ΓΚΟΥΝΤΑΡΟΥΛΗΣ ΔΗΜΟΚΛΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ 3-MANIFOLDS

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος

Εισηγητης: Κοντογεώργης Αριστείδης

Επιτροπη

Κοντογεώργης Αριστείδης, Λέκτορας

Τσαπόγας Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Μεταφτσής Βασίλειος, Επίκουρος Καθηγητής

Στους γονείς μου!

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στις αρχές του 1960 οι D. Mumford και B. Mazur παρατήρησαν κάποιες εκπληκτικές αναλογίες μεταξύ των ιδιοτήτων των 3-πολλαπλοτήτων και των σωμάτων αριθμών. Αργότερα περισσότερες αναλογίες αναπτύχθηκαν στις εργασίες των Morishita, Ramachandran, Reznikov και Waldspurger και η θεωρία που περιέγραφε αυτές τις αναλογίες ονομάστηκε « Αριθμητική Τοπολογία ». Στην καρδιά αυτής της θεωρίας βρίσκεται ένα « λεξικό », το οποίο ονομάζουμε MKR λεξικό από τους Mazur, Kapranov και Reznikov, το οποίο αντιστοιχεί τις έννοιες τις τοπολογίας τριών διαστάσεων με αυτές της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών. Παρόλους τους περιορισμούς και τις αντιφάσεις του, το λεξικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταφράσει όρους και αποτελέσματα της μιας θεωρίας στην άλλη και αντιστρόφως, συχνά με εντυπωσιακή ακρίβεια. Το γιατί είναι δυνατή μια τέτοια μετάφραση δεν είναι ακόμη γνωστό. Σε αυτή την πτυχιακή θα προσπαθήσουμε, αρχικά, να παρουσιάσουμε μια βασική εκδοχή του MKR λεξικού.
Για να γίνει όμως αυτό πολλά και διάφορα εργαλεία των μαθηματικών είναι απαραίτητα. Διαφορική τοπολογία, Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών, Θεωρία Σχημάτων και Αλγεβρική Γεωμετρία είναι μερικά από αυτά. Για το λόγο αυτό η εργασία αυτή είναι χωρισμένη σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος είναι αφιερωμένο στη Διαφορική Τοπολογία και στην αναλογία που υπάρχει μεταξύ της θεωρίας Galois και σ' αυτή των καλυπτικών απεικονίσεων. Γίνεται αναφορά επίσης στις έννοιες της εφαπτόμενης δέσμης και του vector bundle. Στο δεύτερο μέρος μιλάμε για βασικά αποτελέσματα της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών καθώς επίσης γίνεται και μια εκτενής παρουσίαση της θεωρίας των σχημάτων και αυτής των sheaves. Η εργασία κλείνει με το τρίτο μέρος στο οποίο φαινομενικά ασύνδετες (στο μυαλό μου !) θεωρίες δένουν μεταξύ τους με αποτέλεσμα να καταλήγουμε στο προαναφερθέν λεξικό καθώς και σε κάποιες αναλογίες των πολλαπλοτήτων και των αλγεβρικών σωμάτων αριθμών.
Εδώ κρίνω σκόπιμο να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στο δάσκαλο μου τον Αριστείδη για τη βοήθεια, το μεράκι και το χρόνο που διέθεσε προσπαθόντας να με μάθει.

Δ. Γκουνταρούλης, Σάμος 2006.

Μέρoσ I

Στοιχεία Τοπολογίας. Η Αναλογία με τη Θεωρία Galois.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Διαφορικής Τοπολογίας

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε τις βασικές ιδέες της διαφορικής τοπολογίας: Διαφορίσιμες πολλαπλότητες, υποπολλαπλότητες και απεικονίσεις καθώς και ο εφαπτόμενος συναρτητής. Ο τελευταίος είναι σημαντικός σε πολλά προβλήματα της διαφορικής τοπολογίας καθώς δίνει πληροφορίες για την βαθύτερη δομή των πολλαπλοτήτων. Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποια θεωρήματα για τις υποπολλαπλότητες, τις απεικονίσεις, τα embeddings καθώς και τι είναι μια πολλαπλότητα με σύνορο. Τέλος θα αναφερθούμε στην έννοια του vector bundle και θα δούμε κάποια βασικά θεωρήματα σχετικά μ' αυτό.

1.1 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες.

Σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών μπορεί κάποιος να βρει χώρους οι οποίοι μπορούν να περιγραφούν τοπικά με n-άδες πραγματικών αριθμών. Τέτοια αντικείμενα καλούνται πολλαπλότητες (manifolds) : *Μια πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι τοπικά ομοιομορφικός με τον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε να φανταστούμε ότι μια πολλαπλότητα αποτελείται από κομμάτια του $\mathbb{R}^n$ « κολλημένα » μεταξύ τους με ομοιομορφισμούς. Αν αυτοί οι ομοιομορφισμοί επιλεχθούν να είναι διαφορίσιμοι, τότε αυτό που προκύπτει είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Σ' αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με διαφορίσιμες πολλαπλότητες.

Ορισμός 1.1.1. *Ένας τοπολογικός χώρος M θα λέγεται ότι είναι μια πολλαπλότητα αν είναι παρασυμπαγής, έχει την ιδιότητα Hausdorff και είναι τοπικά ομοιομορφικό με τον* $\mathbb{R}^n$.

Η έννοια της τοπικής ομοιομορφίας σημαίνει ότι υπάρχει ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ του M τέτοιο ώστε, $\forall i \in \Lambda$ να υπάρχει απεικόνιση $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ που απεικονίζει τα U_i ομοιομορφικά πάνω σ'ενα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

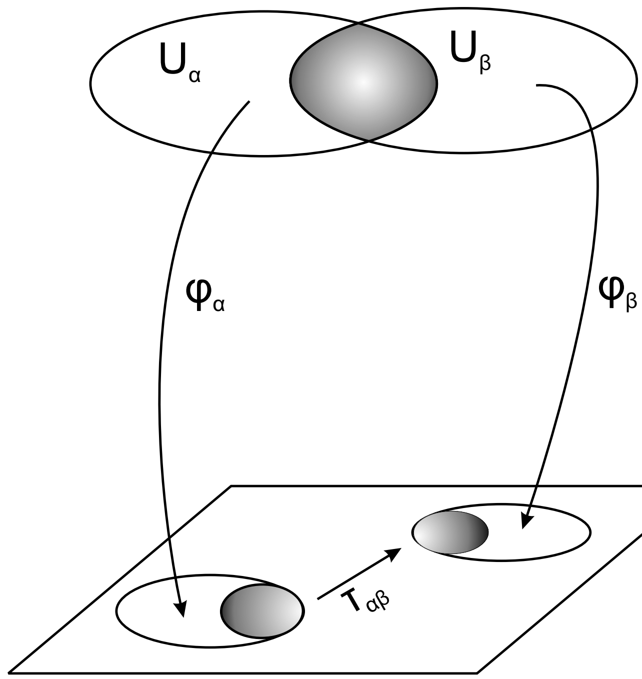
Ορισμός 1.1.2. *Ένας τοπολογικός χώρος θα λέγεται παρασυμπαγής αν κάθε ανοιχτό του κάλυμμα έχει τοπικά πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Τα (ϕ_i, U_i) τα ονομάζουμε *χάρτες* με πεδίο ορισμού τα U_i. Το σύνολο όλων των χαρτών $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i\in\Lambda}$ ονομάζεται *άτλας*.

Ορισμός 1.1.3. *Δύο χάρτες (ϕ_i, U_i), (ϕ_j, U_j) λέγεται ότι έχουν C^r-overlap αν η αλλαγή συντεταγμένων*

$$\phi_j\phi_i^{-1} : \phi(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

είναι C^r και η $\phi_i\phi_j^{-1}$ είναι επίσης C^r (Βλέπε σχ.1.1).



Σχήμα 1.1: C^r-overlap χαρτών.

Ένας άτλας Φ πάνω στην πολλαπλότητα M είναι C^r αν κάθε ζεύγος χαρτών έχει C^r-overlap. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει ένας μοναδικός μέγιστος C^r άτλας Ψ ο οποίος περιέχει τον Φ. Συγκεκριμένα ο Ψ είναι το σύνολο όλων των χαρτών που έχουν C^r-overlap με κάθε χάρτη στον Φ.

Ορισμός 1.1.4. *Ένας μέγιστος C^r χάρτης a πάνω σε μια πολλαπλότητα M είναι μια C^r διαφορίσιμη δομή· το ζεύγος (M, a) καλείται πολλαπλότητα κλάσης C^r. Μια πολλαπλότητα κλάσης ≥ 1 καλείται λεία.*

Για να προσδιορίσουμε μια C^r διαφορίσιμη δομή αρκεί να βρούμε έναν C^r άτλαντα που να περιέχεται μέσα σ' αυτή. Έτσι ο $\mathbb{R}^n$ έχει μια μοναδική C^r διαφορίσιμη δομή που περιέχει την ταυτοτική απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$. Πιο γενικά, κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ έχει μια μοναδική C^r διαφορίσιμη δομή που περιέχει την απεικόνιση εγκλεισμού $U \subset \mathbb{R}^n$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι a είναι μια C^s διαφορισιμή δομή πάνω στην πολλαπλότητα M και r είναι ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \leq r < s$. Εφόσον a είναι επίσης και ένας C^r άτλας, ανήκει σε μια μοναδική C^r διαφορίσιμη δομή πάνω στην M, η οποία προκύπτει αν προσθέσουμε στην α όλους τους χάρτες που έχουν C^r-overlap με κάθε χάρτη στην α. M' αυτόν τον τρόπο κάθε C^s πολλαπλότητα μπορεί να θεωρήθει και C^r πολλαπλότητα. (Για το αντίστροφο βλέπε [6], κεφάλαιο 2.)

Έστω (M, Φ) και (N, Ψ) δύο πολλαπλότητες. Μπορούμε να ορίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο τους $(M \times N, \Theta)$, όπου Θ είναι η διαφορίσιμη δομή που περιέχει όλους τους χάρτες της μορφής

$$(\phi \times \psi, U \times V) : (\phi, U) \in \Phi\,,\ (\psi, V) \in \Psi.$$

Η $\phi \times \psi$ απεικονίζει το $U \times V$ στο $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το $\mathbb{R}^{m+n}$.

Αν (M, Φ) είναι μια πολλαπλότητα και $W \subset M$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, η επαγόμενη διαφορίσιμη δομή στο W είναι

$$\Phi|_W = \{(\phi, U) \in \Phi : U \subset W\}$$

και η Φ είναι η μοναδική διαφορίσιμη δομή πάνω στην M που περιέχει κάθε Φ_i σαν υποσύνολο της.

Μια διαφορίσιμη δομή Φ στην πολλαπλότητα M συχνά μπορεί να προκύψει σαν την ένωση των διαφορικών μορφών Φ_i πάνω στα ανοιχτά U_i που καλύπτουν την M. Αυτό σημαίνει ότι

$$\Phi|_{U_i \cap U_j} = \Phi_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j.$$

Ορισμός 1.1.5. *Έστω M ένας τοπολογικός χώρος, (N,Φ) μια πολλαπλότητα και $h : M \to N$ ένας ομοιομορφισμός από τον χώρο M σ' ένα ανοιχτό υποσύνολο της N. Η επαγώμενη διαφορίσιμη δομή στο χώρο M είναι*

$$h^*\Phi = \{(\phi h, h^{-1}U) : (\phi, U) \in \Phi \quad \textit{και} \quad U \subset h(M)\}.$$

Παράδειγμα 1.1.6. *Η n -σφαίρα έχει την C^ω διαφορίσιμη δομή που ορίζεται από τον άτλαντα που περιγράφουμε στη συνέχεια.*

Έστω λοιπόν η n -σφαίρα

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\},$$

όπου $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right)^{1/2}$. *Για $i = 1, \ldots, n+1$ ορίζουμε τα ανοιχτά ημισφαίρια*

$$\begin{aligned} U_{2j-1} &= \{x \in S^n : x_j > 0\}, \\ U_{2j} &= \{x \in S^n : x_j < 0\}. \end{aligned}$$

Για $j = 1, \ldots, 2n+2$ ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n,$$

$$\phi_i(x) = (x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1}) \quad \textit{αν } i = 2j-1 \textit{ ή } 2j.$$

Αυτό σημαίνει πως η n-άδα προκύπτει από το x διαγράφοντας την j-οστή συντεταγμένη.
Εύκολα μπορούμε να δούμε πως οι ϕ_i απεκονίζουν ομοιομορφικά κάθε U_i στον ανοιχτό n-δίσκο $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$, καθώς επίσης και πως η $\phi_i^{-1} : B \to \mathbb{R}^{n+1}$ είναι αναλυτική.
Κάθε (ϕ_i, U_i) είναι ένας χάρτης για την S^n και το σύνολο όλων αυτών αποτελούν έναν άτλα για την S^n. Με βάση ότι έχουμε πει μέχρι στιγμής προκύπτει πως η S^n είναι μια C^ω διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Ορισμένες πολλαπλότητες περιέχονται μέσα σε κάποιες άλλες με φυσιολογικό τρόπο· έτσι $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Ορισμός 1.1.7. *Ένα υποσύνολο A μιας C^r πολλαπλότητας (M,Φ) είναι μια C^r υποπολλαπλότητα του (M,Φ) αν για κάποιον ακέραιο $\kappa \geq 0$, κάθε σημείο της A ανήκει στο πεδίο ορισμού ενός χάρτη $(\phi, U) \in \Phi$ τέτοιο ώστε*

$$U \cap A = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k)$$

όπου $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων των οποίων οι τελευταίες $n - k$ συντεταγμένες είναι μηδέν. Μία τέτοια απεικόνιση (ϕ, U) την ονομάζουμε χάρτη υποπολλαπλότητας για την (M,A).

Ειναι προφανές ότι αν η A είναι μια υποπολλαπλότητα της M τότε οι απεικονίσεις

$$\phi|_{U\cap A} : U \cap A \to \mathbb{R}^k$$

αποτελούν έναν C^r άτλα για την A. Έτσι η A είναι μια C^r πολλαπλότητα από μόνη της διάστασης k.

1.2 Διαφορίσιμες Απεικονίσεις και η Εφαπτόμενη Δέσμη.

Θεωρούμε M και N C^r-πολλαπλότητες. Θέλουμε να ορίσουμε την έννοια της διαφορίσιμης απεικόνισης μεταξύ των παραπάνω πολλαπλοτήτων. Έστω λοιπόν $f : M \to N$ μια απεικόνιση και ένα ζευγάρι από χάρτες (ϕ, U) για την M και (ψ, V) για την N. Αν ισχύει $f(U) \subset V$ τότε μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\psi f \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V).$$

Η παραπάνω ονομάζεται τοπική αναπαράσταση της f στους δοσμένους χάρτες, στο σημείο x αν $x \in U$.
Η απεικόνιση f καλείται διαφορίσιμη στο x αν έχει τοπική αναπαράσταση στο x η οποία είναι διαφορίσιμη. Ο ορισμός έχει νόημα εφόσον μια τοπική αναπαράσταση είναι μια απεικόνιση μεταξύ ανοιχτών συνόλων σε Καρτεσιανούς χώρους. Με όμοιο τρόπο, η f είναι είναι C^r-διαφορίσιμη αν έχει C^r-τοπική αναπαράσταση σε κάθε σημείο.

Θεώρημα 1.2.1. *Αν η f είναι C^r-διαφορίσιμη τότε κάθε τοπική αναπαράσταση είναι C^r.*

Απόδειξη. Για να το δούμε αυτό έστω (ϕ, U) και (ψ, V) ένα ζεύγος χαρτών προσαρμοσμένων στην f και έστω η f είναι C^r. Για να αποδείξουμε ότι η $\psi f \phi^{-1}$ είναι C^r, έστω $y \in \phi(V)$ και $x = \phi^{-1}(y)$. Έστω (ϕ_0, U_0) και (ψ_0, V_0) ένα προσαρμοσμένο ζεύγος χαρτών που δίνουν στην f την τοπική αναπαράσταση $\psi_0 f \phi_0^{-1}$ στο x. Αντικαθιστόντας τα U_0, V_0 με μικρότερα ανοιχτά σύνολα, αν χρειαστεί, μπορούμε να έχουμε $U_0 \subset U$ και $V_0 \subset V$. Τότε

$$\psi f \phi^{-1} = (\psi \psi_0^{-1})(\psi_0 f \phi_0^{-1})(\phi_0 \phi^{-1})$$

στο $\phi(U_0)$. Η πρώτη και η τρίτη απεικόνιση είναι C^r καθώς είναι αλλαγές συντεταγμένων. Εφόσον η $\psi f \phi^{-1}|_{\phi(U_0)}$ είναι σύνθεση C^r συναρτήσεων είναι επίσης C^r. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\psi f \phi^{-1}$ είναι C^r σε κάποια περιοχή για κάθε σημείο και άρα είναι C^r. □

Έστω $f : M \to N$ και $g : N \to P$ C^r απεικονίσεις μεταξύ δύο C^r πολλαπλοτήτων. Είναι εύκολο να δούμε, χρησιμοποιόντας τοπικές απεικονίσεις, ότι η σύνθεση $gf : M \to N$ είναι επίσης C^r. Η ταυτοτική απεικόνιση και όλες οι σταθερές απεικονίσεις είναι C^r.
Ένας ισομορφισμός στην C^r κατηγορία ονομάζεται C^r διαφορομορφισμός. (Αν $r = 0$ αυτό σημαίνει πως έχουμε έναν ομοιομορφισμό).

Ορισμός 1.2.2. *Ένας C^r διαφορομορφισμός είναι μια C^r απεικόνιση μεταξύ των C^r πολλαπλοτήτων M και N ο οποίος είναι ένας ομοιομορφισμός, και η αντίστροφη απεικόνισή της $f^{-1} : N \to M$ είναι επίσης C^r. Αν υπάρχει μια τέτοια απεικόνιση ονομάζουμε τα M και N C^r διαφορομορφικές πολλαπλότητες και γράφουμε $M \approx N$.*

Αυτή είναι και η βασική σχέση ισοδυναμίας της διαφορικής τοπολογίας.

1.2α' Η Εφαπτόμενη Δέσμη (Tangent Bundle.)

Για τη συνέχεια θα αναφερθούμε στην εφαπτόμενη δέσμη μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας. Αποτελεί μια από τις σημαντικότερες διαφορικές αναλλοίωτες, είναι μια C^r πολλαπλότητα, ενώ όπως θα δούμε και στην επόμενη ενότητα είναι και ένα παράδειγμα μιας διανυσματικής δέσμης (Vector Bundle).
Έστω (M,Φ) να είναι μια C^{r+1} πολλαπλότητα, $0 \leq r \leq \omega$, όπου $\infty + 1 = \infty$ και $\omega + 1 = \omega$. Διαισθητικά, ένα «εφαπτόμενο διάνυσμα» στην M στο $x \in M$ είναι απλά ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ μαζί με ένα χάρτη ο οποίος ταυτίζει κάθε σημείο κοντα στο x με ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον ένα εφαπτόμενο διάνυσμα θα πρέπει να είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του χάρτη.

Ορισμός 1.2.3. *Ένα εφατπόμενο διάνυσμα στην πολλαπλότητα M είναι μια κλάση ισοδυναμίας $[x, i, a]$ μέσω της σχέσης ισοδυναμίας:*

$$[x, i, a] = [y, j, \beta]$$

αν και μόνο εάν $x = y$ και

$$D(\phi_j \phi_i)(\phi_i(x))a = \beta.$$

Με άλλα λόγια η αλλαγή συντεταγμένων στο $\phi_i(x)$ στέλνει το a στο β.

Παρατήρηση 1.2.4. *Το ότι η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας προκύπτει από τις ιδιότητες των παραγώγων για σύνθετες και αντίστροφες συναρτήσεις.*

Το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι η TM, η ***εφαπτόμενη δέσμη της M***. Η απεικόνιση

$$p = p_M : TM \to M,$$

$$[x, i, a] \mapsto x$$

είναι καλά ορισμένη. Για κάθε υποσύνολο $A \subset M$ θέτουμε $p^{-1}(A) = T_A M$, ενώ $p^{-1}(x) = M_x$ για $x \in M$. Αν το $U \subset M$ είναι ανοιχτό το $(U, \Phi|_U)$ είναι επίσης μια C^{r+1} πολλαπλότητα και μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να κάνουμε την ταύτιση $T_U M = TU$.

Για κάθε χάρτη (ϕ_i, U_i) υπάρχει μια καλά ορισμένη 1-1 και επί απεικόνιση

$$T\phi_i : TU_i \to \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$
$$[x, i, a] \mapsto (\phi_i(x), a).$$

Η απεικόνιση

$$(T\phi_j)(T\phi_i)^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^N$$

είναι ο ομοιομορφισμός

$$(y, a) \mapsto (\phi_j \phi_i^{-1}(y), D(\phi_j \phi_i)(y)a).$$

Έτσι προκύπτει πως η TM έχει μια τοπολογία που κάνει κάθε $T\phi_i$ ομοιομορφισμό και αυτή η τοπολογία είναι μοναδική. Επιπλέον εφόσον ο $(T\phi_j)(T\phi_i)^{-1}$ είναι ένας C^r διαφορομορφισμός, το σύνολο των χαρτών $\{T\phi_i, TU_i\}_{i\in\Lambda}$ είναι ένας C^r άτλας για την TM. Με αυτόν τον τρόπο η TM γίνεται μια C^r πολλαπλότητα. Η προβολή $p : TM \to M$ είναι C^r. Οι χάρτες $(T\phi_i, TU_i)$ ονομάζονται φυσιολογικοί χάρτες για την TM.

Ορισμός 1.2.5. *Έστω $x \in U_i$. Η απεικόνιση $T\phi_{ix} : M_x \to \mathbb{R}^n$, που ορίζεται σαν τη σύνθεση*

$$M_x \subset TU_i \xrightarrow{T\phi} \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

είναι 1-1 και επι και έτσι επάγει μια δομή $n-$διάστατου διανυσματικού χώρου πάνω στον M_x, ο οποίος ονομάζεται ο εφαπτόμενος χώρος της M στο x.

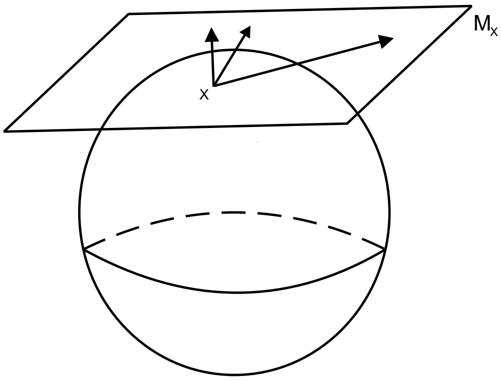
Να σημειώσουμε εδώ πως η παραπάνω δομή είναι ανεξάρτητη του δείκτη i, αφού αν $x \in U_j$,

$$(T\phi_{jx})(T\phi_{ix})^{-1} = D(\phi_j \phi_i^{-1})(\phi_i x)$$

που είναι ένας γραμμικός αυτομορφισμός του $\mathbb{R}^n$. Επομένως η TM είναι η ξένη ένωση των διανυσματικών χώρων M_x. Είναι μια δέσμη διανυσματικών χώρων ή αλλιώς vector bundle για τους οποίους θα μιλήσουμε παρακάτω.

Παράδειγμα 1.2.6. *Το πιο απλό παράδειγμα μιας εφαπτόμενης δέσμης είναι αυτό ενός ανοιχτού συνόλου $W \subseteq \mathbb{R}^q$. Σ' αυτήν την περίπτωση ταυτίζουμε το TW με το $W \times \mathbb{R}^q$ μέσω της απεικόνισης εγκλεισμού $\phi : W \to \mathbb{R}^q$ και τον αντίστοιχο φυσικό χάρτη πάνω στην TW. Η προβολή $TW \to W$ είναι απλά η φυσική προβολή $W \times \mathbb{R}^q \to W$. Αν M είναι μια υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^3$ μπορούμε να φανταστούμε τα εφαπτόμενα διανύσματα στην M σαν βέλη και τον M_x σαν ένα επίπεδο, όπως φαίνεται και στο σχήμα (1.2).*

Έστω $f : M \to N$ μια C^{r+1} απεικόνιση, $0 \leq r \leq \omega$. Μια C^r απεικόνιση μεταξύ των αντίστοιχων εφαπτόμενων δεσμών $Tf : TM \to TN$ ορίζεται ως εξής: μια τοπική αναπαράσταση της Tf μέσω των φυσιολογικών χαρτών της TM και της TN είναι η παράγωγος της αντίστοιχης τοπικής αναπαράστασης της f. Πιο αυστηρά:



Σχήμα 1.2: Εφαπτόμενα διανύσματα στην $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Ορισμός 1.2.7. *Έστω $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$, $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^N$ να είναι χάρτες για την M και την N αντίστοιχα και έστω $f(U_i) \subset V_i$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παρατηρούμε πως η C^r απεικόνιση*

$$(Tf)_{ij} : TU_i \to TV_j,$$
$$[x, i, a] \mapsto [f(x), j, D(\psi_j f \phi^{-1})(\phi_i)a]$$

είναι ανεξάρτητη της επιλογής μας για τα i και j. Έτσι, υπάρχει μια καλά ορισμένη απεικόνιση $Tf : TM \to TN$ η οποία συμφωνεί με την $(Tf)_{ij}$ στο TU_i.

