathcal{H}}(n)}}\lambda_d\right)^2,$$

με

$$\lambda_d = \mathfrak{S}(\mathcal{H})\mu(d)\frac{d}{\nu_{\mathcal{H}}(d)}\frac{1}{r!(\log R)^r}\sum_{d|m}\frac{\mu^2(m)(\log\frac{R}{m})^r}{f(m)}$$

(η σχέση αυτή προκύπτει από την επιλογή των y και χρησιμοποιώντας το λήμμα αντιστροφής). Τότε, αν $h_0 \in \mathcal{H}$, έχουμε

$$\sum_{N<n\leq 2N}\chi_{\mathcal{P}}(n+h_0)W_n \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H})\frac{N}{\log N}\frac{(2r+2)!}{((r+1)!)^2(2r+k+1)!}(\log R)^{k+1},$$

ενώ αν $h_0 \notin \mathcal{H}$ τότε

$$\sum_{N<n\leq 2N}\chi_{\mathcal{P}}(n+h_0)W_n \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)\frac{N}{\log N}\frac{(2r)!}{(r!)^2(k+2r)!}(\log R)^{k}.$$

Ἀπόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη συζήτησή μας. □

Προτού συνεχίσουμε, θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα του Gallagher, το οποίο παρουσίασε ο ίδιος στο [6].

Θεώρημα 20 (Gallagher)**.** *Έστω k θετικός ακέραιος. Για κάθε $h \geq 1$ θεωρούμε το σύνολο C_h των διατεταγμένων $k-$άδων με στοιχεία διακεκριμένους ακεραίους στο $[1,h]$. Τότε, καθώς $h \to \infty$, έχουμε*

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h}\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \sim h^k.$$

Ἀπόδειξη. Έχουμε ήδη δει ότι

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\mathcal{H}) &= \prod_p\left(1-\frac{\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p}\right)\left(1+\frac{k}{p}+O_k\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\\ &= \prod_p\left(1+\frac{k-\nu_{\mathcal{H}}(p)}{p}+O_k\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\\ &= \prod_p(1+f_{\mathcal{H}}(p)),\end{aligned}$$

με $f_{\mathcal{H}}(p) = O_k(1/p^2)$, όταν $\nu_{\mathcal{H}}(p) = k$ (ειδικότερα όταν $p \geq h$). Επεκτείνουμε πολλαπλασιαστικά την $f_{\mathcal{H}}$ και γράφουμε

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = 1+\sum_q \mu^2(q)f_{\mathcal{H}}(q)$$

καθώς αθροίζουμε πάνω από θετικούς ακεραίους που είναι ελεύθεροι τετραγώνων. Συνεπώς παίρνουμε

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \frac{\lfloor h\rfloor!}{(\lfloor h\rfloor-k)!}+\sum_{\mathcal{H}\in C_h}\sum_{q>1}\mu^2(q)f_{\mathcal{H}}(q). \tag{5.27}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\frac{\lfloor h\rfloor!}{(\lfloor h\rfloor-k)!} = h^k+O_k(h^{k-1}). \tag{5.28}$$

Απομένει λοιπόν να μελετήσουμε το άθροισμα στην (5.27). Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι αν

$$\Delta = \prod_{i>j}|h_i-h_j|$$

τότε $\nu_{\mathcal{H}}(p) < k \iff p \mid \Delta$. Επομένως για q ελεύθερο τετραγώνων έχουμε

$$\begin{aligned} |f_{\mathcal{H}}(q)| = \left|\prod_{p|q} f_{\mathcal{H}}(p)\right| &\leq \prod_{p|(q,\Delta)} \frac{C}{p} \prod_{\substack{p|q \\ p\nmid\Delta}} \frac{C}{p^2} \\ &= \prod_{p|q} \frac{C}{p^2}(p,\Delta) \\ &= \frac{C^{\omega(q)}(q,\Delta)}{q^2}. \end{aligned}$$

Εισάγουμε μια νέα παράμετρο $M \leq h$ και ασχολούμαστε αρχικά με την ποσότητα

$$\begin{aligned} \left|\sum_{q>M} \mu^2(q) f_{\mathcal{H}}(q)\right| &\leq \sum_{q>M} \mu^2(q) \frac{C^{\omega(q)}(q,\Delta)}{q^2} \\ &\leq \sum_{q>M} \mu^2(q) \frac{\tau_m(q)(q,\Delta)}{q^2}, \end{aligned}$$

όπου $m = \lceil C \rceil$. Γράφουμε λοιπόν

$$\sum_{q>M} \mu^2(q) \frac{\tau_m(q)}{q^2} \sum_{\substack{d|q \\ d|\Delta}} \phi(d) = \sum_{d|\Delta} \frac{\phi(d)\tau_m(d)\mu^2(d)}{d^2} \sum_{s>\frac{M}{d}} \frac{\mu^2(s)\tau_m(s)}{s^2}. \tag{5.29}$$

Θεωρούμε ένα $\epsilon < \frac{1}{3}$ και έχουμε ότι $\tau_2(n) \ll n^{\frac{\epsilon}{mk^2}}$, επομένως $\tau_m(n) \ll n^{\epsilon}$. Για το εσωτερικό άθροισμα λοιπόν στην (5.29) έχουμε

$$\sum_{s>\frac{M}{d}} \frac{\mu^2(s)\tau_m(s)}{s^2} \ll \int_{\frac{M}{d}}^{\infty} \frac{1}{t^{2-\epsilon}} dt \ll \left(\frac{d}{M}\right)^{1-\epsilon}.$$

Συνεπώς στην (5.29) έχουμε ότι η ποσότητα φράσσεται από

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^{1-\epsilon}} \sum_{d|\Delta} \frac{\mu^2(d)\tau_m(d)\phi(d)}{d^{1+\epsilon}} &\ll \frac{1}{M^{1-\epsilon}} \sum_{d|\Delta} \frac{\tau_m(d)}{d^{\epsilon}} \\ &\ll \frac{1}{M^{1-\epsilon}} \tau_2(\Delta). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\Delta \leq h^{k^2}$, επομένως $\tau_2(\Delta) \ll h^{\epsilon}$. Άρα λαμβάνουμε

$$\sum_{q>M} \mu^2(q) f_{\mathcal{H}}(q) \ll \frac{h^{\epsilon}}{M^{1-\epsilon}}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο άνω φράγμα

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{q>M} \mu^2(q) f_{\mathcal{H}}(q) \ll \frac{h^{k+\epsilon}}{M^{1-\epsilon}}. \tag{5.30}$$

Περνάμε τώρα στον όρο

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{1<q\leq M} \mu^2(q) f_{\mathcal{H}}(q) = \sum_{1<q\leq M} \mu^2(q) \sum_{\mathcal{H}\in C_h} \prod_{p|q} f_{\mathcal{H}}(p). \tag{5.31}$$

Για το εσωτερικό άθροισμα, παρατηρούμε ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι ποσότητες $f_{\mathcal{H}}(p)$, οι οποιές εξαρτώνται μόνο από τους αριθμούς $\nu_{\mathcal{H}}(p)$ και όχι από την k-άδα $\mathcal{H}$ καθ'αυτή. Μπορούμε επομένως για

κάθε σταθεροποιήμενο q να αθροίσουμε πάνω από όλες τις δυνατές διατεταγμένες $\omega(q)-$άδες αριθμών με στοιχεία ακέραιους στο $[1,p]$. Με αυτό τον τρόπο αντιστοιχούμε την $i-$θέση της $\omega(q)-$άδας την ποσότητα $\nu_{\mathcal{H}}(p_i)$ όπου $p_1 < p_2 < \cdots < p_{\omega(q)}$ οι πρώτοι διαιρέτες του q. Επιπλέον, για κάθε τέτοια σταθεροποιημένη $\omega(q)-$άδα $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_{\omega(q)})$ συμβολίζουμε με $S_{\vec{a}}$ το σύνολο των $k-$άδων $\mathcal{H}$ με στοιχεία θετικούς ακέραιους $\leq h$ ώστε $\nu_{\mathcal{H}}(p_i) = a_i$. Τότε, το εσωτερικό άθροισμα στην (5.31) γίνεται τότε

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \prod_{p|q} f_{\mathcal{H}}(p) \quad = \quad \sum_{\vec{a}} \prod_{p|q} f_{\vec{a}}(p) \sum_{\mathcal{H}\in C_h\cap S_{\vec{a}}} 1. \tag{5.32}$$

Θα απαλείψουμε την συνθήκη $\mathcal{H} \in C_h$ προκειμένου να μπορέσουμε να μετρήσουμε πιο εύκολα το εσωτερικό άθροισμα στη παραπάνω ποσότητα. Το πλήθος των $k-$άδων με στοιχεία μη διακεκριμένους ακεραίους στο $[1,h]$ είναι

$$\lfloor h \rfloor^k - \frac{\lfloor h \rfloor!}{(\lfloor h \rfloor - k)!} = O(h^{k-1}),$$

κατά συνέπεια,

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h\cap S_{\vec{a}}} 1 \quad = \quad \sum_{\mathcal{H}\in S_{\vec{a}}} 1 + O(h^{k-1}).$$

Για κάθε σταθεροποιημένο $\vec{a}$, αναζητούμε το σύνολο των $k-$άδων με δεδομένα $\nu_{\mathcal{H}}(p)$ για κάθε $p|q$. Κοιτάζοντας τον κάθε πρώτο ξεχωριστά, έχουμε $\binom{p_i}{a_i}$ τρόπους να επιλέξουμε a_i διαφορετικά υπόλοιπα $\bmod p$. Για καθένα από αυτά αναζητούμε τις $k-$άδες στις οποίες εμφανίζεται κάθε υπόλοιπο από αυτά τα a_i τουλάχιστον μία φορά, και κανένα άλλο. Κοιτάζοντας τα στοιχεία της $k-$άδας $\bmod p$ (αφού μας ενδιαφέρει η "ανάθεση" ενός υπολοίπου $\bmod p$ σε κάθε θέση), κάθε τέτοια $k-$άδα ορίζει με μοναδικό τρόπο μία διαμέριση k στοιχείων σε a_i το πλήθος μη κενά μέρη, καθώς και μία διάταξη μεταξύ των μερών.

Από τη παραπάνω συζήτηση, έχουμε ακριβώς $\binom{p}{a_i} a_i! S(k,a_i)$ $k-$άδες (με στοιχεία $\bmod p$) με a_i το πλήθος υπόλοιπα $\bmod p$, όπου $S(n,k)$ το πλήθος των διαμερίσεων ενός $n-$συνόλου σε k μη κενά μέρη (αριθμοί Stirling δεύτερου είδους). Εφαρμόζοντας το παραπάνω για κάθε $p \mid q$, καταλήγουμε ότι έχουμε

$$\prod_i \binom{p}{a_i} a_i! S(k,a_i)$$

τρόπους να αναθέσουμε σε κάθε θέση της $k-$άδας από ένα υπόλοιπο $\bmod p_i$, για κάθε $p_i|q$, ώστε να έχουμε ακριβώς a_i υπόλοιπα $\bmod p_i$. Για κάθε τέτοια ανάθεση, από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων λαμβάνουμε ένα μόνο στοιχείο για κάθε θέση σε κάθε διάστημα μήκους q, άρα $h/q + O(1)$ επιλογές για κάθε θέση. Συνολικά, έχουμε

$$\left(\frac{h}{q}\right)^k + O\left(\left(\frac{h}{q}\right)^{k-1}\right)$$

επιλογές. Κατά συνέπεια, στην (5.32) έχουμε

$$\sum_{\vec{a}} \prod_{i=1}^{\omega(q)} f_{\vec{a}}(p_i) \binom{p_i}{a_i} a_i! S(k,a_i) \left(\left(\frac{h}{q}\right)^k + O\left(\left(\frac{h}{q}\right)^{k-1}\right)\right) + O\left(\sum_{\vec{a}} \prod_{p|q} |f_{\vec{a}}(p)| h^{k-1}\right). \tag{5.33}$$

Ονομάζουμε $A_1(q), A_2(q), A_3(q)$ διαδοχικά τους τρείς όρους στην (5.33). Η διαχείριση του τελευταίου όρου $A_3(q)$ είναι άμεση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{a}} \prod_{p|q} |f_{\vec{a}}(p)| h^{k-1} \quad &\leq \quad h^{k-1} \sum_{\vec{a}} \frac{C^{\omega(q)}}{q} \\ &\leq \quad h^{k-1} \tau_m(q), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε το γεγονός ότι

$$\sum_{\vec{a}} 1 = q.$$

Επομένως, η συνεισφορά αυτού του όρου $A_3(q)$ στην (5.31) φράσσεται από

$$\ll h^{k-1} \sum_{q \leq M} \mu^2(q) \tau_m(q) \ll h^{k-1} M^{1+\epsilon}. \tag{5.34}$$

Για τον όρο $A_1(q)$ στην (5.33), αν συμβολίσουμε με $\vec{a_i}$ το διάνυσμα $\vec{a}$ όταν του έχουμε αφαιρέσει την i-θέση, μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{\vec{a}} \prod_{i=1}^{\omega(q)} f_{\vec{a}}(p_i) \binom{p_i}{a_i} a_i! S(k, a_i) = \sum_{a_i} \prod_{j \neq i} f_{\vec{a_i}}(p_i) \binom{p_j}{a_j} a_j! S(k, a_j) \left(\sum_{m=1}^{\min\{p_i, k\}} f_{\vec{a}}(p_i) \binom{p_i}{m} m! S(k, m) \right).$$

Θα δείξουμε ότι ο όρος μέσα στην παρένθεση είναι μηδέν για κάθε $q > 1$. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν αφήσουμε το άνω όριο του αθροίσματος να είναι το k, δεν αλλάζει το άθροισμα, λόγω της ποσότητας $\binom{p_i}{m}$. Έχοντας υπόψιν ότι

$$f_{\vec{a}}(p_i) = \left(1 - \frac{m}{p_i}\right) \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-k} - 1,$$

γράφουμε

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k} f_{\vec{a}}(p_i) \binom{p_i}{m} m! S(k, m) &= -\sum_{m=1}^{k} \frac{p_i!}{(p_i - m)!} S(k, m) + \frac{p_i^k}{(p_i - 1)^k} \sum_{m=1}^{k} \frac{(p_i - 1)!}{(p_i - 1 - m)!} S(k, m) \\ &= -p_i^k + \frac{p_i^k}{(p_i - 1)^k} (p_i - 1)^k \\ &= 0, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της ταυτότητας

$$\sum_{m=1}^{k} \frac{x!}{(x - m)!} S(k, m) = x^k$$

που ικανοποιούν οι αριθμοί Stirling του δεύτερου είδους. Απομένει να μελετήσουμε τον όρο $A_2(q)$ στην (5.33). Να σημειωθεί ότι η ποσότητα $O((\frac{h}{q})^{k-1})$ εξαρτάται από το διάνυσμα $\vec{a}$ και συνεπώς δεν μπορούμε να διαχειριστούμε τον όρο ακριβώς όπως πριν. Έχουμε όμως ότι αυτός ο όρος φράσσεται από

$$\left(\frac{h}{q}\right)^{k-1} \sum_{a_i} \prod_{j \neq i} |f_{\vec{a_i}}(p_i)| \binom{p_j}{a_j} a_j! S(k, a_j) \left(\sum_{m=1}^{k} |f_{\vec{a}}(p_i)| \binom{p_i}{m} m! S(k, m) \right).$$

Για την ποσότητα μέσα στην παρένθεση χρησιμοποιούμε το φράγμα $|f_{\vec{a}}(p_i)| \leq \frac{C}{p_i}$ που προκύπτει από την (5.35), επομένως έχουμε ότι φράσσεται από

$$\frac{C}{p_i} \sum_{m=1}^{k} \frac{p_i!}{(p_i - m)!} S(k, m) = C p_i^{k-1}.$$

Εφαρμόζουμε το παραπάνω για κάθε $i = 1, \ldots, \omega(q)$ και έχουμε ότι

$$A_2(q) \ll \left(\frac{h}{q}\right)^{k-1} C^{\omega(q)} q^{k-1} \ll h^{k-1} \tau_m(q).$$

Συνεπώς η συνεισφορά στην (5.31) είναι

$$\sum_{1 < q \leq M} \mu^2(q) A_2(q) \ll h^{k-1} \sum_{q \leq M} \tau_m(q) \ll h^{k-1} M^{1+\epsilon}. \tag{5.35}$$

Μαζεύοντας τις (5.28) (5.30), (5.34) και (5.35), αν επιλέξουμε $M = h^{\frac{1}{2}}$ και $\epsilon = \frac{1}{6}$, έχουμε το ζητούμενο. □

Είμαστε λοιπόν τώρα σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω σπουδαίο αποτέλεσμα, το οποίο αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους αυτής της εργασίας. Μέχρι και την εργασία του Zhang [17] το 2013, το αποτέλεσμα αυτό αποτελούσε το βέλτιστο γνωστό Θεώρημα για τα μικρά κενά μεταξύ των πρώτων αριθμών.

