Uniformization Αλγεβρικών Καμπύλων

Καρανικολόπουλος Σωτήρης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Ιούνιος 2005

Καλυπτικές Απεικονίσεις

$\updownarrow$

Επιφάνειες Riemann

$\downarrow$

Fuchsian ομάδες

- Αν μία ομάδα δρα evenly στον χώρο Y, τότε η φυσική προβολή $p : Y \to Y/G$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση.
- Κάθε καλυπτική απεικόνιση $p : Y \to X$, που προέρχεται από μία even δράση μίας ομάδας G σε έναν χώρο Y ονομάζεται G-καλυπτική απεικόνιση και ο χώρος Y G-καλυπτικός χώρος.

• Ένας ομομορφισμός του καλυπτικού χώρου (Y_1, y_1) στον καλυπτικό χώρο (Y_2, y_2) είναι μία συνεχής απεικόνιση $\varphi : Y_1 \to Y_2$ τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} (Y_1, y_1) & \xrightarrow{\varphi} & (Y_2, y_2) \\ & p_1 \searrow \quad \swarrow p_2 & \\ & (X, x) & \end{array}$$

• Αν η φ είναι ένας ομοιομορφισμός των τοπολογικών χώρων Y_1 και Y_2, τότε προκύπτει ένας ισομορφισμός καλυπτικών χώρων. Σε αυτήν την περίπτωση οι καλυπτικοί χώροι ονομάζονται ισόμορφοι (ή ισοδύναμοι).

• Για κάθε υποομάδα H του $\pi_1(X, x)$ υπάρχει ένα συνεκτικό κάλυμμα: $p_H : (Y_H, y_H) \to (X, x)$, με $y_H \in p^{-1}(x)$, έτσι ώστε η εικόνα του $\pi_1(Y_H, y_H)$ στην $\pi_1(X, x)$, μέσω της p_{H_*} να είναι η υποομάδα H. Κάθε άλλο τέτοιο κάλυμμα (ως προς την επιλογή βάσης) είναι ισόμορφο με αυτό.

• Αν K είναι μία άλλη υποομάδα του $\pi_1(X, x)$, που περιέχει το H, υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $p_{H,K} : (Y_H, y_H) \to (Y_K, y_K)$ που είναι συμβατή με τις προβολές στον X. Αυτή είναι καλυπτική απεικόνιση και αν $H \lhd K$, τότε είναι ένα G-κάλυμμα με $G = K/H$.

• Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ όλων των υποομάδων H της $\pi_1(X,x)$ και όλων των καλυπτικών κλάσεων $[p_H : (Y_H, y_H) \to (X,x)]$. Δηλαδή:

$$H = p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \longleftrightarrow [p_H : (Y_H, y_H) \to (X,x)].$$

Θα έχουμε την εξής αντιστοιχία:

$$\begin{array}{ccccc}
(\tilde{X}, \tilde{x}) & \leftrightarrow & \{e\} & = & Aut(\tilde{X}/\tilde{X}) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(Y_H, y_H) & \leftrightarrow & H & = & Aut(\tilde{X}/H) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(Y_K, y_K) & \leftrightarrow & K & = & Aut(\tilde{X}/K) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(X, x) & \leftrightarrow & G & = & Aut(\tilde{X}/X)
\end{array}$$

Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois

Έστω F μία πεπερασμένου βαθμού επέκταση Galois επί του K, με ομάδα Galois την $G = Gal(F/K)$, $K = F^G$ και E ενδιάμεσο σώμα, δηλαδή $K \subset E \subset F$. Τότε υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ: όλων των ενδιάμεσων σωμάτων της επέκτασης και όλων των υποομάδων της G, που δίνεται από την $E \mapsto Gal(F/E)$,
$\big(H \mapsto [p_H : (Y_H, y_H) \to (X, x)],$ με $H < \pi_1(X, x)\big)$ έτσι ώστε:

1. Ο βαθμός της σχετικής επέκτασης δύο ενδιάμεσων σωμάτων είναι ίσος με τον σχετικό δείκτη των αντίστοιχων υποομάδων της G. Συγκεκριμένα η $Gal(F/K)$, έχει τάξη $[F : K]$.

2. Η F είναι μία Galois επέκταση επί κάθε ενδιάμεσου σώματος E, αλλά το E είναι Galois επέκταση επί του K ανν η αντίστοιχη υποομάδα Galois: $Gal(F/E)$ είναι μία κανονική υποομάδα της G. Σ' αυτήν την περίπτωση θα έχουμε:

$$Gal(F/K)/Gal(F/E) \cong Gal(E/K).$$

$$\big(Aut(\tilde{X}/Y_K)/Aut(\tilde{X}/Y_H) \cong Aut(Y_H/Y_K) \cong K/H.\big)$$

$$
\begin{array}{ccc}
F & \longleftrightarrow & 1 \\
\cup & & \wedge \\
M & \longleftrightarrow & Gal(F/M) \\
\cup & & \wedge \\
L & \longleftrightarrow & Gal(F/L) \\
\cup & & \wedge \\
K & \longleftrightarrow & Gal(F/K) = G
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
(\tilde{X}, \tilde{x}) & \leftrightarrow & \{e\} & = & Aut(\tilde{X}/\tilde{X}) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(Y_H, y_H) & \leftrightarrow & H & = & Aut(\tilde{X}/H) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(Y_K, y_K) & \leftrightarrow & K & = & Aut(\tilde{X}/K) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(X, x) & \leftrightarrow & G & = & Aut(\tilde{X}/X)
\end{array}
$$

Σχήμα 1: Ενδιάμεσα σώματα μίας Galois επέκτασης **vs** ενδιάμεσων καλυπτικών απεικονίσεων

Επιφάνειες Riemann

Μία συνεκτική επιφάνεια Riemann X είναι μία (λεία) 2-πολλαπλότητα, μαζί με μία μιγαδική αναλυτική δομή στον X:

- Είναι μία *επιφάνεια*, δηλαδή ένας Hausdorff τοπολογικός τοπολογικός χώρος X με μία αριθμήσιμη βάση έτσι ώστε: για κάθε $x \in X$ να υπάρχει ανοικτή περιοχή του U_x, με U_x να είναι ομοιομορφική με ένα V, που είναι ανοικτό του $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

- Ο X είναι εφοδιασμένος με ένα ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, όπου U_α είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και φ_α μία συλλογή από ομοιομορφισμούς: $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset X$, για κάθε δείκτη $\alpha \in I$ (ο φ_α είναι μία εμφύτευση του U_α στον X.). Την συλλογή $\{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$ την ονομάζουμε χάρτη (chart, coordinate chart) και το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ συντεταγμενική περιοχή (coordinate neighborhood.).

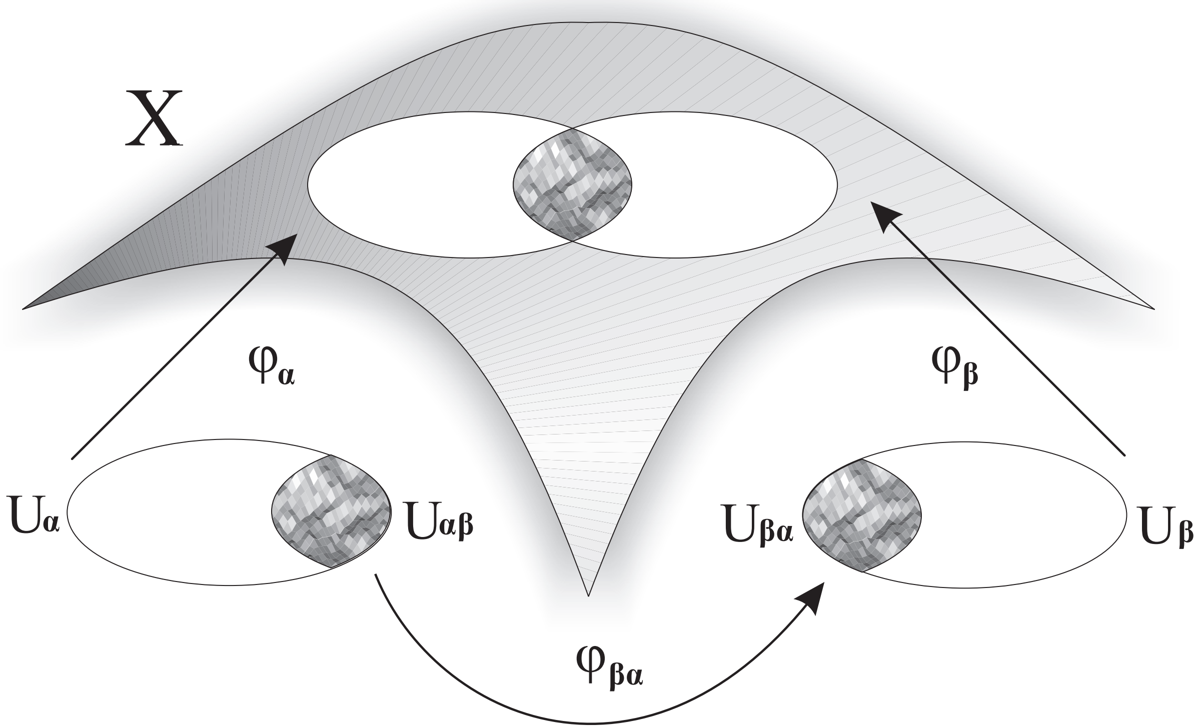
- Ο τοπολογικός χώρος X καλύπτεται από αυτές τις περιοχές, δηλαδή ισχύει $X = \cup \varphi_\alpha(U_\alpha)$, με $\alpha \in \mathbb{N}$.

- Αν $U_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$, ορίζουμε τις απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων να είναι $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$ ή