Αν $f(x) = y$ τότε η Tf απεικονίζει το M_x στο N_y και ο περιορισμός της Tf είναι η γραμμική απεικόνιση : $T_x f : M_x \to N_y$. Ως προς τις φυσιολογικές απεικονίσεις αυτό είναι απλά η παράγωγος στο x της αντίστοιχης τοπικής αναπαράστασης της f. Έτσι η απεικόνιση $T_x f$ μπορεί να θεωρηθεί σαν την παράγωγο της f στο x. Σημειώνουμε, πάντως, πως το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών εξαρτώνται πλήρως από το x.
Χρησιμοποιόντας τις φυσιολογικές απεικονίσεις μπορούμε να δούμε πως το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "p_M"'] & TN \arrow[d, "p_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή $f \circ p_M = p_N \circ Tf$. Ομοίως αν $f : M \to N$ και $g : N \to Q$ είναι C^{r+1} απεικονίσεις τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[d, "Tf"] \arrow[dr, "T(g \circ f)"] & \\
TN \arrow[r, "p_M"'] & TQ
\end{tikzcd}$$

είναι επίσης μεταθετικό και ισχύει

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf).$$

Προφανώς
$$T1_M = 1_{TM}.$$
Οι δύο τελευταίες ιδιότητες μπορούν να συμπτυχθούν στην ακόλουθη, λέγοντας ότι οι αντιστοιχίες $M \mapsto TM$, $f \mapsto Tf$ ορίζουν ένα συναρτητή από την κατηγορία των C^{r+1} πολλαπλοτήτων σε αυτή των C^r.
Αν $M \subset N$ είναι μια C^{r+1} υποπολλαπλότητα, $r \geq 0$, έστω $j : M \to N$ να είναι η απεικόνιση εγκλεισμού. Τότε $Tj : TM \to TN$ είναι μια C^r εμφύτευση και η εικόνα της TM είναι μια C^r υποπολλαπλότητα της TN. Αυτό μπορούμε να το δούμε χρησιμοποιόντας τις φυσιολογικές απεικονίσεις και έτσι μπορούμε να ταυτίζομε την TM με μια C^r υποπολλαπλότητα της TN.

1.26' Η ειδική περίπτωση $M \subset \mathbb{R}^q$.

Θεωρούμε $M \subset \mathbb{R}^q$. Η εφαπτόμενη δέσμη TM είναι μια υποπολλαπλότητα της $T\mathbb{R}^q = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$.
Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην M ορίζεται πολλές φορές σαν την κλάση ισοδυναμίας των C^1 απεικονίσεων $f : [0, a) \to M$, όπου η f είναι ισοδύναμη με την $g : [0, b) \to M$ αν $f(0) = g(0)$ και για κάποιο (και επομένως για κάθε) χάρτη (ϕ_i, U_i) στο $f(0)$,
$$D(\phi_i f)(0) = D(\phi_i g)(0).$$
Σε μια τέτοια κλάση ισοδυναμίας αντιστοιχούμε το εφαπτόμενο διάνυσμα (όπως ορίσαμε προηγουμένως)
$$[f(0), i, D(\phi_i f)(0)].$$
Αντίστροφα, σε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $[x, i, a]$ αντιστοιχούμε την κλάση ισοδυναμίας της C^1 απεικόνισης
$$f : [0, a) \to M,$$
$$f(t) = \phi_i^{-1}(\phi_i(x) + ta),$$
η οποία ορίζεται για αρκετά μικρό $a > 0$.

Οι δύο διαδικασιές είναι ισοδύναμες όπως και οι δύο ορισμοί για το εφαπτόμενο διάνυσμα. Απλά ο πρώτος δουλεύει καλύτερα σε πολλαπλότητες με σύνορο.

1.3 Embeddings, Immersions.

Έστω $f : M \to N$ μια C^1 απεκόνιση και M, N να είναι C^r πολλαπλότητες, $r \geq 1$. Καλούμε την f immersive στο $x \in M$ αν η γραμμική απεικόνιση $T_x f : M_x \to N_{f(x)}$ είναι 1-1 και submersive αν η $T_x f$ είναι επί. Αν η f είναι immersive σε κάθε σημείο της M είναι ένα immersion; αν είναι submersive, η f είναι ένα submersion.

Ορισμός 1.3.1. *Μια απεικόνιση $f : M \to N$ είναι μια εμφύτευση αν η f είναι ένα immersion και απεικονίζει την M ομοιομορφικά στην εικόνα της· συμβολίζουμε $f : M \hookrightarrow N$.*

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω L μια C^r πολλαπλότητα, $r \geq 1$. Ένα υποσύνολο $A \subset N$ είναι μια C^r υποπολλαπλότητα αν και μόνο αν το A είναι η εικόνα μιας C^r εμφύτευσης.*

Απόδειξη. Έστω Α είναι μια C^r υποπολλαπλότητα. Τότε η Α έχει μια φυσιολογική C^r διαφορίσιμη δομή που προκύπτει από ένα κάλυμμα χαρτών για την υποπολλαπλότητα. Για αυτή τη διαφορίσιμη δομή η απεικόνιση εγκλεισμού του Α στην Ν είναι μια C^r εμφύτευση.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $f : M \hookrightarrow N$ είναι μια C^r εμφύτευση και $f(M) = A$. Η έννοια της υποπολλαπλότητας έχει τοπικό χαρακτήρα, δηλαδή το $A \subset N$ αληθεύει αν και μόνο αν ισχύει ότι $A_i \subset N_i$, όπου $\{A_i\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα της Α και κάθε N_i είναι είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του Ν. Είναι επίσης αναλλοίωτη ως προς τους C^r διαφορομορφισμούς, δηλαδή, η $A \subset N$ είναι μια C^r υποπολλαπλότητα αν και μόνο αν το $g(A) \subset N'$ είναι μια C^r υποπολλαπλότητα όπου $g : N \to N'$ είναι ένας C^r διαφορομορφισμός (ή ακόμη και μια C^r εμφύτευση).

Εκμεταλλευόμενοι τον τοπικό χαρακτήρα και την αναλλοίωτη ιδιότητα, έστω $\Psi = \{\psi_i : N_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in\Lambda}$ να είναι μια οικογένεια χαρτών της Ν που να καλύπτουν την Α. Τότε μπορούμε να βρούμε έναν άτλαντα $\Phi = \{\phi_i : M_i \to \mathbb{R}^m\}_{i\in\Lambda}$ για την Μ τέτοια ώστε $f(M_i) \subset N_i$ (αλλάζοντας τους δείκτες αν χρειαστεί). Εφόσον η f είναι μια εμφύτευση, οι Φ και Ψ μπορούν αν επιλεχθούν έτσι ώστε $f(M_i) = A \cap N_i$. Από την αναλλοίωτη ιδιότητα αρκεί να δείξουμε ότι $\psi_i f(M_i) \subset \mathbb{R}^n$ είναι μια C^r υποπολλαπλότητα. Θέτουμε

$$\begin{aligned} U_i &= \phi_i(M_i) \subset \mathbb{R}^m, \\ f_i &= \psi_i f \phi_i^{-1} : U_i \to \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Τότε η f_i είναι μια C^r εμφύτευση και $f_i(U_i) = \psi_i f(M_i)$. Έτσι έχουμε ανάγει το πρόβλημα στην ειδική περίπτωση όπου $N = \mathbb{R}^n$, Μ είναι ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^m$ και $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια C^r εμφύτευση. Χρημοποιόντας το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης του απειροστικού λογισμού βλέπουμε πως υπάρχει ένας C^r χάρτης υποπολλαπλότητας για το $(\mathbb{R}^n, f(U))$ για κάθε σημείο του $f(U)$. □

Το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε δείχνει την εναλλαγή μεταξύ της έννοιας του τοπικού και του καθολικού. Προτού συνεχίσουμε στο επόμενο θεώρημα θα δώσουμε κάποιους πολύ σημαντικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.3.3. *Έστω $f : M \to N$ να είναι μια C^1 απεικόνιση. Ένα σημειο x είναι κανονικό αν η f είναι submersive στο x, διαφορετικά καλείται κρίσιμο και η εικόνα του μέσω της f κρίσιμη τιμή. Αν το $y \in N$ δεν είναι μια κρίσιμη τιμή ονομάζεται κανονική τιμη, ακόμη κι αν δεν ανήκει στο $f(M)$. Αν το $y \in f(M)$ είναι μια κανονική τιμη, το $f^{-1}(y)$ ονομάζεται regular level surface .*

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω $f : M \to N$ μια C^r απεικόνιση, $r \geq 1$. Αν η $y \in f(M)$ είναι μια κανονική τιμή τότε το $f^{-1}(y)$ είναι μια C^r υποπολλαπλότητα της M.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιόντας τον τοπικό χαρακτήρα και την αναλλοίωτη ιδιότητα, όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, ανάγουμε το πρόβλημα στην περίπτωση όπου η Μ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $N = \mathbb{R}^n$. Για άλλη μια φορά καταλήγουμε στο αποτέλεσμα με τη χρήση του θεωρήματος της αντίστροφης απεικόνισης. □

Ορισμός 1.3.5. *Μια απεικόνιση $f : M \to N$ είναι εγκάρσια σε μια υποπολλαπλότητα $A \subset N$ αν όποτε $f(x) = y \in A$ ισχύει*

$$A_y + T_x f(M_x) = Ny,$$

δηλαδή, ο εφαπτόμενος χώρος στην N στο σημείο y παράγεται από τον εφατπόμενο χώρο στην A στο σημείο y και από τον εφαπτόμενο χώρο της M στο x.

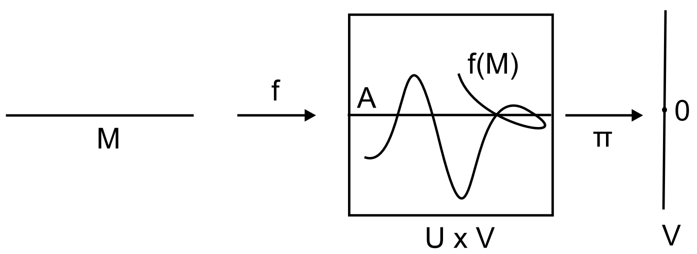
Θεώρημα 1.3.6. *Έστω $f : M \to N$ μια C^r απεικόνιση, $r \geq 1$ και $A \subset N$ μια C^r υποπολλαπλότητα. Αν η f είναι εγκάρσια στην A τότε η $f^{-1}(A)$ είναι μια C^r υποπολλαπλότητα της M.*

Απόδειξη. Αρκεί να το αποδείξουμε τοπικά. Έτσι αντικαθιστώ το ζεύγος (N,A) με το $(U \times V, U \times 0)$, όπου $U \times V \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του (0,0). Εύκολα μπορούμε να δούμε πως η απεικόνιση $f : M \to U \times V$ είναι εγκάρσια στο $U \times 0$ αν και μόνο αν η σύνθετη συνάρτηση

$$g : M \xrightarrow{f} U \times V \xrightarrow{\pi} V$$

έχει το 0 για κανονική τιμή (σχήμα 1.3). Εφόσον $f^{-1}(U \times 0) = g^{-1}(0)$ το αποτέλεσμα προκύπτει με άμεση εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος.

□



Σχήμα 1.3: $\pi f = g$.

Θεώρημα 1.3.7. *Έστω M μία συμπαγής Hausdorff πολλαπλότητα κλάσης C^r, $1 \leq r \leq \infty$. Τότε υπάρχει μια C^r εμφύτευση της M μέσα στο $\mathbb{R}^q$ για κάποιο q.*

Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει πιο ακριβώς είναι το q για το οποίο υπάρχει η ζητούμενη εμφύτευση της πολλαπλότητας μας μέσα στο $\mathbb{R}^q$.

Θεώρημα 1.3.8. *Έστω M μια συμπαγής Hausdorff C^r πολλαπλότητα, $2 \leq r \leq \infty$. Τότε υπάρχει μια C^r εμφύτευση της M μέσα στο $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Ο Whitney βελτίωσε το παραπάνω θεώρημα και έδειξε για $n > 0$, κάθε παρασυμπαγής Hausdorff n-πολλαπλότητα μπορεί να εμφυτευθεί μέσα στον $\mathbb{R}^{2n}$. Επιπλέον υπάρχει μια immersion απεικόνιση μέσα στον $\mathbb{R}^{2n-1}$, αν $n > 1$. Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.3.9. *Έστω $g : P \to Q$ μια C^1 απεικόνιση. Αν $dimQ > dimP$ τότε το συμπλήρωμα της εικόνας της g είναι πυκνό υποσύνολο του Q.*

1.4 Vector Bundles.

Ένα vector bundle μπορεί να θεωρηθεί σαν την οικογένεια $\{E_x\}_{x\in B}$ ξένων μεταξύ τους διανυσματικών χώρων πάνω από ένα χώρο B. Η ένωση αυτών των διανυσματικών χώρων είναι ένας χώρος E και η απεικόνιση $p : E \to B$, $p(E_x) = x$ είναι συνεχής. Επιπλέον η p είναι τοπικά τετριμμένη με την έννοια ότι αν περιοριστούμε σε μια μικρή γειτονιά του B τότε μπορούμε να έναν βρούμε ομοιομορφισμό έτσι ώστε η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(U) \approx U \times \mathbb{R}^n$.
Ένα vector bundle είναι παρόμοιο με μια πολλαπλότητα με την έννοια ότι και τα δύο προκύπτουν από « κολλήματα » μικρότερων αντικειμένων μέσω συγκεκριμένων απεικονίσεων. Στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων αυτά είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, ενώ οι απεικονίσεις είναι διαφορομορφισμοί. Για τα vector bundles είναι οι τετριμμένες δέσμες $U \times \mathbb{R}^n$, ενώ οι απεικονίσεις είναι μορφισμοί της μορφής $U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n$ της μορφής $(x, y) \mapsto (x, g(x)y)$, όπου $g : U \to GL(n)$.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω $p : E \to B$ μια συνεχής απεικόνιση. Ένας vector bundle χάρτης πάνω στο (p, E, B) με πεδίο ορισμού U και διάσταση n είναι ένας ομοιομορφισμός $\phi : p^{-1}(U) \approx U \times \mathbb{R}^n$ όπου $U \subset B$ είναι ανοιχτό, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Εδώ $\pi(x, y) = x$.

Για κάθε $x \in U$ ορίζουμε έναν ομοιομορφισμό ϕ_x να είναι η σύνθεση

$$\phi_x : p^{-1}(x) \xrightarrow{\phi} x \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Ορισμός 1.4.2. *Ένας vector bundle άτλας Φ πάνω από το (p, E, B) είναι μια οικογένεια χαρτών πάνω από το (p, E, B) με τιμές στο ίδιο $\mathbb{R}^n$, τα πεδία ορισμού των οποίων καλύπτουν το B και όποτε (ϕ, U) και (ψ, V) ανήκουν στον Φ και $x \in U \cap V$, ο ομοιομορφισμός*

$$\psi_x \phi_x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

να είναι γραμμικός.

Η απεικόνιση

$$\begin{array}{rcl} U \cap V & \to & GL(n), \\ x & \to & \psi_x \phi_x^{-1} \end{array}$$

πρέπει να είναι συνεχής και ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης για το ζεύγος χαρτών (ϕ, U), (ψ, V). Αν $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i\in\Lambda}$ τότε προκύπτει μια οικογένεια $\{g_{ij}\}$ από συναρτήσεις μετάβασης,

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n).$$

Αυτές οι συναρτήσεις ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{array}{rcl} g_{ij}(x) g_{jk}(x) & = & g_{ik}(x) \quad (x \in U_i \cap U_j \cap U_k), \\ g_{ii}(x) & = & 1 \in GL(n). \end{array}$$

Με πιο απλά λόγια, για κάθε στοιχείο στην τομή των U και V μπορούμε να βρούμε μια γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο της $GL(n)$.

Ορισμός 1.4.3. *Ένας μέγιστος vector bundle άτλας Φ είναι μια δομή vector bundle πάνω στο (p, E, B). Ονομάζουμε το $\xi = (p, E, B, \Phi)$ vector bundle με διάσταση n, προβολή p, ολικό χώρο E και χώρο βάσης B. Συχνά ο Φ δεν προσδιορίζεται αυστηρά, ενώ μπορεί να συμβολίζεται με ξ ο E και αντίστροφα.*

Ορισμός 1.4.4. *Η ίνα (fibre) πάνω από το $x \in B$ είναι ο χώρος $p^{-1}(x) = \xi_x = E_x$. Δίνουμε στον ξ_x δόμη διανυσματικού χώρου κάνοντας κάθε $\phi_x : \xi_x \to \mathbb{R}^n$ έναν ισομορφισμό. Αυτή η δομή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή χάρτη $(\phi, U) \in \Phi$. Έτσι ο E είναι μια «δέσμη» διανυσματικών χώρων.*

Έστω $A \subset B$ ένα υποσύνολο του B και συμβολίζουμε το $p^{-1}(A)$ με $\xi_A, \xi|_A, E_A$ ή $E|_A$. O περιορισμός του ξ στο A είναι το vector bundle

$$\xi|_A = (p|_{E_A}, E_A, A, \Phi_A)$$

όπου Φ_A περιέχει όλους τους χάρτες της μορφής

$$\phi|_{p^{-1}(A\cap U)} : E|_{A\cap U} \to (A \cap U) \times \mathbb{R}^n,$$

όπου $(\phi, U) \in \Phi$.

Έστω τώρα $\xi_i = (p_i, E_i, B_i, \Phi_i)$ να είναι ένα vector bundle, $i = 0, 1$. Μια απεικόνιση στις ίνες $F : \xi_0 \to \xi_1$ είναι μια απεικόνιση $F : E_0 \to E_1$ η οποία καλύπτει μια απεικόνιση $f : B_0 \to B_1$, δηλαδή , υπάρχει ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p_0"'] & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\ B_0 \arrow[r, "f"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

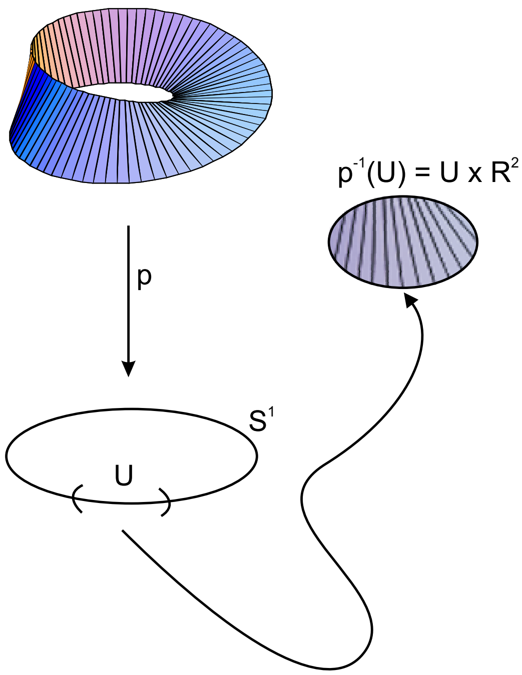
Έτσι αν $x \in B_0$ και $f(x) = y$, τότε η F απεικονίζει την ίνα πάνω από το x στην ίνα πάνω από το y μέσω μια απεικόνισης $F_x : \xi_{0x} \to \xi_{1y}$.

Αν κάθε απεικόνιση F_x είναι γραμμική ονομάζουμε την F έναν μορφισμό vector bundles. Αν η F είναι ένας μορφισμός και κάθε F_x είναι 1-1, τότε η F είναι μονομορφισμός, ενώ αν είναι μορφισμός και επί τότε η F είναι επιμορφισμός.Αν κάθε F_x είναι 1-1 και επί τότε η F ονομάζεται απεικόνιση μεταξύ vector bundles . Αν η F είναι απεικόνιση μεταξύ vector bundles και καλύπτει έναν ομοιομορφισμό $f : B_0 \to B_1$ τότε η f είναι μια ισοδυναμία. Αν $B_0 = B_1 = B$ και $f = 1_B$ τότε η F είναι ένας ισομορφισμός και γράφουμε $\xi_0 \cong \xi_1$.

Ορισμός 1.4.5. *Το τετριμμένο $n-$διάστατο vector bundle πάνω από το B είναι*

$$\varepsilon^n_B = (p, B \times \mathbb{R}^n, B, \Phi)$$

όπου $p : B \times \mathbb{R}^n \to B$ είναι η φυσική προβολή και Φ είναι ο μοναδικός μέγιστος vector bundle άτλας που περιέχει την ταυτοτική απεικόνιση του $B \times \mathbb{R}^n$. Γενικότερα ένα vector bundle είναι τετριμμένο αν είναι ισόμορφο με το ε^n_B.



Σχήμα 1.4: Η ταινία του Moebius δεν είναι globally trivial.

Παράδειγμα 1.4.6. *Ένα παράδειγμα vector bundle το οποίο δεν είναι τετριμμένο είναι η ταινία του Moebius πάνω από τον κύκλο S^1. Τοπικά, αν θεωρήσουμε μια περιοχή U του κύκλου τότε η αντίστροφή εικόνα μέσω της p του U είναι ισόμορφη με το $U \times \mathbb{R}^2$. Αυτό δεν συμβαίνει globally καθώς η ταινία δεν είναι προσανατολίσιμη.*

Ο κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$ είναι αντίθετα το τετριμμένο vector bundle.

Ό,τι έχουμε ορίσει μέχρι στιγμής ισχύουν και για C^r πολλαπλότητες και απεικονίσεις. Μ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουν τα C^r vector bundles. Στη συνέχεια θα εισάγουμε την έννοια ενός subbundle.

Ορισμός 1.4.7. *Ένα subbundle ενός bundle $\xi = (p, E, B)$ είναι ένα bundle $\xi_0(p_0, E_0, B)$ πάνω από τον ίδιο χώρο βάσης B, έτσι ώστε $E_0 \subset E$, $p_0 = p|_{E_0}$ και υπάρχει ένας vector bundle άτλας Φ για το ξ με την ακόλουθη ιδιότητα. Υπάρχει ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τον οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ο $\mathbb{R}^k$, τέτοιον ώστε αν $(\phi, U) \in \Phi$ τότε η ϕ απεικονίζει το $p^{-1}(U) \cap E_0$ στο $U \times \mathbb{R}^k$ και το ζεύγος*

$$(\phi|_{p^{-1}(U) \cap E_0}, U)$$

ανήκει στη vector bundle δομή του ξ_0.

Η έννοια του subbundle είναι απολύτως ανάλογη μ' αυτή της υποπολλαπλότητας και συγκεκριμένα αν $A \subset M$ είναι μια C^{r+1} υποπολλαπλότητα τότε το TA είναι ένα C^r subbundle του $T_A M$.