Θεώρημα 21 (Δεύτερο θεώρημα GPY)**.** *Έστω p_n η ακολουθία των πρώτων αριθμών. Τότε*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log n} = 0.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε μία μικρή παραλλαγή της κλασικής έκφρασης $S_2 - \nu S_1$. Συγκεκριμένα θεωρούμε τη ποσότητα

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{N<n\le 2N} \left(\sum_{h_0\le h} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0) - \nu \right) W_n(\mathcal{H}),$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι C_h είναι το σύνολο των διατεταγμένων admissible $k-$άδων με στοιχεία μη αρνητικούς ακεραίους $\le h$. Εδώ, η επιλογή για τα W_n είναι αυτή που αναφέρεται στη Πρόταση 14, η οποία δείχνει και την εξάρτηση από την εκάστοτε επιλογή της $\mathcal{H}$.

Γράφουμε λοιπόν την παραπάνω ποσότητα ως διπλό άθροισμα

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{N<n\le 2N} \left(\sum_{h_0\in\mathcal{H}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0) - \nu \right) W_n(\mathcal{H}) + \sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{N<n\le 2N} \sum_{\substack{h_0\le h \\ h_0\notin\mathcal{H}}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0) W_n(\mathcal{H}). \tag{5.36}$$

Χρησιμοποιούμε τη Πρόταση 14 και λαμβάνουμε ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω έκφρασης είναι ασυμπτωτικά ίσος με

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{h_0\in\mathcal{H}} \sum_{N<n\le 2N} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0) W_n(\mathcal{H}) - \nu \sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{N<n\le 2N} W_n(\mathcal{H}) \\
&\sim k\frac{N}{\log N} (\log R)^{k+1} \frac{(2r+2)!}{((r+1)!)^2(2r+k+1)!} \sum_{\mathcal{H}\in C_h} \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \\
&-\nu N (\log R)^k \frac{(2r)!}{(r!)^2(2r+k)!} \sum_{\mathcal{H}\in C_h} \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \\
&\sim N(\log R)^k h^k \frac{(2r)!}{(r!)^2(2r+k)!} \left(k\frac{\log R}{\log N} \frac{(2r+1)(2r+2)}{(r+1)^2(2r+k+1)} - \nu \right),
\end{aligned} \tag{5.37}$$

όπου στη τελευταία εκτίμηση χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 20 του Gallagher. Για τον δεύτερο όρο στην (5.36) έχουμε αντίστοιχα

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{\substack{h_0\le h \\ h_0\notin\mathcal{H}}} \sum_{N<n\le 2N} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0) W_n(\mathcal{H}) \sim \frac{N}{\log N} (\log R)^k \frac{(2r)!}{(r!)^2(2r+k)!} \sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{\substack{h_0\le h \\ h_0\notin\mathcal{H}}} \mathfrak{S}(\mathcal{H}_0). \tag{5.38}$$

Τώρα στο άθροισμα παρατηρούμε ότι έχουμε άθροιση πάνω από όλες τις διατεταγμένες admissible $(k+1)$-άδες με στοιχεία $\le h$. Αυτό ισχύει διότι για μια δεδομένη διάταξη $\mathcal{H}_0 = (h_1, \dots, h_k, h_{k+1})$ επιλέγουμε μέσω του πρώτου αθροίσματος τις πρώτες k-θέσεις και συμπληρώνουμε την $(k+1)-$οστή με το εσωτερικό άθροισμα. Δηλαδή

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{\substack{h_0\le h \\ h_0\notin\mathcal{H}}} \mathfrak{S}(\mathcal{H}_0) = \sum_{\mathcal{H}_0\in C_h^{k+1}} \mathfrak{S}(\mathcal{H}_0),$$

όπου C_h^{k+1} το σύνολο των admissible $(k+1)$-άδων με στοιχεία $\le h$. Κατά συνέπεια στην (5.38) έχουμε ασυμπτωτικά

$$\sum_{\mathcal{H}\in C_h} \sum_{\substack{h_0\le h \\ h_0\notin\mathcal{H}}} \sum_{N<n\le 2N} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_0) W_n(\mathcal{H}) \sim \frac{N}{\log N} (\log R)^k \frac{(2r)!}{(r!)^2(2r+k)!} h^{k+1}, \tag{5.39}$$

λόγω του Θεωρήματος 20. Προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε ότι η έκφραση της σχέσης (5.36) ισούται ασυμπτωτικά με

$$\frac{N}{\log N}(\log R)^k h^k \frac{(2r)!}{(r!)^2(2r+k)!}\left(h + k\log R\frac{2(2r+1)}{(r+1)(2r+k+1)} - \nu\log N\right).$$

Για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί ο όρος εντός της παρένθεσης να είναι θετικός. Αρχικά έχουμε

$$\frac{2r+1}{r+1}\frac{k}{k+2r+1} \to 2$$

όταν $k, r \to \infty$ έτσι ώστε $r = o(k)$. Επιλέγουμε $R = N^{\frac{1}{4}-\epsilon}$ και έχουμε ότι ο όρος μέσα στη παρένθεση για μεγάλα r, k γίνεται

$$h + (1 - 4\epsilon - \nu)\log N.$$

Επιλέγουμε $\nu = 1$ και $h = 5\epsilon\log N$ και τότε έχουμε ότι μεταξύ των αριθμών $\{n, n+1, \ldots, n+\epsilon\log N\}$ υπάρχουν για άπειρα $N < n \leq 2N$ δύο πρώτοι αριθμοί.

Συνοψίζοντας, έχουμε δείξει ότι για τυχαίο $\epsilon > 0$, υπάρχουν άπειρα N ώστε για κάποιους πρώτους $p_{m_N}, p_{m_{N+1}}$ στο $[N, 2N + \epsilon\log N]$ να ισχύει

$$p_{m_N+1} - p_{m_N} \leq \epsilon\log N \leq \epsilon\log p_{m_N},$$

επομένως

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} \leq \epsilon,$$

και εφόσον το ϵ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = 0.$$

Τέλος, από το Θεώρημα των πρώτων αριθμών γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{\log n} \to 1,$$

το οποίο μας δίνει το αποτέλεσμα. □

Κεφάλαιο 6

Το Θεώρημα Zhang-Maynard-Tao

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η μέθοδος GPY, όταν χρησιμοποιηθεί με την δεδομένη επιλογή των sieve weights, δεν μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι $\liminf(p_{n+1}-p_n)<\infty$, αν δεν έχουμε στη διάθεση μας επιπλέον ότι $\theta>\frac{1}{2}$. Αν λοιπόν σκοπεύουμε να επιτύχουμε αυτό το αποτέλεσμα, υπάρχουν δύο μέθοδοι να ακολουθήσουμε: είτε θα πρέπει να βελτιώσουμε την επιλογή των W_n, είτε θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $\theta>\frac{1}{2}$.

Το 2013, ο Yitang Zhang ακολούθησε τη δεύτερη μέθοδο, με μία παραλλαγή. Καθώς το να δείξει κανείς ότι $\theta>\frac{1}{2}$ μοιάζει ιδιαίτερα δύσκολο, έδειξε το ακόλουθο πιο ασθενές αποτέλεσμα.

Θεώρημα 22. *Έστω ένα $A\geq 1$. Έστω $\delta=\frac{\eta}{2}=\frac{1}{1168}$. Παίρνουμε $P_\delta=\prod_{p\leq x^\delta}p$ και a μια πρωταρχική κλάση* $\bmod P_\delta$. *Τότε*

$$\sum_{\substack{q\leq x^{\frac{1}{2}+\eta}\\ q=x^\delta-smooth\\ \mu(q)\neq 0}}\left|\psi(x;q,a)-\frac{x}{\phi(q)}\right|\ll\frac{x}{\log^A(x)}$$

όπου με τον όρο $y-smooth$ εννοούμε έναν αριθμό χωρίς πρώτους διαιρέτες $>y$. Το σημαντικό με το παραπάνω αποτέλεσμα είναι το γεγονός ότι η επαγόμενη σταθερά είναι **ανεξάρτητη της κλάσης** a $\bmod P_\delta$.

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να έχουμε επίπεδο κατανομής $>\frac{1}{2}$, αθροίζοντας ωστόσο μόνο πάνω από ελεύθερους τετραγώνων αριθμούς με μικρούς πρώτους διαιρέτες. Ο Yitang Zhang με κατάλληλη τροποποιήση της μεθόδου GPY έδειξε ότι αυτό το θεώρημα είναι αρκετό για να λάβει κανείς φραγμένα κενά μεταξύ των πρώτων αριθμών, όντας έτσι ο πρώτος που το πετυχαίνει. Συνοψίζουμε το σπουδαίο αποτέλεσμα του Zhang στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 23 (Zhang)**.** *Ισχύει ότι*

$$\liminf_n(p_{n+1}-p_n)<\infty$$

Μάλιστα, έχουμε ότι

$$\liminf_n(p_{n+1}-p_n)<70.000.000$$

Η εναλλακτική, και όπως θα δούμε πιο αποτελεσματική μέθοδος, είναι η καλύτερη επιλογή των W_n. Υπενθυμίζουμε ότι στο προηγούμενο κεφάλαιο επιλέξαμε

$$W_n=\left(\sum_{\substack{d\leq R\\ d|P_{\mathcal{H}}(n)}}\lambda_d\right)^2$$

με τα λ_d να στηρίζονται στους ελεύθερους τετραγώνων αριθμούς, τα οποία προσπαθήσαμε να τα επιλέξουμε κατά τον βέλτιστο δυνατό τρόπο.

Οι James Maynard και Terence Tao (ανεξάρτητα), επιλέγουν την εξής μορφή για τα W_n:

$$W_n = \left(\sum_{d_i | (n+h_i)} \lambda_{d_1, d_2, \ldots, d_k} \right)^2$$

περιορίζοντας τα $\lambda_{d_1,d_2,\ldots,d_k}$ στο σύνολο

$$\mathcal{A} = \{(d_1, d_2, \ldots, d_k) : \prod_{i=1}^{k} d_i \leq R, \ \prod_{i=1}^{k} d_i \text{ ελεύθερος τετραγώνων}\}$$

Σημειώνουμε ότι αν $(d_1, d_2, \ldots, d_k) \in \mathcal{A}$ τότε $(d_i, d_j) = 1$. Είναι εμφανές ότι αυτή η επιλογή μόνο καλύτερα αποτελέσματα μπορεί να δώσει, εφόσον επιτρέπει στα λ να εξαρτώνται ξεχωριστά απο τους διαιρέτες του κάθε όρου του $P_{\mathcal{H}}(n)$.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε την μέθοδο που ακολούθησε ο James Maynard, η οποία είναι ουσιαστικά η $k-$διάστατη γενίκευση των επιχειρημάτων του προηγούμενου κεφαλαίου. Θα δούμε ότι με αυτόν τον τρόπο θα μπορέσουμε να αποδείξουμε τα εξής ισχυρά θεωρήματα

Θεώρημα 24. *i) Ισχύει απροϋπόθετα ότι*

$$\liminf(p_{n+1} - p_n) \leq 600$$

ii) Με την υπόθεση ότι ισχύει η εικασία Elliott-Halberstam έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \liminf(p_{n+1} - p_n) &\leq 12 \\ \liminf(p_{n+2} - p_n) &\leq 600 \end{aligned}$$

Θεώρημα 25. *(Maynard-Tao)*
Για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο m υπάρχει ένα $k(m)$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq k(m)$ αν $\mathcal{H}$ μία admissible $k-$άδα, τότε περιέχει πρώτη $m-$άδα. Ιδιαιτέρως, για κάθε θετικό ακέραιο m, έχουμε

$$\liminf_{n \to \infty}(p_{n+m} - p_n) < \infty.$$

Σε όλο το παρόν κεφάλαιο, θεωρούμε $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ μια σταθεροποιημένη admissible $k-$άδα. Ιδιαίτερη αξία έχει να "προ-κοσκινίσουμε" τους μικρούς πρώτους διαιρέτες, προκειμένου να μπορέσουμε να πετύχουμε τη διαγωνοποίηση των S_1, S_2 στη πολυδιάστατη περίπτωση, όπως θα φανεί στη πράξη. Έστω $B = \prod_{p \leq z} p$. Δοθέντος ότι η $\mathcal{H}$ είναι admissible, για κάθε πρώτο $p \leq z$ υπάρχει a_p ώστε $-h \not\equiv a_p \mod p$ για κάθε $h \in \mathcal{H}$. Από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων, υπάρχει $b \mod B$ τέτοιο ώστε $b \equiv a_p \mod p$ για κάθε p, επομένως παίρνοντας $n \equiv b \mod B$ έχουμε ιδιαιτέρως ότι $(n + h, B) = 1$. Θα επιλέξουμε τα $W_n = 0$, εκτός αν $n \equiv b \mod B$.

Επιλέγουμε $z = \log\log\log N$, κατά συνέπεια $B \leq z^{\pi(z)} \ll e^{(1+o(1))\log z \frac{z}{\log z}} \ll (\log\log N)^{1+o(1)}$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι όταν $n \equiv b \mod B$, τότε αν $d_i | (n+h_i)$, εφόσον $(n+h_i, B) = 1$ έπεται $(d_i, B) = 1$. Κατα συνέπεια, μας απασχολούν $\lambda_{d_1,d_2,\ldots,d_k}$ με $(d_i, B) = 1, \ \forall i$. Μπορούμε λοιπόν εξ'αρχής να πάρουμε $\lambda_{d_1,\ldots,d_k} = 0$ όταν αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται.

6.1 Διαχείριση του S_1

Ξεκινάμε όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο με τον όρο

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ n\equiv b \mod B}} \left(\sum_{d_i|(n+h_i)} \lambda_{d_1,d_2,\ldots,d_k} \right)^2 \\ &= \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}} \lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k} \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ [d_i,e_i]|(n+h_i),\ \forall i \\ n\equiv b \mod B}} 1 \end{aligned}$$

Για το εσωτερικό άθροισμα, έστω ότι $([d_i,e_i],[d_j,e_j]) \neq 1$ για $i \neq j$. Τότε, αν $p|([d_i,e_i],[d_j,e_j])$ έχουμε ότι $p|(n+h_i, n+h_j)$, επομένως $p||h_i-h_j|$. Κατά συνέπεια $p \leq \max_{h\in\mathcal{H}} h$ επομένως για μεγάλα N, έχουμε $p|B$. Εφόσον $p|(n+h_i)$ και ταυτόχρονα $n \equiv b \mod B \Rightarrow (n+h_i, B) = 1$, έχουμε άτοπο. Επίσης, αν $p|([d_i,e_i],B)$ τότε $p|(n+h_i)$ ενώ όπως εξηγήσαμε $(n+h_i,B)=1$.