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

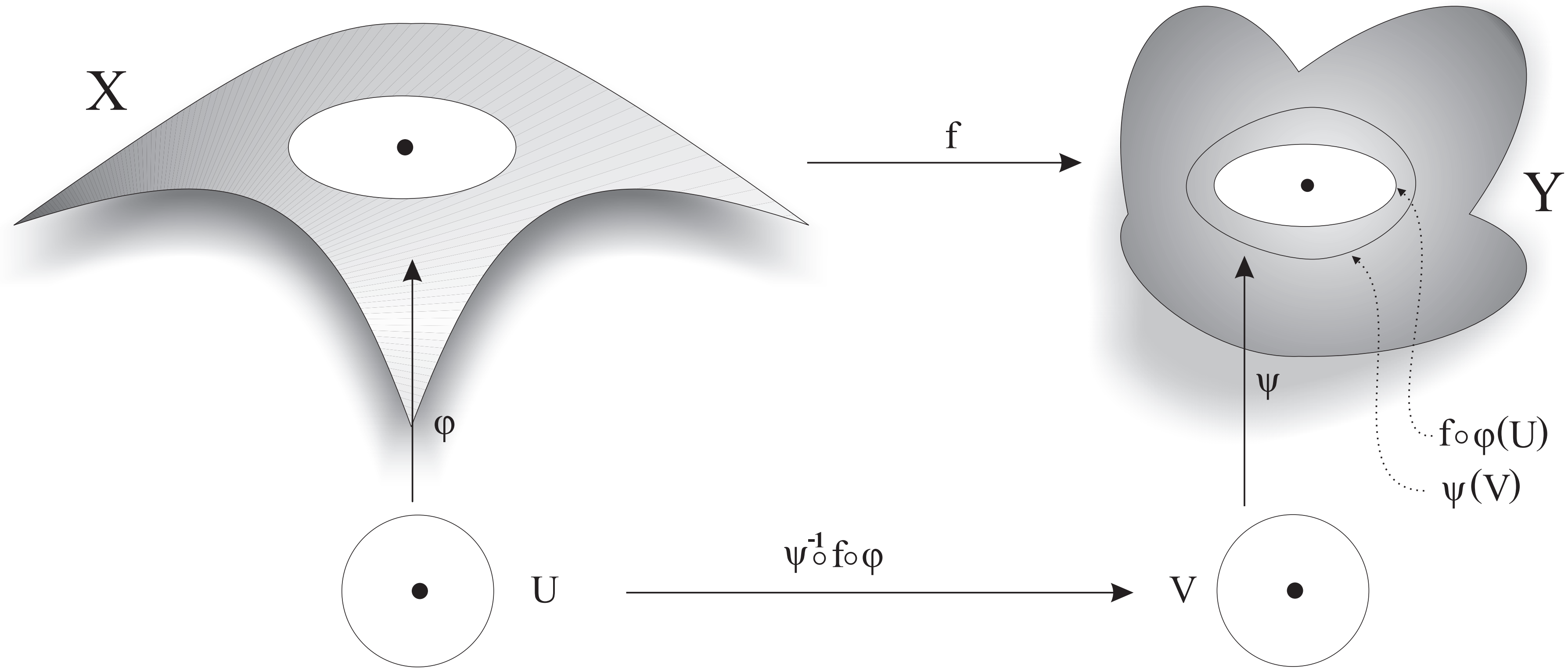
με $U_{\alpha\beta} \cong U_{\beta\alpha}$ και απαιτούμε να είναι αναλυτικές *για κάθε* δείκτες α, β. Οι $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, ονομάζονται αναλυτικά ισοδύναμες συντεταγμενικές περιοχές.

Η μιγαδική δομή σε μία επιφάνεια Riemann



• Αν X, Y είναι επιφάνειες Riemann, μία απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι αναλυτική σε ένα $P \in X$, αν υπάρχουν συντεταγμενικές περιοχές: $\varphi : U \to X$ και $\psi : V \to Y$ που απεικονίζονται σε γειτονιές του P και του $f(P)$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$, και η σύνθεση $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ να είναι μία αναλυτική απεικόνιση από το U στο V.

Αναλυτική απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann



Έστω X επιφάνεια Riemann. Η f είναι μία μερόμορφη συνάρτηση στον X αν $f : X \setminus S \to \mathbb{C}$ με $S \subset X$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση έτσι ώστε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Το S να είναι ένα διακριτό σύνολο, δηλαδή να περιέχει μόνο μεμονωμένα σημεία: αν $p \in S$, υπάρχει $D(p, R), R > 0$ έτσι ώστε $D(p, R) \cap S = \{p\}$.
2. Για κάθε $p \in S$ έχω
$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$$

• Τα σημεία του S ονομάζονται πόλοι της f και το σύνολο των μερόμορφων συναρτήσεων στον X συμβολίζεται με $\mathcal{M}(X)$.
• Ισοδύναμα μπορούμε να φανταστούμε τις μερόμορφες απεικονίσεις f στον χώρο X, σαν αναλυτικές απεικονίσεις στην σφαίρα $f : X \to S^2$

• Έστω Y, X επιφάνειες Riemann και f είναι μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση μεταξύ αυτών των επιφανειών $f : Y \to X$. Ένα σημείο $P \in Y$ ονομάζεται σημείο διακλάδωσης (ramification point) της f αν δεν υπάρχει γειτονιά του V του P έτσι ώστε η $f|_V$ είναι 1-1.

• Έστω $f : X \to Y$ μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση και X, Y να είναι συμπαγείς επιφάνειες Riemann. Τότε:

1. $|R| < \infty$ με $R \subset X$ το σύνολο των σημείων διακλάδωσης και $S = f(R) \subset Y$.
2. Η απεικόνιση $X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση n-φύλλων. Ονομάζουμε τον ακέραιο n βαθμό (degree) της αναλυτικής f και το συμβολίζουμε με $n := degf$. Αυτός είναι το άθροισμα του πλήθους των αντίστροφων εικόνων ενός γνωστού $q \in Y$ μετρημένης της πολλαπλότητας της f σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία, δηλαδή:
3. Για κάθε $q \in Y$ ισχύει:

$$\sum_{P \in f^{-1}(q)} e_f(P) = n.$$

Αντιστρόφως:

• Έστω Y επιφάνεια Riemann, S ένα πεπερασμένο υποσύνολο του Y και $p : X' \to Y \setminus S$ μία καλυπτική απεικόνιση e φύλλων με X' να είναι συνεκτικός. Μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον X' σαν ένα ανοικτό υποσύνολο μίας επιφάνειας Riemann X: $X' \hookrightarrow X$ με $X = X' \cup$ ένα πεπερασμένο σύνολο έτσι ώστε η p να μπορεί να επεκταθεί σε μία *proper*, αναλυτική συνάρτηση μεταξύ επιφανειών Riemann $f : X \to Y$.

Επιφάνειες Riemann και Αλγεβρικές Καμπύλες

• Έστω $F(z,w)$ όχι σταθερό, ανάγωγο πολυώνυμο δύο μεταβλητών με μιγαδικούς συντελεστές. Το σύνολο των ριζών του:

$$C = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \; F(z,w) = 0\}$$

ονομάζεται «μιγαδική αφινική καμπύλη στο επίπεδο».

• Θεωρούμε την πρώτη προβολή $\pi_1 : C \to \mathbb{C}$ με $\pi_1(z,w) = z$.