Θεώρημα 1.4.8. *Αν ξ_0 είναι ένα subbundle του ξ τότε η απεικόνιση εγκλεισμού $E_0 \to E$ είναι ένας μονομορφισμός $\xi_0 \to \xi$ πάνω από το 1_B. Αντίστροφα, αν η είναι* *ένα bundle πάνω από το B και $F : \eta \to \xi$ είναι ένας μονομορφισμός πάνω από το 1_B τότε η εικόνα $F(\eta)$ μαζί με την επαγώμενη bundle δομή από την F, είναι ένα subbundle του ξ.*

Απόδειξη. Όλα αυτά βρίσκονται σε πλήρη αναλογία με το θεώρημα 1.3.2. Αρκεί να το αποδείξουμε τοπικά. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε ότι τα ξ και η είναι τα τετριμμένα bundles $B \times \mathbb{R}^n$ και $B \times \mathbb{R}^k$, $k \leq n$. Ο μονομορφισμός $F : B \times \mathbb{R}^k \to B \times \mathbb{R}^n$ έχει τη μορφή

$$F(x, y) = (x, F_x(y))$$

όπου $F : B \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ είναι κλάσης C^r και κάθε γραμμική απεικόνιση $F_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ είναι 1-1. Σταθεροποιούμε ένα $x \in B$ και θέτουμε $F_x(\mathbb{R}^k) = E \subset \mathbb{R}^n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ και ότι η F_x είναι η συνήθης απεικόνιση εγκλεισμού $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Έστω $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ η ορθογώνια προβολή. Υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή $U \subset B$ του x τέτοια ώστε $\pi F_z : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ να είναι ένας ισομορφισμός για $z \in U$. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ να είναι ο πυρήνας της π, έτσι ώστε $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times K$. Ορίζουμε

$$\phi : U \times (\mathbb{R}^k \times K) \to U \times (\mathbb{R}^k \times K)$$

με

$$\phi(z, (u, w)) = (z, \pi F_z(u), w).$$

Τότε ο ϕ είναι ένας C^r vector bundle χάρτης για το ξ και ο ϕ στέλνει την εικόνα της F στο $U \times \mathbb{R}^k$. Έτσι λοιπόν η εικόνα της F είναι ένα subbundle . □

Ένας άλλος τρόπος για να ορίσουμε subbundles είναι να πάρουμε τον πυρήνα ενός επιμορφισμού $F : \xi \to \xi'$ που καλύπτει το 1_B. Για κάθε $x \in B$, δηλαδή, αν η_x να είναι ο πυρήνας του $F_x : \xi_x \to \xi'_x$, τότε υπάρχει μοναδικό subbundle η του ξ με ίνες τα η_x.

Σ' αυτό το σημείο θα εισάγουμε την έννοια της exact ακολουθίας μορφισμών vector bundles: αυτό σημαίνει μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \xi_{i-1} \xrightarrow{F_{i-1}} \xi \xrightarrow{F_i} \xi_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

μορφισμών, όπου όλοι καλύπτουν το 1_B, έτσι ώστε για κάθε $x \in B$ έχουμε

$$Im(F_{i-1})_x = Ker(F_i)_x$$

για κάθε i. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι short exact ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{F} \eta \xrightarrow{G} \zeta \longrightarrow 0$$

όπου 0 εννοούμε το 0-διάστατο bundle πάνω από το B. Σε μια τέτοια ακολουθία η απεικόνιση F είναι ένας μονομορφισμός ενώ η G είναι ένας επιμορφισμός και ισχύει $F = Ker(G)$.
Δεδομένης μιας exact ακολουθίας

$$\eta \xrightarrow{G} \zeta \longrightarrow 0$$

υπάρχει μια exact ακολουθία

$$0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{F} \eta \xrightarrow{G} \zeta \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

η 1.1 είναι μοναδική με την έννοια ότι αν για κάθε exact ακολουθία

$$0 \longrightarrow \xi' \xrightarrow{F'} \eta \xrightarrow{G} \zeta \longrightarrow 0$$

υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός $\xi \to \xi'$ τέτοιος ώστε το διάγραμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \xi \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \eta \arrow[r, "G"] \arrow[d, "="] & \zeta \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \xi' \arrow[r, "F'"] & \eta \arrow[r, "G"] & \zeta \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.
Στην exact ακολουθία 1.1 καλούμε το ζ το bundle πηλίκο του μονομορφισμού F. Κάθε μονομορφισμός έχει ένα bundle πηλίκο και το τελευταίο είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού. Συγκεκριμένα, αν $\xi \subset \eta$ είναι ένα subbundle , οι ίνες του bundle πηλίκου παίρνονται να είναι οι διανυσματικοί χώροι η_x/ξ_x και συμβολίζουμε το bundle πηλίκο με η/ξ.

Η short exact ακολουθία 1.1 είναι split αν υπάρχει μονομορφισμός $H : \zeta \to \eta$ τέτοιος ώστε $GH = 1_\zeta$ ή $K : \eta \to \xi$ τέτοιος ώστε $KF = 1_\xi$.

Ορισμός 1.4.9. *Το ευθύ άθροισμα των bundles ξ , ζ πάνω από το B είναι το bundle $\xi \bigoplus \zeta$ του οποίου η ίνα πάνω από το x είναι $\xi_x \bigoplus \zeta_x$. Αν ϕ , ψ είναι χάρτες για τα ξ , ζ αντίστοιχα πάνω από το U, ένας χάρτης ∂ για το $\xi \bigoplus \zeta$ πάνω από το U προκύπτει θέτοντας*

$$\partial_x = \phi_x \bigoplus \psi_x : \xi_x \bigoplus \zeta_x \to \mathbb{R}^m \bigoplus \mathbb{R}^n.$$

Οι φυσιολογικές exact ακολουθίες διαννσματικών χώρων

$$0 \longrightarrow \xi_x \xrightarrow{F_x} \xi_x \bigoplus \zeta_x \xrightarrow{G_x} \zeta_x \longrightarrow 0$$

δίνουν μια split exact ακολουθία

$$0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{F} \xi \bigoplus \zeta \xrightarrow{G} \zeta \longrightarrow 0\ .$$

Ορισμός 1.4.10. *Το zero section του ξ είναι η απεικόνιση $Z : B \to E$ η οποία αντιστοιχεί σε κάθε x το μηδενικό στοιχείο του ξ_x. Συχνά θεωρούμε τον υπόχωρο $Z(B) \subset E$ να είναι το zero section. Επίσης συχνά ταυτίζουμε τον χώρο B με το $Z(B)$ μέσω της Z.*

Θεώρημα 1.4.11. *Έστω $\xi = (p, E, M)$ ένα C^{r+1} vector bundle, $0 \leq r \leq \omega$. Η exact ακολουθία*

$$0 \longrightarrow \xi \longrightarrow T_M E \xrightarrow{T_p} TM \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

από C^r vector bundles η οποία είναι φυσιολογικά split από την

$$TZ : TM \to T_M E. \tag{1.3}$$

Έτσι υπάρχει ένας φυσιολογικός C^r ισομορφισμός

$$h_\xi : T_M E \approx \xi \bigoplus TM.$$

Συγκεκριμένα $\xi \subset T_M E$ είναι ένα φυσιολογικό subbbundle.

Απόδειξη. Έστω $\xi = (p, E, M)$ να είναι ένα C^{r+1} vector bundle. Κάθε ένα ξ_x είναι ένας διανυσματικός χώρος με αρχή το x και έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε το ξ_x με το $T_x(\xi_x)$. Έτσι ξ είναι ένα subbundle του $T_M E$ με φυσιολογικό τρόπο. Εφόσον, λοιπόν, το $M \subset E$ είναι μια υποπολλαπλότητα (μέσω της zero section), η TM είναι ένα C^r subbundle του $T_M E$. Προφανώς έχουμε μια short exact ακολουθία

$$0 \longrightarrow \xi \longrightarrow T_M E \xrightarrow{T_p} TM \longrightarrow 0$$

η οποία είναι split από την εφαπτόμενη απεικόνιση του zero section:

$$TZ : TM \to T_M E.$$

□

Εδώ φυσιολογικό σημαίνει να σεβόμαστε τους C^{r+1} μορφισμούς. Αν

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \eta \arrow[d] \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

είναι ένας τέτοιος μορφισμός, τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_M E_\xi \arrow[r, "T_f"] \arrow[d, "h_\zeta"] & T_N E_\eta \arrow[d, "h_\eta"'] \\ \xi \bigoplus TM \arrow[r, "f \bigoplus T_g"'] & \eta \bigoplus TN \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό.

Το ακόλουθο είναι ένα από τα πιο χρήσιμα αποτελέσματα για τη θεωρία των vector bundles, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.4.12. *Κάθε short exact ακολουθία από C^r vector bundles είναι split, $0 \leq r \leq \omega$, αν ο χώρος βάσης είναι παρασυμπαγής.*

Μια αρκετά διαφορετική κατασκευή είναι αυτή του επαγώμενου bundle. Έστω $\xi = (p, E, M, \Phi)$ένα vector bundle και $f : M_0 \to$ μια απεικόνιση.

Ορισμός 1.4.13. *Το επαγώμενο bundle (ή pullback) $f^*\xi = (p_0, E_0, M_0, \Phi_0)$ ορίζεται ως εξής. Έστω*

$$E_0 = \{(x, y) \in M_0 \times E : f(x) = p(y)\},$$

και ορίζουμε

$$\begin{aligned} p_0 : E_0 &\to M_0, \\ p_0(x, y) &= x. \end{aligned}$$

Θεωρούμε Φ_0 *να είναι ο μέγιστος (C^r) άτλας που περιέχει όλους τους χάρτες της μορφής* $(\psi, f^{-1}(U))$ *όπου* $(\phi, U) \in$ *Phi και αν* $z \in f^{-1}(U)$, $f(z) = x \in U$, *τότε* $\psi_z = \phi_x$. *Η φυσιολογική vector bundle απεικόνιση* $\Psi : f^*\xi \to \xi$ *πάνω από την* f *δίνεται από την* $(x, y) \mapsto y$.

Έστω τώρα $q : \eta \to M_0$ να είναι ένα vector bundle και $F : \eta \to \xi$ ένας μορφισμός πάνω από την f. Υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση των καθολικών χώρων $H : \eta \to f^*\xi$ η οποία κάνει το ακόλουθο διάγραμμα αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\eta \arrow[dr, "H"] \arrow[drr, bend left, "F"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& f^*\xi \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "p_0"] & \xi \arrow[d, "p"] \\
& M_0 \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

και H είναι ένας μορφισμός από vector bundles. Αν ο F είναι επιμορφισμός, μονομορφισμός ή αμφιμορφισμός, το ίδιο είναι και ο H. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $F : \eta \to \xi$ μια vector bundle απεικόνιση πάνω από την f τότε η η είναι κανονικά ισομορφική με το pullback $f^*\xi$.
Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με το ακόλουθο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.4.14. *Κάθε vector bundle πάνω από contractible παρασυμπαγή χώρο είναι τετριμμένο.*

Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι κάθε vector bundle όταν γίνει lift στον καθολικό καλυπτικό χώρο είναι τετριμμένο. Αυτή είναι μια ιδιότητα που, όπως θα δούμε στη συνέχεια, θα μας δώσει μια έννοια απλής συνεκτικότητας για σώματα αριθμών.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Galois και Καλυπτικές Απεικονήσεις

Υπάρχει μια αξιοπρόσεχτη αντιστοιχία μεταξύ της θεωρίας των καλυπτικών απεικονίσεων και της θεωριάς του Galois . Σκοπός μας σ' αυτό το κεφάλαιο είναι περισσότερο να παρουσιάσουμε αυτή τη συσχέτιση παρά να εμβαθύνουμε στις παραπάνω δύο θεωρίες. Για περισσότερες λεπτομέριες μπορεί κάποιος να αναφερθεί στα [21], [26] και [27].

2.1 G-Coverings, Deck Transformations.

Ορισμός 2.1.1. *Για κάθε $p : Y \to X$ καλυπτική απεικόνιση, υπάρχει ομάδα $Aut(Y/X)$ η οποία ονομάζεται ομάδα (με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων.) των Deck transformations, ή ομάδα των Covering transformations:*

$$Aut(Y/X) = \{\varphi : Y \to Y : \varphi \text{ είναι ομοιομορφισμός και } p \circ \varphi = p\}\,.$$

Πολλοί σημαντικοί καλυπτικοί χώροι προκύπτουν από την δράση μιας ομάδας G σε έναν χώρο Y με X να δηλώνει τον χώρο των τροχιών της δράσης αυτής.

Ορισμός 2.1.2. *Δράση μιας ομάδας $(G, \cdot)$ σε έναν χώρο Y (από αριστερά) είναι μία απεικόνιση $G \times Y \to Y : (g, y) \mapsto g \cdot y$, που ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

(i) $g \cdot (h \cdot y) = (g \cdot h) \cdot y, \forall\, g, h \in G$ *και* $y \in Y$,

(ii) $id_G \cdot y = y, \forall\, y \in Y$,

(iii) *Η απεικόνιση* $y \mapsto g(y) = g \cdot y$ *είναι ένας ομοιομορφισμός του* $Y, \forall\, g \in G$.

Έτσι η G ορίζει μία ομάδα από ομοιομορφισμούς του χώρου Y. Δύο σημεία $y, y' \in Y$ λέμε ότι ανήκουν στην ίδια τροχιά αν υπάρχει $g \in G : g(y) = y'$. Καθώς η G είναι ομάδα, αυτό είναι μία κλάση ισοδυναμίας. Αν συμβολίσουμε $X = Y/G$ να είναι το σύνολο των τροχιών, δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, τότε μπορούμε να ορίσουμε την φυσική προβολή $p : Y \to X$ που απεικονίζει κάθε στοιχείο του Y στην κλάση, δηλαδή την τροχιά που το περιέχει. Ο χώρος X είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκο, δηλαδή κάθε $U \subset X$, είναι ανοικτό του X ανν το $p^{-1}(U)$ είναι ανοικτό του Y. Ο συμβολισμός της φυσικής αυτής προβολής με το γράμμα p δεν είναι τυχαίος. Κάτω από κάποιες προϋποθέσεις για τον χώρο Y και την δράση της ομάδας G, η p είναι μία καλυπτική απεικόνιση.

Ορισμός 2.1.3. *Μία ομάδα G δρα evenly[1] στον χώρο Y, αν κάθε σημείο του Y έχει μια γειτονιά V τέτοια ώστε $g \cdot V$ και $h \cdot V$ είναι ξένα για κάθε διαφορετικά $g, h \in G$.*

Λήμμα 2.1.4. *Αν μία ομάδα δρα evenly στον χώρο Y, τότε η φυσική προβολή $p : Y \to Y/G$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Η p είναι μία συνεχής και ανοικτή απεικόνιση καθώς για κάθε V ανοικτό του Y έχουμε ότι το $p^{-1}(p(V)) = \cup_{g\in G} g \cdot V$ είναι ανοικτό του Y σαν ένωση ανοικτών και από τον ορισμό της απεικόνισης πηλίκο το $p(V)$ είναι ανοικτό του Y/G. Τώρα αν πάρουμε το V, όπως στον ορισμό της even δράσης, τα $g \cdot V$ θα είναι ξένα μεταξύ τους. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τέτοιο V το $p(V)$ είναι ομαλά καλυμμένο από την p, δηλαδή ο περιορισμός της p σε κάθε ένα από τα $g \cdot V$ στο $p(V)$ είναι ένας ομοιομορφισμός.
Πράγματι για $y \in V$, δηλαδή $p(y) \in p(V)$ υπάρχει $g \cdot y \in g \cdot V$ έτσι ώστε $p(g \cdot y) = p(y)$ και άρα είναι επί. Επίσης αν $p(g \cdot y_1) = p(g \cdot y_2)$ υπάρχει $h \in G$ με $h \cdot g \cdot y_1 = g \cdot y_2$. Αφού η δράση είναι even, και συνεπώς ελεύθερη από τον ορισμό μας, θα πρέπει $h = id_G$ και άρα η ζητούμενη απεικόνιση είναι 1-1. □

Ορισμός 2.1.5. *Κάθε καλυπτική απεικόνιση $p : Y \to X$, που προέρχεται από μία even δράση μίας ομάδας G σε έναν χώρο Y ονομάζεται G-καλυπτική απεικόνιση και ο χώρος Y G-καλυπτικός χώρος.*

Παρατήρηση 2.1.6. *Αν ο χώρος Y είναι Hausdorff και αν η πεπερασμένης τάξης ομάδα G δρα ελεύθερα σε αυτόν, δηλαδή $\forall\, g \in G \setminus \{id_G\} : g(y) = y, \forall\, y \in Y$, τότε η G δρα evenly στον Y.*

Πράγματι: Για γνωστό $y \in Y$, επιλέγουμε ξένες γειτονιές U_g του $g \cdot y \in Y$, μία για κάθε ένα $g \in G$ (η ύπαρξη αυτών εξασφαλίζεται από την Hausdorff συνθήκη.). Θέτουμε

$$V = \bigcap_{g\in G} g^{-1} \cdot U_g$$

με V ανοικτό του Y (πεπερασμένη τομή ανοικτών είναι ανοικτό σύνολο), να είναι γειτονιά του y. Τότε για κάθε διαφορετικά $g_1, g_2 \in G$, θα έχουμε ότι το $g_1 \cdot V \cap g_2 \cdot V$ ισούται με:

$$\Big(\bigcap_{g\in G\setminus\{g_1\}} g_1 \cdot g^{-1} \cdot U_g\Big) \cap (g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot U_{g_1}) \cap (g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot U_{g_2}) \cap \Big(\bigcap_{g\in G\setminus\{g_2\}} g_2 \cdot g^{-1} \cdot U_g\Big) = \varnothing.$$

Γιατί $U_{g_1} \cap U_{g_2} = \varnothing$.◊

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ G-καλυπτική απεικόνιση και Y να είναι συνεκτικός χώρος. Τότε η $G \cong Aut(Y/X)$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $y \in Y$. Για γνωστό $\varphi \in Aut(Y/X)$, το y και το $\varphi(y)$ θα πηγαίνουν μέσω της φυσικής προβολής στην ίδια τροχιά που τα περιέχει. Συνεπώς θα υπάρχει ένα $g \in G : g \cdot y = g(y) = \varphi(y)$. Τώρα ισχύει $p \circ \varphi(y) = p \circ g(y) = p(y)$. Από λήμμα 1.4, οι φ και η g θα συμπίπτουν. □

[1] μερικοί συγγραφείς αναφέρονται σε αυτήν την δράση με τον όρο properly discontinuous (ή γνήσια ασυνεχώς). Η λέξη discontinuous σημαίνει ότι οι τροχιές είναι διακριτά (με την τοπολογική έννοια, δηλαδή δεν έχουν σημεία συσσώρευσης στον Y) υποσύνολα της Y. Η λέξη properly σημαίνει ότι κάθε συμπαγή σύνολο τέμνει μόνο πεπερασμένο αριθμό από τις μεταφορές του. Ο όρος όμως properly discontinuous συχνά παραφράζεται και όταν χρησιμοποιείται σημαίνει ότι κάθε σημείο έχει γειτονιά V που να τέμνει μόνο πεπερασμένες το πλήθος μεταφορές $g \cdot V$, του V. Αν σε αυτήν την ερμηνεία προσθέσουμε την λέξη "ελεύθερα", τότε η even δράση μας, θα σημαίνει freely and properly discontinuously.

Ορισμός 2.1.8. *Έστω $p_1 : (Y_1, y_1) \to (X, x)$ και $p_2 : (Y_2, y_2) \to (X, x)$ καλυπτικές απεικονίσεις του χώρου X. Ένας ομομορφισμός του χώρου (Y_1, y_1) στον χώρο (Y_2, y_2) είναι μία συνεχής απεικόνιση $\varphi : Y_1 \to Y_2$ τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταδετικό:*

$$\begin{tikzcd} (Y_1, y_1) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (Y_2, y_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (X, x) & \end{tikzcd}$$

Αν η φ είναι ένας ομοιομορφισμός των τοπολογικών χώρων Y_1 και Y_2, τότε προκύπτει ένας ισομορφισμός καλυπτικών χώρων. Σε αυτήν την περίπτωση οι καλυπτικοί χώροι ονομάζονται ισόμορφοι (ή ισοδύναμοι).

Πόρισμα 2.1.9. *Έστω φ_1, φ_0 ομομορφισμοί του χώρου (Y_1, y_1) στον χώρο (Y_2, y_2). Αν υπάρχει $y \in Y_1 : \varphi_1(y) = \varphi_0(y)$, τότε $\varphi_1 = \varphi_0$.*

Πράγματι αν $\varphi_1(y) = \varphi_0(y)$, θα είχαμε ότι $p_2 \circ \varphi_1(y) = p_2 \circ \varphi_0(y) = p_1(y)$ και το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το [27, λήμμα 1.4].

Πόρισμα 2.1.10. *Η ομάδα των $Aut(Y/X)$ δρα ελεύθερα στον χώρο Y.*

Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ καλυπτική απεικόνιση Έστω $\varphi \in Aut(Y/X)$ και $y \in Y$ με $\varphi(y) = y$. Τότε $p_2 \circ \varphi(y) = p_2(y)$ και άρα $\varphi = id$.

Λήμμα 2.1.11. *Έστω $(Y_1, p_1), (Y_2, p_2)$ καλυπτικοί χώροι του X και $y_i \in Y_i$, με $\{i = 1, 2\}$, να είναι σημεία έτσι ώστε: $p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ ανν $p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1)) \subset p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2))$.*

Αν υπάρχει τέτοιο φ, θα έχω ότι $p_2 \circ \varphi = p_1$, δηλαδή η φ είναι ανόρθωση της p_1. Από το [27, θεώρημα 1.7] έπεται το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.1.12. *Με τις προϋποθέσεις του προηγούμενου λήμματος, υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi : (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$, ανν $p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2))$.*

Θα έχουμε ότι:

$$p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2)) \cong \pi_1(Y_2, y_2) \cong^{2} \pi_1(Y_1, y_1) \cong p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1)).$$

Σαν μία ειδική περίπτωση αυτού, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πόρισμα 2.1.13. *Αν (Y, p) καλυπτικός χώρος του X, με $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ και $x \in X$, τότε υπάρχει $\varphi \in Aut(Y/X)$ με $\varphi(y_1) = y_2$, ανν $p_*(\pi_1(Y, y_1)) = p_*(\pi_1(Y, y_2))$.*

Θεώρημα 2.1.14. *Δύο καλυπτικοί χώροι (Y_1, p_1) και (Y_2, p_2) του χώρου X, είναι ισόμορφοι ανν για κάθε δύο $y_1 \in Y_1$ και $y_2 \in Y_2$ με $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x \in X$ οι υποομάδες $p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1))$ και $p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2))$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας στον $\pi_1(X, x)$.*

Καθώς οι δύο καλυπτικοί χώροι είναι ισόμορφοι, από πόρισμα 2.1.12, θα έχουμε ότι $p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2))$. Τώρα $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ και από [27, θεώρημα 1.6], έπεται το ζητούμενο.
Το θεώρημα μας λέει ότι η κλάση συζυγίας των υποομάδων που αναφέρεται στο [27, θεώρημα 1.6], καθορίζει απόλυτα τον καλυπτικό χώρο up to isomorphism.

[2] ένας ομοιομορφισμός επάγει ισομορφισμό των εμπλεκόμενων θεμελιωδών ομάδων.

Λήμμα 2.1.15. *Έστω καλυπτικοί χώροι (Y_1, p_1) και (Y_2, p_2) του χώρου X και φ ένας ομομορφισμός ανάμεσά τους. Τότε ο (Y_1, φ) είναι καλυπτικός χώρος του Y_2.*

Απόδειξη. Κάθε σημείο $x \in X$ έχει μία δρομοσυνεκτική γειτονιά U, έτσι ώστε να είναι ομαλά καλυμμένη και από τις δύο καλυπτικές απεικονίσεις p_1, p_2 ταυτόχρονα: Αν U_1 είναι ομαλά καλυμμένη από την p_1 και U_2 ομαλά καλυμμένη από την p_2 τότε θέτοντας $U = U_1 \cap U_2$, θα προκύψει η ζητούμενη γειτονιά.
Θα δείξουμε ότι η φ είναι επί: Αν $y \in Y_2$ θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in Y_1 : \varphi(x) = y$. Επιλέγοουμε βάση $y_1 \in Y_1$ και $y_2 = \varphi(y_1)$ με $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x$. Παίρνουμε $f : I \to Y_2$ με αρχή το y_2 και τέλος το σημείο y. Έστω $g = p_2 \circ f$ να είναι η εικόνα του παραπάνω δρόμου μέσω της p_2 στον χώρο X, με αρχή το σημείο x. Από το λήμμα ανόρθωσης δρόμων, υπάρχει μοναδική ανόρθωση σε δρόμο h στον χώρο Y_1, με αρχή το σημείο y_1, τέτοια ώστε $p_1 \circ h = g$. Έστω να έχει τέλος το σημείο x. Θα δείξουμε ότι $\varphi(x) = y$. Οι δρόμοι $\varphi \circ h$ και f έχουν την ίδια αρχή, το y_2 και ισχύει $p_2 \circ \varphi \circ h = p_1 \circ h = g = p_2 \circ f \implies \varphi \circ h = f$, από μοναδικότητα ανόρθωσης δρόμων. Έτσι $\varphi(x) = y$.
Έτσι διαλέγουμε ομαλά καλυμμένη περιοχή του τυχαίου $z \in Y_2$ ως εξής: παίρνουμε U ανοικτή περιοχή του $x = p_2(z)$, η οποία είναι ομαλά καλυμμένη και από τις δύο καλυπτικές απεικονίσεις με τον τρόπο που περιγράψαμε στην αρχή. Θέτω W, να είναι το φύλλο της $p_2^{-1}(U)$ που περιέχει το z. Η W είναι ομαλά καλυμμένη από την φ. □

Έστω (Y, p) καλυπτικός χώρος του X, με Y απλά συνεκτικό χώρο. Αν (Y', p') είναι ένα τυχαίο, διαφορετικό κάλυμμα του X, τότε από το λήμμα 2.1.11, υπάρχει ομομορφισμός φ του (Y, p) στον (Y', p') και από το παραπάνω λήμμα ο (Y, φ) είναι ένας καλυπτικός χώρος του Y'. Αυτός είναι ο λόγος που ένας απλά συνεκτικός καλυπτικός χώρος ονομάζεται καθολικός καλυπτικός χώρος. Επίσης από το θεώρημα 2.1.14 κάθε δύο καθολικοί καλυπτικοί χώροι είναι ισόμορφοι.