Συνεπώς μας απασχολεί η περίπτωση όπου $[d_i,e_i]$ ανά δύο σχετικά πρώτα, και $([d_i,e_i],B) = 1$ για κάθε $i = 1,\ldots,k$. Σε αυτή τη περίπτωση από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων έχουμε μοναδική λύση $\mod B\prod_{i=1}^k [d_i,e_i]$ για το σύστημα $n \equiv -h_i \mod [d_i,e_i]$ και $n \equiv b \mod B$. 'Επεται ότι το εσωτερικό άθροισμα ισούται με

$$\frac{N}{B\prod_{i=1}^k [d_i,e_i]} + O(1)$$

Έχουμε εξ'αρχής επιλέξει $\lambda_{d_1,\ldots,d_k} = 0$ όταν $(d_i,B) \neq 1$ για κάποιο i, οπότε η συνθήκη $([d_i,e_i],B)=1$ είναι περιττή. Επίσης, έχουμε $\lambda_{d_1,\ldots,d_k} = 0$ όταν $(d_i,d_j) \neq 1$ για κάποια $i \neq j$, οπότε η συνθήκη $([d_i,e_i],[d_j,e_j])=1$ ισοδυναμεί με την απαίτηση $(d_i,e_j)=1$ όταν $i \neq j$. Ο κύριος όρος για το S_1 λοιπόν γίνεται

$$S_1 = \frac{N}{B} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ (d_i,e_j)=1}} \lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k} \frac{1}{\prod_{i=1}^k [d_i,e_i]} + O\left(\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ (d_i,e_j)=1}} |\lambda_{d_1,\ldots,d_k}||\lambda_{e_1,\ldots,e_k}| \right) \tag{6.1}$$

Χρησιμοποιούμε και πάλι ότι

$$\frac{1}{[a,b]} = \frac{(a,b)}{ab} = \frac{1}{ab}\sum_{d|(a,b)} \phi(d)$$

και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{i=1}^k [d_i,e_i]} &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{d_i e_i} \sum_{s_i|(d_i,e_i)} \phi(s_i) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^k d_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^k e_i} \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_k \\ s_i|(d_i,e_i)}} \prod_{i=1}^k \phi(s_i). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (6.1) ο κύριος όρος για το S_1 γίνεται

$$\frac{N}{B} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ (d_i,e_j)=1}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^k d_i} \frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^k e_i} \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_k \\ s_i|(d_i,e_i)}} \prod_{i=1}^k \phi(s_i)$$

Αλλάζουμε τώρα τη σειρά της άθροισης και λαμβάνουμε

$$\frac{N}{B}\sum_{s_1,\ldots,s_k}\prod_{i=1}^{k}\phi(s_i)\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ (d_i,e_j)=1,\ i\neq j\\ s_i|(d_i,e_i),\ \forall i}}\frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}d_i}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{j=1}^{k}e_j}$$

Το μόνο εμπόδιο στη διαγωνοποίηση της παραπάνω μορφής είναι πλέον η συνθήκη $(d_i,e_j)=1$. Προκειμένου να την απαλείψουμε, γράφουμε το εσωτερικό άθροισμα στη μορφή

$$\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ s_i|(d_i,e_i)}}\frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}d_i}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{j=1}^{k}e_j}\prod_{i\neq j}I((d_i,e_j)) \tag{6.2}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\prod_{i\neq j}I(d_i,e_j) &= \prod_{i\neq j}\left(\sum_{u_{ij}|(d_i,e_j)}\mu(u_{ij})\right)\\ &= \sum_{\substack{u_{ij}|(d_i,e_j)\\ i\neq j}}\prod_{i,j}\mu(u_{ij})\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.2) λαμβάνουμε

$$\frac{N}{B}\sum_{s_1,\ldots,s_k}\prod_{i=1}^{k}\phi(s_i)\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ s_i|(d_i,e_i)}}\frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}d_i}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{j=1}^{k}e_j}\sum_{\substack{u_{ij}|(d_i,e_j)\\ i\neq j}}\prod_{i,j}\mu(u_{ij})$$

το οποίο μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{N}{B}\sum_{s_1,\ldots,s_k}\sum_{\substack{u_{ij}\\ i\neq j}}\prod_{i,j}\mu(u_{ij})\prod_{i=1}^{k}\phi(s_i)\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ s_i|(d_i,e_i)\\ u_{ij}|(d_i,e_j),\ i\neq j}}\frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}d_i}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{j=1}^{k}e_j} \tag{6.3}$$

Τώρα θα θέλαμε να "ενοποιήσουμε" τις δύο συνθήκες $s_i|(d_i,e_i)$ και $u_{ij}|(d_i,e_j)$, $i\neq j$. Αρχικά για δεδομένο i έχουμε συνεισφορά μόνον αν $(s_i,u_{ij})=1$, διότι $(e_i,e_j)=1$ και $(s_i,u_{ij})|(e_i,e_j)$. Ομοίως έχουμε $(s_i,u_{ji})=1$ διότι $(d_i,d_j)=1$. Ταυτόχρονα, για δεδομένο i μπορούμε να έχουμε και $(u_{ij},u_{ij'})=1$ εφόσον $(u_{ij},u_{ij'})|(e_i,e_j)$ και αντίστοιχα για δεδομένο j μπορούμε να έχουμε $(u_{ij},u_{i'j})=1$ για τον ίδιο λόγο. Το άθροισμα των u_{ij} υπό αυτούς τους περιορισμούς θα το συμβολίσουμε με $\sum^{*}$

Επομένως, αν σταθεροποιήσουμε ένα i, οι συνθήκες $s_i|d_i$ και $u_{ij}|d_i$ για $i\neq j$ ενοποιούνται ισοδύναμα στην $s_i\prod_{i\neq j}u_{ij}|d_i$, αφού οι όροι είναι ανά δύο σχετικά πρώτοι. Αντίστοιχο συμπέρασμα βγαίνει και για τα e_j. Συνεπώς το εσωτερικό άθροισμα γίνεται

$$\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ s_i\prod_{j\neq i}u_{ij}|d_i\\ s_j\prod_{i\neq j}u_{ij}|e_j}}\frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}d_i}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{j=1}^{k}e_j}$$

Θέτουμε $v_i=\prod_{j\neq i}u_{ij}$ και $w_j=\prod_{i\neq j}u_{ij}$ οπότε η τελευταία έκφραση γίνεται

$$\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ s_iv_i|d_i}}\frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}d_i}\sum_{\substack{e_1,\ldots,e_k\\ s_jw_j|e_j}}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{j=1}^{k}e_j} \tag{6.4}$$

Θέτουμε λοιπόν

$$\frac{y(m_1,\dots,m_k)}{\prod_{i=1}^k \phi(m_i)} = \prod_{i=1}^k \mu(m_i) \sum_{m_i|d_i} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{\prod_{i=1}^k d_i}$$

οπότε η έκφραση (6.4) γράφεται

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^k \phi^2(s_i)} \frac{y(s_1v_1,\dots,s_kv_k)}{\prod_{i=1}^k \phi(v_i)} \frac{y(s_1w_1,\dots,s_kw_k)}{\prod_{j=1}^k \phi(w_j)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι έχουμε τους περιορισμούς που περιγράψαμε για τα u_{ij}. Έχουμε επίσης ότι $\prod_{i=1}^k \phi(v_i) = \prod_{j=1}^k \phi(w_j) = \prod_{i\neq j} \phi(u_{ij})$. Επομένως στην (6.3) λαμβάνουμε κύριο όρο για το S_1

$$\frac{N}{B} \sum_{s_1,\dots,s_k} \frac{1}{\prod_{i=1}^k \phi(s_i)} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{u_{ij}\\ i\neq j}} \prod_{i,j} \frac{\mu(u_{ij})}{\phi^2(u_{ij})} y(s_1v_1,\dots,s_kv_k) y(s_1w_1,\dots,s_kw_k)$$

Το εσωτερικό άθροισμα μας δίνει συνεισφορά μόνον όταν $(u_{ij}, B) = 1$. Συνεπώς μπορούμε να ξεχωρίσουμε τη περίπτωση $u_{ij} = 1,\ \forall i,j$, καθώς σε διαφορετική περίπτωση θα έχουμε τουλάχιστον ένα εκ των u_{ij} να είναι "μεγάλο" (αυτός είναι και ένας βασικός λόγος του προ-κοσκινίσματος, προκειμένου να πετύχουμε τη διαγωνοποίηση). Γράφουμε λοιπόν

$$\frac{N}{B} \sum_{s_1,\dots,s_k} \frac{y^2(s_1,\dots,s_k)}{\prod_{i=1}^k \phi(s_i)} + \frac{N}{B} \sum_{s_1,\dots,s_k} \frac{1}{\prod_{i=1}^k \phi(s_i)} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\prod u_{ij}>1\\ i\neq j}} \prod_{i,j} \frac{\mu(u_{ij})}{\phi^2(u_{ij})} y(s_1v_1,\dots,s_kv_k) y(s_1w_1,\dots,s_kw_k)$$

Για τον δεύτερο όρο, έχουμε ότι αν $M = \max_{\prod m_i \leq R} |y(m_1,\dots,m_k)|$ τότε

$$M^2 \frac{N}{B} \sum_{s_1,\dots,s_k} \frac{1}{\prod_{i=1}^k \phi(s_i)} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\prod u_{ij}>1\\ i\neq j}} \prod_{i,j} \frac{\mu^2(u_{ij})}{\phi^2(u_{ij})} \tag{6.5}$$

Αν τώρα θέσουμε $P_{12} = \prod_{(i,j)\neq(1,2)} u_{ij}$, το εσωτερικό άθροισμα φράσσεται από

$$(k^2-k) \left(\sum_{\substack{(u_{12},B)=1\\ u_{12}\neq 1}} \frac{\mu^2(u_{12})}{\phi^2(u_{12})} \right) \sideset{}{^*}\sum_{\substack{u_{ij}\\ (i,j)\neq(1,2)\\ P_{12}\leq R}} \frac{1}{\phi^2(P_{12})} \tag{6.6}$$

Αυτό συμβαίνει διότι, όπως σχολιάσαμε, η συνθήκη $\prod_{i\neq j} u_{ij} > 1$ μας δίνει $u_{ij} \neq 1$ για κάποιο (i,j) και μπορούμε για καθένα από τα k^2-k ζεύγη (i,j) να πάρουμε το ίδιο φράγμα (οπότε εφαρμόζουμε τη διαδικασία για το u_{12} για παράδειγμα).

Για τα k^2-k-1 στοιχεία u_{ij} με $i \neq j$ και $(i,j) \neq (1,2)$ έχουμε ότι αν m ένας θετικός ακέραιος, έχουμε $\tau_{k^2-k-1}(m)$ επιλογές για τα u_{ij} ώστε $\prod u_{ij} = m$. Επομένως,

$$\sum_{\substack{u_ij\\ (i,j)\neq(1,2)\\ P_{12}\leq R}} \frac{1}{\phi^2(P_{12})} \ \ll \ \sum_{m\leq R} \frac{\tau_{k^2-k-1}(m)}{\phi^2(m)}$$

Δοθέντος ότι για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $\tau_{k^2-k-1}(m) \ll m^\epsilon$ καθώς και $\phi(m) \gg m^{1-\epsilon}$, έχουμε ότι το άθροισμα είναι $O(1)$. Για το άθροισμα εντός της παρένθεσης στην (6.6) έχουμε ότι φράσσεται από

$$\sum_{n>z} \frac{\mu^2(n)}{\phi^2(n)} \ll \frac{1}{z}$$

Επομένως η ποσότητα (6.5) έχουμε ότι φράσσεται από

$$M^2\frac{N}{B\log\log\log N}\left(\sum_{\substack{s\leq R\\(s,B)=1}}\frac{1}{\phi(s)}\right)^k$$

$$\ll M^2\frac{N}{B\log\log\log N}\left(\frac{\phi(B)}{B}\log R\right)^k$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$S_1 \;=\; \frac{N}{B}\sum_{s_1,\ldots,s_k}\frac{y^2(s_1,\ldots,s_k)}{\prod_{i=1}^k\phi(s_i)}+O(\sum_{d_1,\ldots,d_k}{}'|\lambda_{d_1,\ldots,d_k}||\lambda_{e_1,\ldots,e_k}|)+O(M^2\frac{N}{B^{k+1}}\frac{\phi(B)^k(\log R)^k}{\log\log\log N})$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\e_1,\ldots,e_k}}{}'|\lambda_{d_1,\ldots,d_k}||\lambda_{e_1,\ldots,e_k}| &\ll M_1^2\left(\sum_{\prod d_i\leq R}1\right)^2\\ &\ll M_1^2\left(\sum_{n\leq R}\tau_k(n)\right)^2\\ &\ll M_1^2R^2(\log R)^{2k}\end{aligned}$$

όπου $M_1=\max_{\prod_{d_i}\leq R}|\lambda_{d_1,\ldots,d_k}|$. Απομένει να συνδέσουμε το M_1 με το M, ώστε να έχουμε ανάγει όλους τους όρους στα y.

Αρχικά δείχνουμε τη παρακάτω πολυδιάστατη εκδοχή του λήμματος αντιστροφής

Λήμμα 12. *Έστω $Y(m_1,\ldots,m_k)$ και $L(d_1,\ldots,d_k)$ δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{N}^k$, με φορέα ένα υποσύνολο των ελεύθερων τετραγώνων αριθμών. Ισχύει η παρακάτω σχέση αντιστροφής.*

$$Y(m_1,\ldots,m_k)=\prod_i\mu(m_i)\sum_{m_i|d_i}L(d_1,\ldots,d_k)\Rightarrow L(d_1,\ldots,d_k)=\prod_i\mu(d_i)\sum_{d_i|m_i}Y(m_1,\ldots,m_k)$$

Ἀπόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\prod_i\mu(d_i)\sum_{d_i|m_i}Y(m_1,\ldots,m_k) &= \prod_i\mu(d_i)\sum_{d_i|m_i}\prod_i\mu(m_i)\sum_{m_i|r_i}L(r_1,\ldots,r_k)\\ &= \prod_i\mu(d_i)\sum_{d_i\nmid r_i}L(r_1\ldots,r_k)\sum_{d_i\nmid m_i\nmid r_i}\prod_i\mu(m_i)\\ &= \prod_i\mu(d_i)\sum_{d_i|r_i}L(r_1,\ldots,r_k)\sum_{a_i\nmid\frac{r_i}{d_i}}\prod_i\mu(a_id_i)\\ &= \prod_i\mu^2(d_i)\sum_{d_i\nmid r_i}L(r_1,\ldots,r_k)\prod_i\left(\sum_{a_i\nmid\frac{r_i}{d_i}}\mu(a_i)\right)\end{aligned}$$

Έχουμε φυσικά ότι αν $r_i\neq d_i$

$$\sum_{a_i\nmid\frac{r_i}{d_i}}\mu(a_i) \;=\; 0$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε συνεισφορά στο άθροισμα αν και μόνον αν $r_i = d_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Σε αυτή τη περίπτωση κάθε όρος του γινομένου ισούται με 1, επομένως η έκφρασή μας γίνεται

$$\prod_i \mu^2(d_i) L(d_1, \ldots, d_k) \quad = \quad L(d_1, \ldots, d_k)$$

διότι $d_1, \ldots, d_k$ είναι ελεύθεροι τετραγώνων. □

Συνεπώς

$$y(m_1, \ldots, m_k) = \prod_{i=1}^{k} \mu(m_i)\phi(m_i) \sum_{m_i | d_i} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k} d_i} \Rightarrow \lambda_{d_1,\ldots,d_k} = \prod_{i=1}^{k} \mu(d_i) d_i \sum_{d_i | m_i} \frac{y(m_1, \ldots, m_k)}{\prod_{i=1}^{k} \phi(m_i)}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{i=1}^{k} \mu(d_i) d_i \sum_{d_i | m_i} \frac{y(m_1, \ldots, m_k)}{\prod_{i=1}^{k} \phi(m_i)} \right| &\leq M \prod_i d_i \sum_{d_i | m_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} \phi(m_i)} \\
&\leq M \prod_i \frac{d_i}{\phi(d_i)} \sum_{s_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} \phi(s_i)} \\
&\leq M (\log R)^k \prod_i \frac{d_i}{\phi(d_i)} \\
&\leq M (\log R)^k (\prod_{p \leq R} (1 - \frac{1}{p})^{-1}))^k \\
&\leq M (\log R)^{2k}
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$M_1 \leq M \left(\log R\right)^{2k}$$

Επομένως, για τον όρο του σφάλματος έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}}{}' |\lambda_{d_1,\ldots,d_k}||\lambda_{e_1,\ldots,e_k}| &\ll M^2 R^2 (\log R)^{4k} \\
&\ll M^2 \frac{N}{B} \left(\frac{\phi(B)}{B}\right)^k \frac{(\log R)^k}{\log\log\log N}
\end{aligned}$$

Διότι $R^2 \leq N^{\theta - \epsilon}$.

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα για το S_1 στη παρακάτω σχέση

$$S_1 \quad = \quad \frac{N}{B} \sum_{s_1,\ldots,s_k} \frac{y^2(s_1, \ldots, s_k)}{\prod_{i=1}^{k} \phi(s_i)} + O\left(M^2 \frac{N}{B} \left(\frac{\phi(B)}{B}\right)^k \frac{(\log R)^k}{\log\log\log N} \right) \tag{6.7}$$

6.2 Διαχείριση του S_2

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
S_2 \quad &= \quad \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ n \equiv b \mod B}} \sum_{r=1}^{k} \chi_{\mathcal{P}}(n + h_m) W_n \\
&= \quad \sum_{m=1}^{k} S_2^r
\end{aligned}$$

όπου $S_2^r = \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ n\equiv b \mod B}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_r)W_n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} S_2^r &= \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ n\equiv b \mod B}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_r) \sum_{\substack{d_1,\ldots.d_k \\ e_1\ldots.,e_k \\ [d_i,e_i]|n+h_i}} \lambda_{d_1\ldots.,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k} \\ &= \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1\ldots.,e_k}} \lambda_{d_1\ldots.,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k} \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ [d_i,e_i]|n+h_i \\ n\equiv b \mod B}} \chi_{\mathcal{P}}(n+h_r) \\ &= \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}} \lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k} \sum_{\substack{N+h_r<n\leq 2N+h_r \\ n\equiv h_r-h_i \mod [d_i,e_i] \\ n\equiv b+h_r \mod B}} \chi_{\mathcal{P}}(n) \end{aligned}$$

Αρχικά να παρατηρήσουμε ότι έχουμε συνεισφορά στο εσωτερικό άθροισμα μόνον όταν $d_r = e_r = 1$. Επίσης, όπως και πριν μπορούμε να υποθέσουμε ότι $([d_i,e_i],[d_j,e_j]) = 1$ για $i \neq j$ ή ισοδύναμα $(d_i,e_j) = 1$ για $i \neq j$ και ότι $([d_i,e_i],B) = 1$ για κάθε i. Συμβολίζουμε το άθροισμα πάνω από αυτούς τους περιορισμούς (μαζί με τη συνθήκη $d_r = e_r = 1$) με $\sum'$.