• Αφαιρώντας κάποιο πεπερασμένο αριθμό σημείων τότε η π_1 γίνεται μία τοπολογική καλυπτική απεικόνιση. Πράγματι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων, $S \subset \mathbb{C}$ έτσι ώστε η προβολή $p : C \setminus \pi_1^{-1}(S) \to \mathbb{C} \setminus S$ να είναι μία πεπερασμένων φύλλων καλυπτική απεικόνιση.

• $p : C \setminus \pi_1^{-1}(S) \to S^2 \setminus S \cup \{\infty\}$.

Συνοψίζοντας:

• Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $F(z,w) \in \mathbb{C}[Z,W]$ επάγει μία καλυπτική απεικόνιση $p : C \setminus \pi_1^{-1}(S) \to \mathbb{C} \setminus S$ με C το αλγεβρικό σύνολο μηδενισμού του F και S πεπερασμένο σύνολο. Αυτή η απεικόνιση με την σειρά της επεκτείνεται σε μία αναλυτική και proper απεικόνιση $f : X \to S^2$, με X να είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann και $f \in \mathcal{M}(X)$. Αυτή η επιφάνεια Riemann ονομάζεται *η επιφάνεια Riemann της αλγεβρικής καμπύλης* C ή του πολυωνύμου F.

•Αν X είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann και $\mathcal{M}(X)$ το σώμα μερόμορφων συναρτήσεων τότε $tr.d_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(X) = 1$.

•Κάθε συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια Riemann είναι η επιφάνεια Riemann μίας αλγεβρικής καμπύλης.

• Κάθε deck tranformation στο τοπολογικό κάλυμμα επάγει έναν deck tranformation στο αναλυτικό κάλυμμα.
• Κάθε αναλυτικός deck transformation $\sigma : Y \to Y$ του Y επί του X επάγει έναν αυτομορφισμό $f \mapsto \sigma f := f \circ \sigma^{-1}$ του $\mathcal{M}(Y) = L$, που αφήνει σταθερό το σώμα $\mathcal{M}(X) = K$ με την απεικόνιση:

$$Aut(Y/X) \to Gal(L/K)$$

όπως αυτή ορίστηκε, να είναι ένας ισομορφισμός ομάδων. Τέλος ο καλυπτικός χώρος είναι κανονικός, με την έννοια ότι το τοπολογικό κάλυμμα που επάγει είναι κανονικό, αν η επέκταση είναι Galois.
• Εφαρμογή στο αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois.

Fuchsian Ομάδες Πρώτου Είδους

Uniformization θεώρημα για επιφάνειες Riemann

Ο καθολικός καλυπτικός χώρος $\tilde{X}$, μιας επιφάνειας Riemann X, είναι (σύμμορφος) είτε ο $\mathbb{C}$, είτε η σφαίρα του Riemann, είτε ο μοναδιαίος ανοικτός μιγαδικός δίσκος D.

• Μία τοπολογική ομάδα (G, m, τ) είναι ένας τοπολογικός χώρος (G, τ) που έχει δομή ομάδας (G, m), με G να είναι ένα σύνολο, τ, μία τοπολογία και m να δηλώνει την (πολλαπλασιαστική) πράξη της ομάδας, έτσι ώστε οι συναρτήσεις:

$$G \times G \to G \text{ με τύπο } x \times y \mapsto x \cdot y$$

$$G \to G, \text{ με τύπο } x \mapsto x^{-1},$$

να είναι συνεχείς συναρτήσεις. Μία τελική προϋπόθεση είναι το μονοσύνολο που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας $\{id_G\}$, να είναι κλειστό, έτσι ώστε $G \setminus \{id_G\} \in \tau$.

• Λέμε ότι η G δρα συνεχώς (ή ότι είναι *μία ομάδα μετασχηματισμών*) στον S αν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση

$$G \times S \to S \text{ με τύπο } \; S \ni (g, s) \mapsto g \cdot s \in S,$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

1. $(ab)s = a(bs)$ για $a, b \in G$ και $s \in S$,
2. $id_G s = s \; \forall s \in S$.

Ταξινόμηση των γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών στον $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Έστω $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ και $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Θέτουμε

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

$$(i) \ \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \ (ii) \ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \text{ με } \lambda \neq \mu.$$

Γι άυτόν τον λόγο ο μετασχηματισμός είναι ένας από τους δύο:

$(i)\ z \mapsto z + \lambda^{-1},\ (ii)\ z \mapsto cz,\ c \neq 1.$

Στην πρώτη περίπτωση καλούμε το σ *παραβολικό*. Στην δεύτερη περίπτωση το σ ονομάζεται *ελλειπτικό* αν $|c| = 1$ και *υπερβολικό* αν $c \in \mathbb{R}^+$. Διαφορετικά το σ καλείται *λοξοδομικό*. Ο ορισμός αυτός ισχύει τόσο για τους μετασχηματισμούς όσο και για τους πίνακες.

Ταξινόμηση με το ίχνος:

Αν $\sigma \in GL_2(\mathbb{C}) \setminus \{\pm I\}$, τότε:

- το σ είναι παραβολικό αν και μόνον αν το $tr(\sigma) = \pm 2$,
- το σ είναι ελλειπτικό αν και μόνον αν το $tr(\sigma)$ είναι πραγματικό και $|tr(\sigma)| < 2$,
- το σ είναι υπερβολικό αν και μόνον αν το $tr(\sigma)$ είναι πραγματικό και $|tr(\sigma)| > 2$,
- το σ είναι λοξοδρομικό αν και μόνον αν το $tr(\sigma)$ δεν είναι πραγματικό.