2.2 Η δράση της Ομάδας $\pi_1(X, x)$ στο Σύνολο $p^{-1}(x)$.

Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ καλυπτική απεικόνιση, ορίζω δράση της ομάδας $\pi_1(X, x)$ στο σύνολο $p^{-1}(x)$ για κάθε $x \in X$ έτσι ώστε η $\pi_1(X, x)$ να δρα από δεξιά στο σύνολο $p^{-1}(x)$.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω (Y, p) καλυπτικός χώρος του X, με $x \in X$. Για κάθε $y \in p^{-1}(x)$ και για κάθε $[a] \in \pi_1(X, x)$, ορίζω $y \cdot [a] \in p^{-1}(x)$ ως εξής: Από το λήμμα ανόρθωσης δρόμων και το [27, θεώρημα 1.5], υπάρχει μοναδική κλάση δρόμων του Y, έστω $[\tilde{a}]$, τέτοια ώστε $p_*([\tilde{a}]) = [a]$ με αρχή το σημείο y. Ορίζω $y \cdot [a]$ να είναι το τέλος της κλάσης δρόμων $[\tilde{a}]$, δηλαδή $y \cdot [a] := [\tilde{a}](1)$.*

Ισχύουν τα εξής:

$$(y \cdot [a]) \cdot [\beta] = y([a] \cdot [\beta]) \text{ και } y \cdot [e_x]^3 = y.$$

Συμπεραίνουμε ότι η $\pi_1(X, x)$ από δεξιά στο σύνολο $p^{-1}(x)$. Θα δείξουμε ότι η δράση αυτή είναι μεταβατική, δηλαδή για κάθε $y_1, y_0 \in p^{-1}(x)$ υπάρχει $[a] \in \pi_1(X, x) : \; y_0 \cdot [a] = y_1$. Πράγματι καθώς έχουμε υποθέσει ότι ο χώρος Y είναι

[3]με $[e_x]$ συμβολίζω την κλάση που αποτελείται από τα κλειστά μονοπάτια με βάση το x, που είναι ομοτοπική με το τετριμμένο, δηλαδή το σημείο x.

δρομοσυνεκτικός, υπάρχει κλάση δρόμων $[\tilde{a}]$ από το y_0 στο y_1. Θέτω $[a] = p_*([\tilde{a}])$. Το $[a]$ είναι κλάση κλειστών μονοπατιών και $y_0 \cdot [a] = y_1$.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα και ορισμούς από την θεωρία ομάδων που θα μας βοηθήσουν να πλησιάσουμε τον σκοπό μας. Όταν μία ομάδα G δρα σε ένα σύνολο E από αριστερά, τότε λέμε ότι ο E είναι ένας αριστερός G-χώρος. Αν η G δρα μεταβατικά στον E, τότε ο E ονομάζεται ομογενής (homogeneous) G-χώρος. Από τον τρόπο που ορίσαμε την δράση ομάδας (συνθήκη 3) προκύπτει ότι η απεικόνιση $E \to E$ που απεικονίζει $y \mapsto g \cdot y$ είναι ένας ομοιομορφισμός του E και συνεπώς μια μετάθεση του E. Έτσι έχουμε:

Θεώρημα 2.2.2. *Αν E είναι ένας αριστερός G-χώρος, τότε για κάθε $g \in G$, η απεικόνιση $E \to E$ που απεικονίζει $y \mapsto g \cdot y$ είναι μια μετάθεση του E.*

Ορισμός 2.2.3. *Έστω E_1, E_2, να είναι αριστεροί G-χώροι. Μία απεικόνιση $f : E_1 \to E_2$ ονομάζεται απεικόνιση αριστερών G-χώρων (ή G-equivariant) αν*

$$f(g \cdot y) = g \cdot (fy)$$

για κάθε $g \in G$ και $y \in E$. Μία απεικόνιση f αριστερών G-χώρων καλείται ισομορφισμός αριστερών G-χώρων, αν η f είναι 1-1 και επι, με την αντίστροφή της, να είναι και αυτή μία απεικόνιση αριστερών G-χώρων.

Έστω E, ένας τυχαίος ομογενής αριστερός G-χώρος. Διαλέγουμε $y_0 \in E$ και θέτουμε:

$$H = \{g \in G : \ g \cdot y_0 = y_0\}$$

Η H είναι υποομάδα της G και ονομάζεται υποομάδα ισοτροπίας ή σταθεροποιητής του y_0.

Παρατήρηση 2.2.4. *Κάθε ομογενής G-χώρος E, είναι ισόμορφος με κάποιο G/H.*

Παίρνουμε την απεικόνιση $G \to E$ με τύπο $g \mapsto g \cdot y_0$. Η απεικόνιση είναι επί καθώς ο E είναι ομογενής G-χώρος. Θέτω $H = \{g \in G : \ g \cdot y_0 = y_0\}$. Για να απεικονίζονται δύο στοιχεία $g_1, g_2 \in G$ στο ίδιο στοιχείο του E θα πρέπει $g_1 \cdot y_0 = g_2 \cdot y_0 \Leftrightarrow g_2^{-1} \cdot g_1 = y_0 \Leftrightarrow g_2^{-1} \cdot g_1 \in H$. Δηλαδή θα πρέπει να ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο της H. Έτσι, η απεικόνιση $G \to E$ επάγει μία 1-1 και επί απεικόνιση $f : G/H \to E$. Μάλιστα η f είναι ένας ισομορφισμός αριστερών G-χώρων και οι $G/H, E$ είναι ισόμορφοι αριστεροί G-χώροι. □

Τώρα έστω G δρα μεταβατικά σε ένα σύνολο E από δεξιά, τότε λέμε ότι ο E είναι ένας ομογενής δεξιός G-χώρος. Έστω $\varphi : E \to E$ ένας αυτομορφισμός του E. Τότε για κάθε $y \in E$ τα σημεία $y, \varphi(y)$ έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή. Αντίστροφα έστω $x, y \in E$ που έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varphi \in Aut(E)$ έτσι ώστε $\varphi(x) = y$. Ορίζουμε την φ ως εξής. Έστω $z \in E$. Τότε από την μεταβατική δράση της G υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $z = x \cdot g$. Δηλαδή πρέπει να έχουμε

$$\varphi(z) = \varphi(x \cdot g) = (\varphi x) \cdot g = y \cdot g.$$

Έτσι ορίζουμε $\varphi(z) = y \cdot g$. Πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του g, δηλαδή αν $x \cdot g = x \cdot g'$, τότε $y \cdot g = y \cdot g'$, κάτι που προκύπτει από την υπόθεση ότι τα x, y έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή.

Λήμμα 2.2.5. *Μία ομάδα A από αυτομορφισμούς ενός ομογενούς G-χώρου E είναι ολόκληρη η ομάδα $Aut(E)$ αν και μόνο αν για κάθε δύο σημεία $x, y \in E$ που έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή, υπάρχει ένας αυτομορφισμός $\varphi \in A$, έτσι ώστε $\varphi(x) = y$.*

Έστω H υποομάδα της G τότε:

$$N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

είναι υποομάδα της G που περιέχει την H και ονομάζεται ο κανονικοποιητής (normalizer) της H. Είναι η μεγαλύτερη υποομάδα του G που περιέχει την H σαν κανονική υποομάδα. Προφανώς αν $H \rhd G$ τότε $N(H) = G$.

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω E ένας ομογενής G-χώρος και έστω H, να είναι ο σταθεροποιητής ενός $y \in E$. Τότε η ομάδα αυτομορφισμών του E είναι ισόμορφη με την ομάδα $N(H)/H$.*

Από τα παραπάνω είναι τώρα ξεκάθαρο, ότι το σύνολο $p^{-1}(x)$ είναι ένας ομογενής δεξιός $\pi_1(X, x)$-χώρος. Για κάθε $y \in p^{-1}(x)$ ο σταθεροποιητής αυτού του y, είναι η υποομάδα $p_*(\pi_1(Y, y))$ της $\pi_1(X, x)$. Συνεπώς θα έχουμε το σύνολο $p^{-1}(x)$, σαν ένας ομογενής δεξιός $\pi_1(X, x)$-χώρος, να είναι ισόμορφος με την συλλογή συμπλόκων $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(Y, y))$ (παρατήρηση 2.2.4) και ο αριθμός των φύλλων της καλυπτικής απεικόνισης ισούται με τον δείκτη της υποομάδας $p_*(\pi_1(Y, y))$.

Πρόταση 2.2.7. *Για κάθε αυτομορφισμό $\varphi \in Aut(Y/X)$, κάθε σημείο $y \in p^{-1}(x)$ και $[a] \in \pi_1(X, x)$ έχουμε:*

$$\varphi(y \cdot [a]) = (\varphi y) \cdot [a],$$

δηλαδή κάθε $\varphi \in Aut(Y/X)$ επάγει έναν αυτομορφισμό του συνόλου $p^{-1}(x)$, παίρνοντας το $p^{-1}(x)$ σαν έναν δεξιό $\pi_1(X, x)$-χώρο.

Απόδειξη. Ανορθώνουμε το $[a]$ σε κλάση δρόμων $[\tilde{a}]$ στον χώρο Y, με αρχή το σημείο y έτσι ώστε $p_*([\tilde{a}]) = [a]$. Τότε $y \cdot [a]$ θα είναι το τέλος των δρόμων $[\tilde{a}]$. Τώρα παίρνοντας τους δρόμους $\varphi_*([\tilde{a}])$ στον Y, θα έχουν αρχή το $\varphi(y)$ και τέλος το σημείο $\varphi(y \cdot [a])$. Θα ισχύει ότι:

$$p_*(\varphi_*([\tilde{a}]) = (p \circ \varphi)_*([\tilde{a}])^4 = p_*([\tilde{a}]) = [a].$$

Έτσι η κλάση δρόμων $\varphi_*([\tilde{a}])$, αποτελούν ανόρθωση της κλάσης $[a]$ και συνεπώς από μοναδικότητα ανόρθωσης, θα πρέπει να ταυτίζονται με το $[\tilde{a}]$. Έτσι

$$y \cdot [a] = (\varphi y) \cdot [a] = \varphi(y \cdot [a]).$$

□

Θεώρημα 2.2.8. *Έστω (Y, p) καλυπτικός χώρος του X με $x \in X$, τότε η ομάδα $Aut(Y/X)$ είναι ισόμορφη με την $Aut(p^{-1}(x))$, παίρνοντας το $p^{-1}(x)$ σαν έναν δεξιό $\pi_1(X, x)$-χώρο.*

Απόδειξη. Αν $\varphi \in Aut(Y/X)$, τότε ο περιορισμός $\varphi|_{p^{-1}(x)}$ είναι ένας αυτομορφισμός της $p^{-1}(x)$, σαν ένας δεξιός $\pi_1(X, x)$-χώρος, από το προηγούμενο θεώρημα. Επίσης, κάθε αυτομορφισμός φ, εξαρτάται μόνον από τον περιορισμό του $\varphi|_{p^{-1}(x)}$, δηλαδή η απεικόνιση

$$k : \varphi \to \varphi|_{p^{-1}(x)}$$

[4]βλέπε functorial ιδιότητες των επαγόμενων ομομορφισμών [26], σελ.16.

είναι 1-1. Πράγματι $Kerk = \{\varphi \in Aut(Y/X) : k(\varphi) = id\}$. Από το πόρισμα 2.1.10 η φ δρα ελεύθερα στον Y και συνεπώς $\varphi = id$ και η k είναι 1-1. Αρκεί να δείξουμε ότι η k είναι επί. Από το λήμμα 2.2.5, οι αυτομορφισμοί που επάγουν οι $Aut(Y/X)$ είναι όλη η ομάδα $Aut(p^{-1}(x))$, αν και μόνο αν για κάθε $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ με τους σταθεροποιητές αυτών των y_i να είναι ίσοι, δηλαδή $p_*(\pi_1(Y, y_1)) = p_*(\pi_1(Y, y_2))$, υπάρχει $\varphi \in Aut(Y/X) : \varphi(y_1) = y_2$. Κάτι που ισχύει από το πόρισμα 2.1.13. Έτσι $k(Aut(Y/X)) = Aut(p^{-1}(x))$ και k είναι επί. □

Πόρισμα 2.2.9. *Για κάθε $x \in X$ και $y \in p^{-1}(x)$, θα έχουμε ότι:*

$$Aut(Y/X) \cong N[p_*(\pi_1(Y, y))]/p_*(\pi_1(Y, y)),$$

όπου ο $N[p_*(\pi_1(Y, y))]$ είναι ο κανονικοποιητής της υποομάδας $p_*(\pi_1(Y, y))$ του $\pi_1(X, x)$.

Από το προηγούμενο θεώρημα, θα έχουμε ότι $Aut(Y/X) \cong Aut(p^{-1}(x))$. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα 2.2.6, προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.2.10. *Αν (Y, p) κανονικός καλυπτικός χώρος του X, τότε:*

$$Aut(Y/X) \cong \pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(Y, y))$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in p^{-1}(x)$.

Προκύπτει άμεσα από το πόρισμα 2.2.9 γιατί αφού $p_*(\pi_1(Y, y)) \lhd \pi_1(X, x)$, θα έχω ότι $N[p_*(\pi_1(Y, y))] = \pi_1(X, x)$.

Πόρισμα 2.2.11. *Αν ο (Y, p) είναι καθολικός καλυπτικός χώρος του X, θα έχω $Aut(Y/X) \cong \pi_1(X, x)$*

2.3 Κανονικοί Καλυπτικοί Χώροι και Χώροι Πηλίκα.

Έστω (Y, p) καλυπτικός χώρος του X. Επειδή η p είναι μία ανοικτή απεικόνιση, ο X έχει την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την p. Έτσι μπορούμε να πάρουμε τον X από τον Y ταυτίζοντας συγκεκριμένα σημεία: Για κάθε $x \in X$, όλα τα σημεία του συνόλου $p^{-1}(x)$, πρέπει να ταυτιστούν σε ένα σημείο. Η ομάδα $Aut(Y/X)$, μεταθέτει όλα τα σημεία του συνόλου $p^{-1}(x)$, μεταξύ τους. Γενικά δεν ισχύει ότι $Y/Aut(Y/X) \cong X$. Μπορεί να υπάρχουν $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ και $\nexists \varphi \in Aut(Y/X)$ έτσι ώστε $\varphi(y_1) = y_2$. Δηλαδή οι $Aut(Y/X)$ να μην δρουν μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$.

Λήμμα 2.3.1. *Αν (Y, p) καλυπτικός χώρος του X, η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(Y/X)$ δρα μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$, με $x \in X$ ανν ο (Y, p) είναι κανονικός καλυπτικός χώρος.*

Απόδειξη. Η ομάδα $Aut(Y/X)$ δρα μεταβατικά στον $p^{-1}(x)$ αν για κάθε $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ υπάρχει φ έτσι ώστε $\varphi(y_1) = y_2$. Αυτό, από το πόρισμα 2.1.13, αυτό θα συμβαίνει ανν $p_*(\pi_1(Y, y_1)) = p_*(\pi_1(Y, y_2))$. Οι υποομάδες $p_*(\pi_1(Y, y))$ για $y \in p^{-1}(x)$ αποτελούν μία κλάση συζυγίας από υποομάδες του $\pi_1(X, x)$. Έτσι $p_*(\pi_1(Y, y_1)) = [a] * p_*(\pi_1(Y, y_2)) * [\bar{a}]$. Από την κανονικότητα του καλυπτικού χώρου έπεται ότι $p_*(\pi_1(Y, y_1)) = p_*(\pi_1(Y, y_2))$. □

Είδαμε ότι αν το (Y, p) είναι κανονικός καλυπτικός χώρος του X, τότε:

$$Y/Aut(Y/X) \cong X.$$

Ας δούμε τώρα το αντίστροφο της πρότασης 2.1.7:

Πρόταση 2.3.2. *Έστω ότι ο (Y, p) είναι καλυπτικός χώρος του X. Τότε η ομάδα $Aut(Y/X)$, δρα evenly στον Y. Επίσης αν η $Aut(Y/X)$ δρα μεταβατικά σε κάθε φύλλο της p, τότε το κάλυμμα είναι ένα κανονικό G-κάλυμμα με $Aut(Y/X) = G$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η δράση είναι even. Έστω $y \in Y$ και N μια γειτονιά του $p(y)$, η ποία είναι ομαλά καλυμμένη από την p. Παίρνουμε ένα φύλλο της p, V με $y \in V$ έτσι ώστε η $p|_V V \to N$ να είναι ένας ομοιομορφισμός. Αν $\varphi \neq \varphi' \in Aut(Y/X)$, τότε $\varphi(V)$ και $\varphi'(V)$, θα πρέπει να είναι ξένα, διαφορετικά η $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ θα έχει ένα σταθερό σημείο στο V, πράγμα άτοπο από πόρισμα 1.18. Έτσι $\varphi(V) \cap \varphi'(V) = \varphi \cdot V \cap \varphi' \cdot V = \varnothing$. Τώρα από το προηγούμενο λήμμα αν η ομάδα $Aut(Y/X)$, δρα μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$, ο Y είναι κανονικός καλυπτικός χώρος. Άρα $Y/Aut(Y/X) \cong X$ και προφανώς $G = Aut(Y/X)$. □

Παρατηρούμε ότι αν η δράση είναι μεταβατική, θα είναι και πιστή, δηλαδή το $\varphi \in Aut(Y/X)$, με $\varphi(y) = y'$ είναι μοναδικό. Από το θεώρημα 2.2.10 και την πρόταση 2.3.2 παίρνουμε το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 2.3.3. *Αν (Y, p) είναι ένας κανονικός καλυπτικός χώρος του X, τότε ο Y είναι ένα κανονικό G-κάλυμμα και*

$$G = Aut(Y/X) \cong \pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(Y, y))$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in p^{-1}(x)$. Αν ο Y είναι απλά συνεκτικός χώρος τότε $\pi_1(X) \cong G = Aut(Y/X)$.

Είδαμε ότι ένας καλυπτικός χώρος (Y, p) του X καθορίζεται πλήρως από την κλάση συζυγίας της υποομάδας $p_*(Y, y)$ του $\pi_1(X, x)$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι ότι: αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και αν μας δίνεται μία κλάση συζυγίας από υποομάδες του $\pi_1(X, x)$, υπάρχει καλυπτικός χώρος (Y, p) του X έτσι ώστε η $p_*(Y, y)$ να ανήκει σε αυτήν την κλάση συζυγίας;

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος, που έχει καθολικό καλυπτικό χώρο. Τότε για κάθε κλάση συζυγίας από υποομάδες της $\pi_1(X, x)$, υπάρχει καλυπτικός χώρος (Y, p) του X, έτσι ώστε η $p_*(\pi_1(Y, y))$ να ανήκει σε αυτήν την κλάση συζυγίας.*

Απόδειξη. Έστω $(\tilde{X}, q)$ ο καθολικός καλυπτικός χώρος του X. Η $\pi_1(X, x)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο $q^{-1}(x)$ από δεξιά, και καθώς ο Y είναι απλά συνεκτικός δρα ελεύθερα. Επίσης και η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x)$ δρα μεταβατικά (κάθε καθολικό κάλυμμα είναι και κανονικό) από αριστερά, στο σύνολο $q^{-1}(x)$. Διαλέγουμε ένα σημείο $\tilde{x} \in q^{-1}(x)$ και υποομάδα G που ανήκει στην κλάση συζυγίας που μας δίνεται. Έστω H να είναι υποομάδα των αυτομορφισμών $Aut(\tilde{X}/X)$ που ορίζεται ως εξής: $\varphi \in H$ αν και μόνο αν υπάρχει στοιχείο $[a] \in G$ τέτοιο ώστε $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot [a] \in q^{-1}(x)$. Στο δεξί μέλος της ισότητας έχουμε την δράση του αυτομορφισμού φ στην $q^{-1}(x)$ ενώ στο αριστερό μέλος της ισότητας την δράση του στοιχείου της ομάδας G στον $q^{-1}(x)$. Είδαμε ότι (ορισμός 2.2.1) $G \cong H$ μέσω της αντιστοιχίας $\varphi \leftrightarrow [a]$, αν και μόνο ανν $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot [a]$.
Επειδή $H \leq Aut(\tilde{X}/X)$, η H δρα evenly στον $\tilde{X}$. Έστω Y να δηλώνει τον χώρο πηλίκο $\tilde{X}/H$, $r : \tilde{X} \to Y$, να είναι η φυσική προβολή και $p : Y \to X$ να είναι η απεικόνιση που επάγει η $q : \tilde{X} \to X$. Έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα έτσι ώστε $p \circ r = q$:

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "q"'] & & (Y, y) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x) &
\end{tikzcd}$$

Όπου ο $(\tilde{X}, q)$ καλυπτικός χώρος του X (από υπόθεση), ο $(\tilde{X}, r)$ είναι ένας H-καλυπτικός χώρος του Y (από λήμμα 2.1.4) και (Y, p) καλυπτικός χώρος του X από το λήμμα 2.1.15 γιατί αποτελεί έναν ομομορφισμό καλυπτικών χώρων. Αρκεί να δείξω ότι $G \cong p_*(\pi_1(Y, y))$. Έχω ότι $p : Y = \tilde{X}/H \to X$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση, έτσι $p_*(\pi_1(Y, y)) \cong \pi_1(Y, y)$ και από το πόρισμα 2.3.3 θα έχουμε $\pi_1(Y, y) \cong H \cong G$, έτσι $G \cong p_*(\pi_1(Y, y))$. □

Ορισμός 2.3.5. *Ένας χώρος X ονομάζεται τοπικά απλά συνεκτικός αν κάθε γειτονιά ενός σημείου του, περιέχει μια γειτονιά του σημείου που είναι απλά συνεκτική.*

Ορισμός 2.3.6. *Ένας χώρος X ονομάζεται semilocally απλά συνεκτικός αν κάθε σημείο του έχει γειτονιά τέτοια ώστε κάθε κλειστό μονοπάτι σε αυτήν την γειτονιά είναι ομοτοπικό με το τετριμμένο. Ισοδύναμα αν κάθε σημείο $x \in X$ έχει γειτονιά V έτσι ώστε ο επαγώμενος από τον εγκλεισμό ομομορφισμός $i_* : \pi_1(V, x) \to \pi_1(X, x)$ είναι ο μηδενικός, δηλαδή απεικονίζει κάθε στοιχείο της $\pi_1(V, x)$ στο ταυτοτικό και συνεπώς η i είναι μη ουσιώδης[5] συνάρτηση (null-homotopic).*

Είναι προφανές ότι αν ένας χώρος είναι τοπικά απλά συνεκτικός, τότε θα είναι και semilocally απλά συνεκτικός. Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι ένας συνεκτικός και τοπικά δρομοσυνεκτικός χώρος έχει καθολικό καλυπτικό χώρο αν και μόνο αν είναι semilocally απλά συνεκτικός. Για τα παρακάτω, υποθέτουμε ότι ο χώρος X είναι συνεκτικός, τοπικά δρομοσυνεκτικός και semilocally απλά συνεκτικός, έτσι ώστε να έχει καθολικό καλυπτικό χώρο.
Φτάσαμε στον σκοπό μας, που είναι να βρούμε την αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των υποομάδων της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου και των καλυμμάτων του χώρου αυτού. Το παρακάτω αποτέλεσμα θα είναι μια φυσική συνέπεια της μέχρι τώρα πορείας μας:

Θεώρημα 2.3.7. (i) *Για κάθε υποομάδα H του $\pi_1(X, x)$ υπάρχει ένα συνεκτικό κάλυμμα: $p_H : (Y_H, y_H) \to (X, x)$, με $y_H \in p^{-1}(x)$, έτσι ώστε η εικόνα του $\pi_1(Y_H, y_H)$ στην $\pi_1(X, x)$, μέσω της p_{H_*} να είναι η υποομάδα H. Κάθε άλλο τέτοιο κάλυμμα (ως προς την επιλογή βάσης) είναι ισόμορφο με αυτό.*

(ii) *Αν K είναι μία άλλη υποομάδα του $\pi_1(X, x)$, που περιέχει το H, υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $p_{H,K} : (Y_H, y_H) \to (Y_K, y_K)$ που είναι συμβατή με τις προβολές στον X. Αυτή είναι καλυπτική απεικόνιση και αν $H \lhd K$, τότε είναι ένα G-κάλυμμα με $G = K/H$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $(\tilde{X}, u)$ να είναι ο καθολικός καλυπτικός χώρος του X. Αφού $H \leq \pi_1(X, x)$, από το θεώρημα 2.3.4 υπάρχει καλυπτικός χώρος (Y_H, p_H) του X, έτσι ώστε η $p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) = H$. Έστω $p'_H : (Y_H, y'_H) \to (X, x)$ μία άλλη καλυπτική απεικόνιση με $p(y_H) = p(y_K) = x$ και $p'_{H_*}(\pi_1(Y_H, y'_H)) = H$. Από το πόρισμα 2.1.13 θα έχουμε ότι οι δύο αυτοί καλυπτικοί χώροι θα είναι ισόμορφοι γιατί $p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) = p'_{H_*}(\pi_1(Y_H, y'_H))$ (ο p_* είναι ανεξάρτητος από την επιλογή βάσης.)