Με τους παραπάνω περιορισμούς, έχουμε ότι οι ισοδυναμίες $n \equiv h_r - h_i \mod [d_i,e_i]$ και $n \equiv h_r + b \mod B$ μας δίνουν ότι το n διατρέχει μία (πρωταρχική) κλάση ισοδυναμίας $a \mod q$ όπου $q = q(d_1,\ldots,d_k,e_1,\ldots,e_k) = B\prod_{i=1}^k [d_i,e_i]$, λόγω κινέζικου θεωρήματος υπολοίπων. Το εσωτερικό άθροισμα λοιπόν έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \pi(2N+h_r;q,a) - \pi(N+h_r;q,a) &= \pi(2N;q,a) - \pi(N;q,a) + O(1) \\ &= \frac{2N}{\phi(q)\log(2N)} - \frac{N}{\phi(q)\log(N)} \\ &+ E(2N;q,a) - E(N;q,a) + O(1) \\ &= \frac{N}{\phi(q)\log N} + E(2N;q,a) - E(N;q,a) + O(\frac{N}{\phi(q)\log^2 N}) \end{aligned}$$

όπου $E(x;q,a) = \pi(x;q,a) - \frac{x}{\phi(q)\log x}$. Τώρα καθώς $q = B\prod_{i=1}^k [d_i,e_i] \leq R^{2+o(1)} \ll N^{\theta-\delta}$, για κάποιο δ, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} S_2^r &= \frac{N}{\phi(B)\log N}\left(1+O(\frac{1}{\log N})\right) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1\ldots.,e_k}}{}' \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^k \phi([d_i,e_i])} \\ &+ O\left(\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}} |\lambda_{d_1,\ldots,d_k}||\lambda_{e_1,\ldots,e_k}| \max_{(a,q)=1} |E(N;q,a)|\right) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Για τον δεύτερο όρο του σφάλματος έχουμε ότι φράσσεται από

$$\ll M_1^2 \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}} \max_{(a,q)=1} |E(N;q,a)|$$

Υπενθυμίζουμε ότι $q = B\prod_{i=1}^k [d_i,e_i]$. Επομένως, για έναν δεδομένο **ελεύθερο τετραγώνων αριθμό** m, αναζητούμε τους δυνατούς τρόπους να επιλέξουμε τους $d_1,\ldots,d_k,e_1,\ldots,e_k$ ώστε $m = \prod_{i=1}^k [d_i,e_i]$. Αν $d_2(n)$ είναι το πλήθος των τρόπων να επιλεχθούν δύο αριθμοί με Ε.Κ.Π το n, τότε το ζητούμενο πλήθος ισούται με

$$\sum_{a_1a_2\cdots a_k=m} d_2(a_1)\ldots d_2(a_k) \tag{6.9}$$

Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στο $d_2(n)$, με τον n πάντοτε ελεύθερο τετραγώνων. Αν n_1 ένας διαιρέτης του n, τότε μπορούμε να επιλέξουμε έναν n_2 ώστε $[n_1, n_2] = 1$ ως εξής: σταθεροποιούμε τον $\frac{n}{n_1}$ και στη συνέχεια παίρνουμε όλους τους δυνατούς αριθμούς $\frac{n}{n_1}s_1$ με $s_1 \mid n_1$. Για κάθε $n_1 \mid n$ λοιπόν αυτό γίνεται με $\tau_2(n_1)$ τρόπους. Συνεπώς

$$d_2(n) = \sum_{d|n} \tau_2(d) = \tau_3(n)$$

Από την (6.9) έπεται επομένως (αφού έχουμε k φορές συνέλιξη της τ_3) ότι το ζητούμενο πλήθος είναι $\tau_{3k}(n)$. Επιστρέφοντας στο δικό μας πρόβλημα, έχουμε το πολύ $\tau_{3k}(\frac{m}{B}) \leq \tau_{3k}(m)$ τρόπους να πάρουμε $m = B\prod_{i=1}^{k}[d_i, e_i]$. Κατά συνέπεια ο όρος του σφάλματος φράσσεται (αγνοώντας σταθερές) από

$$M_1^2 \sum_{m \leq N^{\theta-\delta}} \mu^2(m)\tau_{3k}(m) \max_{(a,m)=1} |E(N; m, a)|$$

Εφαρμόζουμε Cauchy-Schwarz και παίρνουμε το φράγμα

$$\left(\sum_{m \leq N^{\theta-\delta}} \mu^2(m)\tau_{3k}^2(m) \max_{(a,m)=1} |E(N; m, a)|\right)^{1/2} \left(\sum_{m \leq N^{\theta-\delta}} \max_{(a,m)=1} |E(N; m, a)|\right)^{1/2}$$

Για τυχόν $A > 0$, καθώς έχουμε επίπεδο κατανομής θ, έχουμε ότι ο δεύτερος όρος είναι $O(\frac{N^{1/2}}{(\log N)^A})$. Για τον πρώτο όρο, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\max_{(a,m)=1} |E(N; m, a)| \leq \pi(N; m, a) + \frac{N}{\phi(m)\log N} \ll \frac{N}{\phi(m)}$$

διότι φυσικά $\pi(N; m, a) \ll \frac{N}{m} \ll \frac{N}{\phi(m)}$. Επίσης, όταν ο m είναι ελεύθερος τετραγώνων, ισχύει ότι $\tau_q(m) = q^{\omega(m)}$, συνεπώς $\tau_q^2(m) = \tau_{q^2}(m)$. Έχουμε λοιπόν

$$\left(\sum_{m \leq N^{\theta-\delta}} \tau_{9k^2}(m) \max_{(a,m)=1} |E(N; m, a)|\right)^{1/2} \ll N^{1/2} \left(\sum_{m \leq N^{\theta-\delta}} \frac{\tau_{9k^2}(m)}{\phi(m)}\right)^{1/2}$$

τώρα $\phi(m) \gg \frac{m}{\log m}$ επομένως η ποσότητα φράσσεται είναι

$$\ll N^{1/2}(\log N)^{1/2} \left(\sum_{m \leq N^{\theta-\delta}} \frac{\tau_{9k^2}(m)}{m}\right)^{1/2} \ll N^{1/2}(\log N)^{B(k)}$$

όπου $B(k)$ σταθερά συναρτήσει του k, κάτι που επιτρέπουμε. Δοθέντος ότι το A είναι τυχόν, καταλήγουμε ότι ο όρος του σφάλματος είναι

$$\ll M_1^2 \frac{N}{(\log N)^A}$$

Για τον κύριο όρο στην (6.8) έχουμε την έκφραση

$$\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}}{}' \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(d_i)} \frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(e_i)} \prod_{i=1}^{k} \phi((d_i, e_i)) \tag{6.10}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}\phi((d_i,e_i)) &= \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{s_i|(d_i,e_i)} f_1(s_i)\right)\\ &= \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_k\\ s_i|(d_i,e_i)}}\prod_{i=1}^{k} f_1(s_i)\end{aligned}$$

όπου $f_1=\phi*\mu$, επομένως $f_1(p)=p-2$ για κάθε πρώτο p.

Επομένως στην (6.10) έχουμε

$$\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k}}{}' \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(d_i)}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(e_i)}\sum_{s_i|(d_i,e_i)}\prod_{i=1}^{k} f_1(s_i)$$

Αλλάζουμε τη σειρά της άθροισης και λαμβάνουμε

$$\sum_{s_1,\ldots,s_k}\prod_{i=1}^{k} f_1(s_i)\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ s_i|(d_i,e_i)}}{}' \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(d_i)}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(e_i)}$$

όπως και πριν, σκοπός είναι να απαλείψουμε την συνθήκη $(d_i,e_j)=1,\ i\neq j$. Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα ακριβώς όπως και στο S_1 λαμβάνουμε την έκφραση

$$\sum_{s_1,\ldots,s_k}\prod_{i=1}^{k} f_1(s_i)\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ s_i|(d_i,e_i)}}\frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(d_i)}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(e_i)}\sum_{\substack{u_{ij}|(d_i,e_j)\\ i\neq j}}\prod\mu(u_{ij})$$

Επιχειρηματολογώντας όπως και στο S_1, για ένα δεδομένο d_i έχουμε $s_i|d_i$ καθώς και $u_{ij}|d_i$ για κάθε $j\neq i$. Τώρα, επειδή $(e_j,e_k)=1$ για $j\neq k$, έχουμε ότι u_{ij} είναι ανά δύο σχετικά πρώτα, αλλά και σχετικά πρώτα με το s_i.

Θέτοντας $v_i=\prod_{j\neq i}u_{ij}$ και $w_j=\prod_{i\neq j}u_{ij}$ λοιπόν, έχουμε ότι $s_iv_i|d_i$ για κάθε i και $s_jw_j|e_j$ για κάθε j.

Συνεπώς η έκφραση γίνεται

$$\sum_{s_1,\ldots,s_k}\prod_{i=1}^{k} f_1(s_i)\sum_{\substack{u_{ij}\\ i\neq j}}\prod\mu(u_{ij})\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ s_iv_i|d_i\\ s_jw_j|e_j}}{}' \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(d_i)}\frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(e_i)}$$

(Έχουμε διατηρήσει τον συμβολισμό $\sum'$ ο οποίος έχει την συμμετρική πληροφορία ότι $d_m=e_m=1$).

Θέτουμε

$$\frac{y_m(m_1,\ldots,m_k)}{\prod_{i=1}^{k} f_1(m_i)} = \prod_{i=1}^{k}\mu(m_i)\sum_{\substack{m_i|d_i\\ d_m=1}}\frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}\phi(d_i)}$$

Να σημειωθεί ότι εκ των πραγμάτων $y_r(m_1,\ldots,m_k)=0$ όταν $m_r\neq 1$. Τότε η έκφρασή μας γίνεται

$$\sum_{s_1,\ldots,s_k}\frac{1}{\prod_{i=1}^{k} f_1(s_i)}\sum_{u_{ij}}\prod\frac{\mu(u_{ij})}{f_1^2(u_{ij})}y_m(s_1u_1,\ldots,s_ku_k)y_m(s_1w_1,\ldots,s_kw_k)$$

Όταν $u_{ij}=1$ για κάθε $i\neq j$, έχουμε τον κύριο όρο

$$\sum_{s_1.....s_k}\frac{y_m^2(s_1,\dots,s_k)}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)}$$

Όταν $u_{ij}>1$ για κάποιο ζεύγος (i,j) με $i\neq j$, τότε αν $M_r=\max|y_r(m_1,\dots,m_k)|$ έχουμε ότι η ποσότητα φράσσεται από

$$M_r^2\sum_{s_1,\dots,s_k}\frac{1}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)}\sum_{\prod u_{ij}>1}\frac{\mu^2(u_{ij})}{f_1^2(u_{ij})} \ll M_r^2\sum_{s_1,\dots,s_k}\frac{1}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)}\left(\sum_{\substack{n>1\\(n,B)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f_1^2(n)}\right)\sum_{n\leq R}\frac{\tau_k(n)}{f_1^2(n)}$$

Τώρα έχουμε ότι

$$\sum_{\substack{n>1\\(n,B)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f_1^2(n)}\ll\frac{1}{\log\log\log N}$$

καθώς και

$$\sum_{n\leq R}\frac{\tau_k(n)}{f_1^2(n)}=O(1)$$

Όπως και πριν. Τέλος με δεδομένο ότι $s_r=1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{s_1,\dots,s_k}\frac{1}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)} &\ll \left(\sum_{\substack{s\leq R\\(s,B)=1}}\frac{1}{f_1(s)}\right)^{k-1}\\ &\ll \left(\frac{\phi(B)}{B}\log R\right)^{k-1}\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια καταλήγουμε στη σχέση

$$S_2^r = (1+O(\frac{1}{\log N}))\frac{N}{\phi(B)\log N}\sum_{s_1,\dots,s_k}\frac{y_r^2(s_1,\dots,s_k)}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)}+O\left(M_r^2N\frac{\phi(B)^{k-2}}{B^{k-1}}\frac{(\log N)^{k-2}}{\log\log\log N}+M_1^2\frac{N}{\log^A N}\right)$$

Έχουμε ότι

$$\frac{N}{\phi(B)(\log N)^2}\sum_{s_1,\dots,s_k}\frac{y_r^2(s_1,\dots,s_k)}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)} \ll M_r^2\frac{N}{(\log N)^2}\frac{\phi(B)^{k-2}(\log R)^{k-1}}{B^{k-1}}$$

που είναι αμελητέος όρος, αφού $\log\log\log N<\log N$. Απομένει να συνδέσουμε το M_1 με το M_r. Έχουμε

$$\lambda_{d_1,\dots,d_k} = \prod_{i=1}^k\mu(d_i)\phi(d_i)\sum_{d_i|m_i}\frac{y_r(m_1,\dots,m_k)}{\prod_{i=1}^k f_1(m_i)}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}M_1 &\leq M_r\prod_{i=1}^k\phi(d_i)\sum_{\substack{d_i|m_i\\m_r=1}}\frac{1}{\prod_{i=1}^k f_1(m_i)}\\ &\leq M_r\prod_{i=1}^k\frac{\phi(d_i)}{f_1(d_i)}\sum_{\substack{a_i\leq R\\a_r=1}}\frac{1}{\prod_{i=1}^k f_1(a_i)}\\ &\ll M_r\prod_{i\neq r}\frac{d_i}{\phi(d_i)}(\log R)^{k-1}\\ &\ll M_r(\log R)^{2k-2}\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$M_1^2 \frac{N}{\log^A N} \ll M_r^2 \frac{N}{(\log N)^{A-4k+4}}$$

Με δεδομένο ότι το A είναι ελεύθερο προς επιλογή, καταλήγουμε ότι ο όρος είναι αμελητέος.

Τελικά λοιπόν έχουμε αποδείξει ότι

$$S_2^r = \frac{N}{\phi(B)\log N} \sum_{s_1,\ldots,s_k} \frac{y_r^2(s_1,\ldots,s_k)}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)} + O\left(M_r^2 N \frac{\phi(B)^{k-2}}{B^{k-1}} \frac{(\log N)^{k-2}}{\log\log\log N}\right) \tag{6.11}$$

όπου $f_1 = \phi * \mu$.