Ταξινόμηση με τα σταθερά σημεία:

Αν $\sigma \in GL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I\}$, τότε:

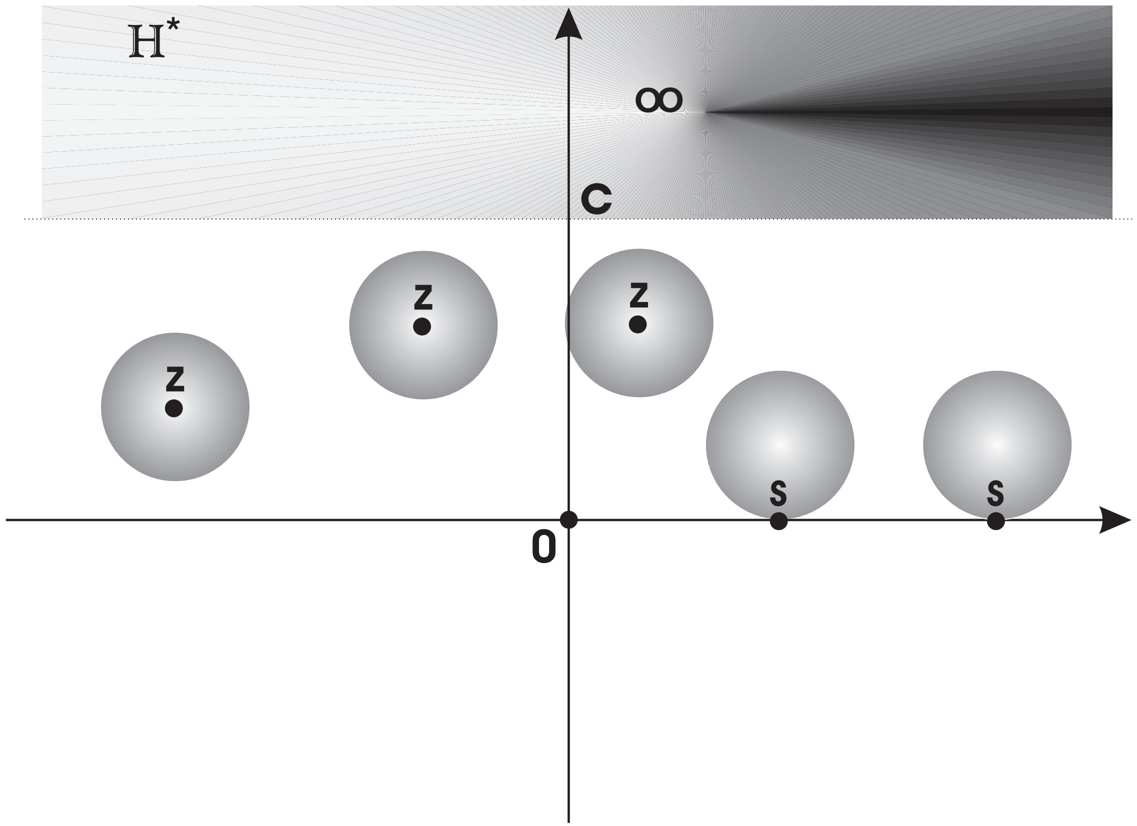
- το σ είναι παραβολικό αν και μόνον αν έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ και κανένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}$,
- το σ είναι ελλειπτικό αν και μόνον αν έχει ένα σταθερό σημείο $z \in \mathbb{H}$ και κανένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$,
- το σ είναι υπερβολικό αν και μόνον αν έχει δύο (διαφορετικά) σταθερά σημεία στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ και κανένα στον $\mathbb{H}$.

• Έστω Γ να είναι μία διακριτή υποομάδα του $SL_2(\mathbb{R})$. Ένα σημείο $z \in \mathbb{H}$ ονομάζεται *ελλειπτικό σταθερό σημείο* της Γ αν υπάρχει ένα ελλειπτικό στοιχείο $\sigma \in \Gamma$ τέτοιο ώστε $\sigma(z) = z$. Όμοια ένα σημείο $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ονομάζεται *cusp* του Γ αν υπάρχει υπάρχει παραβολικό στοιχείο $\tau \in \Gamma$, τέτοιο ώστε $\tau(s) = s$. Αν w είναι ένα cusp του Γ (αντίστοιχα ένα ελλειπτικό σταθερό σημείο), και $\gamma \in \Gamma$, τότε και το $\gamma(w)$ είναι επίσης cusp (ελλειπτικό σταθερό σημείο) του Γ.

• Αν το z είναι ένα ελλειπτικό σταθερό σημείο του Γ, τότε η $\{\gamma \in \Gamma : \ \gamma(z) = z\}$ είναι μία πεπερασμένη και κυκλική ομάδα.

• Έστω s να είναι ένα cusp του Γ, και $\Gamma_s = \{\sigma \in \Gamma : \ \sigma(s) = s\}$. Τότε η $\Gamma_s/(\Gamma \cap \{\pm I_{2\times 2}\})$ είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}$. Επίσης κάθε στοιχείο του Γ_s είναι το $\pm I_{2\times 2}$ ή είναι παραβολικό, δηλαδή $\Gamma_s = \Gamma \cap P(s)$.

• Ορίζουμε $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \text{cusps}$.



Σχήμα 2: Μία τοπολογία για τον $\mathbb{H}^*$.

H Modular Ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$

- Τα cusps της $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ είναι ακριβώς τα σημεία του $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.
- Τα ελλειπτικά σταθερά σημεία της $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ είναι
- το i, που είναι το σταθερό σημείο του $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
- το $-\bar{\rho} = \exp(2\pi i/6)$, που είναι το σταθερό σημείο του $\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
- το $\rho = \exp(2\pi i/3)$, που είναι το σταθερό σημείο του τ^2.
- Η $SL_2(\mathbb{R})$ δρα στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ενώ δρα μεταβατικά στον $\mathbb{H}$.