(ii) Όμοια υπάρχει (Y_K, p_K) καλυπτικός χώρος του X, έτσι ώστε $p_{K_*}(\pi_1(Y_K, y_K)) = K$. Έτσι θα έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

[5] βλέπε [26] σελίδα 56.

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[dl, "r_K"'] \arrow[dr, "r_H"] & \\ Y_K & \downarrow & Y_H \\ & (X,x) \arrow[from=ul, "p_K"'] \arrow[from=ur, "p_H"] & \end{tikzcd}$$

Αν τώρα $H \subset K$ υπάρχει $p_{H,K}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} (Y_H, y_H) \arrow[rr, "p_{H,K}"] \arrow[dr, "p_H"'] & & (Y_K, y_K) \arrow[dl, "p_K"] \\ & (X,x) & \end{tikzcd}$$

Πράγματι, από το [27, θεώρημα 1.7] θα έχω ότι υπάρχει μοναδική ανόρθωση της p_H με $p_K \circ p_{H,K} = p_H$ ανν $H = p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \subset p_{K_*}(\pi_1(Y_K, y_K)) = K$. Τώρα αφού η $p_{H,K}$ είναι ένας ομομορφισμός καλυπτικών απεικονίσεων, σύμφωνα με το λήμμα 2.1.15, θα είναι μία καλυπτική απεικόνιση.
Αν $H = p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \lhd p_{K_*}(\pi_1(Y_K, y_K)) = K$ τότε από το πρόταση 2.3.2 και το θεώρημα 2.2.10, ο χώρος $(Y_H, p_{H,K})$, θα είναι ένας G-καλυπτικός χώρος με

$$G = \pi_1(Y_K, y_K)/p_{H,K_*}(\pi_1(Y_H, y_H)).$$

Όμως $\pi_1(Y_K, y_K) \cong p_{K_*}(\pi_1(Y_K, y_K)) = K$, γιατί η p_{K_*} είναι μονομορφισμός. Όμοια $p_{H,K_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \cong \pi_1(Y_H, y_H) \cong H$.Έτσι $G \cong K/H$.

□

Πόρισμα 2.3.8. *Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ όλων των υποομάδων H της $\pi_1(X,x)$ και όλων των καλυπτικών κλάσεων[6] $[p_H : (Y_H, y_H) \to (X,x)]$. Δηλαδή:*

$$H = p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \longleftrightarrow [p_H : (Y_H, y_H) \to (X,x)].$$

Θα έχουμε την εξής αντιστοιχία:

$$\begin{array}{ccccc} (\tilde{X},\tilde{x}) & \leftrightarrow & \{e\} & = & Aut(\tilde{X}/\tilde{X}) \\ \downarrow & & \cap & & \wedge \\ (Y_H, y_H) & \leftrightarrow & H & = & Aut(\tilde{X}/H) \\ \downarrow & & \cap & & \wedge \\ (Y_K, y_K) & \leftrightarrow & K & = & Aut(\tilde{X}/K) \\ \downarrow & & \cap & & \wedge \\ (X,x) & \leftrightarrow & G & = & Aut(\tilde{X}/X) \end{array}$$

Αν η H είναι κανονική υποομάδα της K, τότε ο καλυπτικός χώρος $(Y_H, p_{H,K})$ θα είναι ένα K/H-κάλυμμα. Τότε θα έχουμε ότι:

$$K/H \cong Aut(\tilde{X}/Y_K)/Aut(\tilde{X}/Y_H) \cong Aut(Y_H/Y_K).$$

Κάθε κάλυμμα $Y_H \to X$, που αντιστοιχεί στην H, μπορεί να ταυτιστεί με το $\tilde{X}/H \to X$, με H να είναι μια υποομάδα των $Aut(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X,x)$, που δρα στον $\tilde{X}$. Κανονικά καλύμματα του χώρου X αντιστοιχούν σε κανονικές υποομάδες H. Έτσι

[6] δηλαδή των καλυπτικών χώρων του X που αντιστοιχούν στην υποομάδα H modulo(ισομορφισμοί καλυπτικών χώρων).

κάθε κανονικό κάλυμμα $p : Y \to X$, έχει την μορφή $\tilde{X}/H \to X$ και είναι G-κάλυμμα (πρόταση 2.3.3), με

$$\pi_1(X, x)/H \cong Aut(Y/X) \cong G.$$

Βλέπουμε ότι οι μικρότερες υποομάδες της $\pi_1(X, x)$ και συνεπώς οι μικρότερες υποομάδες της $Aut(\tilde{X}/X)$, αντιστοιχούν σε μεγαλύτερα καλύμματα.

2.4 Θεωρία Galois.

Έστω F, K σώματα με $K \subset F$, τότε το F είναι μία επέκταση του K.

Ορισμός 2.4.1. *Έστω F επέκταση του σώματος K. Ορίζουμε την Galois ομάδα της επέκτασης αυτής να είναι:*

$$Gal(F/K) = \{\sigma \in Aut(F) : \ \sigma(k) = k \, \forall \, k \in K\}.$$

Ορίσαμε την ομάδα Galois να αποτελείται από εκείνους τους αυτομορφισμούς του σώματος F, που αφήνουν σημειακά σταθερό το σώμα K, με $Gal(F/K) \leq Aut(F)$.
Για την συνέχεια θα παρουσιάσουμε σύντομα κάποια αποτελέσματα της θεωρίας Galois με βάση τους [21] και [7], με σκοπό να φτάσουμε στο θεμελιώδες θεώρημα της εν λόγο θεωρίας. Ένα ανάγωγο πολυώνυμο f ονομάζεται διαχωρίσιμο αν για κάθε ρίζα του ρ, το $f'(\rho) \neq 0$, δηλαδή αν δεν έχει ρίζες πολλαπλότητας μεγαλύτερης της μονάδας.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $f(x) \in F[x]$ είναι ένα διαχωρίσιμο πολυώνυμο και F είναι μία επέκταση του σώματος K. Αν F είναι το splitting field του f τότε:*

$$|Gal(F/K)| = [F : K].$$

Ορισμός 2.4.3. *Έστω F σώμα. Αν $G \subset Aut(F)$ τότε θέτουμε το*

$$F^G = \{f \in F : \ \sigma(f) = f \, \forall \sigma \in G\}.$$

να είναι το σταθερό σώμα του G στον F.

Παρατηρούμε ότι το F^G είναι ένα υπόσωμα του F. Ο παραπάνω ορισμός είναι σημαντικός όταν το G είναι υποομάδα των $Aut(F)$. Παραμένει όμως αξιόλογος ακόμα και αν είναι ένα απλό υποσύνολο, βλέποντας ότι αν

$$H \subset G \text{ τότε } F^G \subset F^H.$$

Επίσης αν F επέκταση του K και $G = Gal(F/K)$, τότε $K \subset F^G \subset F$. Κάθε σώμα ανάμεσα στο K και το F ονομάζεται ενδιάμεσο σώμα. Στην περίπτωση που η G είναι υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών του F θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

(i) Αν G είναι μία υποομάδα της $Aut(F)$ τότε $[F : F^G] = |G|$.

(ii) Αν G, H είναι πεπερασμένες υποομάδες της $Aut(F)$ με $F^G = F^H$, τότε $G = H$.

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω F να είναι μία πεπερασμένη επέκταση του σώματος K με ομάδα Galois $G = Gal(F/K)$. Θα λέμε ότι είναι μία Galois επέκταση αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνδήκες:*

(i) $K = F^G$.

(ii) *Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $p(x) \in K[x]$, το οποίο έχει ρίζες στο F, είναι διαχωρίσιμο και έχει όλες τις ρίζες του στο σώμα F.*

(iii) *Το σώμα F αποτελεί το splitting field κάποιου διαχωρίσιμου πολυωνύμου $f(x) \in K[x]$.*

2.5 Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Galois.

Θεώρημα 2.5.1 (Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois). *Έστω F πεπερασμένου βαθμού επέκταση Galois επί του K, με ομάδα Galois την $G = Gal(F/K)$, $K = F^G$ και E ενδιάμεσο σώμα, δηλαδή $K \subset E \subset F$. Τότε υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ: όλων των ενδιάμεσων σωμάτων της επέκτασης και όλων των υποομάδων της G, που δίνεται από την $E \mapsto Gal(F/E)$ έτσι ώστε:*

(i) *Ο σχετικός βαθμός της επέκτασης δύο ενδιάμεσων σωμάτων είναι ίσος με τον σχετικό δείκτη των αντίστοιχων υποομάδων της Galois ομάδας. Συγκεκριμένα η $Gal(F/K)$, έχει τάξη $[F : K]$.*

(ii) *Η F είναι μία Galois επέκταση επί κάθε ενδιάμεσου σώματος E, αλλά το E είναι Galois επέκταση επί του K ανν η αντίστοιχη υποομάδα Galois: $Gal(F/E)$ είναι μία κανονική υποομάδα της G. Σ' αυτήν την περίπτωση θα έχουμε:*

$$Gal(F/K)/Gal(F/E) \cong Gal(E/K).$$

Η 1-1 αντιστοιχία προκύπτει αντιστοιχώντας σε κάθε ενδιάμεσο σώμα E την Galois ομάδα $Gal(F/E) \leq Gal(F/K)$.
Αντίστροφα: Αντιστοιχούμε σε κάθε υποομάδα H της $Gal(F/K)$ το σταθερό της σώμα στην F, δηλαδή $H \mapsto F^H$.
Αν L, M ενδιάμεσα σώματα της επέκτασης $K \subset F$ και J, H υποομάδες της $Gal(F/K)$ με $H \leq J$, θα έχω:

$$\begin{array}{ccccccc}
F & \longmapsto & 1 & & F & \longleftarrow & 1 \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
M & \longmapsto & Gal(F/M) & & F^H & \longleftarrow & H \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
L & \longmapsto & Gal(F/L) & & F^J & \longleftarrow & J \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
K & \longmapsto & Gal(F/K) & & K & \longleftarrow & Gal(F/K)
\end{array}$$

Λήμμα 2.5.2. *Έστω F επέκταση σώματος K, με ενδιάμεσα σώματα L, M. Έστω H, J υποομάδες της $Gal(F/K) = G$. Τότε:*

(i) $Gal(F/F) = 1$ *και* $Gal(F/K) = G$,

(ii) $F^1 = F$,

(iii) *Αν* $L \subset M \Longrightarrow Gal(F/M) < Gal(F/L)$,

(iv) $H < J \Longrightarrow F^J \subset F^H$,

(v) $L \subset F^{Gal(F/L)}$ *και* $H < Gal(F/F^H)$,

(vi) $Gal(F/L) = Gal(F/F^{Gal(F/L)})$ *και* $F^H = F^{Gal(F/F^H)}$.

Ελπίζουμε ότι το παρακάτω γράφημα θα αποσαφηνίσει τυχόν απορίες:

$$
\begin{array}{ccccccc}
F & \longmapsto & 1 & \longmapsto & F & \longmapsto & 1 \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
M & \longmapsto & Gal(F/M) & \longmapsto & F^{Gal(F/M)} & \longmapsto & Gal(F/M) \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
L & \longmapsto & Gal(F/L) & \longmapsto & F^{Gal(F/L)} & \longmapsto & Gal(F/L) \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
K & \longmapsto & Gal(F/K) & \longmapsto & F^G & \longmapsto & G
\end{array}
$$

Σχήμα 2.1: Μία επέκταση F επί του K που δεν είναι Galois.

Η παραπάνω επέκταση F είναι Galois επί του K ανν $F^G = K$. Όμοια η F είναι επέκταση Galois επί τυχαίου ενδιάμεσου σώματος E, ανν $E = F^{Gal(F/E)}$.

Ορισμός 2.5.3. *Έστω X ενδιάμεσο σώμα της επέκτασης $K \subset F$ (ή μία υποομάδα της Galois ομάδας της επέκτασης, αντίστοιχα.). Ορίζουμε το X να είναι κλειστό ανν $X = F^{Gal(F/X)}$ ($X = Gal(F/F^X$». Παρατηρούμε ότι η F είναι μία Galois επέκταση επί του K, ανν το σώμα K είναι κλειστό.*

Λήμμα 2.5.4. *Έστω F να είναι επέκταση ενός σώματος K. Υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα των κλειστών ενδιάμεσων σωμάτων της επέκτασης και των κλειστών υποομάδων της ομάδας Galois, που δίνεται από $E \mapsto Aut(F/E)$.*

Σε μία Galois επέκταση όλα τα ενδιάμεσα σώματα είναι κλειστά και στην περίπτωση που η επέκταση είναι πεπερασμένου βαθμού, όλες οι υποομάδες της ομάδας Galois είναι επίσης κλειστές. Πράγματι:

Λήμμα 2.5.5. *Αν F επέκταση ενός σώματος, L, M ενδιάμεσα σώματα με $L \subset M$ και H, J υποομάδες της ομάδας $Gal(F/K) = G$, με $H < J$, τότε:*

(i) *Αν το L είναι κλειστό σώμα και $[M : L] < \infty$, τότε το M είναι κλειστό σώμα και*

$$Gal(F/L)/Gal(F/M) = [M : L],$$

(ii) *Αν H είναι κλειστή υποομάδα και $[J : H] < \infty$, τότε η J είναι κλειστή υποομάδα με*

$$[F^H : F^J] = [J : H],$$

(iii) *Αν F είναι μία πεπερασμένη επέκταση Galois επί του K, τότε όλα τα ενδιάμεσα σώματα και όλες οι υποομάδες της ομάδας $Gal(F/K)$ είναι κλειστές με $Gal(F/K) = [F : K]$.*

Η κατάσταση περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα.

$$
\begin{array}{ccc}
F & \longleftrightarrow & 1 \\
\cup & & \wedge \\
M & \longleftrightarrow & Gal(F/M) \\
\cup & & \wedge \\
L & \longleftrightarrow & Gal(F/L) \\
\cup & & \wedge \\
K & \longleftrightarrow & G
\end{array}
$$

2.6 Διακλαδισμένα καλύμματα.

Θα συμβολίζουμε με B^k τον δίσκο $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ όπου $||\cdot||$ είναι η ευκλείδια μετρική στον $\mathbb{R}^n$. Για k^2 ο B^2 μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Θεωρούμε την μιγαδική συνάρτηση $p_m : B^2 \to B^2$, η οποία στέλνει το $z \mapsto z^m$. Η συνάρτηση p^m για $m \geq 2$ επάγει ένα τοπολογικό κάλυμμα $B^2 \backslash \{0\} \to B^2 \backslash \{0\}$. Το 0 είναι μία ρίζα πολλαπλότητας m.

Είναι γνωστό ότι συναρτήσεις μεταξύ διαφορισίμων πολλαπλοτήτων ίδιας διάστασης έχουν σταθερό πλήθος προεικόνων όσο το διαφορικό τους δεν είναι ιδιόμορφο [13, σελ. 8]. Συνεπώς αν έχουμε $f : M \to N$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση μεταξύ διαφορισίμων πολλαπλοτήτων, τότε το θεώρημα αντισρόφου απεικωνίσεως μας εξασφαλίζει ότι η f μακριά από το σύνολο που το διαφορικό της είναι ιδιόμορφο αποτελεί καλυπτική απεικόνιση.

Αν θέλουμε να δούμε τι συμβαίνει στις κρίσιμες τιμές τα πράγματα είναι αρκετά διαφορετικά στις C^∞ συναρτήσεις από τις αναλυτικές. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $f(x) = 0$ αν $x \leq 0$ και $f(x) = e^{-1/x^2}$ αν $x > 0$, είναι C^∞, άλλα $f^{-1}(0) = (\infty, 0]$. Μάλιστα όλες οι παράγωγοι της f στο 0 μηδενίζονται και αν J^k είναι το ιδεώδες του τοπικού δακτυλίου R των διαφορισίμων συναρτήσεων στο 0 που μηδενίζουν όλες $k-1$-τάξης παραγώγους τους, τότε ισχύει ότι

$$\bigcap_{k \geq 1} J^k \neq \{0\},$$

δηλαδή ο R δεν είναι δακτύλιος της Noether [30].

Αντιθέτως το θεώρημα προπαρασκευής του Weierstrass για αναλυτικές συναρτήσεις μας δίνει μια εντελώς διαφορετική συμπεριφορά για τις $\mathcal{C}^\infty$ (Βλέπε [27, Κεφάλαιο 2]).

Για να μπορέσουμε να ορίσουμε τα διακλαδισμένα καλύμματα ορίζουμε πρώτα τις συναρτήσεις $n, m \geq 2$

$$q_m : B^2 \times B^{n-2} \to B^2 \times B^{n-2}, q_m = p_m \times Id.$$

Παρατηρούμε ότι η q_m ορίζει μία καλυπτική απεικόνιση μακριά από το σύνολο $\{0\} \times B^{n-2}$.

Ορισμός 2.6.1. *Θεωρούμε τις M, N, διαφορίσιμες πολλαπλότητες διάστασης n. Έστω $p : M \to N$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση επί. Ένα σημείο της M θα λέγεται ιδιόμορφο αν η p δεν είναι τοπικός ομοιομορφισμός. Θα συμβολίζουμε με S_p το* *σύνολο των ιδιομόρφων σημείων της p. Θέτουμε $B_p = p(S_p)$ και $\tilde{B}_p = p^{-1}(B_p)$. Είναι σαφές ότι $\tilde{B}_p \supseteq S_p$. Θα λέμε ότι η p είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα αν ισχύουν τα εξής:*

- *Ο περιορισμός $p_0 : M \backslash \tilde{B}_p \to N \backslash B_p$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση.*
- *Για κάθε $x \in \tilde{B}_p$ υπάρχουν περιοχές U του x και V του $f(x)$ και ομοιομορφισμοί: $h : U \to D^2 \times D^{n-2}$, $h(x) = (0, 0)$, $h' : V \to D^2 \times D^{n-2}$, $h(p(x)) = (0, 0)$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} (U, U \cap \tilde{B}_p) \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & (D^2 \times D^{n-2}, 0 \times D^{n-2}) \arrow[d, "q_m"] \\ (V, V \cap B_p) \arrow[r] & (D^2 \times D^{n-2}, 0 \times D^{n-2}) \end{tikzcd}$$

Το σύνολο B_p θα το ονομάζουμε τόπο διακλάδωσης (branch locus).

Παρατήρηση : Αν περιοριστούμε στην περίπτωση των συμπαγών 3-πολλαπλοτήτων (χωρίς σύνορο) έχουμε παρατηρούμε ότι ότι το σύνολο διακλάδωσης είναι ένα link. Πράγματι, πρόκειται για ένα κλειστό, άρα συμπαγές, μονοδιάστατο υποσύνολο του N. Συνεπώς, θα πρέπει να είναι ένωση μονοδιάστατων υποπολλαπλοτήτων. Όμως οι μονοδιάστατες συμπαγείς πολλαπλότητες είναι ομοιομορφικές με τον κύκλο S^1 ή με το ευθύγραμμο τμήμα $[0, 1]$. Παρατηρούμε ότι ο ορισμός του διακλαδισμένου καλύμματος δεν επιτρέπει την δεύτερη περίπτωση, αφού δεν επιτρέπει σύνορο στο τόπο διακλάδωσης.

Σε αναλογία με τα σώματα αριθμών ισχύει η παρακάτω πρόταση :

Πρόταση 2.6.2 (Alexander). *Κάθε κλειστή προσανατολισμένη 3-πολλαπλότητα είναι ένα κάλλυμα του S^3 με τόπο διακλαδωσης ένα link.*

Απόδειξη. [8, Θ. Β.5.4] □

Το αποτέλεσμα αυτό θα δούμε ότι είναι παρόμοιο με το γεγονός ότι κάθε σώμα αριθμών είναι μια διακλαδισμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$.

Μέροσ II

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών και Θεωρία Σχημάτων

Κεφάλαιο 3

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών

3.1 Αλγεβρικοί Αριθμοί.

Ένας μιγαδικός αριθμός α θα λέγεται αλγεβρικός αν ικανοποιεί μια μη μηδενική πολυωνυμική εξίσωση με συντελεστές στο $\mathbb{Q}$. Ισοδύναμα (απαλείφοντας τους παρονομαστές) μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συντελεστές βρίσκονται στο $\mathbb{Z}$. Για τη συνέχεια θα θεωρήσουμε $\mathbb{A}$ να είναι το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών, το οποίο είναι σώμα σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.1. *Το σύνολο $\mathbb{A}$ των αλγεβρικών αριθμών είναι ένα υπόσωμα του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.*

Απόδειξη. Ως γνωστόν [21], ο α είναι αλγεβρικός αν και μόνο αν ο βαθμός $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ είναι πεπερασμένος.
Έστω ότι τα α,β είναι αλγεβρικά. Τότε

$$[\mathbb{Q}(a,\beta) : \mathbb{Q}(a)] = [\mathbb{Q}(a,\beta) : \mathbb{Q}(a)]\,[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$$

Τώρα, εφόσον το β είναι αλγεβρικό στο $\mathbb{Q}$ είναι σίγουρα αλγεβρικό και πάνω από το $\mathbb{Q}(a)$, οπότε ο πρώτος παράγοντας στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι πεπερασμένου βαθμού. Το α είναι επίσης αλγεβρικό στο $\mathbb{Q}$ και άρα και ο δεύτερος παράγοντας στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι πεπερασμένου βαθμού, το ίδιο και το γινόμενο αυτών.

Καθένα από τα $a + \beta$, $a - \beta$, $a\beta$ και a/β ανήκουν στο $\mathbb{Q}(a,\beta)$, επομένως ανήκουν και στο A. □

Το σώμα $\mathbb{A}$ δεν παρουσιάζει τόσο ενδιαφέρον για μας όσο παρουσιάζουν συγκεκριμένα υποσώματα του.

Ορισμός 3.1.2. *Ένα Σώμα Αριθμών ορίζουμε να είναι ένα υπόσωμα του $\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε ο βαθμός $[K : \mathbb{Q}]$ να είναι πεπερασμένος.*

Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του K είναι αλγεβρικό και άρα $K \subseteq A$. Το πρόβλημα με το $\mathbb{A}$ είναι ότι ο βαθμός $[\mathbb{A} : \mathbb{Q}]$ δεν είναι πεπερασμένος [1]. Αν K είναι ένα σώμα αριθμών τότε $K = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n)$ για πεπερασμένο το πλήθος αλγεβρικούς αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$.