Πριν κλείσουμε την παράγραφο, θα συνδέσουμε τη μεταβλητή y που εμφανίζεται στην γραφή του S_1 με τις μεταβλητές y_r που εμφανίζονται στο S_2^r, όπως ακριβώς κάναμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Για να το κάνουμε αυτό, εφαρμόζουμε δύο φορές το λήμμα αντιστροφής. Έχουμε

$$\begin{aligned} y_r(m_1,\ldots,m_k) &= \prod_{i=1}^k \mu(m_i) f_1(m_i) \sum_{m_i|d_i} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^k \phi(d_i)} \\ &= \prod_{i=1}^k \mu(m_i) f_1(m_i) \sum_{m_i|d_i} \prod_{i=1}^k \mu(d_i) \frac{d_i}{\phi(d_i)} \sum_{d_i|z_i} \frac{y(z_1,\ldots,z_k)}{\prod_{i=1}^k \phi(z_i)} \end{aligned}$$

Θέτουμε $d_i = a_i m_i$ και αλλάζοντας τη σειρά της άθροισης λαμβάνουμε

$$y_r(m_1,\ldots,m_k) = \prod_{i=1}^k \mu^2(m_i) f_1(m_i) \frac{m_i}{\phi(m_i)} \sum_{m_i|z_i} \frac{y(z_1,\ldots,z_k)}{\prod_{i=1}^k \phi(z_i)} \sum_{a_i|\frac{z_i}{m_i}} \prod_{i=1}^k \mu(a_i) \frac{a_i}{\phi(a_i)}$$

Παρατηρούμε ότι για ελεύθερους τετραγώνων αριθμούς ισχύει ότι

$$\sum_{d|n} \mu(d) \frac{d}{\phi(d)} = \frac{\mu(n)}{\phi(n)}$$

Συνεπώς το εσωτερικό άθροισμα γίνεται

$$\prod_{i\neq m} \left(\sum_{a_i|\frac{z_i}{m_i}} \mu(a_i) \frac{a_i}{\phi(a_i)} \right) = \prod_{i\neq m} \frac{\mu(\frac{z_i}{m_i})}{\phi(\frac{z_i}{m_i})}$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y_r(m_1,\ldots,m_k) &= \prod_{i=1}^k \mu(m_i) f_1(m_i) m_i \sum_{m_i|z_i} \frac{y(z_1,\ldots,z_k)}{\phi(z_m)\prod_{i\neq r}\phi^2(z_i)} \\ &= \prod_{i=1}^k \mu(m_i) f_1(m_i) m_i \sum_{\substack{a_i,\ i\neq r \\ z_r}} \frac{y(a_1m_1,\ldots,z_r,\ldots,a_km_k)}{\phi(z_r)\prod_{i\neq r}\phi^2(a_im_i)} \\ &= \prod_{i=1}^k \mu(m_i) \frac{f_1(m_i)m_i}{\phi^2(m_i)} \sum_{\substack{a_i, i\neq r \\ z_r}} \frac{y(a_1m_1,\ldots,z_r,\ldots,a_km_k)}{\phi(z_r)\prod_{i\neq r}\phi^2(a_i)} \end{aligned}$$

Στο εσωτερικό άθροισμα, αν πάρουμε $a_i = 1$ για κάθε $i \neq r$ λαμβάνουμε τον όρο

$$\sum_{z_r} \frac{y(m_1, \ldots, z_r, \ldots, m_k)}{\phi(z_r)}$$

ενώ αν έχουμε $a_{i_0} \neq 1$ για κάποιο i_0, με δεδομένο ότι έχουμε συνεισφορά μόνον όταν $(a_{i_0} m_{i_0}, B) = 1 \Rightarrow (a_{i_0}, B) = 1$ θα έχουμε ότι $a_{i_0} > \log\log\log N$. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a_{i_0}>1 \\ (a_i,B)=1, i\neq r \\ z_r}} \frac{y(a_1 m_1, \ldots, z_r, \ldots, a_k m_k)}{\phi(z_r)\prod_{i\neq r}\phi^2(a_i)} &\ll M\left(\sum_{n\leq R}\frac{1}{\phi^2(n)}\right)^{k-2} \sum_{\substack{n>1 \\ (n,B)=1}} \frac{1}{\phi^2(n)} \sum_{\substack{z_r \leq R \\ (z_r,B)=1}} \frac{1}{\phi(z_r)} \\ &\ll M\frac{\log N}{\log\log\log N}\frac{\phi(B)}{B} \end{aligned}$$

Επίσης, για έναν ελεύθερο τετραγώνων n με μικρότερο πρώτο διαιρέτη p_{min} έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{n f_1(n)}{\phi^2(n)} &= \prod_{p|n}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \\ &= \prod_{p|n}(1-\frac{1}{(p-1)^2}) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{(p_{min}-1)^2}\sum_{d|\frac{n}{p_{min}}}\frac{1}{\phi^2(d)}\right) \\ &= 1 + O(\frac{1}{(p_{min}-1)^2}) \end{aligned}$$

Επομένως, όταν $m_i \neq 1$, εφόσον $(m_i, B) = 1$ έπεται $p_{min} - 1 > \log\log\log N$. Συνεπώς

$$\frac{m_i f_1(m_i)}{\phi^2(m_i)} = 1 + O(\frac{1}{(\log\log\log N)^2})$$

Μαζεύοντας τα πάντα, καταλήγουμε ότι

$$y_r(m_1, \ldots, m_k) = \prod_{i\neq r}\mu(m_i)(1+O(\frac{1}{(\log\log\log N)^2}))\left(\sum_{z_r}\frac{y(m_1,\ldots,z_r,\ldots,m_k)}{\phi(z_r)} + O(M\frac{\log N}{\log\log\log N}\frac{\phi(B)}{B})\right)$$

Δηλαδή έχουμε την ισότητα

$$y_r(m_1, \ldots, m_k) = \prod_{i\neq r}\mu(m_i)\sum_{z_r}\frac{y(m_1,\ldots,z_r,\ldots,m_k)}{\phi(z_r)} + O(M\frac{\log N}{\log\log\log N}\frac{\phi(B)}{B}) \tag{6.12}$$

6.3 Ασυμπτωτικοί τύποι των S_1 και S_2

Στη παρούσα παράγραφο θα κάνουμε την επιλογή των μεταβλητών y και κατ'επέκταση και των μεταβλητών y_r (μέσω της σχέσης (6.12)). Σε αντιστοιχία με την μονοδιάστατη περίπτωση, όταν $(m_i, B) = 1$ για κάθε i επιλέγουμε

$$y(m_1, \ldots, m_k) = \prod_{i=1}^{k}\mu^2(m_i)F(\frac{\log m_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log m_k}{\log R})$$

όπου F μία λεία συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}^k$ προς επιλογή, με φορέα το σύνολο

$$S_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq 1\}$$

Επίσης, όταν $(m_i, B) \neq 1$ για κάποιο i, θέτουμε $y(m_1, \ldots, m_k) = 0$.

Σκοπός μας τώρα είναι να βρούμε συναρτήσει αυτής της επιλογής την ασυμπτωτική συμπεριφορά των S_1 και S_2. Υπενθυμίζουμε ότι

$$S_1 = \frac{N}{B} \sum_{s_1,\ldots,s_k} \frac{y^2(s_1,\ldots,s_k)}{\prod_{i=1}^k \phi(s_i)} + O(M^2 N \frac{\phi^k(B)}{B^{k+1}} \frac{(\log N)^k}{\log\log\log N})$$

Σημειώνουμε αρχικά ότι αν θέσουμε

$$F_{max} = \max_{(t_1,\ldots,t_k)\in S} \left(|F(t_1,\ldots,t_k) + \sum_{i=1}^k |\frac{\partial F}{\partial t_i}| \right)$$

τότε έχουμε $M \leq F_{max}$. Συνεπώς ο όρος του σφάλματος είναι

$$O\left(F_{max}^2 N \frac{\phi^k(B)}{B^{k+1}} \frac{(\log N)^k}{\log\log\log N} \right) \tag{6.13}$$

Αντικαθιστώντας την επιλογή μας στον κύριο όρο τώρα, έχουμε

$$S_1 = \frac{N}{B} \sum_{\substack{s_i \leq R \\ (s_i,B)=1 \\ (s_i,s_j)=1}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu^2(s_i)}{\phi(s_i)} F^2(\frac{\log s_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log s_k}{\log R})$$

Αρχικά, απαλασσόμαστε από την συνθήκη $(s_i, s_j) = 1$. Έχουμε ότι αν $(s_a, s_b) > 1$ για κάποια $a \neq b$ τότε εφόσον $(s_i, B) = 1$ για κάθε i, συμπεραίνουμε ότι κάθε πρώτος διαιρέτης του (s_a, s_b) είναι $> \log\log\log N$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} \frac{N}{B} \sum_{\substack{s_i \leq R \\ (s_i,B)=1 \\ (s_a,s_b)>1}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu^2(s_i)}{\phi(s_i)} F^2(\frac{\log s_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log s_k}{\log R}) &\ll \frac{N}{B} \frac{F_{max}^2}{(\log\log\log N)^2} \sum_{\substack{s_i \leq R \\ (s_i,B)=1}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu^2(s_i)}{\phi(s_i)} \\ &\ll \frac{N F_{max}^2}{(\log\log\log N)^2} \frac{\phi^k(B)}{B^{k+1}} (\log R)^k \end{aligned}$$

Επομένως μπορούμε για κάθε ζεύγος (s_a, s_b) να πάρουμε το παραπάνω σφάλμα, και εφόσον το πλήθος των ζευγών εξαρτάται μόνο από το k, μπορούμε να απαλλαχθούμε από την συνθήκη $(s_i, s_j) = 1$ με έναν αμελητέο όρο σφάλματος.

Θεωρώντας τις μεταβλητές $s_1, \ldots, s_{k-1}$ σταθερές, υπολογίζουμε τώρα την ποσότητα

$$\sum_{\substack{s_k \leq R \\ (s_k,B)=1}} \frac{\mu^2(s_k)}{\phi(s_k)} F^2(\frac{\log s_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log s_k}{\log R})$$

Χρησιμοποιούμε το Λήμμα 9 για την συνάρτηση $\gamma(n) = I(n, B)$ και παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις με $k = 1$ (κάτι που έχουμε ήδη δει) και $L = O(\log z)$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\sum_{\substack{y_1 < p \leq y_2 \\ p \nmid B}} \frac{\log p}{p} = \log \frac{y_2}{y_1} - \sum_{y_1 < p \leq \min\{y_2, z\}} \frac{\log p}{p} + O(1)$$

Ισχύει όμως ότι

$$-\sum_{y_1 < p \leq \min\{y_2, z\}} \frac{\log p}{p} \geq -\log z + O(1)$$

και συνεπώς ο ισχυρισμός μας είναι πράγματι αληθής. Έχουμε τότε για $p \nmid B$

$$g(p) = \frac{\gamma(p)}{p - \gamma(p)} = \frac{1}{\phi(p)}$$

και $g(p) = 0$ αλλιώς. Κατά συνέπεια

$$\sum_{n \leq R} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)} \quad = \quad \frac{\phi(B)}{B} \log R + O(\frac{\phi(B)}{B} \frac{\log z}{\log R})$$

λόγω υπολογισμών που έχουν ήδη προηγηθεί σχετικά με την σταθερά C του λήμματος για τη συγκεκριμένη γ.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το πόρισμα του λήμματος... λαμβάνουμε

$$\sum_{\substack{s_k \leq R \\ (s_k, B)=1}} \frac{\mu^2(s_k)}{\phi(s_k)} F^2(\frac{\log s_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log s_k}{\log R}) = \frac{\phi(B)}{B} \log R \int_0^1 F^2(\frac{\log s_1}{\log R}, \ldots, t_k) dt_k + O(F_{max}^2 \frac{\phi(B)}{B} \log z)$$

Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά το ίδιο λήμμα για κάθε μία από τις μεταβλητές $s_1, \ldots, s_{k-1}$ λαμβάνουμε κύριο όρο

$$\frac{N}{B} \left(\frac{\phi(B)}{B} \log R \right)^k \int_0^1 \cdots \int_0^1 F^2(t_1 \ldots, t_k) dt_k \ldots dt_1$$

ενώ για τον όρο του σφάλματος έχουμε ότι φράσσεται από

$$\frac{N}{B} F_{max}^2 \frac{\phi(B)}{B} \log R \sum_{\substack{s_1, \ldots, s_{k-1} \\ (s_i, B)=1 \\ s_i \leq R}} \prod_i \frac{\mu^2(m_i)}{\phi(m_i)} \ll \frac{N}{B} F_{max}^2 (\frac{\phi(B)}{B})^k (\log R)^{k-1} \log z$$

ο οποίος απορροφάται από τον όρο (6.13).

Συνοψίζοντας, έχουμε αποδείξει την σχέση

$$S_1 = \frac{N}{B} \left(\frac{\phi(B)}{B} \log R \right)^k \int_0^1 \cdots \int_0^1 F^2(t_1 \ldots, t_k) dt_k \ldots dt_1 + O(F_{max}^2 N \frac{\phi^k(B)}{B^{k+1}} \frac{(\log N)^k}{\log \log \log N}) \quad (6.14)$$

Στη συνέχεια, θα βρούμε αντίστοιχο ασυμπτωτικό τύπο για καθένα από τα S_2^r.

Υπενθυμίζουμε ότι από τη σχέση (6.11)

$$S_2^r \quad = \quad \frac{N}{\phi(B) \log N} \sum_{s_1, \ldots, s_k} \frac{y_r^2(s_1, \ldots, s_k)}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)} + O\left(M_r^2 N \frac{\phi(B)^{k-2}}{B^{k-1}} \frac{(\log N)^{k-2}}{\log \log \log N} \right)$$

όπου $f_1 = \phi * \mu$. Αρχικά, πρέπει να εκφράσουμε τις μεταβλητές y_r συναρτήσει της επιλογής των y μέσω της σχέσης (6.12). Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} y_r(m_1, \ldots, m_k) &= \prod_{i \neq r} \mu(m_i) \sum_{z_r} \frac{y(m_1, \ldots, z_r, \ldots, m_k)}{\phi(z_r)} + O(M \frac{\log N}{\log \log \log N} \frac{\phi(B)}{B}) \\ &= \prod_{i \neq r} \mu(m_i) \sum_{(z_r, B \prod_{i \neq r} m_i)=1} \mu^2(z_r) \frac{F(\frac{\log m_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log z_r}{\log R}, \ldots, \frac{\log m_k}{\log R})}{\phi(z_r)} + O(F_{max} \frac{\log N}{\log \log \log N} \frac{\phi(B)}{B}) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας και πάλι το Λήμμα 9 για τη συνάρτηση $\gamma(n) = I(n, B\prod_{i\neq r})$ έχουμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του για $L = \log\log R$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{p|B\prod_{i\neq r} m_i} \frac{\log p}{p} &= \sum_{p|B} \frac{\log p}{p} + \sum_{p|\prod_{i\neq r} m_i} \frac{\log p}{p} \\ &\ll \log z + \sum_{p<\log R} \frac{\log p}{p} + \sum_{\substack{p>\log R \\ p|\prod_{i\neq r} m_i}} \frac{\log p}{p} \\ &\ll \log\log R + \frac{\log\log R}{\log R}\omega(\prod_{i\neq r} m_i) \\ &\ll \log\log R\end{aligned}$$

διότι $\omega(n) = O(\log n)$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{z_r} \frac{y(m_1,\ldots,z_r,\ldots,m_k)}{\phi(z_r)} &= \frac{\phi(B\prod_{i\neq r} m_i)}{B\prod_{i\neq r} m_i}\log R\int_0^1 F(\frac{\log m_1}{\log R},\ldots,t_r,\ldots,\frac{\log m_k}{\log R})dt_r \\ &+ O(\frac{F_{max}\phi(B\prod_{i\neq r} m_i)}{B\prod_{i\neq r} m_i}\log\log N)\end{aligned}$$

όπου φυσικά το σφάλμα είναι αμελητέο σε σχέση με το αρχικό. Καταλήγουμε λοιπόν στη παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}y_r(m_1,\ldots,m_k) &= \frac{\phi(B)}{B}\log R\prod_{i\neq r}\frac{\mu(m_i)\phi(m_i)}{m_i}\int_0^1 F(\frac{\log m_1}{\log R},\ldots,t_r,\ldots,\frac{\log m_k}{\log R})dt_r \\ &+ O(F_{max}\frac{\phi(B)}{B}\frac{\log N}{\log\log N}) \qquad (6.15)\end{aligned}$$

Επανερχόμαστε τώρα στον αρχικό μας στόχο, που είναι η ασυμπτωτική μελέτη του S_2. Έχουμε ότι

$$S_2^r = \frac{N}{\phi(B)\log N}\sum_{s_1,\ldots,s_k}\frac{y_r^2(s_1,\ldots,s_k)}{\prod_{i=1}^k f_1(s_i)} + O\left(F_{max}^2 N\frac{\phi(B)^{k-2}}{B^{k-1}}\frac{(\log N)^{k-2}}{\log\log\log N}\right) \qquad (6.16)$$

Με βάση την (6.15) ο κύριος όρος γράφεται

$$\frac{N\phi(B)(\log R)^2}{B^2\log N}\sum_{s_1,\ldots,s_k}\prod_{i\neq r}\frac{\mu^2(s_i)\phi^2(s_i)}{s_i^2 f_1(s_i)}I_r^2 + O(\frac{N\log N\phi(B)}{B^2(\log\log N)^2}F_{max}^2\sum_{s_1,\ldots,s_k}\frac{1}{\prod_{i\neq r} f_1(s_i)})$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{s_1,\ldots,s_k \\ (s_i,B)=1 \\ s_r=1}}\prod_{i\neq r}\frac{1}{f_1(s_i)} &= \left(\sum_{\substack{n\leq R \\ (n,B)=1}}\frac{1}{f_1(n)}\right)^{k-1} \\ &\ll \left(\frac{\phi(B)}{B}\log N\right)^{k-1}\end{aligned}$$

Συνεπώς ο όρος του σφάλματος είναι

$$O(F_{max}^2\frac{N(\log N)^k}{\log\log N}\frac{\phi^k(B)}{B^{k+1}})$$

Ο οποίος απορροφά τον όρο του σφάλματος στην σχέση (6.16).