Θεμελιώδης περιοχή

Για κάθε διακριτή υπομάδα Γ της $SL_2(\mathbb{R})$, ονομάζουμε θεμελιώδης περιοχή (fundamental domain) του $\mathbb{H}/\Gamma$ (ή πιο απλά του Γ) αν:

- ο F είναι ένα συνεκτικό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{H}$,
- οποιαδήποτε δύο σημεία του F δεν είναι Γ-ισοδύναμα,
- κάθε σημείο του $\mathbb{H}$ είναι Γ-ισοδύναμο με ένα σημείο που ανήκει στην κλειστότητα του F.

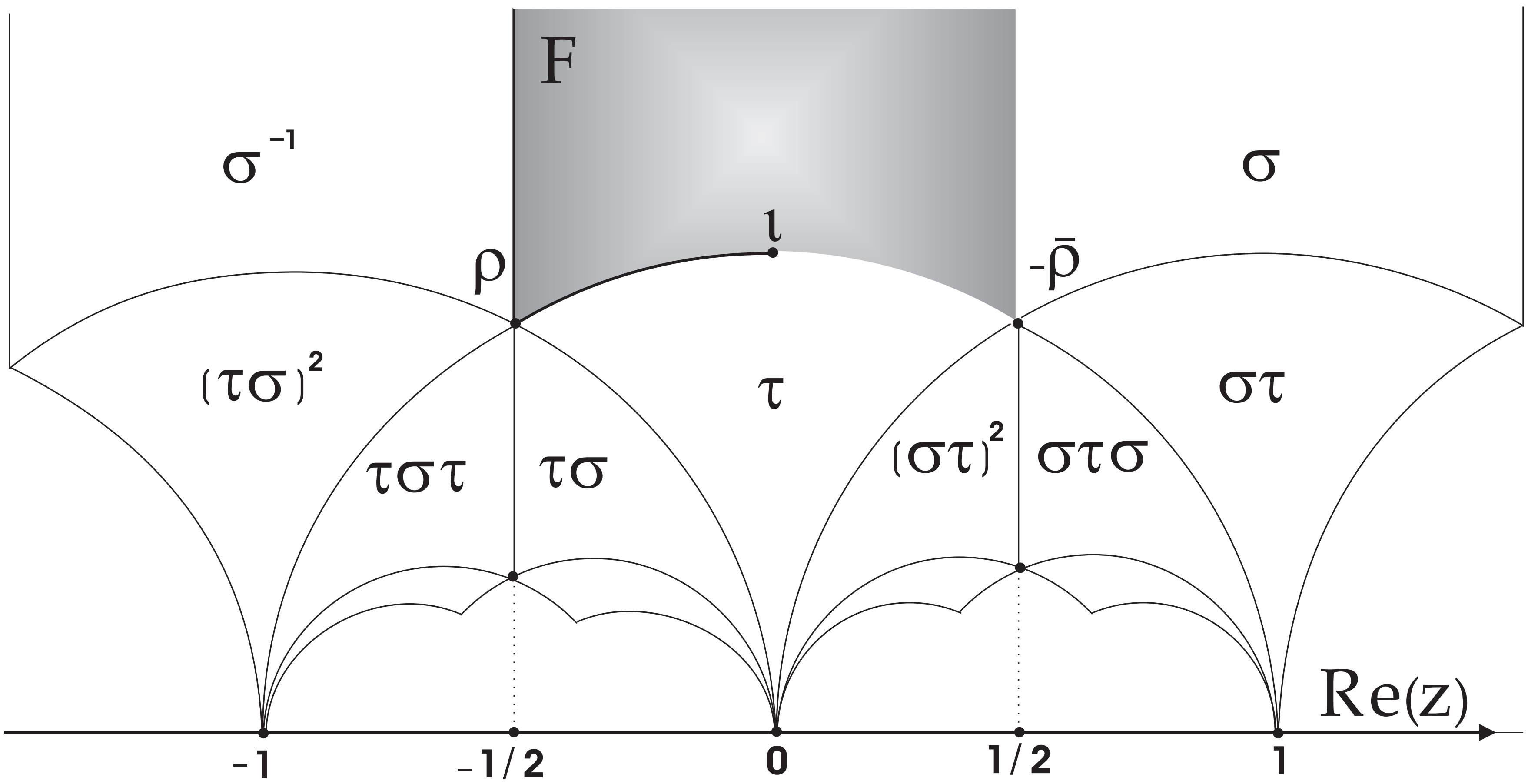
- Η modular ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$ γεννάται από τα στοιχεία:

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Για κάθε $z \in \bar{F}$ και $\Gamma_z = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \ \gamma z = z\}$, θα έχω

$$\Gamma_z = \begin{cases} \{I_{2\times 2}, \tau\}, & \text{για } z = i, \\ \{I_{2\times 2}, \tau\sigma, (\tau\sigma)^2\}, & \text{για } z = \rho = \exp(2\pi i/3), \\ \{I_{2\times 2}, \sigma\tau, (\sigma\tau)^2\}, & \text{για } z = -\bar{\rho} = \exp(2\pi i/6), \\ \{I_{2\times 2}\}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Μία θεμελιώδη περιοχή για την modular ομάδα και κάποιες δράσεις των στοιχείων της $SL_2(\mathbb{Z})$ στην F.



$$\mathbb{H}^*/\Gamma = \mathbb{H}/\Gamma \cup \{\infty\}, \text{ με } \mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}),$$

• Ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ αποτελεί *την συμπαγοποίηση του ενός σημείου του* $\mathbb{H}/\Gamma$, καθώς ο $\mathbb{H}/\Gamma$ είναι ένας Hausdorff και τοπικά συμπαγής χώρος.

• Ο χώρος $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι Hausdorff.