[1] Βλ. [29] θεώρημα 3.7 σελ. 145

Θεώρημα 3.1.3. *Αν το K είναι ένα σώμα αριθμών τότε $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$ για κάποιον αλγεβρικό αριθμό ϑ.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιόντας επαγωγή αρκεί να δείξουμε ότι αν $K = K_1(\alpha, \beta)$, τότε $K = K_1(\vartheta)$ για κάποιο ϑ (όπου K_1 είναι ένα υπόσωμα του K).
Έστω p και q να είναι τα ελάχιστα πολυώνυμα των α και β αντίστοιχα στο K_1. Υποθέτω ότι στο $\mathbb{C}$ αυτά παραγοντοποιούνται ως εξής :

$$\begin{aligned} p(t) &= (t - \alpha_1)\dots(t - \alpha_n) \\ q(t) &= (t - \beta_1)\dots(t - \beta_m) \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τα α_i, β_j έτσι ώστε $\alpha_1 = \alpha$ και $\beta_1 = \beta$. Τα α_i, β_j είναι όλα διακεκριμένα μεταξύ τους, οπότε για κάθε i και κάθε $k \neq 1$, υπάρχει το πολύ ένα στοιχείο $x \in K$ τέτοιο ώστε

$$\alpha_i + x\beta_k = \alpha_1 + x\beta_1.$$

Αφού υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος τέτοιες εξισώσεις, μπορούμε να επιλέξουμε $c \neq 0$ στο K_1 που δεν είναι ίσο με τα παραπάνω x και τότε

$$\alpha_i + c\beta_k \neq \alpha_1 + c\beta_1$$

για $1 \leq i \leq n$, $2 \leq k \leq m$.

Ορίζουμε $\vartheta = \alpha + c\beta$. Μένει να δείξουμε ότι $K_1(\vartheta) = K_1(\alpha, \beta)$.
Προφανώς ισχύει ότι $K_1 \subseteq K_1(\alpha, \beta)$. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι $\beta \in K_1(\vartheta)$, αφού $\alpha = \vartheta - c\beta$.
Τώρα,

$$p(\vartheta - c\beta) = p(\alpha) = 0$$

και στη συνέχεια ορίζουμε το ακόλουθο πολυώνυμο

$$r(t) = p(\vartheta - ct) \in K_1(\vartheta)[t].$$

Το β θα είναι μια ρίζα του $q(t)$ αλλά και του $r(t)$ σαν πολυώνυμα πάνω από το $K_1(\vartheta)$. Αυτά τα πολυώνυμα έχουν μόνο μια κοινή ρίζα, διότι αν $q(\xi) = r(\xi) = 0$, τότε το ξ είναι ένα από τα $\beta_1, \dots, \beta_m$ και επίσης το $\vartheta - c\xi$ ένα από τα $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Η επιλογή μας όμως για το c μας περιορίζει στην περίπτωση που το $\xi = \beta$.
Ολοκληρώνοντας την απόδειξη, θεωρούμε ότι $h(t)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του β στο $K_1(\vartheta)$. Τότε θα ισχύει $h(t)|q(t)$ και $h(t)|r(t)$. Εφόσον τα q και r έχουν μόνο μια κοινή ρίζα στο $\mathbb{C}$ θα πρέπει να ισχύει $degh = 1$ και άρα το h θα είναι της μορφής

$$h(t) = t + \mu$$

για $\mu \in K_1(\vartheta)$.
Τελικά προκύπτει

$$0 = h(\beta) = \beta + \mu \Rightarrow \beta = -\mu \in K_1(\vartheta).$$

□

Παράδειγμα. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})$

Έχουμε $p(t) = t^2 - 2$ και $q(t) = t^3 - 5$ τα ελάχιστα πολυώνυμα των $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ αντίστοιχα. Στο $\mathbb{C}$ τα παραπάνω παραγοντοποιούνται ώς εξής :

$$\begin{aligned} p(t) &= (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2}) \\ q(t) &= (t - \sqrt[3]{5})(t - \omega\sqrt[3]{5})(t - \omega^2\sqrt[3]{5}) \end{aligned}$$

Όπου $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$. Προφανώς οι ρίζες των παραπάνω στο $\mathbb{C}$ είναι:

$$\begin{aligned} &a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_2 = -\sqrt{2} \\ &\beta_1 = \sqrt[3]{5} \quad , \quad \beta_2 = \omega\sqrt[3]{5} \quad , \quad \beta_3 = \omega^2\sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

Ο αριθμός $c = 1$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$a_i + c\beta_k \neq a_1 + c\beta_1$$

για $i = 1, 2$, $k = 2, 3$, αφού ο αριθμός στο αριστερό μέλος δεν σε καμία από τις τέσσερις περιπτώσεις πραγματικός ενώ στο δεξί μέλος είναι.
Επομένως

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})$$

Παρατήρηση 3.1.4. *Η έκφραση του K σαν $\mathbb{Q}(\partial)$ δεν είναι μοναδική αφού*

$$\mathbb{Q}(\partial) = \mathbb{Q}(-\partial) = \mathbb{Q}(\partial + 1) = \ldots$$

3.2 Συζυγείς και Διακρίνουσες.

Αν $K = \mathbb{Q}(\partial)$ είναι ένα σώμα αριθμών θα υπάρχουν, εν γένει, αρκετοί διαφορετικοί μονομορφισμοί $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Για παράδειγμα αν $K = \mathbb{Q}(i)$, όπου $i = \sqrt{-1}$ τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις

$$\begin{aligned} \sigma_1(x + iy) &= x + iy \\ \sigma_2(x + iy) &= x - iy \end{aligned}$$

για $x, y \in \mathbb{Q}$. Το σύνολο όλων αυτών των μονομορφισμών θα παίξει σημαντικό ρόλο στη θεωρία μας.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $K = \mathbb{Q}(\partial)$ ένα σώμα αριθμών βαθμού n πάνω από το $\mathbb{Q}$. Τότε υπάρχουν ακριβώς n διαφορετικοί μονομορφισμοί $\sigma_i : K \to \mathbb{C}$ ($i = 1, \ldots, n$). Τα στοιχεία $\sigma_i(\partial) = \partial_i$ είναι οι διαφορετικές ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου του ϑ πάνω από το $\mathbb{Q}$ μέσα στο σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Έστω $\partial_1, \ldots, \partial_n$ να είναι οι διαφορετικές ρίζεσ του ελαχίστου πολυωνύμου p του ϑ. Τότε κάθε ένα από τα ∂_i έχει επίσης ελάχιστο πολυώνυμο το p και άρα υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός σωμάτων $\sigma_i : \mathbb{Q}(\partial) \to \mathbb{Q}(\partial_i)$ έτσι ώστε $\sigma_i(\partial) = \partial_i$. Συγκεκριμένα αν $a \in \mathbb{Q}(\partial)$ τότε $a = r(\partial)$ για μοναδικό $r \in \mathbb{Q}[t]$ με $degr < n$, και θα πρέπει να έχουμε

$$\sigma_i(a) = r(\partial_i).$$

Αντίστροφα αν $\sigma : K \to \mathbb{C}$ είναι ένας μονομορφισμός τότε ο σ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο $\mathbb{Q}$ και θα έχουμε

$$0 = \sigma(p(\vartheta)) = p(\sigma(\vartheta))$$

έτσι ώστε το $\sigma(\vartheta)$ να είναι ένα από τα ϑ_i και επομένως ο σ να είναι ένας από τους σ_i □

Συνεχίζουμε χρησιμοποιόντας τους παραπάνω συμβολισμούς και για κάθε $\alpha \in \mathbb{Q}(\vartheta)$ ορίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του α πάνω από το K να είναι

$$f_\alpha(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - \sigma_i(\alpha)).$$

Με μια πρώτη ματιά φαίνεται να είναι ένα στοιχείο του $K[t]$. Για την ακρίβεια είναι και κάτι παραπάνω, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.2.2. *Οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι ρητοί αριθμοί και κατά συνέπεια $f_\alpha(t) \in \mathbb{Q}[t]$.*

Απόδειξη. Έχουμε $\alpha = r(\vartheta)$ με $r \in K[t]$, $\deg r < n$. Έτσι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παίρνει τη μορφή

$$f_\alpha(t) = \prod_{i}(t - r(\vartheta_i))$$

όπου το ϑ_i διατρέχει όλες τις ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου p του ϑ, το οποίο έχει συντελεστές στο $\mathbb{Q}$. Παρατηρούμε πως οι συντελεστές του $f_\alpha(t)$ είναι της μορφής

$$h(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$$

όπου το $h(t_1, \dots, t_n)$ είναι ένα συμμετρικό πολυώνυμο του $\mathbb{Q}[t]$. □

Τα στοιχεία $\sigma_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, n$, ονομάζονται οι K-συζυγείς του α. Παρόλο που τα ϑ_i είναι διαφορετικά (και είναι οι K-συζυγείς) του ϑ) δεν είναι απαραίτητο ότι οι K-συζυγείς του α θα είναι κι αυτοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Για παράδειγμα έχουμε $\sigma(1) = 1$ για κάθε i.

Θεώρημα 3.2.3. *Με τον παραπάνω συμβολισμό έχουμε*

(i) *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο f_α είναι μια δύναμη του ελαχίστου πολυωνύμου p_α.*

(ii) *Οι K-συζυγείς του α είναι οι ρίζες του p_α στο $\mathbb{C}$, κάθε μια από τις οποίες έχει πολλαπλότητα n/m όπου $m = \deg p_\alpha$ είναι ένας διαιρέτης του n.*

(iii) *Το στοιχείο $\alpha \in \mathbb{Q}$ αν και μόνο αν όλοι οι K-συζυγείς του είναι ίσοι.*

(iv) *$\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\vartheta)$ αν και μόνο αν όλοι οι K-συζυγείς του α είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.*

Απόδειξη. (i) Το $q = p_\alpha$ είναι ανάγωγο και το α είναι μια ρίζα του $f = f_\alpha$, έτσι ώστε $f = q^s h$ όπου q και h είναι πρώτα μεταξύ τους και μονικά.(Αυτό προκύπτει από την παραγοντοποίηση του f σα ανάγωγα.) Υποθέτουμε πως το h είναι μια σταθερά. Αν όχι, τότε για κάποιο $\alpha_i = \sigma_i(\alpha) = r(\vartheta_i)$ θα είναι μια ρίζα του h, όπου $a = r(\vartheta)$. Έτσι αν $g(t) = h(r(t))$ τότε $g(\vartheta_i) = 0$. Έστω p το ελάχιστο πολυώνυμο του ϑ πάνω από το $\mathbb{Q}$ και κατά συνέπεια το ελάχιστο πολυώνυμο κάθε ϑ_i. Τότε $p|g$, έτσι ώστε $g(\vartheta_j) = 0$ για κάθε j και συγκεκριμένα $g(\vartheta) = 0$. Επομένως, $h(a) = h(r(\vartheta)) = g(\vartheta) = 0$ και άρα το q διαιρεί το h, άτοπο. Οπότε το h είναι μια σταθερό και μονικό, άρα $h = 1$ και $f = q^s$.

(ii) Είναι άμεση συνέπεια του προηγουμένου.

(iii) Είναι προφανές ότι $a \in \mathbb{Q}$ σημαίνει και $\sigma_i(a) \in \mathbb{Q}$. Αντίστροφα αν όλα τα $\sigma_i(a)$ είναι ίσα τότε, εφόσον όλες οι ρίζες του $q = p_a$ είναι διαφορετικές και $f_a = q^s$, τότε $\deg q = 1$ και επομένως $a \in \mathbb{Q}$.

(iv) Αν όλα τα $\sigma_i(a)$ είναι διαφορετικά τότα $\deg p_a = n$, και άρα $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = n = [\mathbb{Q}(\vartheta) : \mathbb{Q}]$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\vartheta)$. Αντίστροφα αν $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\vartheta)$ τότε $\deg p_a = n$ και τότε τα $\sigma_i(a)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

□

Παρατήρηση 3.2.4. *Σ' αυτό το σημείο θα σημειώσουμε πως δεν χρειάζεται όλοι οι K-συζυγείς του a να είναι στοιχεία του K. Ακόμη και τα ϑ_i δεν είναι απαραίτητο να είναι στοιχεία του K. Για παράδειγμα, έστω ϑ να είναι μια πραγματική κυβική ρίζα του 2. Τότε το $\mathbb{Q}(\vartheta)$ είναι ένα υπόσωμα του $\mathbb{R}$. Οι K-συζυγείς του ϑ, παρόλα αυτά, είναι οι ϑ , $\omega\vartheta$, $\omega^2\vartheta$, όπου $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$. Οι δύο τελευταίοι δεν είναι πραγματικοί αριθμοί και επομένως δεν ανήκουν στο $\mathbb{Q}(\vartheta)$.*

Στη συνέχεια, έστω $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$ βαθμού n και έστω $\{a_1, \ldots, a_n\}$ να είναι μια βάση του K σαν διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε την *διακρίνουσα* της παραπάνω βάσης να είναι

$$\Delta[a_1, \ldots, a_n] = \{\det[\sigma_i(a_j)]\}^2. \tag{3.1}$$

Αν επιλέξουμε μια διαφορετική βάση $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ τότε

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} a_i \qquad c_{ik} \in \mathbb{Q}$$

$k = 1, \ldots, n$ και $det(c_{ik}) \neq 0$. Από τις ιδιότητες των οριζουσών καθώς και από το γεγονός ότι οι σ_i είναι μονομορφισμοί προκύπτει ότι

$$\Delta[\beta_1, \ldots, \beta_n] = [\det(c_{ik})]^2 \Delta[a_1, \ldots, a_n].$$

Θεώρημα 3.2.5. *Η διακρίνουσα οποιασδήποτε βάσης του $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$ είναι ένας μη-μηδενικός ρητός αριθμός. Αν όλοι οι K-συζυγείς του ϑ είναι πραγματικοί τότε η διακρίνουσα οποιασδήποτε βάσης είναι θετικός αριθμός.*

3.3 Ακέραιοι Αλγεβρικοί.

Ένας μιγαδικός αριθμός ϑ θα είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός αν υπάρχει ένα μονικό πολυώνυμο $p(t)$ με ακεραίους συντελεστές με ρίζα το ϑ. Με άλλα λόγια

$$\vartheta^n + a_{n-1}\vartheta^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad a_i \in \mathbb{Z}, \ \forall i$$

Για παράδειγμα, ο $\vartheta = \sqrt{2}$ είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός αριθμός, αφού $\vartheta^2 + 2 = 0$. Ο $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ είναι επίσης ένας ακέραιος αλγεβρικός αριθμός αφού $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. Από την άλλη ο $\phi = \frac{22}{7}$ δεν είναι καθώς το $7\phi - 22 = 0$ δεν είναι μονικό, ενώ το $\phi - \frac{22}{7} = 0$ δεν έχει ακέραιους συντελεστές.

Γράφουμε $\mathbb{B}$ για το σύνολο όλων των ακεραίων αλγεβρικών αριθμών. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{A}$.

Λήμμα 3.3.1. *Ένας μιγαδικός αριθμός ϑ θα είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός αριθμός αν και μόνο αν η προσθετική ομάδα που παράγεται από όλες τις δυνάμεις $1, \vartheta, \vartheta^2, \ldots$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

Απόδειξη. Βλέπε [25]. □

Ένας πιο κομψός τρόπος για να ορίσουμε το πότε ένας αριθμός είναι ακέραιος αλγεβρικός μπορεί να διατυπωθεί με τη χρήση των Modules και Submodules. Ακολουθούν οι ορισμοί αυτών.

Ορισμός 3.3.2. *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα (**αριστερό**) **R-module** αποτελείται από μια αβελιανή ομάδα M μαζί με μια πράξη εξωτερικού πολλαπλασιασμού κάθε στοιχείου της M με κάθε στοιχείο του R από αριστερά, τέτοια, ώστε για κάθε $\alpha, \beta \in M$ και $r, s \in R$ να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες :*

(i) $(r\alpha) \in M$

(ii) $r(\alpha + \beta) = r\alpha + r\beta$

(iii) $(r+s)\alpha = r\alpha + s\alpha$

(iv) $(rs)\alpha = r(s\alpha)$

*Χωρίς απαιτήσεις αυστηρότητας θα μιλάμε για **R-module** M.*

Ένα R-module μοιάζει πάρα πολύ με διανυσματικό χώρο, μόνο που εδώ ζητάμε τα βαθμωτά να είναι στοιχεία ενός δακτυλίου. Αν ο R είναι δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και $1\alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in M$, τότε το M θα λέγεται **μοναδοειδές R-module** .

Ορισμός 3.3.3. *Το $N \subset M$ θα λέγεται submodule του M αν και μόνο αν οι πράξεις του M $(+, \cdot)$ περιορισμένες στο N ορίζουν δομή module στο N.*

Παράδειγμα 3.3.4. *Κάθε αβελιανή ομάδα G μπορεί να θεωρηθεί ως ένα $\mathbb{Z}$-module αν ορίσουμε $n\alpha = \alpha^n$ για $\alpha \in G$ και $n \in \mathbb{Z}$. Έχουμε χρησιμοποιήσει πολλαπλασιαστικό συμβολισμό για την πράξη της G. Τα αξιώματα του module επαληθεύονται εύκολα.*

Παράδειγμα 3.3.5. *Για κάθε ιδεώδες N του R, μπορούμε να δούμε την $\langle N, +\rangle$ ως ένα R-module, όπου αν $\alpha \in N$ και $r \in R$, $r\alpha$ να είναι το συνηθισμένο γινόμενο των r και α, αν τα δούμε και τα δύο ως στοιχεία του δακτυλίου R.*

Πρόταση 3.3.6. *Ένας μιγαδικός αριθμός ϑ είναι ακέραιος αλγεβρικός αν και μόνο αν υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}-$submodule του $\mathbb{C}$, τέτοιο, ώστε $\alpha M \subset M$.*

Απόδειξη. Έστω
$$\vartheta^n + a_{n-1}\vartheta^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad a_i \in \mathbb{Z}$$

Τότε το $\mathbb{Z}-$submodule M του $\mathbb{C}$ που παράγεται από τα $1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1}$ έχει την ιδιότητα $\vartheta M \subset M$.
Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω M ένα μη μηδενικό $\mathbb{Z}-$submodule M του $\mathbb{C}$, τέτοιο, ώστε $\vartheta M \subset M$ και έστω $\{u_1, \ldots u_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων για το M. Τότε, για κάθε i,

$$\vartheta u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

για κάποια $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Ξαναγράφουμε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων ώς εξής :

$$\begin{aligned}
(\vartheta - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 - a_{13}u_3 - \ldots &= 0 \\
-a_{21}u_1 + (\vartheta - a_{22})u_2 - a_{23}u_3 - \ldots &= 0 \\
&\vdots \\
-a_{n1}u_1 - a_{n2}u_2 - \ldots + (\vartheta - a_{nn})u_n &= 0
\end{aligned}$$

Έστω C ο πίνακας των συντελεστών στο αριστερό μέλος. Χρησιμοποιόντας τη μέθοδο του Cramer βλέπουμε ότι $\det(C) \cdot u_i = 0$ για κάθε i. Εφόσον τουλάχιστον ένα u_i είναι μη μηδενικό και δουλεύουμε μέσα στο $\mathbb{C}$, ισχύει ότι $\det(C) = 0$.
Αναπτύσοντας την ορίζουσα προκύπτει η εξίσωση

$$\vartheta^n + c_{n-1}\vartheta^{n-1} + c_2\vartheta^{n-2} + \ldots + c_0 = 0, \qquad c_i \in \mathbb{Z}$$

□

Θεώρημα 3.3.7. *Οι ακέραιοι αλγεβρικοί αριθμοί αποτελούν υποδακτύλιο του σώματος των ακεραίων αριθμών.*

Απόδειξη. Έστω $\vartheta, \varphi \in \mathbb{B}$. Το μόνο που έχουμε να δείξουμε είναι ότι $\vartheta + \varphi \in \mathbb{B}$ και $\vartheta\varphi \in \mathbb{B}$.
Από το προηγούμενο λήμμα όλες οι δυνάμεις του ϑ βρίσκονται μέσα σε μια πεπερασμένα παραγόμενη προσθετική ομάδα Γ_ϑ. Όλες οι δυνάμεις των $\vartheta\varphi$, $\vartheta + \varphi$ είναι ακέραιοι γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων $\vartheta^i\varphi^j$ που βρίσκονται μέσα στην $\Gamma_\vartheta\Gamma_\varphi \subseteq \mathbb{C}$. Αν, όμως, η Γ_ϑ έχει γεννήτορες τα $u_1, \ldots, u_n$ και η Γ_φ τα $w_1, \ldots, w_m$, τότε η $\Gamma_\vartheta\Gamma_\varphi$ είναι η προσθετική ομάδα που παράγεται από όλα τα

$$u_i w_j \quad 1 \leq i \leq n\,,\, 1 \leq j \leq m.$$

Επομένως όλες οι δυνάμεις των $\vartheta + \varphi$ και $\vartheta\varphi$ βρίσκονται μέσα σε μια πεπερασμένα παραγόμενη προσθετική ομάδα του $\mathbb{C}$ και από το παραπάνω λήμμα τα $\vartheta + \varphi$, $\vartheta\varphi$ είναι ακέραιοι αλγεβρικοί αριθμοί. □

Θεώρημα 3.3.8. *Έστω $\partial \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί ένα μονικό πολυώνυμο με συντελεστές ακέραιους αλγεβρικούς. Τότε ο ϑ είναι ακέραιος αλγεβρικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι

$$\partial^n + \psi_{n-1}\partial^{n-1} + \ldots + \psi + 0 = 0,$$

όπου τα $\psi_{n-1}, \ldots, \psi_0 \in \mathbb{B}$ και παράγουν έναν υποδακτύλιο Ψ του $\mathbb{B}$. Χρησιμοποιόντας το λήμμα 3.3.1 κάθε ψ_i καθώς και κάθε δύναμή του βρίσκονται μέσα σε μια πεπερασμένα παραγόμενη προσθετική ομάδα Γ_i με γεννήτορες γ_{ij} $(1 \leq j \leq n_i)$. Έπεται λοιπόν ότι το M βρίσκεται μέσα σε μια πεπερασμένα παραγόμενη προσθετική ομάδα με γεννήτορες το πεπερασμένο σύνολο

$$\gamma_{1j_1}, \gamma_{2j_2}, \ldots, \gamma_{n-1j_{n-1}}$$

$(1 \leq j_i \leq n_i, 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq k \leq n-1)$. □

Ορισμός 3.3.9. *Για οποιοδήποτε σώμα αριθμών K γράφουμε :*

$$\mathcal{O}_K = K \bigcap \mathbb{B}$$

και ονομάζουμε το $\mathcal{O}_K$ δακτύλιο των ακεραίων του K.

Αφού τα K και $\mathbb{B}$ είναι υποδακτύλιοι του $\mathbb{C}$, έπεται ότι ο $\mathcal{O}_K$ είναι ένας υποδακτύλιος του K. Επιπλέον $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq K$ και $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{B}$ οπότε $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_K$. Σχηματικά :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q} \arrow[dr, dash] & \mathcal{O}_K \arrow[d, dash] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Λήμμα 3.3.10. *Αν $\partial \in K$ τότε υπάρχει μη μηδενικός $c \in \mathbb{Z}$, έτσι, ώστε να ισχύει $c\partial \in \mathcal{O}_K$.*

Απόδειξη. Έστω $\partial \in K$. Τότε το α έχει ελάχιστο πολυώνυμο στο $\mathbb{Q}$, έστω το

$$x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

με $a_i \in \mathbb{Q}$. Ισχύει

$$\partial^n + \ldots + a_1\partial + a_0 = 0$$

Αν $c \in \mathbb{Z}$ ένας κοινός παρονομαστής των a_i, τότε πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση με c^n παίρνουμε

$$(c\partial)^n + a_{n-1}c(c\partial)^{n-1} + \ldots + a_0 c = 0.$$

Επειδή τα $a_i c \in \mathbb{Z}$, προφανώς το $c\partial \in \mathcal{O}_K$. □

Πόρισμα 3.3.11. *Αν K είναι ένα σώμα αριθμών, τότε $K = \mathbb{Q}(\partial)$, όπου ∂ είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός αριθμός.*

Τι καινούργιο μας λέει το παραπάνω πόρισμα ;
Γνωρίζουμε ότι κάθε αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{Q}$ είναι απλή. Δηλαδή υπάρχει ϕ ώστε $K = \mathbb{Q}(\phi)$, το οποίο φ δεν είναι κατ' ανάγκη ακέραιος αλγεβρικός. Μόλις πριν δείξαμε ότι αν φ ένας αλγεβρικός αριθμός τότε υπάρχει $c \in \mathbb{Z}$ ώστε ο $c\phi$ να είναι ακέραιος αλγεβρικός. Άρα αν φ είναι ο αλγεβρικός ώστε $K = \mathbb{Q}(\phi)$ και c ο ακέραιος ώστε $c\phi \in \mathcal{O}$, τότε $K = \mathbb{Q}(c\phi) = \mathbb{Q}(\partial)$ και $\partial = c\phi$, $\partial \in \mathcal{O}$.