Για το άθροισμα στον κύριο όρο, έχουμε ότι ισούται με

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{s_i\leq R\\(s_i,s_j)=1\\(s_i,B)=1}}\prod_{i\neq r}\frac{\mu^2(s_i)\phi^2(s_i)}{s_i^2f_1(s_i)}I_r^2 &= \sum_{\substack{s_i\leq R\\(s_i,B)=1}}\prod_{i\neq r}\frac{\mu^2(s_i)\phi^2(s_i)}{s_i^2f_1(s_i)}I_r^2 + \\ &+ O\left(F_{max}^2\left(\sum_{\substack{n\leq R\\(n,B)=1}}\frac{\mu^2(n)\phi^2(n)}{n^2f_1(n)}\right)^{k-3}\sum_{\substack{a_1,a_2\leq R\\(a_i,B)=1\\(a_1,a_2)\neq 1}}\frac{\mu^2(a_1)\phi^2(a_1)}{a_1^2f_1(a_1)}\frac{\mu^2(a_2)\phi^2(a_2)}{a_2^2f_1(a_2)}\right)\end{aligned}$$

όπως θα δείξουμε παρακάτω, ισχύει

$$\sum_{\substack{n\leq R\\(n,B)=1}}\frac{\mu^2(n)\phi^2(n)}{n^2f_1(n)}\ll\frac{\phi(B)}{B}\log R$$

ενώ για το εσωτερικό άθροισμα στον όρο του σφάλματος, έχουμε ότι καθώς $(a_1,a_2)\neq 1$, έπεται ότι $(a_1,a_2)=d>z$ καθώς $(a_1,B)=1$ και $(a_2,B)=1$. Κατά συνέπεια το άθροισμα αυτό φράσσεται από

$$\left(\sum_{\substack{n\leq R\\(n,B)=1}}\frac{\mu^2(n)\phi^2(n)}{n^2f_1(n)}\right)^2\frac{\phi^4(d)}{d^4f_1^2(d)} \ll \left(\frac{\phi(B)\log R}{Bz}\right)^2$$

Συνεπώς, απαλασσόμαστε από τη συνθήκη $(s_i,s_j)=1$ με ένα σφάλμα τάξεως

$$O\left(F_{max}^2\left(\frac{N\phi^k(B)(\log N)^k}{B^{k+1}}\frac{1}{z^2}\right)\right)$$

που θα είναι αμελητέο.

Για να βρούμε λοιπόν τον κύριο όρο του S_2^r, έχουμε να υπολογίσουμε διαδοχικά αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{\substack{n\leq R\\(n,B)=1}}\frac{\mu^2(n)\phi^2(n)}{n^2f_1(n)}I_r^2(n,s_2,\ldots,s_{r-1},s_{r+1},\ldots,s_k) \tag{6.17}$$

Θεωρώντας τις μεταβλητές $s_2,\ldots,s_{r-1},s_{r+1},\ldots,s_k$ σταθεροποιημένες. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\phi^2(p)}{p^2f_1(p)} &= \frac{(p-1)^2}{p^2(p-2)}\\ &= \frac{1}{p-1}+O(\frac{1}{p^2})\end{aligned}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας και πάλι το Λήμμα 9 για την συνάρτηση $\gamma(n)=I(n,B)$, η έκφραση (6.17) γράφεται

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq R\\(n,B)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}I_r^2(n)+O(F_{max}^2) &= \frac{\phi(B)}{B}\log R\int_0^1\left(\int_0^1 F(t_1,\frac{\log s_2}{\log R},\ldots,t_r,\ldots,\frac{\log s_k}{\log R})dt_r\right)^2dt_1\\ &+ O(F_{max}^2\frac{\phi(B)}{B}\log z)+O(F_{max}^2)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δύο όροι του σφάλματος στη παραπάνω έκφραση μπορούν να αντικατασταθούν από τον όρο $O(F_{max}^2 \frac{\phi(B)}{B} \log N)$. Επαναλαμβάνοντας τώρα διαδοχικά την ίδια εκτίμηση για τις μεταβλητές $s_2, \ldots, s_{r-1}, s_{r+1}, \ldots, s_k$ έχουμε για τον κύριο όρο του S_2^r ότι ισούται με

$$\frac{N\phi^k(B)(\log R)^{k+1}}{B^{k+1}\log N} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F(t_1, \ldots, t_k) dt_r \right)^2 dt_1 \ldots dt_{r-1} dt_{r+1} \ldots dt_k$$
$$+O\left(N \frac{\phi^2(B) \log N \log z}{B^3} F_{max}^2 \left(\sum_{\substack{n \le R \\ (n,B)=1}} \frac{1}{\phi(n)} \right)^{k-2} \right)$$

για τον όρο του σφάλματος στη παραπάνω έκφραση, έχουμε ότι είναι

$$\ll N \frac{\phi^2(B) \log N \log z}{B^3} F_{max}^2 (\frac{\phi(B)}{B} \log R)^{k-2} \ll N F_{max}^2 \frac{\phi^k(B)(\log N)^{k-1} \log z}{B^{k+1}}$$
$$\ll F_{max}^2 \frac{N\phi^k(B)(\log N)^k}{B^{k+1} \log\log\log N}$$

διότι φυσικά $z \log z \ll \log N$.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} S_2^r &= \frac{N\phi^k(B)(\log R)^{k+1}}{B^{k+1}\log N} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F(t_1, \ldots, t_k) dt_r \right)^2 dt_1 \ldots dt_{r-1} dt_{r+1} \ldots dt_k \\ &+ O\left(F_{max}^2 \frac{N\phi^k(B)(\log N)^k}{B^{k+1} \log\log\log N} \right) \end{aligned} \tag{6.18}$$

6.4 Επιλογή της συνάρτησης F για μικρά k

Στη παράγραφο αυτή θα κάνουμε μία συγκεκριμένη επιλογή για την συνάρτηση F, η οποία φυσικά οδηγεί σε μία συγκεκριμένη επιλογή των Sieve weights W_n. Με βάση λοιπόν τις ασυμπτωτικές σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου, θα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ασυμπτωτικά το πηλίκο $\frac{S_2}{S_1}$.

Ακολουθώντας τη μονοδιάστατη περίπτωση, θα επιλέξουμε την $F(t_1, \ldots, t_k)$ να είναι πολυωνυμική έκφραση των $t_1, \ldots, t_k$. Δηλαδή αναζητούμε μία λεία επιλογή της μορφής

$$F(t_1, \ldots, t_k) = P(t_1, \ldots, t_k), \quad (t_1, \ldots, t_k) \in S_k$$

και $F(t_1, \ldots, t_k) = 0$ όταν $(t_1, \ldots, t_k) \notin S_k$.

Αρχικά να κάνουμε μερικές σημαντικές παρατηρήσεις. Αν θέσουμε

$$J(F) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 F^2(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k$$

και

$$I_r(F) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F(t_1, \ldots, t_k) dt_r \right)^2 dt_1 \ldots dt_{r-1} \ldots dt_{r+1} \ldots dt_k$$

τότε το ζητούμενο είναι η μεγιστοποιήση του πηλίκου

$$M_k(F) = \frac{\sum_{r=1}^k I_r(F)}{J(F)}$$

για κάποια F υπό τις προϋποθέσεις που έχουμε αναφέρει. Αν τώρα θεωρήσουμε τον γραμμικό τελεστή

$$\mathcal{L}_k f(u_1,\ldots,u_k) \;=\; \sum_{r=1}^{k}\int_0^1 f(u_1,\ldots,u_{r-1},t,u_{r+1},\ldots,u_k)dt$$

από τον χώρο $C([0,1]^k)$ των συνεχών συναρτήσεων $f:[0,1]^k\to\mathbb{R}$ στον εαυτό του, τότε παρατηρούμε ότι για μία πραγματική συνάρτηση $f\in C([0,1]^k)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_k(f),f\rangle &= \sum_{r=1}^{k}\int_0^1\cdots\int_0^1 f(u_1,\ldots,u_k)\int_0^1 f(u_1,\ldots,u_{r-1},t,u_{r+1},\ldots,u_k)dtdu_1\ldots du_k\\ &= \sum_{r=1}^{k}\int_0^1\cdots\int_0^1\left(f(u_1,\ldots,u_k)\int_0^1 f(u_1,\ldots,u_{r-1},t,u_{r+1},\ldots,u_k)dt\right)du_r\ldots du_k\end{aligned}$$

το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής u_r συνεπώς έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(u_1,\ldots,u_k)\int_0^1 f(u_1,\ldots,u_{r-1},t,u_{r+1},\ldots,u_k)dtdu_r \;=\; \left(\int_0^1 f(u_1,\ldots,u_{r-1},t,u_{r+1},\ldots,u_k)du_r\right)^2$$

άρα

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_k f,f\rangle &= \sum_{r=1}^{k}\int_0^1\cdots\int_0^1\left(\int_0^1 f(u_1,\ldots,u_{r-1},t,u_{r+1},\ldots,u_k)du_r\right)^2 du_1\ldots du_{r-1}du_{r+1}\ldots du_k\\ &= \sum_{r=1}^{k} I_r(f)\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\langle f,f\rangle \;=\; J(F)$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$M_k(f) \;=\; \frac{\langle \mathcal{L}_k(f),f\rangle}{\langle f,f\rangle}$$

Αν υποθέσουμε ότι μία λεία f μεγιστοποιεί τη συνάρτηση αυτή, τότε η συνάρτηση

$$h(a) \;=\; M_k(f+ag)$$

είναι λεία (ρητή συνάρτηση ως προς a) και παρουσιάζει για οποιαδήποτε g μέγιστο στο 0. Συνεπώς θα ισχύει $h'(0)=0$. Χρησιμοποιώντας την διγραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου και το γεγονός ότι ο τελεστής $\mathcal{L}_k$ είναι γραμμικός, έχουμε ότι η απαίτηση $h'(0)=0$ μας δίνει

$$\left(\langle \mathcal{L}_k f,g\rangle+\langle \mathcal{L}_k g,f\rangle\right)\langle f,f\rangle - 2\langle \mathcal{L}_k f,f\rangle\langle f,g\rangle = 0 \tag{6.19}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο τελεστής ειναι αυτοσυζυγής, δηλαδή για οποιεσδήποτε $f,g\in C([0,1]^k)$ ισχύει $\langle \mathcal{L}_k f,g\rangle=\langle f,\mathcal{L}_k g\rangle$. Πράγματι, έχουμε ότι αν θεωρήσουμε την ποσότητα

$$\int_{[0,1]^k}\left(\int_0^1 f(t,u_2,\ldots,u_k)dt\right)g(u_1,\ldots,u_k)du_1\ldots du_k$$

τότε αλλάζοντας τη σειρά ολοκληρώσης για τις μεταβλητές t,u_1 έχουμε ότι ισούται με την ποσότητα

$$\int_{[0,1]^k}\left(\int_0^1 g(u_1,\ldots,u_k)du_1\right)f(t,u_2,\ldots,u_k)dtdu_2\ldots du_k$$

Εφαρμόζουμε το ίδιο για την μεταβλητή u_i αντί της u_1 και αθροίζουμε πάνω από όλα τα $i = 1, 2, \ldots, k$ και λαμβάνουμε τελικά τη ζητούμενη σχέση.

Επανερχόμαστε τώρα στη σχέση (6.19) και διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\langle f, f\rangle$, οπότε λαμβάνουμε τελικά

$$\langle \mathcal{L}_k f, g\rangle \quad = \quad M_k(f)\langle f, g\rangle$$

για κάθε g.

Λήμμα 13. *Αν μία λεία συνάρτηση f μεγιστοποιεί την $M_k(f)$, τότε είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathcal{L}_k$ με ιδιοτιμή $M_k(f)$.*

Ἀπόδειξη. Έστω ένα $x_0 = (x_1, \ldots, x_k)$ στο $[0, 1]^k$. Θεωρούμε την ακολουθία περιοχών του x_0, $B_n = \prod_i [x_i - 1/n, x_i + 1/n]$. Επιλέγουμε $g_n(x) = \frac{\chi_{B_n}(x)}{(2/n)^k}$. Έχουμε τότε ότι

$$\langle f, g\rangle \quad = \quad \frac{1}{(2/n)^k}\int_{B_n} f dt_1 \ldots dt_k \to f(x_0)$$

από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Αντίστοιχα

$$\langle \mathcal{L}_k f, g_n\rangle \quad = \quad \frac{1}{(2/n)^k}\int_{B_n} \mathcal{L}_k f dt_1 \ldots dt_k \to \mathcal{L}_k f(x_0)$$

Συνεπώς από τη σχέση

$$\langle \mathcal{L}_k f, g_n\rangle \quad = \quad M_k(f)\langle f, g_n\rangle$$

παίρνοντας όριο $n \to \infty$, καταλήγουμε ότι

$$\mathcal{L}_k f(x_0) \quad = \quad M_k(f) f(x_0)$$

Για κάθε x_0, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 2. *Στη περίπτωση μίας μη λείας συνάρτηση f μπορούμε να λάβουμε το ίδιο συμπέρασμα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue.*

Τέλος, παρατηρούμε ότι αν σ είναι μια μετάθεση στην ομάδα S_k τότε αφ'ενός $M_k(f) = M_k(fo\sigma)$ και αφ'ετέρου η $fo\sigma$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $\mathcal{L}_k$ με την ίδια ιδιοτιμή. Πράγματι, έχουμε

$$\mathcal{L}_k f = M_k(f) f \Rightarrow \mathcal{L}_k f(\sigma) = M_k(f) fo\sigma$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{L}_k f(\sigma) = \mathcal{L}_k(fo\sigma)$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}_k f(\sigma(u_1, \ldots, u_k)) \quad = \quad \sum_{r=1}^{k}\int_0^1 f(\sigma(u_1), \ldots, u_{r-1}, t, \sigma(u_{r+1}), \ldots, \sigma(u_k))dt$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\sigma(u_r) = u_a$ τότε

$$f(\sigma(u_1, \ldots, u_{a-1}, t, u_a, u_k)) \quad = \quad f(\sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_{r-1}), t, \sigma(u_{r+1}), \ldots, \sigma(u_k))$$

επομένως, ο $a-$όρος στο $\mathcal{L}_k(fo\sigma)$ ταυτίζεται με τον $r-$όρο του $\mathcal{L}_k f(\sigma)$ όταν $\sigma(u_r) = u_a$ και από το 1-1 και επί της σ έχουμε το ζητούμενο. Κατά συνέπεια, η συμμετρική συνάρτηση $\tilde{f} = \sum_{\sigma \in S_n} fo\sigma$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $\mathcal{L}_k$ με ιδιοτιμή $M_k(f)$.

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, θα αρκεστούμε στη βελτιστοποιήση της $M_k(f)$ χρησιμοποιώντας μόνο συμμετρικές συναρτήσεις f. Έστω $P_j(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i=1}^{k} t^j$ το συμμετρικό πολυώνυμο που προκύπτει αθροίζοντας τις $j-$δυνάμεις των μεταβλητών. Θα αναζητήσουμε πολυώνυμο P το οποίο θα είναι γραμμικός συνδυασμός πολυωνύμων της μορφής $(1 - P_1)^a P_2^b$. Ξεκινάμε με ένα λήμμα, το οποίο γενικεύει τη ταυτότητα του βήτα ολοκληρώματος που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο

Λήμμα 14. *Για κάθε a, b μη αρνητικούς ακεραίους ισχύει η παρακάτω ισότητα*

$$\int_{S_k} (1-P_1)^a P_2^b dt_1 \dots dt_k \quad = \quad \frac{a!}{(a+2b+k)!} G_b(k)$$

όπου

$$G_b(x) \quad = \quad b! \sum_{r=0}^{b} \binom{x}{r} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_r \geq 1 \\ a_1+\dots+a_r=k}} \prod_{i=1}^{r} \frac{(2a_i)!}{(a_i)!}$$

πολυώνυμο βαθμού b.