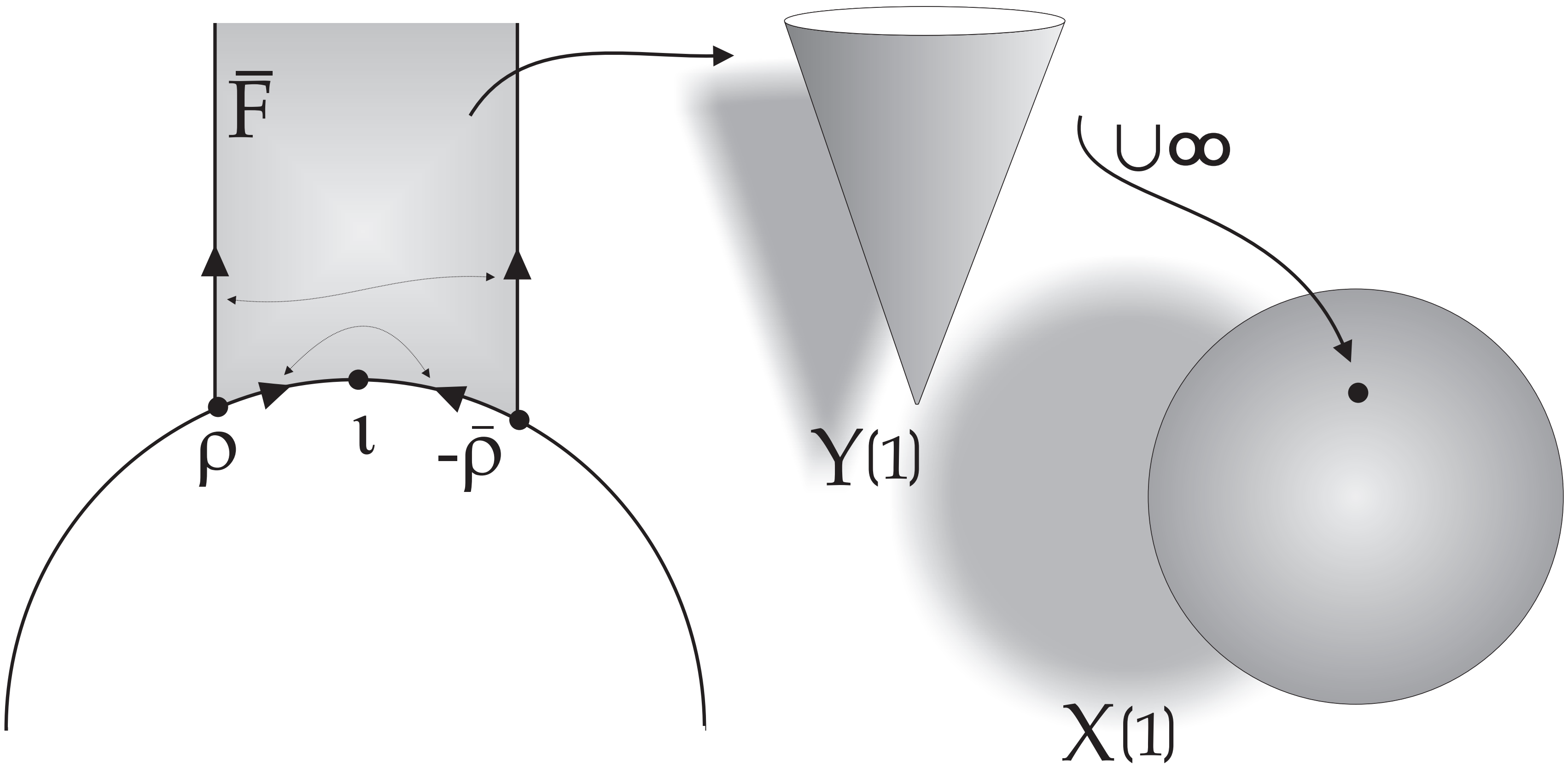
• Τον εφοδιάζουμε με την μιγαδική αναλυτική δομή για να προκύψει μία συμπαγής επιφάνεια Riemann.

• Βλέπουμε τις Fuschian ομάδα πρώτου είδους.

• Μία Fuchsian ομάδα πρώτου είδους καλείται μία διακριτή υποομάδα Γ του $SL_2(\mathbb{R})$ (ή του $PSL_2(\mathbb{R})$), τέτοια ώστε ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ να είναι συμπαγής.

• Αντιστοιχούμε στην συμπαγή επιφάνεια την αλγεβρική της καμπύλη $X(1)$.

Η γεωμετρία του $Y(1)$ και του $X(1)$



Modular συναρτήσεις

• Μελέτη μερόμορφων συναρτήσεων

• Μία συνάρτηση f ονομάζεται modular συνάρτηση ανν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$,
- για κάθε πίνακα $\gamma \in \Gamma(1)$ και $\tau \in \mathbb{H}$, ισχύει $f(\gamma\tau) = f(\tau)$, δηλαδή η f είναι $\Gamma(1)$-αναλλοίωτη,
- Η σειρά Laurent έχει μορφή:

$$\tilde{f}(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n \exp(2i\pi n\tau).$$

Uniformization Ελλειπτικών καμπύλων

• Ορίζουμε την modular αναλλοίωτο $j(\tau),\ \tau \in \mathbb{H}$ να είναι η συνάρτηση

$$j(\tau) = 1728\frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Δηλαδή η $j(\tau)$ είναι η j-αναλλοίωτος που αντιστοιχεί στην ελλειπτική καμπύλη με διακρίνουσα Δ:

$$E_{\Lambda_\tau} : y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$$

και η E_{Λ_τ} δέχεται παραμετρικοποίηση κάνοντας χρήση της $\wp$ συνάρτησης του Weierstrass:

$$\mathbb{C}/\Lambda_\tau \to E_{\Lambda_\tau}(\mathbb{C}),$$

$$z \mapsto \big(\wp(z;\Lambda_\tau), \wp'(z;\Lambda_\tau)\big).$$

• Η $j(\tau)$ είναι μία modular συνάρτηση και επάγει έναν (αναλυτικό) ισομορφισμό:

$$X(1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Έτσι, θα έχουμε ότι:

$$\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z}) \longleftrightarrow \mathbb{C},$$

$$\tau \longmapsto j(\tau).$$

• Γνωρίζοντας ότι δύο lattices $\Lambda_\tau, \Lambda_{\tau'} \subset \mathbb{C}$ είναι ομόθετα ανν υπάρχει $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \ \gamma(\tau) = \tau'$, ταυτίζουμε τον χώρο $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ με τον χώρο των lattices πάνω από τον $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z}) \longleftrightarrow \Lambda_\tau/\backsim \ \text{ με } \tau \longmapsto \Lambda_\tau.$$