Παρατήρηση 3.3.12. *Για $\vartheta \in \mathbb{C}$, γράφουμε $\mathbb{Z}[\vartheta]$ για το σύνολο των στοιχείων $p(\vartheta)$ με $p \in \mathbb{Z}[t]$. Αν $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$, όπου ϑ είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός αριθμός τότε, προφανώς ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών $\mathcal{O}_K$ περιέχει το $\mathbb{Z}[\vartheta]$ αφού, ο $\mathcal{O}_K$ είναι ένας δακτύλιος που περιέχει το ϑ. Παρόλα αυτά ο $\mathcal{O}_K$ δεν ισούται απαραίτητα με το $\mathbb{Z}[\vartheta]$.*

Για παράδειγμα το $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ είναι ένα σώμα αριθμών και το $\sqrt{5}$ είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός. Το $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι επίσης ένας ακέραιος αλγεβρικός καθώς είναι ρίζα του πολυωνύμου $t^2 - t - 1$. Έτσι ο $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ανήκει στον $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}$, αλλά δεν ανήκει στον $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Λήμμα 3.3.13. *Ένας αλγεβρικός αριθμός είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός αριθμός αν και μόνο αν το ελάχιστο πουλώνυμο του πάνω από το $\mathbb{Q}$ έχει συντελεστές στο $\mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Έστω p το ελάχιστο πολυώνυμο του α στο $\mathbb{Q}$. Το p είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[t]$ καθώς και μονικό. Αν το $p \in \mathbb{Z}[t]$ προκύπτει άμεσα ότι ο α είναι ακέραιος αλγεβρικός. Αντίστροφα, αν ο α είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός αριθμός τότε $q(a) = 0$ για κάποιο μονικό πολυώνυμο $q \in \mathbb{Z}[t]$ και το $p|q$. Από το λήμμα του Gauss έχουμε ότι $p \in \mathbb{Z}[t]$ επειδή για κάποιο ρητό πολλαπλάσιο το $\lambda p \in \mathbb{Z}[t]$ και διαιρεί το q. Δεδομένου ότι τα p, q είναι μονικά, έπεται ότι $\lambda = 1$. □

Παρατήρηση 3.3.14. *Για την αποφυγή συγχύσεων στη χρήση της λέξης «ακέραιος» κάνουμε την παρακάτω σύμβαση. Ένας* ρητός ακέραιος *είναι απλά ένα στοιχείο του $\mathbb{Z}$, ενώ απλά ένας* ακέραιος *είναι ένας ακέραιος αλγεβρικός.*

Λήμμα 3.3.15. *Ένας ακέραιος αλγεβρικός είναι ρητός αριθμός αν και μόνο αν είναι ένας ρητός ακέραιος. Ισοδύναμα $\mathbb{Q} \bigcap \mathbb{B} = \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{B} \bigcap \mathbb{Q}$.

Έστω $a \in \mathbb{B} \bigcap \mathbb{Q}$. Αφού το α ανήκει $\mathbb{Q}$, το ελάχιστο πολυώνυμό του στο $\mathbb{Q}$ θα είναι το $t - a$. Από το προηγούμενο λήμμα οι συντελεστές του θα πρέπει να ανήκουν στο $\mathbb{Z}$, επομένως $-a \in \mathbb{Z}$ και άρα $a \in \mathbb{Z}$. □

3.4 Βάσεις Ακεραιότητας.

Έστω Κ να είναι ένα σώμα αριθμών βαθμού n πάνω από το $\mathbb{Q}$.

Ορισμός 3.4.1. *Μια βάση (ή $\mathbb{Q}-$βάση) του Κ είναι μια βάση του Κ σαν ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{Q}$.*

Από το πόρισμα 3.3.11 έχουμε ότι $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$, όπου ϑ ένας ακέραιος αλγεβρικός αριθμός. Άμεσα προκύπτει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο p του ϑ είναι βαθμού n καί ότι το σύνολο $\{1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1}\}$ αποτελεί μια βάση για το Κ.

Ορισμός 3.4.2. *Ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών του Κ, $\mathcal{O}_K$ είναι μια αβελιανή ομάδα με την πρόσθεση. Μια $\mathbb{Z}-$βάση για την $(\mathcal{O}_K, +)$ είναι μια βάση ακεραιότητας για το Κ (ή για τον $\mathcal{O}_K$).*

Με τον τρόπο αυτό τα $\{a_1, \ldots, a_s\}$ αποτελούν μια βάση ακεραιότητας αν και μόνο αν όλα τα $a_i \in \mathcal{O}$ και κάθε στοιχείο του $\mathcal{O}$ μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$a_1 a_1 + \ldots + a_s a_s$$

για ρητούς ακέραιου $a_1, \ldots, a_n$. Είναι προφανές από το λήμμα 3.3.10 ότι οποιαδήποτε βάση ακεραιότητας για το K είναι μια $\mathbb{Q}-$βάση. Επομένως εδώ ισχύει ότι $n = s$. Πρώτα όμως πρέπει να βεβαιωθούμε ότι οι βάσεις ακεραιότητας υπάρχουν. Και όντως υπάρχουν, μόνο που δεν είναι πάντα αυτές που περιμένουμε.
Για παράδειγμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = \mathbb{Q}[\vartheta](= \mathbb{Q}(\vartheta))$ για ακέραιο αλγεβρικό ϑ (πόρισμα 3.3.11), έτσι ώστε $\{1, \ldots, \vartheta^{n-1}\}$ να είναι μια $\mathbb{Q}-$βάση του K που αποτελείται από ακέραιους, αλλά να μην προκύπτει ότι το $\{1, \ldots, \vartheta^{n-1}\}$ αποτελεί βάση ακεραιότητας. Κάποια από τα στοιχεία στο $\mathbb{Q}[\vartheta]$ με ρητούς συντελεστές μπορεί επίσης να είναι ακέραιοι.

Λήμμα 3.4.3. *Αν $\{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι μια βάση του K που αποτελείται από ακεραίους, τότε η διακρίνουσα $\Delta[a_1, \ldots, a_n]$ είναι ένας μη μηδενικός, ρητός ακέραιος.*

Θεώρημα 3.4.4. *Κάθε σώμα αριθμών K έχει μια βάση ακεραιότητας, και η προσθετική ομάδα του $\mathcal{O}$ είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα βαθμού n ίσου με το βαθμό επέκτασης του K.*

Απόδειξη. [20, σελίδα 51] □

Θεώρημα 3.4.5. *Έστω ότι τα $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}$ αποτελούν μια $\mathbb{Q}-$βάση του K. Αν η $\Delta[a_1, \ldots, a_n]$ είναι ελεύθερη τετραγώνων, τότε το $\{a_1, \ldots, a_n\}$ αποτελεί μια βάση ακεραιότητας.*

Απόδειξη. [20, σελίδα 53] □

Παράδειγμα 3.4.6. *Η $\mathbb{Q}-$βάση $\{1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{5}\}$ για το $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ αποτελείται από ακεραίους και έχει διακρίνουσα διακρίνουσα 5. Πράγματι, οι δύο μονομορφισμοί $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbb{C}$ δίνονται από τις*

$$\begin{aligned} \sigma_1(p + q\sqrt{5}) &= p + q\sqrt{5} \\ \sigma_2(p + q\sqrt{5}) &= p - q\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα $\Delta[1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}]$ είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{vmatrix}^2 = 5$$

Εφόσον το 5 είναι ελεύθερο τετραγώνων, το σύνολο $\{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι μια βάση ακεραιότητας.

3.5 Νόρμα και Ίχνος.

Αυτές οι δύο πολλοί σημαντικές έννοιες μας επιτρέπει να μετατρέψουμε ένα πρόβλημα των ακεραίων αλγεβρικών σε ένα των ρητών ακεραίων. Ως συνήθως, έστω $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$ να είναι ένα σώμα αριθμών βαθμού n και έστω $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ να είναι οι μονομορφισμοί $K \to \mathbb{C}$. Αφού το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι μια δύναμη του ελαχίστου πολυωνύμου, από το θεώρημα 3.2.3 και από το λήμμα του Gauss[2] προκύπτει ότι το $a \in K$ είναι ένας ακέραιος αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρητούς συντελεστές.

[2] Το λήμμα του Gauss: Έστω $p \in \mathbb{Z}[t]$, και υποθέτουμε ότι $p = gh$, όπου $g, h \in \mathbb{Q}[t]$. Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{Q}$ $\lambda \neq 0$, έτσι ώστε λg, $\lambda^{-1}h \in \mathbb{Z}[t]$.

Ορισμός 3.5.1. *Για κάθε $a \in K$ ορίζουμε τη νόρμα*

$$N_K(a) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(a)$$

και το ίχνος

$$T_K(a) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(a).$$

Εφόσον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$f_a(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - \sigma_i(a))$$

προκύπτει από τα παραπάνω ότι αν το a είναι ένας ακέραιος τότε η νόρμα και το ίχνος του a είναι ρητοί ακέραιοι. Αφού τα σ_i είναι μονομορφισμοί είναι σαφές οτι ισχύει

$$N(a\beta) = N(a)N(\beta)$$

και αν $a \neq 0$ τότε $N(a) \neq 0$. Αν p, q είναι ρητοί αριθμοί τότε

$$T(pa + q\beta) = pT(a) + qT(\beta).$$

Παράδειγμα 3.5.2. *Αν $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ τότε οι ακέραιοι του K είναι οι $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Οι μονομορφισμοί σ_i είναι*

$$\begin{aligned} \sigma_1(p + q\sqrt{7}) &= p + q\sqrt{7}, \\ \sigma_2(p + q\sqrt{7}) &= p - q\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Κι έτσι η νόρμα και το ίχνος δίνονται από τις σχέσεις,

$$\begin{aligned} N(p + q\sqrt{7}) &= p^2 - 7q^2, \\ T(p + q\sqrt{7}) &= 2p. \end{aligned}$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, δεν μας είναι ιδιαίτερα δύσκολο να υπολογίσουμε τις νόρμες σε αντίθεση με τον υπολογισμό μιας διακρίνουσας, η οποία εμπεριέχει πολύπλοκους υπολογισμούς με ορίζουσες. Για το λόγο αυτό, το ακόλουθο αποτέλεσμα αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμο.

Πρόταση 3.5.3. *Έστω $K = \mathbb{Q}(\partial)$ να είναι ένα σώμα αριθμών όπου το ∂ έχει ελάχιστο πολυώνυμο p βαθμού n. Η $\mathbb{Q}$-βάση $\{1, \partial, \ldots, \partial^{n-1}\}$ έχει διακρίνουσα*

$$\Delta[1, \ldots, \partial^{n-1}] = (-1)^{n(n-1)/2} N(Dp(\partial)),$$

όπου Dp είναι η παράγωγος του p.

Απόδειξη. [20, σελίδα 55] □

Πρόταση 3.5.4. *Αν $\{a_1 \ldots, a_n\}$ είναι μια οποιαδήποτε $\mathbb{Q}-$βάση για το K, τότε*

$$\Delta[a_1, \ldots, a_n] = det(T(a_i a_j)).$$

Απόδειξη. $T(a_i a_j) = \sum_{r=1}^{n} \sigma_r(a_i a_j) = \sum_{r=1}^{n} \sigma_r(a_i)\sigma_r(a_j)$. Επομένως

$$\begin{aligned}\Delta[a_1,\ldots,a_n] &= (det(\sigma_i(a_j)))^2\\ &= (det(\sigma_j(a_i)))(det(\sigma_i(a_j)))\\ &= det(\sum_{r=1}^{n}\sigma_r(a_i)(\sigma_r(a_j))\\ &= det(T(a_i a_j)).\end{aligned}$$

□

3.6 Ιδεώδη.

Σε ολόκληρη αυτή την ενότητα $\mathcal{O}$ θα είναι ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών ενός σώματος αριθμών βαθμού n. Μας ενδιαφέρουν δυο ειδικοί τύποι ιδεωδών, τους οποίους ορίζουμε ακολούθως.
Έστω R δακτύλιος. Ένα ιδεώδες $\mathfrak{a}$ του R είναι μέγιστο αν το $\mathfrak{a}$ είναι ένα συνηθισμένο ιδεώδες του R και δεν υπάρχουν ιδεώδη του R αυστηρά μεταξύ $\mathfrak{a}$ και R. Το ιδεώδες $\mathfrak{a} \neq R$ του R είναι πρώτο αν όποτε $\mathfrak{b}$ και $\mathfrak{c}$ είναι ιδεώδη του R με $\mathfrak{bc} \subseteq \mathfrak{a}$, τότε ισχύει είτε $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, είτε $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$.
Μπορούμε να δούμε από που προκύπτει ο τελευταίος ορισμός, θεωρώντας την ειδική περίπτωση όπου και τα τρία παραπάνω ιδεώδη είναι κύρια, $\mathfrak{a} = \langle a \rangle$, $\mathfrak{b} = \langle b \rangle$, $\mathfrak{c} = \langle c \rangle$. Εφόσον $x|y$ είναι ισοδύναμο με $\langle y \rangle \subseteq \langle x \rangle$, τότε το

$$\mathfrak{bc} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\,,\ \text{ή}\ \ \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$$

Είναι ισοδύναμο με

$$a|bc \Rightarrow a|b\,\eta\ a|c.$$

Αν R είναι μια ακεραία περιοχή τότε το μηδενικό ιδεώδες είναι πρώτο και προκύπτει ότι το $\langle p \rangle$ είναι πρώτο αν και μόνο αν το p είναι πρώτος ή μηδέν.

Λήμμα 3.6.1. *Έστω R δακτύλιος και $\mathfrak{a}$ ιδεώδες του R.*
Τότε:

(i) *Το $\mathfrak{a}$ είναι μέγιστο αν και μόνο αν το $R/\mathfrak{a}$ είναι σώμα.*

(ii) *Το $\mathfrak{a}$ είναι πρώτο αν και μόνο αν το $R/\mathfrak{a}$ είναι ακέραια περιοχή.*

Συνεχίζουμε και απαριθμούμε κάποιες σημαντικές ιδιότητες του δακτυλίου των ακεραίων αλγεβρικών ενός σώματος αριθμών.

Θεώρημα 3.6.2. *Ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών $\mathcal{O}_K$ ενός σώματος αριθμών K έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(i) *Είναι ακέραια περιοχή, με σώμα πηλίκο το K.*

(ii) *Είναι δακτύλιος της Noether .*

(iii) *Αν το $a \in K$ ικανοποιεί μια μονική πολυωνυμική εξίσωση με συντελεστές στο $\mathcal{O}$, τότε $a \in \mathcal{O}$.*

(iv) *Κάθε μη μηδενικό πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}$ είναι μέγιστο.*

Απόδειξη. [20, σελίδα 115] □

Παρατήρηση 3.6.3. *Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι παραπάνω ιδιότητες δεν ισχύουν εν γένει για όλους τους δακτυλίους.*
Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε $R = R[x, y]$, τον δακτύλιο πολυωνύμων στις απροσδιόριστες x, y με πραγματικούς συντελεστές, τότε το ιδεώδες $\langle x \rangle$ είναι πρώτο αλλά όχι μέγιστο αφού

$$R/\langle x \rangle \cong R[y]$$

είναι ακέραια περιοχή αλλά όχι σώμα.

Ένας δακτύλιος που ικανόποιει και τις τέσσερις ιδιότητες του παραπάνω θεωρήματος λέγεται δακτύλιος του Dedekind .

Ορισμός 3.6.4. *Αν K ένα σώμα αριθμών και $\mathfrak{a}$ είναι ένα μη μηδενικό ιδεώδες του $\mathcal{O}_K$ τότε ο δακτύλιος πηλίκο $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$ είναι πεπερασμένος (Θεώρημα 3.6.2). Ορίζουμε τη νόρμα του $\mathfrak{a}$ να είναι*

$$N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$$

Θεώρημα 3.6.5. *Έστω K ένα σώμα αριθμών. Τότε*

(i) *Κάθε ιδεώδες $\mathfrak{a}$ του $\mathcal{O}$ με $\mathfrak{a} \neq 0$ έχει μια $\mathbb{Z}-$βάση $\{a_1, \ldots, a_n\}$, όπου n είναι ο βαθμός του K,*

(ii) *Ισχύει*

$$N(\mathfrak{a}) = \left| \frac{\Delta[a_1, \ldots, a_n]}{\Delta} \right|^{1/2}$$

όπου Δ η διακρίνουσα του K.

(iii) *Αν $\mathfrak{a} = \langle a \rangle$ είναι ένα κύριο ιδεώδες, τότε $N(\mathfrak{a}) = |N(a)|$.*

(iv) *Αν $\mathfrak{a}$και $\mathfrak{b}$ είναι μη μηδενικά ιδεώδη του $\mathcal{O}$, τότε*

$$N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})$$

(v) *Αν η νόρμα $N(\mathfrak{a})$ είναι πρώτος, το ίδιο είναι και το $\mathfrak{a}$.*

(vi) *Η $N(\mathfrak{a})$ είναι στοιχείο του $\mathfrak{a}$, ή ισοδύναμα $\mathfrak{a}|N(\mathfrak{a})$.*

(vii) *Αν το $\mathfrak{a}$ είναι πρώτο,διαιρεί ακριβώς ένα ρητό πρώτο p και τότε*

$$N(\mathfrak{a}) = p^m$$

όπου $m \leq n$, ο βαθμός του K.

Απόδειξη. [20, σελίδες 126-129] □

Στη συνέχεια θα ορίσουμε το κλασματικό ιδεώδες, το οποίο είναι απαραίτητο για τον ορισμό της ομάδας κλάσεως όπως θα δούμε και παρακάτω.

Ορισμός 3.6.6. *Ένα $\mathcal{O}-$submodule $\mathfrak{a}$ είναι ένα κλασματικό ιδεώδες του $\mathcal{O}$ του K αν υπάρχει $c \in \mathcal{O}$ μη μηδενικό, τέτοιο, ώστε $c\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$. Με άλλα λόγια, το σύνολο $\mathfrak{b} = c\mathfrak{a}$ είναι ένα ιδεώδες του $\mathcal{O}$ και $\mathfrak{a} = c^{-1}\mathfrak{b}$. Έτσι τα κλασματικά ιδεώδη του $\mathcal{O}$ είναι υποσύνολα του K της μορφής $c^{-1}\mathfrak{b}$, όπου $\mathfrak{b}$ είναι ένα ιδεώδες του $\mathcal{O}$ και c είναι μη μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{O}$.*

Παράδειγμα 3.6.7. *Τα κλασματικά ιδεώδη του $\mathbb{Z}$ είναι της μορφής $r\mathbb{Z}$ με $r \in \mathbb{Q}$. Φυσικά, αν κάθε ιδεώδες του $\mathcal{O}$ είναι κύριο, τότε τα κλασματικά ιδεώδη είναι της μορφής $c^{-1}\langle d\rangle = c^{-1}d\mathcal{O}$, όπου d είναι ένας γεννήτορας. Από το (i) του προηγούμενου θεωρήματος, αυτό σημαίνει ότι τα κλασματικά ιδεώδη σε περιοχή κυρίων ιδεωδών $\mathcal{O}$ είναι τα $a\mathcal{O}$, όπου $a \in K$.*
Τα κλασματικά ιδεώδη παίζουν σημαντικό ρόλο καθώς ο δακτύλιος $\mathcal{O}$ δεν είναι απαραίτητα περιοχή κυρίων ιδεωδών. Γενικά ένα ιδεώδες είναι και κλασματικό ενώ, αντίστροφα, ένα κλασματικό ιδεώδες $\mathfrak{a}$ είναι ιδεώδες αν και μόνο αν $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$.
Το γινόμενο κλασματικών ιδεωδών είναι επίσης κλασματικό ιδεώδες. Συγκεκριμένα, αν $\mathfrak{a}_1 = c_1^{-1}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2 = c_2^{-1}\mathfrak{b}_2$, όπου $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ είναι ιδεώδη και c_1, c_2 είναι μη μηδενικά στοιχεία του $\mathcal{O}$, τότε $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = (c_1c_2)^{-1}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$. Ο πολλαπλασιασμός των κλασματικών ιδεωδών είναι μεταθετικός και προσεταιριστικός, ενώ το $\mathcal{O}$ παίζει το ρόλο του μοναδιαίου στοιχείου.

Θεώρημα 3.6.8. *Τα μη μηδενικά κλασματικά ιδεώδη του $\mathcal{O}$ αποτελούν αβελιανή ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό.*

Απόδειξη. [20, σελίδα 117] □

Θεώρημα 3.6.9. *Κάθε μη μηδενικό ιδεώδες του $\mathcal{O}$ μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο πρώτων ιδεωδών με μοναδικό τρόπο, modulo τη σειρά των παραγόντων.*

Απόδειξη. [20, σελίδα 117] □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με το ακόλουθο:

Πρόταση 3.6.10. *Για ιδεώδη $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{O}$ ισχύει :*

$$a|b \Leftrightarrow a \supseteq b.$$

Αυτό μας λέει ότι στον $\mathcal{O}$ οι παράγοντες ενός ιδεώδους $\mathfrak{b}$ είναι ακριβώς τα ιδεώδη που περιέχουν το $\mathfrak{b}$. Ο ορισμός του πρώτου ιδεώδους p γίνεται ανάλογος με αυτόν του πρώτου στοιχείου.

$$p|ab \Rightarrow p|a \text{ η } p|b.$$

3.7 Η ομάδα κλάσεων.

Ορισμός 3.7.1. *Η ομάδα κλάσεων $\mathcal{H}$ του $\mathcal{O}$ είναι το πηλίκο της ομάδας των κλασματικών ιδεωδών $\mathcal{F}$ με την (κανονική) υποομάδα των κυρίων ιδεωδών κλασματικών ιδεωδών $\mathcal{P}$.Ο αριθμός κλάσεων $h = h(\mathcal{O})$, είναι η τάξη της παραπάνω ομάδας.*

Η ομάδα κλάσεων κατα κάποιο τρόπο μετρά το κατα πόσο τα ιδεώδη είναι κύρια ή όχι, ή το βαθμό στον οποίο η παραγοντοποίηση παύει να είναι μοναδική. Συγκεκριμένα η ανάλυση των στοιχείων του δακτυλίου $\mathcal{O}$ είναι μοναδική αν και μόνο αν ο αριθμός κλάσεων είναι 1.
Αναλυτικότερα, θεωρούμε ως συνήθως, $\mathcal{O}$ να είναι ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών ενός σώματος αριθμών Κ, βαθμού n. Γνωρίζουμε ότι η ανάλυση σε πρώτα ιδεώδη στον δακτύλιο $\mathcal{O}$ είναι μοναδική αν και μόνο αν κάθε ιδεώδες του $\mathcal{O}$ είναι κύριο[3]. Σκοπός μας σ' αυτήν την ενότητα είναι να βρούμε ένα τρόπο να μετράμε το πόσο απέχουν τα ιδεώδη του $\mathcal{O}$ απο το να είναι κύρια. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την ομάδα των κλασματικών ιδεωδών που ορίσαμε

[3] Βλέπε [20], σελ.132

μόλις προηγουμένως. Ένα κλασματικό ιδεώδες είναι κύριο αν είναι της μορφής $c^{-1}\mathfrak{a}$ με $\mathfrak{a}$ κύριο ιδεώδες του $\mathcal{O}$. Έστω $\mathcal{F}$ η ομάδα των κυρίων ιδεωδών, με πράξη τον πολλαπλασιασμό. Είναι εύκολο να δει κάποιος, ότι το σύνολο $\mathcal{P}$ των κυρίων κλασματικών ιδεωδών είναι μια υποομάδα της $\mathcal{F}$.