Ἀπόδειξη. Από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε ότι

$$P_2^b \quad = \quad \sum_{a_1+\dots+a_k=b} \frac{b!}{(a_1)!\dots(a_k)!} t_1^{2a_1} \dots t_k^{2a_k} \tag{6.20}$$

Από γραμμικότητα του ολοκληρώματος λοιπόν, αρκεί να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$\int_{S_k} (1-P_1)^a t_1^{2a_1} \dots t_k^{2a_k} dt_1 \dots dt_k$$

Για $a_1 + \dots + a_k = b$. Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{S_{k-1}} t_2^{2a_2} \dots t_k^{2a_k} \left(\int_0^{1-\sum_{i\neq 1} t_i} (1 - t_1 - \sum_{i\neq 1} t_i)^a t_1^{2a_1} dt_1 \right) dt_2 \dots dt_k$$

κάνουμε την αντικατάσταση $u = \frac{t_1}{1-\sum_{i\neq 1} t_1}$ και παίρνουμε ότι το εσωτερικό ολοκλήρωμα ισούται με

$$(1 - \sum_{i\neq 1} t_i)^{a+2a_1+1} \int_0^1 (1-u)^a u^{2a_1} du \quad = \quad (1 - \sum_{i\neq 1} t_i)^{a+2a_1+1} \frac{a!(2a_1)!}{(a+2a_1+1)!}$$

όπου η ισότητα προκύπτει από την ταυτότητα του βήτα ολοκληρώματος. Συνεπώς έχουμε την έκφραση

$$\frac{a!(2a_1)!}{(a+2a_1+1)!} \int_{S_{k-1}} (1 - \sum_{i\neq 1} t_i)^{a+2a_1+1} t_2^{2a_2} \dots t_k^{2a_k} dt_2 \dots dt_k$$

Το ολοκλήρωμα είναι τώρα ίδιας μορφής με αυτό που μόλις υπολογίσαμε. Κάνοντας λοιπόν τον ίδιο υπολογισμό k διαδοχικές φορές, λαμβάνουμε το τηλεσκοπικό γινόμενο

$$\frac{a!(2a_1)!}{(a+2a_1+1)!} \frac{(a+2a_1+1)!(2a_2)!}{(a+2(a_1+a_2)+2)!} \cdots \frac{(a+2(a_1+\dots+a_{k-1}))!(2a_k)!}{(a+2(a_1+\dots+a_k)+k)!} = \frac{a!(2a_1)!\dots(2a_k)!}{(a+2b+k)!}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $a_1 + \dots + a_k = b$. Χρησιμοποιούμε τώρα την σχέση (6.20) και λαμβάνουμε ότι το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει ισούται με

$$\frac{b!a!}{(a+2b+k)!} \sum_{a_1+\dots+a_k=b} \prod_{i=1}^{k} \frac{(2a_i)!}{a_i!}$$

Τέλος, αν $r = 0, 1, \dots, k$ είναι το πλήθος των μη μηδενικών $a_1, \dots, a_k$, έχουμε $\binom{k}{r}$ τρόπους να επιλέξουμε ποιοι θα είναι αυτοί, και λόγω συμμετρίας παίρνουμε την ίδια συνεισφορά ανεξαρτήτως αυτής της επιλογής. Κατά συνέπεια

$$\sum_{a_1+\dots+a_k=b} \prod_{i=1}^{k} \frac{(2a_i)!}{a_i!} \quad = \quad \sum_{r=0}^{b} \binom{k}{r} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_r \geq 1 \\ a_1+\dots+a_r=b}} \prod_{i=1}^{r} \frac{(2a_i)!}{(a_i)!}$$

όπου έχουμε βάλει το όριο για το r να είναι το b καθώς $b = a_1 + \dots + a_r \geq r$ και όταν $r > k$ δεν παίρνουμε συνεισφορά. Αυτό είναι και ένα σημαντικό όφελος αυτής της έκφρασης, αφού μας επιτρέπει να δούμε την ποσότητα ως ένα πολυώνυμο ως προς k βαθμού b. □

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω λήμμα προκειμένου να γράψουμε τις ποσότητες $I_r(F)$ και $J(F)$ ως διγραμμικές μορφές των a_i, ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε την βέλτιστη επιλογή τους.

Έχουμε λοιπόν τη παρακάτω πρόταση

Πρόταση 15. *Αν* $P(t_1,\dots,t_k)=\sum_{i=1}^d a_i(1-P_1)^{b_i}P_2^{c_i}$, *τότε*

$$J(F) = \sum_{i,j} a_i a_j \frac{(b_i+b_j)!}{(b_i+b_j+2c_i+2c_j+k)!} G_{c_i+c_j}(k)$$

και

$$\begin{aligned} I_r(F) &= \sum_{i,j} a_i a_j \sum_{n_i,n_j} \binom{c_i}{n_i}\binom{c_j}{n_j} \frac{(b_i+b_j+2n_i+2n_j+2)!}{(k+2c_i+2c_j+b_i+b_j+1)!} \frac{b_i!b_j!(2n_i)!(2n_j)!}{(b_i+2n_i+1)!(b_j+2n_j+1)!} \\ &\times \quad G_{c_i+c_j-n_i-n_j}(k-1) \end{aligned}$$

Απόδειξη. Για το $J(F)$ έχουμε ότι

$$F^2(t_1,\dots,t_k) = \sum_{i,j} a_i a_j (1-P_1)^{b_i+b_j} P_2^{c_i+c_j}$$

επομένως

$$\begin{aligned} J(F) &= \sum_{i,j} a_i a_j \int_{S_k} (1-P_1)^{b_i+b_j} P_2^{c_i+c_j} dt_1 \dots dt_k \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j \frac{(b_i+b_j)!}{(b_i+b_j+2c_i+2c_j+k)!} G_{c_i+c_j}(k) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει φυσικά από το Λήμμα (14).

Για το $I_r(F)$ παρατηρούμε ότι λόγω της συμμετρικής επιλογής του P, ισχύει $I_r(F)=I_1(F)$ για κάθε r, συνεπώς αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο μόνο για το $I_1(F)$. Έχουμε ότι

$$\left(\int_0^{1-\sum_{s\geq 2} t_s} F(t_1,\dots,t_k)dt_1\right)^2 = \sum_{i,j} a_i a_j \int_0^{1-\sum_{s\geq 2} t_s} (1-P_1)^{b_i} P_2^{c_i} dt_1 \int_0^{1-\sum_{s\geq 2} t_s} (1-P_1)^{b_j} P_2^{c_j}\ dt_1$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\sum_{s\geq 2} t_s} (1-P_1)^a (t_1^2+\sum_{s\geq 2} t_s^2)^b\ dt_1 &= \sum_n \binom{b}{n} (\sum_{s\geq 2} t_s^2)^{b-n} \int_0^{1-\sum_{s\geq 2} t_s} (1-P_1)^a t_1^{2n}\ dt_1 \\ &= \sum_n \binom{b}{n} (\sum_{s\geq 2} t_s^2)^{b-n} (1-\sum_{s\geq 2} t_s)^{a+2n+1} \frac{a!(2n)!}{(a+2n+1)!} \end{aligned}$$

Συνεπώς λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{1-\sum_{s\geq 2} t_s} F(t_1,\dots,t_k)dt_1\right)^2 &= \sum_{i,j} a_i a_j \sum_{n_i,n_j} \binom{c_i}{n_i}\binom{c_j}{n_j} \left(\sum_{s\geq 2} t_s^2\right)^{c_i+c_j-n_i-n_j} \left(1-\sum_{s\geq 2} t_s\right)^{b_i+b_j+2n_i+2n_j+2} \\ &\times \quad \frac{b_i!b_j!(2n_i)!(2n_j)!}{(b_i+2n_i+1)!(b_j+2n_j+1)!} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την παραπάνω ποσότητα στο S_{k-1} έχουμε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα ότι την έκφραση

$$\sum_{i,j} a_i a_j \sum_{n_i,n_j} \binom{c_i}{n_i}\binom{c_j}{n_j} \frac{(b_i+b_j+2n_i+2n_j+2)!}{(k+2c_i+2c_j+b_i+b_j+1)!} \frac{b_i!b_j!(2n_i)!(2n_j)!}{(b_i+2n_i+1)!(b_j+2n_j+1)!} G_{c_i+c_j-n_i-n_j}(k-1)$$

όπως θέλαμε. □

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχουν συμμετρικοί πίνακες A_1, A_2 έτσι ώστε

$$J(F) \quad = \quad a^T A_2 a$$

και

$$kI_1(F) \quad = \quad a^T A_1 a$$

Η συμμετρία των A_1, A_2 προκύπτει φυσικά από το γεγονός ότι εναλάσσοντας τα i, j στη γραφή των $J(F), I_1(F)$ λαμβάνουμε τους ίδιους συντελεστές για το $a_i a_j$. Δοθέντος τώρα ότι $J(F) > 0$ όταν η F δεν είναι σχεδόν παντού μηδέν στο S_k, έχουμε ότι ο A_2 είναι θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας και συνεπώς αντιστρέψιμος. Επίσης, ισχύει $I_1(F) \geq 0$ συνεπώς ο A_1 είναι θετικά ημιορισμένος συμμετρικός πίνακας.

Υπενθυμίζουμε ότι εφόσον έχουμε κάνει συμμετρική επιλογή για την F, έχουμε ότι $I_1(F) = I_r(F)$ για κάθε r, οπότε

$$M_k(F) = \frac{kI_1(F)}{J(F)} = \frac{a^T A_1 a}{a^T A_2 a}$$

σκοπός μας φυσικά είναι να επιλέξουμε το διάνυσμα a ώστε να μεγιστοποιηθεί το παραπάνω πηλίκο (που ισοδυναμεί με επιλογή των συντελεστών του P). Έχουμε το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 15. *Έστω A_1, A_2 πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες με τον A_2 να είναι θετικά ορισμένος. Τότε το πηλίκο*

$$\frac{a^T A_1 a}{a^T A_2 a}$$

μεγιστοποιείται όταν το διάνυσμα a είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A_2^{-1} A_1$ που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του. Η μέγιστη τιμή του πηλίκου είναι τότε αυτή η μέγιστη ιδιοτιμή.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$h(a) \quad = \quad \frac{a^T A_1 a}{a^T A_2 a}$$

είναι ομογενής, δηλαδή $h(a) = h(sa)$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Από την παρατήρηση αυτή, έχουμε ότι

$$\sup_a h(a) \quad = \quad \sup_{\substack{a \\ a^T A_2 a = 1}} h(a)$$

Πράγματι, η μία ανισότητα είναι προφανής, ενώ για ένα τυχαίο a έχουμε ότι $h(a) = h(\frac{a}{a^T A_2 a})$, επομένως ισχύει και η αντίστροφη.

Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην μεγιστοποιήση της h υπό τον περιορισμό $a^T A_2 a = 1$. Απο το θεώρημα Lagrange έχουμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial(a^T A_1 a)}{\partial a_i} \quad = \quad \lambda \frac{\partial(a^T A_2 a)}{\partial a_i}$$

Ο "συντελεστής" του a_i στο $a^T A_1 a$ (αντίστοιχα $a^T A_2 a$) είναι δύο φορές η $i-$γραμμή του $A_1 a$ μείον $(A_1)_{ii} a_i$ (αντίστοιχα $A_2 a$) λόγω της συμμετρίας των A_1 και A_2. Άρα έπειτα απο την παραγώγιση έχουμε

$$2A_1 a \quad = \quad 2\lambda A_2 a$$

(το 2 στην θέση i εμφανίζεται λόγω της παραγώγισης του a_i^2). Υπενθυμίζουμε τώρα ότι ο A_2 είναι θετικά ορισμένος, άρα αντιστρέφεται. Επομένως η τελευταία σχέση γράφεται

$$A_2^{-1} A_1 a \quad = \quad \lambda a$$

δηλαδή το a είναι πράγματι ιδιοδιάνυσμα του $A_2^{-1}A_1$ με ιδιοτιμή λ. Έχουμε ότι για αυτό το a

$$\begin{aligned} h(a) &= \lambda \frac{a^T A_2 a}{a^T A_2 a} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Δηλαδή κάθε κρίσιμο σημείο είναι ιδιοδιάνυσμα του $A_2^{-1}A_1$ και μας δίνει ως τιμή του $h(a)$ την ιδιοτιμή του. Επιλέγοντας λοιπόν για a ιδιοδιάνυσμα του $A_2^{-1}A_1$ που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή, έχουμε το ζητούμενο. □

Είμαστε έτοιμοι να αποδείξομε το Θεώρημα 24.

Απόδειξη. (του θεωρήματος 24) Υπενθυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{\log R}{\log N} \frac{a^T A_1 a}{a^T A_2 a} \\ &= (\frac{\theta}{2} - \epsilon) M_k \end{aligned}$$

υπό την επιλογή $R = N^{\frac{\theta}{2}-\epsilon}$. Έχουμε ήδη σχολιάσει ότι αν $\frac{S_2}{S_1} > \nu$ τότε η $k-$άδα

$$\mathcal{H}_n = \{n + h_1, \ldots, n + h_k\}$$

περιέχει τουλάχιστον $\lfloor \nu + 1 \rfloor$ πρώτους. Δοθέντος ότι $\theta = \frac{1}{2}$ απροϋπόθετα, έχουμε ότι αν $M_k > 4$, θα έχουμε για κατάλληλα μικρό ϵ ότι $(\frac{1}{4} - \epsilon)M_k > 1$, επομένως η $k-$άδα θα περιέχει τουλάχιστον 2 πρώτους.

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι αρκεί να κάνουμε την επιλογή του P με τέτοιον τρόπο, ώστε η μέγιστη ιδιοτιμή του $A_2^{-1}A_1$ να είναι γνήσια μεγαλύτερη του 4, όπου τότε θα έχουμε $M_k > 4$. Ακολουθώντας τον James Maynard, επιλέγουμε το πολυώνυμο P να είναι ο γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων $(1-P_1)^b$ και P_2^c με $b + 2c \leq 11$. Η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται για 42 ζεύγη μη αρνητικών ακεραίων (b, c) και συνεπώς από τη Πρόταση 14 έχουμε σαφή τύπο για το (i, j) στοιχείο για καθέναν από τους 42×42 πίνακες A_1, A_2. Με τη βοήθεια υπολογιστών βρίσκουμε ότι για $k = 105$ η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα $A_2^{-1}A_1$ είναι $\lambda \approx 4.0020697 > 4$. Συνεπώς, κάθε admissible $105-$άδα περιέχει πρώτη $2-$άδα. Η $105-$άδα

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \{&0, 10, 12, 24, 28, 30, 34, 42, 48, 52, 54, 64, 70, 72, 78, 82, 90, 94, 100, 112, 114, \\ &118, 120, 124, 132, 138, 148, 154, 168, 174, 178, 180, 184, 190, 192, 202, 204, \\ &208, 220, 222, 232, 234, 250, 252, 258, 262, 264, 268, 280, 288, 294, 300, 310, \\ &322, 324, 328, 330, 334, 342, 352, 358, 360, 364, 372, 378, 384, 390, 394, 400, \\ &402, 408, 412, 418, 420, 430, 432, 442, 444, 450, 454, 462, 468, 472, 478, 484, \\ &490, 492, 498, 504, 510, 528, 532, 534, 538, 544, 558, 562, 570, 574, 580, 582, \\ &588, 594, 598, 600\} \end{aligned}$$

είναι admissible [14, p. 390] με διάμετρο 600, το οποίο αποδεικνύει το πρώτο μέρος του θεωρήματος. Με την υπόθεση τώρα ότι $\theta = 1$ έχουμε ότι $(\frac{\theta}{2} - \epsilon)M_{105} = (\frac{1}{2} - \epsilon)M_{105} > 2$ για κατάλληλο ϵ, επομένως έχουμε ότι κάθε admissible 105-άδα περιέχει πρώτη $3-$άδα. Συνεπώς, για την $\mathcal{H}$ που αναφέραμε, έχουμε ότι για άπειρα n η $\mathcal{H}_n = n + \mathcal{H}$ έχει τουλάχιστον 3 πρώτους, επομένως

$$\liminf(p_{n+2} - p_n) \leq 600$$

Έχοντας $\theta = 1$ τώρα, αρκεί $M_k > 2$, και τότε $(\frac{1}{2} - \epsilon)M_k > 1$ το οποίο θα μας δώσει τον εντοπισμό τουλάχιστον δύο πρώτων. Παίρνουμε $k = 5$ και επιλέγουμε το πολυώνυμο

$$P = 70(1 - P_1)P_2 + 49(1 - P_1)^2 + 5P_2 - 15(1 - P_1)$$

Υπολογίζοντας τώρα τους A_1, A_2 καθώς και τις ιδιοτιμές του $A_2^{-1}A_1$ βλέπουμε ότι η μέγιστη είναι η

$$\lambda = \frac{1417255}{708216} > 2$$

Άρα $M_k > 2$, κατά συνέπεια κάθε admissible 5-άδα περιέχει πρώτη 2-άδα. Η 5-άδα

$$\mathcal{H}^* \quad = \quad \{0, 2, 6, 8, 12\},$$

είναι admissible με διάμετρο 12, συνεπώς

$$\liminf(p_{n+1} - p_n) \leq 12.$$

□

6.5 Επιλογή της συνάρτησης F για μεγάλα k

Σε αυτή τη παράγραφο, θα κάνουμε μία επιλογή για την F όταν το k είναι αρκετά μεγάλο, η οποία θα μας επιτρέψει να αποδείξουμε το Θεώρημα Maynard-Tao. Επικαλούμενοι τα επιχειρήματα της προηγούμενης παραγράφου, αναζητούμε συμμετρική συνάρτηση F, με σκοπό την μεγιστοποίηση του πηλίκου

$$M_k(F) \quad = \quad \frac{kI_1(F)}{J(F)}$$

Σε αυτή τη παράγραφο, ακολουθούμε στενά τη παρουσίαση του Δημήτρη Κουκουλόπουλου στο [13], και δευτερευόντως τη βασική μας πηγή [14].