• Όμως κάθε ελλειπτική καμπύλη πάνω από τον $\mathbb{C}$ αντιστοιχεί σε ένα lattice:

Uniformization θεώρημα για ελλειπτικές καμπύλες

• Ας θεωρήσουμε μία ελλειπτική καμπύλη πάνω από το $\mathbb{C}$:

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B$$

με $\Delta = 4A^3 - 27B^2 \neq 0$, με $A, B \in \mathbb{C}$. Τότε υπάρχει μοναδικό lattice $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$g_2(\Lambda) = 60G_4(\Lambda) = -4A \text{ και } g_3(\Lambda) = 140G_6(\Lambda) = -4B.$$

Η συνάρτηση

$$\mathbb{C}/\Lambda \to E : y^2 = x^3 + Ax + B,$$

$$z \mapsto \Big(\wp(z;\Lambda), \frac{1}{2}\wp'(z;\Lambda)\Big)$$

είναι μιγαδικός αναλυτικός ισομορφισμός.

• Βλέπουμε έτσι, τον χώρο $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ σαν τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας ελλειπτικών καμπύλων πάνω από το $\mathbb{C}$.

• Για $j_0 \neq 0, 1728$ η ελλειπτική καμπύλη με εξίσωση

$$y^2 + xy = x^3 - \frac{36}{j_0 - 1728}x - \frac{1}{j_0 - 1728}$$

έχει j-αναλλοίωτο ίση με j_0.

• Για $j = \infty$ οδηγούμαστε στην ιδιόμορφη καμπύλη με τύπο:

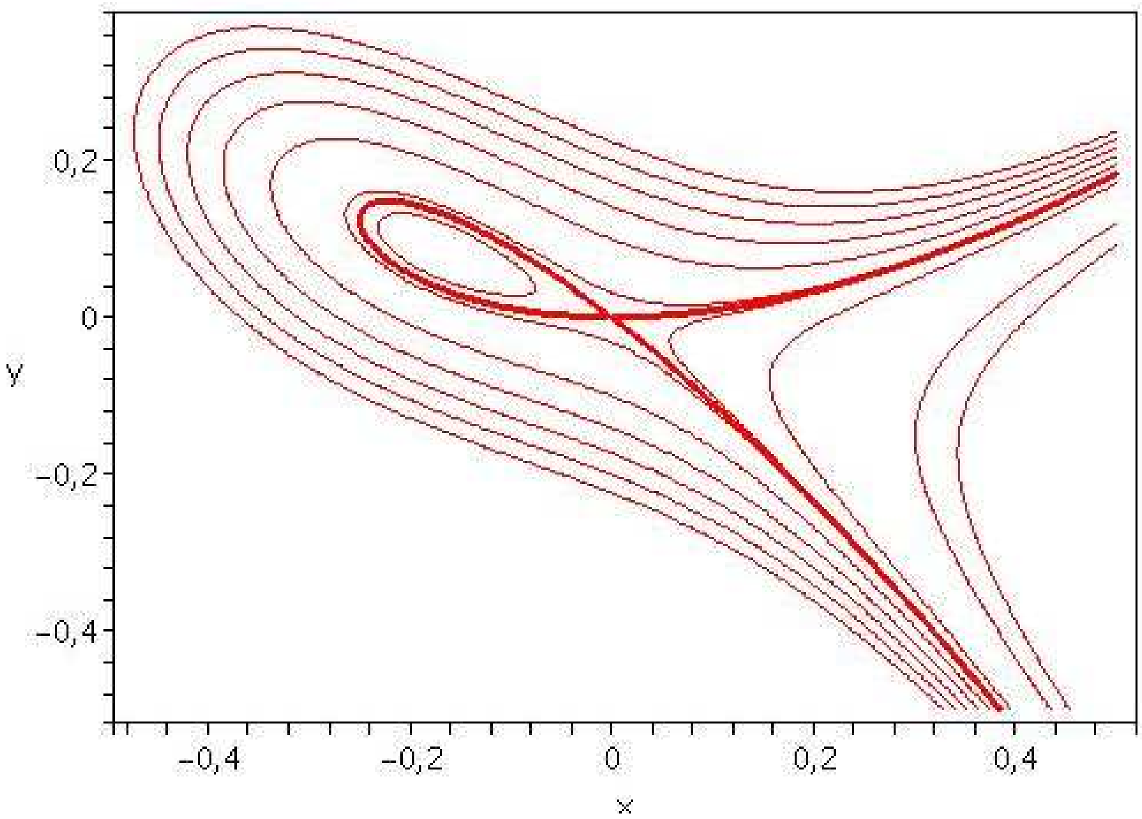
$$y^2 + xy = x^3, \tag{1}$$

• Είναι αδύνατη η συμπαγοποίηση του χώρου των ελλειπτικών καμπύλων χωρίς να συμπεριλάβουμε στον χώρο αυτό και ιδιόμορφες καμπύλες.

• Για παράδειγμα η:

$$y^2 + xy = x^3 + a,$$

συγκλίνει στην καμπύλη (1).



Σχήμα 3: Μια ακολουθία από ελλειπτικές καμπύλες που συγκλίνουν στην (1).