Θεωρούμε ένα $\eta > 0$ το οποίο θα προσδιορίσουμε αργότερα και επιλέγουμε συνάρτηση της μορφής

$$F(t_1, \ldots, t_k) = G(kt_1)G(kt_2)\cdots G(kt_k)$$

όταν $(t_1, \ldots, t_k) \in S_k$ και 0 αλλιώς, με την G να είναι θετική λεία συνάρτηση στο στήριγμά της $[0, \eta k]$, ώστε

$$\int_0^{\eta k} G^2(t)dt = 1 \tag{6.21}$$

καθώς και

$$\int_0^{\eta k} tG^2(t) < 1 - \eta. \tag{6.22}$$

Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} J(F) \quad &= \quad \int_{S_k} G^2(kt_1)\cdots G^2(kt_k)dt_1 \ldots dt_k \\ &\leq \quad \left(\int_0^{\epsilon k} G^2(kt)dt\right)^k \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u = kt$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση (6.21) για την G έχουμε ότι

$$J(F) \leq \frac{1}{k^k} \tag{6.23}$$

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στο I_1. Αυτό γράφεται

$$I_1(F) \quad = \quad \int_0^1 \cdots \int_0^1 G^2(kt_2)\cdots G^2(kt_k)\left(\int_0^{1-\sum_{i\geq 2} t_i} G(kt_1)dt_1\right)^2 dt_2 \ldots dt_k$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $(u_1,\dots,u_k)=k(t_1,\dots,t_k)$ και λαμβάνουμε

$$I_1(F) = \frac{1}{k^{k+1}}\int_0^k\cdots\int_0^k G^2(u_2)\dots G^2(u_k)\left(\int_0^{k-\sum_{i\geq 2}u_i} G(u_1)du_1\right)^2 du_2\dots du_k \qquad (6.24)$$

Τώρα παρατηρούμε ότι αν $u_2+\cdots+u_k\leq k-\eta k$ τότε η συνθήκη $u_1\leq k-(u_2+\cdots+u_k)$ ικανοποείται αυτομάτως, αφού η $G(u_1)$ στηρίζεται στο $[0,\eta k]$ και έχουμε

$$\eta k\leq k-(u_2+\cdots+u_k).$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} I_1(F) &\geq \frac{1}{k^{k+1}}\int_{u_2+\cdots+u_k\leq k-\eta k} G^2(u_2)\cdots G^2(u_k)\left(\int_0^{\eta k} G(u_1)du_1\right)^2 du_2\dots d_k \\ &= \frac{1}{k^{k+1}}\left(\int_0^{\eta k} G(u)du\right)^2\int_{u_2+\cdots+u_k\leq k-\eta k} G^2(u_2)\cdots G^2(u_k)du_2\dots du_k \qquad (6.25)\end{aligned}$$

Θα χρειαστούμε τώρα την ανισότητα του παρακάτω λήμματος

Λήμμα 16. *Έστω $\mu=\int_0^{\eta k}tG^2(t)dt$, οπότε λόγω της (6.22), ισχύει $\mu<1-\eta$. Τότε έχουμε την ανισότητα*

$$\int_{u_2+\cdots+u_k\leq k-\eta k} G^2(u_2)\cdots G^2(u_k)du_2\dots du_k > 1-\frac{\eta}{(1-\eta-\mu)^2}$$

Απόδειξη. Η συνθήκη (6.21) μας επιτρέπει να δούμε τη συνάρτηση $G^2\chi_{[0,\eta k]}$ ως μία συνάρτηση πυκνότητας για μια τυχαία μεταβλητή X, η οποία θα έχει μέση τιμή $\mu=\int_0^{\eta k}tG^2(t)dt$. Θεωρώντας τώρα $k-1$ ανεξάρτητα "αντίτυπα" της, έχουμε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_2,\dots,X_k$. Σε αυτό το πλάισιο, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{u_2+\cdots+u_k<k-\eta k} G^2(u_2)\cdots G^2(u_k)du_2\dots du_k &= \mathbb{P}(X_2+\cdots+X_k\leq k-\eta k) \\ &= 1-\mathbb{P}(X_2+\cdots+X_k>k-\eta k) \qquad (6.26)\end{aligned}$$

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Chebyshev θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_i=X_i-\mu$ με μέση τιμή 0. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2+\cdots+X_k>k-\eta k) &= \mathbb{P}(Y_2+\cdots+Y_k>k-\eta k-(k-1)\mu) \\ &\leq \frac{Var(Y_2+\cdots+Y_k)}{(k-\eta k-k\mu+\mu)^2} \\ &\leq \frac{(k-1)Var(Y_2)}{(k-\eta k-k\mu)^2} \qquad (6.27)\\ &\leq \frac{kVar(X_2)}{k^2(1-\eta-\mu)^2} \\ &\leq \frac{E(X_2^2)}{k(1-\eta-\mu)^2}\end{aligned}$$

Έχουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}E(X_2^2) &= \int_0^{\eta k}t^2G^2(t)dt \\ &\leq \eta k\int_0^{\eta k}tG^2(t)dt \\ &< \eta k\end{aligned}$$

διότι $\mu < 1$. Αντικαθιστούμε αυτό το φράγμα στην (6.27) και λαμβάνουμε ότι

$$\mathbb{P}(X_2 + \cdots + X_k > k - \eta k) < \frac{\eta}{(1-\eta-\mu)^2}$$

Αντικαθιστούμε στην (6.26) και έχουμε το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας τώρα το φράγμα του παραπάνω λήμματος, καταλήγουμε για το $I_1(F)$ στην ανισότητα

$$I_1(F) \geq \frac{1}{k^{k+1}} \left(\int_0^{\eta k} G(u)du \right)^2 \left(1 - \frac{\eta}{(1-\eta-\mu)^2} \right) \tag{6.28}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.23) και (6.28) έχουμε

$$M_k(F) = k\frac{I_1(F)}{J(F)} \geq \left(\int_0^{\eta k} G(u)du \right)^2 \left(1 - \frac{\eta}{(1-\eta-\mu)^2} \right) \tag{6.29}$$

Ερχόμαστε στο σημείο αυτό να κάνουμε μία συγκεκριμένη επιλογή για την G. Επιλέγουμε

$$G(t) = \frac{c}{1+At}$$

όταν $t \in [0, \eta k]$ και μηδέν αλλού, με τις παραμέτρους c, A να επιτρέπουμε να εξαρτώνται από το k. Η απαίτηση (6.21) μας δίνει ότι

$$c^2 \;=\; A + \frac{1}{\eta k}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} \mu &= (A + \frac{1}{\eta k}) \int_0^{\eta k} \frac{t}{(1+At)^2} dt \\ &= \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{\eta k A^2} \right) \left(\log(1+\eta k A) - \frac{\eta k A}{1+\eta k A} \right) \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τώρα το η ώστε $1 + \eta k A = e^A$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A(e^A-1)} \right) \left(A - \frac{e^A-1}{e^A} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{A} + \frac{1}{e^A - 1} \end{aligned} \tag{6.30}$$

Έτσι, για την ποσότητα $(1-\eta-\mu)^2$ στην (6.29) έχουμε

$$1 - \eta - \mu \;=\; \frac{1}{A} - \frac{1}{e^A-1} - \frac{e^A-1}{kA} \tag{6.31}$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\eta k} G(u)du \right)^2 &= c^2 \left(\int_0^{\eta k} \frac{1}{1+Au} du \right)^2 \\ &= \left(A + \frac{1}{\eta k} \right) \frac{\log^2(1+\eta k A)}{A^2} \end{aligned}$$

Οπότε με βάση τη σχέση $1+\eta kA = e^A$ έχουμε

$$\left(\int_0^{\eta k} G(u)du\right)^2 = A + \frac{A}{e^A-1} \tag{6.32}$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (6.31) και (6.32) στην (6.29) και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_k(F) &\geq A\left(1+\frac{1}{e^A-1}\right)\left(1-\frac{A(e^A-1)}{k\left(1-A(e^A-1)^{-1}-(e^A-1)k^{-1}\right)^2}\right) \\ &= A\left(1-\frac{Ae^A}{k\left(1-A(e^A-1)^{-1}-(e^A-1)k^{-1}\right)^2}+\frac{1}{e^A-1}\right) \\ &\geq A\left(1-\frac{Ae^A/k}{\left(1-A(e^A-1)^{-1}-(e^A-1)k^{-1}\right)^2}\right) \end{aligned} \tag{6.33}$$

Κάνουμε τώρα την επιλογή $A = \log k - 2\log\log k$ και έχουμε ότι πρώτον,

$$\frac{Ae^A}{k} = \frac{A}{(\log k)^2} \tag{6.34}$$

και δεύτερον,

$$\begin{aligned} 1-\frac{A}{e^A-1}-\frac{e^A-1}{k} &> 1-\frac{A}{e^A-1}-\frac{e^A}{k} \\ &> 1-O\left(\frac{1}{(\log k)^2}\right) \end{aligned} \tag{6.35}$$

Επομένως έχουμε αρχικά ότι

$$\begin{aligned} 1-\eta-\mu &= \frac{1}{A}\left(1-\frac{A}{e^A-1}-\frac{e^A-1}{k}\right) \\ &> \frac{1}{A}\left(1-O\left(\frac{1}{(\log k)^2}\right)\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

συνεπώς η υπόθεση $\mu < 1-\eta$ ικανοποιείται, δοθέντος ότι το k είναι αρκετά μεγάλο. Αντικαθιστώντας τώρα την επιλογή μας για το A καθώς και τις εκτιμήσεις (6.34) και (6.35) στην (6.33), έχουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} M_k(F) &> A\left(1-\frac{A}{\left(1-O\left(\frac{1}{(\log k)^2}\right)\right)^2(\log k)^2}\right) \\ &> A - O(1) \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει ότι

$$M_k(F) > \log k - 2\log\log k - O(1).$$

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα Maynard-Tao.

Απόδειξη. (του θεωρήματος 25) Έστω ένας θετικός ακέραιος m. Θα δείξουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος $k(m)$, ώστε αν $k \geq k(m)$ για μία απόλυτη σταθερά C, τότε κάθε admissible $k-$άδα περιέχει πρώτη $(m+1)-$άδα. Έχουμε ότι για ένα $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \left(\frac{\theta}{2}-\epsilon\right)M_k(F) \\ &> \left(\frac{1}{4}-\epsilon\right)(\log k - 2\log\log k) + O(1) \end{aligned}$$

Επιλέγοντας τώρα $k \geq Cm^2e^{4m}$ καθώς και $\epsilon = \frac{1}{k}$ έχουμε ότι

$$\frac{S_2}{S_1} > \frac{1}{4}\left(\log C + 2\log m + 4m - 2\log\log Cm^2e^{4m}\right) + O(1) \tag{6.36}$$

Τώρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -\log\log Cm^2e^{4m} &> -\log\log C - \log\log e^{6m} \\ &= -\log\log C - \log m + O(1) \end{aligned}$$

επομένως στην (6.36) λαμβάνουμε

$$\frac{S_2}{S_1} > m + \frac{\log C - 2\log\log C}{4} + C_1$$

με την C_1 να είναι απόλυτη σταθερά. Επιλέγοντας λοιπον το C ώστε

$$\frac{\log C - 2\log\log C}{4} + C_1 > 0$$

καταλήγουμε ότι

$$\frac{S_2}{S_1} > m$$

δηλαδή μία οποιαδήποτε admissible $k-$άδα περιέχει τουλάχιστον $m+1$ πρώτους (και θέτουμε $k(m) = \lceil Cm^2e^{4m}\rceil$). Μάλιστα, αν θεωρήσουμε την $k-$άδα

$$\mathcal{H} = \{p_{\pi(k)+1}, \ldots, p_{\pi(k)+k}\}$$

που αποτελείται από τους πρώτους k πρώτους μετά το k, έχουμε ότι είναι admissible, καθώς αν $p > k$ τα υπόλοιπα $\mod p$ είναι περισσότερα από k (που είναι το πλήθος των στοιχείων της $\mathcal{H}$) οπότε δεν καταλαμβάνονται όλα, ενώ αν $p \leq k$ τότε το υπόλοιπο $0 \mod p$ προφανώς δεν εμφανίζεται. Έπεται ότι η παραπάνω $k-$άδα περιέχει πρώτη $(m+1)-$άδα με διάμετρο

$$\begin{aligned} p_{\pi(k)+k} - p_{\pi(k)+1} &\ll p_{2k} \\ &\ll k\log k \\ &\ll m^3e^{4m} \end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+m} - p_n) < Dm^3e^{4m}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά D. □

Τον Ιούλιο του 2014, μερικούς μήνες μετά την δουλειά των Zhang και Maynard, η ομάδα Polymath στο [16] εργάστηκε στο πνεύμα των ιδεών του Maynard που παρουσιάσαμε, και βελτίωσε σημαντικά τα άνω φράγματα που έχουμε αναφέρει. Συγκεκριμένα, απέδειξαν μεταξύ άλλων το εξής Θεώρημα

Θεώρημα 26. ***(Polymath)*** *Έστω p_n η ακολουθία των πρώτων αριθμών. Ισχύει ότι*

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq 246 \tag{6.37}$$

Ενώ με την υπόθεση ότι ισχύει η εικασία Elliott-Halberstam, έχουμε

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq 6 \tag{6.38}$$

Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι στην ίδια εργασία τους, λαμβάνοντας υπόψιν το λεγόμενο "Parity problem" της θεωρίας κοσκίνων (την αδυναμία δηλαδή των μεθόδων κοσκινίσματος να διακρίνουν μεταξύ ακεραίων με περιττό ή άρτιο πλήθος πρώτων διαιρετών) εξηγούν ότι ακόμα και με την υπόθεση ότι $\theta = 1$, δεν είναι εφικτό ένα μικρότερο άνω φράγμα από το (6.38), με μόνη τη χρήση μεθόδων κοσκινίσματος.

Βιβλιογραφία

[1] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[2] A. C. Cojocaru and M. R. Murty, *An Introduction to Sieve Methods and Their Applications.* Cambridge University Press, 2005.

[3] H. Davenport, *Multiplicative number theory.* 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 74, Springer-Verlag, New York, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.

[4] K. Ford, *SIEVE METHODS LECTURE NOTES, SPRING 2023, University of Illinois Urbana-Champaign.*

[5] J. Friedlander and A. Granville, *Limitations to the Equi-Distribution of Primes I.* Annals of Math., 2nd Ser., Vol. 129, No. 2. (Mar., 1989), pp. 363–382.

[6] P. X. Gallagher, *On the distribution of primes in short intervals.* Mathematika , Volume 23 , Issue 1 , June 1976 , pp. 4–9

[7] D. A. Goldston and C. Y. Yildirim, *Higher correlations of divisor sums related to primes. III. Small gaps between primes.* Proc. Lond. Math. Soc. 95 (2007), 653–686.

[8] D. A. Goldston, J. Pintz, and C. Y. Yildirim, *Primes in tuples. I.* Ann. of Math. 170 (2009), 819–862.

[9] D. A. Goldston, S. W. Graham, J. Pintz, and C. Y. Yildirim, *Small Gaps between Primes or Almost Primes.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 361, No. 10 (Oct., 2009), pp. 5285–5330.

[10] A. Granville, *Primes in intervals of bounded length.* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Vol. 52, Number 2, April 2015, Pages 171–222.

[11] H. Halberstam and H. E. Richert, *Sieve Methods.* Dover Books on Mathematics, 2011.

[12] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004

[13] D. Koukoulopoulos, *The Distribution of Prime Numbers.* Graduate Studies in Mathematics, 203. American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.

[14] J. Maynard, *Small gaps between primes.* Ann. of Math. (2) 181 (2015), no. 1, 383–413.

[15] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory.* Cambridge University Press, 2010.

[16] D. H. J. Polymath, *Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes.* Res. Math. Sci. 1 (2014), Art. 12, 83.

[17] Y. Zhang, *Bounded gaps between primes.* Ann. of Math. (2) 179 (2014), no. 3, 1121–1174.

[18] Α. Γιαννόπουλος, *Αναλυτική Θεωρία Αριθμών (Πρόχειρες σημειώσεις)*, Αθήνα, 2022, http://users.uoa.gr/~apgiannop/notes-analytic-number-theory-2022.pdf

[19] Α. Γιαννόπουλος, *Αρμονική Ανάλυση (Πρόχειρες σημειώσεις)*, Αθήνα, 2022, http://users.uoa.gr/~apgiannop/notes-harmonic-analysis-2022.pdf