Παρατήρηση 3.7.2. *Σημειώνουμε εδώ ότι αν και κάθε μια από τις $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ είναι μια άπειρη ομάδα, παρόλα αυτά, η $\mathcal{H}$ έχει πεπερασμένη τάξη (βλέπε [20, σελ.171]).*

Συνεχίζοντας θα αναδιατυπώσουμε τον ορισμό της ομάδας κλάσεως με τρόπο ανεξάρτητο ως προς τα κλασματικά ιδεώδη. Δύο κλασματικά ιδεώδη θεωρούνται ισοδύναμα αν ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο της $\mathcal{P}$ στην $\mathcal{F}$, με άλλα λόγια, αν απεικονίζουνται στο ίδιο στοιχείο της $\mathcal{F}/\mathcal{P}$.
Αν $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ είναι κλασματικά ιδεώδη γράφουμε $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, αν τα $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ είναι ισοδύναμα και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $[\mathfrak{a}]$ για την κλάση ισοδυναμίας του $\mathfrak{a}$. Η ομάδα κλάσεων είναι το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας. Αν $\mathfrak{a}$ είναι ένα κλασματικό ιδεώδες, τότε $\mathfrak{a} = c^{-1}\mathfrak{b}$, όπου $c \in \mathcal{O}$ και $\mathfrak{b}$ ιδεώδες. Έτσι:

$$\mathfrak{b} = c\mathfrak{a} = \langle c \rangle \mathfrak{a}$$

και αφού $\langle c \rangle \in \mathcal{P}$ αυτό σημαίνει ότι $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$. Με άλλα λόγια, κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει ένα ιδεώδες.
Έστω τώρα $\mathfrak{m}$ και $\mathfrak{n}$ ισοδύναμα ιδεώδη. Τότε $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}\mathfrak{n}$, όπου $\mathfrak{c}$ είναι ένα κύριο κλασματικό ιδεώδες, έστω $\mathfrak{c} = d^{-1}\mathfrak{e}$ για $d \in \mathcal{O}$, $\mathfrak{e}$ κύριο ιδεώδες. Επομένως

$$\mathfrak{m}\langle d \rangle = \mathfrak{n}\mathfrak{n}.$$

Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να περιγράψουμε την $\mathcal{H}$ ως εξής : Παίρνουμε το σύνολο $\mathcal{I}$ όλων των ιδεωδών και ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με $\mathfrak{m} \sim \mathfrak{n}$ αν και μόνο αν υπάρχουν ιδεώδη $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ τέτοια, ώστε, $\mathfrak{m}\mathfrak{d} = \mathfrak{n}\mathfrak{e}$. Τότε η $\mathcal{H}$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[\mathfrak{m}]$ με πράξη που ορίζεται ως

$$[\mathfrak{m}][\mathfrak{n}] = [\mathfrak{m}\mathfrak{n}].$$

Αυτός είναι και ο λόγος που η $\mathcal{H}$ καλείται ομάδα κλάσεων. Το ακόλουθο θεώρημα κλείνει αυτήν την παράγραφο

Θεώρημα 3.7.3. *Η παραγοντοποίηση στον $\mathcal{O}$ είναι μοναδική αν και μόνο αν η ομάδα κλάσεων έχει τάξη 1, ή ισοδύναμα ο αριθμός κλάσης είναι $h = 1$.*

Απόδειξη. Η παραγοντοποίηση είναι μοναδική αν και μόνο αν κάθε ιδεώδες του $\mathcal{O}$ είναι κύριο, το οποίο με τη σειρά του είναι αληθές αν και μόνο άν κάθε κλασματικό ιδεώδες είναι κύριο γεγονός, που είναι ισοδύναμο με $\mathcal{F} = \mathcal{P}$ δηλαδή $|\mathcal{H}| = h = 1$. □

3.8 Θεωρία Hilbert.

3.8α' Ανάλυση ενός πρώτου στοιχείου.

Αν έχουμε έναν πρώτο p στο $\mathbb{Z}$, δεν είναι απαραίτητο ότι και το ιδεώδες $\langle p \rangle$ θα είναι πρώτο στο δακτύλιο ακεραιών $\mathcal{O}$ ενός σώματος αριθμών K. Είναι πολύ σημαντικό να μπορούμε να βρίσκουμε τους πρώτους παράγοντες του $\langle p \rangle$. Για την περίπτωση που ο $\mathcal{O}$ παράγεται από ένα μόνο στοιχείο, στα τετραγωνικά σώματα για παράδειγμα, έχουμε το επόμενο θεώρημα που οφείλουμε στον Dedekind.

Θεώρημα 3.8.1. *Έστω K ένα σώμα αριθμών βαθμού n και $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\vartheta]$. Έστω ότι έχουμε ένα ρητό πρώτο αριθμό p και έστω ότι το ελάχιστο πολυώνυμο f του ϑ στο $\mathbb{Q}$, έχει ανάλυση σε ανάγωγα πάνω από το $\mathbb{Z}_p$,*

$$f = f_1^{e_1} \ldots f_r^{e_r}.$$

Τότε αν f_i είναι ένα οποιοδήποτε από αυτά τα πολυώνυμα modulo p, το ιδεώδες $\mathfrak{p}_i = \langle p \rangle + \langle f_i(\vartheta) \rangle$ θα είναι πρώτο και η ανάλυση του $\langle p \rangle$ σε πρώτα ιδεώδη στον $\mathcal{O}_K$ θα είναι

$$\langle p \rangle = \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

Απόδειξη. Έστω ϑ_i να είναι μια ρίζα του f_i στο $\mathbb{Z}_p[\vartheta_i] \cong \mathbb{Z}_p[t]/\langle p \rangle$. Υπάρχει ένας φυσικός ομομορφισμός $u_i : \mathbb{Z}[\vartheta] \to \mathbb{Z}_p[t]$, όπου $p(\vartheta) \mapsto \bar{p}(\vartheta_i)$. Η εικόνα του u_i είναι το $\mathbb{Z}_p(\vartheta_i)$, το οποίο είναι σώμα, επομένως ο πυρήνας $keru_i$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[\vartheta] = \mathcal{O}_K$. Προφανώς θα ισχύει

$$\langle p \rangle = \langle f_i(\vartheta) \rangle \subseteq keru_i.$$

Αν $g(\vartheta) \in keru_i$, τότε $\bar{g}(\vartheta_i) = 0$, άρα $\bar{g} = f_i \bar{h}$, $h \in \mathbb{Z}_p[t]$, το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι το $g - f_i h \in \mathbb{Z}[t]$ έχει συντελεστές που διαιρούνται από το p. Επομένως θα έχουμε

$$g(\vartheta) = g(\vartheta) - f_i(\vartheta)h(\vartheta) + f_i(\vartheta)h(\vartheta) \in \langle p \rangle + \langle f_i(\vartheta) \rangle.$$

Άρα θα είναι

$$keru_i = \langle p \rangle + \langle f_i(\vartheta) \rangle.$$

Έστω $\mathfrak{p}_i = \langle p \rangle + \langle f_i(\vartheta) \rangle$, τότε για κάθε f_i το ιδεώδες $\mathfrak{p}_i$ είναι πρώτο και ικανοποιεί το $\langle p \rangle \subseteq \mathfrak{p}_i$ και $\mathfrak{p}_i | \langle p \rangle$. Για όλα τα ιδεώδη $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, ισχύει ότι $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_2) \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$. Με επαγωγή έχουμε

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r} &\subseteq \langle p \rangle + \langle f_1(\vartheta)^{e_1} \ldots f_r(\vartheta)^{e_r} \rangle \\ &\subseteq \langle p \rangle + \langle f(\vartheta) \rangle = \langle p \rangle. \end{aligned}$$

Άρα $\langle p \rangle | \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ και έτσι οι μόνοι πρώτοι παράγοντες του ιδεώδους $\langle p \rangle$ είναι τα $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$. Έτσι θα έχουμε

$$\langle p \rangle = \mathfrak{p}_1^{k_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{k_r}, \quad 0 < k_i < e_i,\ 1 \leq i \leq r.$$

Παίρνουμε τώρα τη νόρμα του $\mathfrak{p}_i$ και είναι

$$N(\mathfrak{p}_i) = |\mathcal{O}_K / \mathfrak{p}_i|$$

και είναι

$$\mathcal{O}_K / \mathfrak{p}_i = \mathbb{Z}_p[\vartheta_i] \Leftrightarrow N(\mathfrak{p}_i) = |\mathbb{Z}_p[\vartheta_i]| = p^{d_i},$$

όπου $d_i = \partial f_i$. Επίσης η $\langle p \rangle$ είναι

$$N(\langle p \rangle) = |\mathcal{O}_K / \langle p \rangle| = p^n.$$

Εξισώνοντας αυτές τις δύο νόρμες παίρνουμε

$$\begin{aligned} N(\langle p \rangle) = N(\mathfrak{p}_1^{k_1}) \ldots N(\mathfrak{p}_r^{k_r}) &\Leftrightarrow p^n = p^{d_1 k_1 + \ldots + d_r k_r} \\ &\Leftrightarrow n = d_1 k_1 + \ldots + d_r k_r \end{aligned}$$

και επειδή, όπως αναφέρθηκε και πιο πριν $0 < k_i \leq e_i$, θέτουμε $k_i = e_i$ και προκύπτει το ζητούμενο □

Παράδειγμα 3.8.2. *Έστω το σώμα αριθμών $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, με $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\partial]$ και ελάχιστο πολυώνυμο για το ∂ το t^2+1. Έστω ότι θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το ιδεώδες $\langle 2\rangle$. Αρχικά παραγοντοποιούμε το ελάχιστο πολυώνυμο mod2. Θα είναι*

$$t^2+1 = (t+1)(t+1) = (t+1)^2.$$

Άρα το $\langle 2\rangle = \mathfrak{p}^2$ με $\mathfrak{p} = \langle 2\rangle + \langle f_1(\partial_1)\rangle = \langle 2\rangle + \langle\sqrt{-1}\rangle = \langle 1+\sqrt{-1}\rangle$, δεδομένου ότι $2 = (1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})$.
Στη γενική περίπτωση όπου θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το $p \in \mathbb{Z}$, στον $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, υπάρχουν τρεις ενδεχόμενα

(i) *t^2+1 να είνα ανάγωγο πολυώνυμο mod$p$,*

(ii) *$t^2+1 = (t+l)(t-l) mod p$, με $l^2 \equiv -1 mod p$, $l \neq -l$,*

(iii) *$t^2+1 = (t+1)^2 mod 2$, $p = 2$.*

Στην πρώτη περίπτωση το ιδεώδες $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο, στη δεύτερη θα ισχύει $\langle p\rangle = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$. Στην τελευταία περίπτωση $\langle p\rangle = \mathfrak{p}_1^2$, με $\mathfrak{p}_1$ να είναι ένα πρώτο ιδεώδες.

3.8ϐ' Ανάλυση σε Επεκτάσεις Galois.

Ορισμός 3.8.3. *Έστω K ένα σώμα αριθμών και L μια πεπερασμένη επέκτασή του με δακτυλίους ακεραίων $\mathcal{O}_K$ και $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ αντίστοιχα. Αν $\mathfrak{p}$ ένα ιδεώδες του $\mathcal{O}_K$, το $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ τότε θα είναι ένα ιδεώδες το $\mathcal{O}_L$, οπότε θα υπάρχει ανάλυση σε πρώτα ιδεώδη*

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{B}_1^{e_1}\dots\mathfrak{B}_g^{e_g}.$$

Τα $\mathfrak{B}_i$ είναι πρώτα ιδεώδη του $\mathcal{O}_L$ και περιέχουν το $\mathfrak{p}$. Οι ακέραιοι e_i, τους οποίους συμβολίζουμε και $e_{\mathfrak{B}_i|\mathfrak{p}}$, ονομάζονται δείκτες διακλάδωσης του p στο $\mathfrak{B}_i$. Κάθε $\mathfrak{B}_i$ δίνει μια επέκταση σώματος $\mathcal{O}_L/\mathfrak{B}_i \Big/ \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$, με βαθμό επέκτασης f_i ή $f_{\mathfrak{B}_i|\mathfrak{p}}$ που τον ονομάζουμε βαθμό αδράνειας του $\mathfrak{p}$ στο $\mathfrak{B}_i$.

Θεώρημα 3.8.4. *Έστω $K \subset L$ και $\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες στο K. Αν e_i, f_i όπως τα ορίσαμε πριν, τότε θα είναι*

$$\sum_{i=1}^{g} e_i f_i = [L:K].$$

Απόδειξη. [12, θεώρημα 21] □

Θεώρημα 3.8.5. *Έστω $K \subset L$ μια επέκταση Galois και p πρώτο ιδεώδες του K.*

(i) *Η ομάδα Galois $Gal(L/K)$, δρα μεταβατικά στα πρώτα στοιχεία του L που περιέχουν το p,δηλαδή αν $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ πρώτα ιδεώδη του L που περιέχουν το $\mathfrak{p}$, τότε υπάρχει ένας $\sigma \in GaL(L/K)$, τέτοιος, ώστε $\sigma(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'$.*

(ii) *Τα πρώτα ιδεώδη $\mathfrak{B}_i$ του L που περιέχουν το $\mathfrak{p}$, έχουν όλα το ίδιο e και το ίδιο f, έτσι το θεώρημα 3.8.4 γίνεται*

$$efg = [L:K]$$

Απόδειξη. Το ii είναι άμεση συνέπεια του i. Για να αποδείξουμε το πρώτο σκέλος θεωρούμε ότι $\sigma(\mathfrak{B}) \neq \mathfrak{B}$, για όλους τους αυτομορφισμούς $\sigma \in Gal(L/K)$. Τότε σύμφωνα με το κινέζικο θεώρημα υπολοίπου θα υπάρχει μια λύση για το σύστημα

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 mod \mathfrak{B}' \\ x &\equiv 1 mod \sigma(\mathfrak{B}), \end{aligned}$$

για όλους τους αυτομορφισμούς σ. Έστω $a \in \mathcal{O}_L$ η λύση του συστήματος. Θα είναι $N(a) \in \mathcal{O}_K \bigcap \mathfrak{B}'$, αφού από το σύστημα έχουμε ότι $a \in \mathfrak{B}' = \mathfrak{p}$. Επίσης είναι $a \neq \sigma(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(a) \notin \mathfrak{B}$. Μπορούμε τώρα να εκφράσουμε την νόρμα του a σαν γινόμενο των $\sigma^{-1}(a)$. Κανένα από τα στοιχεία αυτά δεν ανήκει στο $\mathfrak{B}$, άρα $N(a) \notin \mathfrak{B}$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού πριν δείξαμε ότι $N(a) \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{B}$. Έτσι $\sigma(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'$, για κάποιο σ. □

Ορισμός 3.8.6. *Ορίζουμε ομάδα διακλάδωσης να είναι η ομάδα* $D_{\mathfrak{B}} = \{\sigma \in Gal(L/K) : \sigma(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}\}$, *ενώ ομάδα αδράνειας να είναι η* $I_{\mathfrak{B}} = \{\sigma \in Gal(L/K) : \sigma(a) \equiv a mod \mathfrak{B}, \text{ για κάθε } a \in \mathcal{O}_L\}$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $I_{\mathfrak{B}} \subset D_{\mathfrak{B}}$. Αυτό γιατί το $\sigma(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ μπορεί να εκφραστεί αν $\sigma(a) \equiv 0 mod \mathfrak{B}$, αν και μόνο αν $a \equiv 0 mod \mathfrak{B}$, που σημαίνει ότι $a \in \mathfrak{B}$. Αν πάρουμε ένα στοιχείο $\sigma \in D_{\mathfrak{B}}$, αυτό επάγει έναν αυτομορφισμό $\overline{\sigma}$ στο $\mathcal{O}_L/\mathfrak{B}$, ο οποίος είναι ο ταυτοτικός στο $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$. Συμβολίζουμε με $\widetilde{G}$ την ομάδα Galois της επέκτασης $\mathcal{O}/\mathfrak{B} \Big/ \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω $\overline{\sigma} \in \widetilde{G}$. Επομένως ο $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$ επάγει ομομορφισμό $D_{\mathfrak{B}} \to \widetilde{G}$. Ο πυρήνας αυτού είναι ακριβώς η ομάδα $I_{\mathfrak{B}}$. Συνοψίζοντας, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.8.7. *Έστω $D_{\mathfrak{B}}$, $I_{\mathfrak{B}}$, $\widetilde{G}$, όπως ορίστηκαν προηγουμένως. Ισχύουν τα ακόλουθα*

(i) *Ο ομομορφισμός $D_{\mathfrak{B}} \to \widetilde{G}$ είναι επί. Επομένως $D_{\mathfrak{B}}/I_{\mathfrak{B}} \cong \widetilde{G}$.*

(ii) $|I_{\mathfrak{B}}| = e_{\mathfrak{B}|\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{B}|\mathfrak{p}}$.

Κλείνοντας αναφέρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο αποδεικνύεται αρκετά χρήσιμο στο να πούμε αν ένα πρώτο ιδεώδες είναι αδιακλάδωτο ή διασπάται πλήρως σε μια επέκταση Galois .

Πρόταση 3.8.8. *Έστω επέκταση Galois $K \subset L$, με $L = K(a)$, $a \in \mathcal{O}_L$ και $f(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του a πάνω από το K, τέτοιο, ώστε $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$. Αν το $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο στο $\mathcal{O}_K$ και το $f(x)$ αναλύεται πλήρως modp, τότε έχουμε :*

(i) *το $\mathfrak{p}$ είναι αδιακλάδωτο στο L.*

(ii) *Αν $f(x) \equiv f_1(x) \ldots f_g(x) mod p$, όπου τα $f_i(x)$ είναι ανάγωγα modp τότε το $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{p}\mathcal{O}_L + f_i(a)\mathcal{O}_L$ είναι πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}_L$ με $\mathfrak{B}_i \neq \mathfrak{B}_j$, $i \neq j$, και $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_g$. Επιπλέον όλα τα $f_i(x)$, έχουν τον ίδιο βαθμό, ο οποίος είναι βαθμός αδράνειας f.*

(iii) *Το $\mathfrak{p}$ διασπάται πλήρως στο L, αν και μόνο αν η $f(x) \equiv 0 mod \mathfrak{p}$ έχει λύση στο $\mathcal{O}_K$.*

3.8γ' Το σώμα κλάσεων του Hilbert και η απεικόνιση του Artin.

Ορισμός 3.8.9. *Μια επέκταση $K \subset L$ ονομάζεται αδιακλάδωτη (unramified) , αν κάθε πρώτο στοιχείο του K είναι αδιακλάδωτο στην L.*

Θεώρημα 3.8.10. *Αν έχουμε ένα σώμα αριθμών K, τότε υπάρχει μια πεπερασμένη επέκταση Galois L, για την οποία θα ισχύει :*

(i) *Η L είναι αδιακλάδωτη αβελιανή επέκταση του K.*

(ii) *Κάθε αδιακλάδωτη αβελιανή επέκταση του K, βρίσκεται μέσα στην L.*

Ένα τέτοιο σώμα L, λέγεται σώμα κλάσεων του Hilbert, για το K. Είναι η μέγιστη αβελιανή αδιακλάδωτη επέκταση για το K και προφανώς είναι η μοναδική.

Λήμμα 3.8.11. *Έστω επέκταση Galois $K \subset L$, και $\mathfrak{p}$ ένα πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}_K$, αδιακλάδωτο στο L. Αν το $\mathfrak{B}$, είναι πρώτο του $\mathcal{O}_L$ και περιέχει το ιδεώδες $\mathfrak{p}$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $\sigma \in G$ τέτοιο, ώστε, για κάθε $a \in \mathcal{O}_L$ να ισχύει*

$$\sigma(a) = a^{N(\mathfrak{p})} mod \mathfrak{B},$$

όπου $N(\mathfrak{P}) = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}|$.

Απόδειξη. Έστω $D_{\mathfrak{B}}, I_{\mathfrak{B}}, \widetilde{G}$, όπως τα ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Έχουμε δείξει ότι $D_{\mathfrak{B}}/I_{\mathfrak{B}} \cong \widetilde{G}$. Επίσης αφού το ιδεώδες $\mathfrak{p}$ είναι αδιακλάδωτο στο L, σύμφωνα με την πρόταση 3.8.8 θα έχουμε ότι $|I_{\mathfrak{B}}| = e_{\mathfrak{B}|\mathfrak{p}} = 1$. Έτσι τελικά θα έχουμε ότι ο $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$ ορίζει ισομορφισμό $D_{\mathfrak{B}} \cong \widetilde{G}$. Η επέκταση Galois $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_L/\mathfrak{B}$, έχει ομάδα την $\widetilde{G}$ η οποία σαν ομάδα Galois, έχει γεννήτορα τον αυτομορφισμό του Frobenius $x \mapsto x^q$, όπου q είναι η $|\mathfrak{O}_K/\mathfrak{p}|$. Επομένως, θα υπάρχει ένας μοναδικός αυτομορφισμός $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{B}}$, ο οποίος απεικονίζει στο στοιχείο Frobenius. Επίσης, από τον ορισμό της νόρμας ενός ιδεώδους, έχουμε ότι $|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}| = N(\mathfrak{p}) = q$. Έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$\sigma(a) = a^{N\mathfrak{p}} mod \mathfrak{B},$$

για κάθε $a \in \mathcal{O}_L$. □

Ορισμός 3.8.12. *Το μοναδικό στοιχείο του προηγούμενου λήμματος, καλείτα σύμβολο του Artin και συμβολίζεται $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{B}}\right)$.*

Οι ιδιότητες του συμβόλου Artin συνοψίζονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.8.13. *Θεωρούμε $K \subset L$ να είναι μια επέκταση Galois και $\mathfrak{p}$ ένα αδιακλάδωτο πρώτο ιδεώδες του K. Αν έχουμε ένα $\mathfrak{B}$ που περιέχει το $\mathfrak{p}$, θα ισχύει:*

(i) *Αν $\sigma \in G = Gal(L/K)$ τότε*

$$\left(\frac{L/K}{\sigma(\mathfrak{B})}\right) = \sigma\left(\frac{L/K}{\mathfrak{B}}\right)\sigma^{-1}$$

(ii) *Η τάξη του $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{B}}\right)$ είναι ο βαθμός αδράνειας $f = f_{\mathfrak{B}|\mathfrak{p}}$.*

(iii) *Το $\mathfrak{p}$ διασπάται στο L, αν και μόνο αν $\frac{L/K}{\mathfrak{B}} = 1$*

Απόδειξη. Το (i) προκύπτει άμεσα από τη μοναδικότητα του συμβόλου Artin, . Για το δεύτερο γνωρίζουμε ότι το $\mathfrak{p}$ είναι αδιακλάδωτο, επομένως θα ισχύει $D_{\mathfrak{B}} \cong \widetilde{G}$. Σημειώνουμε εδώ ότι η $\widetilde{G}$ είναι η ομάδα Galois της $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_L/\mathfrak{B}$, η οποία είναι μια επέκταση βαθμού f. Άρα και η τάξη της $\widetilde{G}$ θα είναι f. Τέλος, το σύμβολο Artin απεικονίζεται σε γεννήτορα, επομένως η τάξη του θα πρέπει να είναι f. Τέλος για το τρίτο σκελός η απόδειξη είναι τετριμμένη. Αφού το ιδεώδες $\mathfrak{p}$ διασπάται πλήρως όταν $e = f = 1$ και εδώ έχουμε υποθέσει ότι $e = 1$, σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.8.14. *Το σύμβολο Artin είναι το ίδιο για όλα τα ιδεώδη $\mathfrak{B}$ που επεκτείνουν το $\mathfrak{p}$ μόνο αν η επέκταση είναι αβελιανή. Επομένως, θα εξαρτάται μόνο από το ιδεώδες $\mathfrak{p}$. Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)$.*

Έστω, τώρα, η ομάδα των κλασματικών ιδεωδών $\mathcal{F}$ του $\mathcal{O}_K$. Ξέρουμε ότι κάθε $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$ έχει μια ανάλυση σε πρώτα,

$$\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{r_i},\ r_i \in \mathbb{Z}.$$

Το σύμβολο Artin θα είναι :

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{a}}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right)^{r_i}.$$

Επομένως το σύμβολο Artin επάγει έναν ομομορφισμό, τον οποίο ονομάζουμε απεικόνιση Artin.

$$\left(\frac{L/K}{\cdot}\right) : \mathcal{F} \longrightarrow Gal(L/K).$$

Σημείωνουμε ότι αυτός ο ομομορφισμός έχει νόημα μόνο για αδιακλάδωτες επεκτάσεις.

Θεώρημα 3.8.15. *Έστω L το σώμα κλάσεων του Hilbert ενός σώματος αριθμών K. Τότε ο ομομορφισμός Artin*

$$\left(\frac{L/K}{\cdot}\right) : \mathcal{F} \longrightarrow Gal(L/K),$$

είναι επί και έχει πυρήνα την ομάδα τωμ κυρίων κλασματικών ιδεωδών $\mathcal{P}$. Επομένως, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα των ισομορφισμών, θα έχουμε

$$\mathcal{H} \cong Gal(L/K)$$

Πόρισμα 3.8.16. *Αν έχουμε ένα σώμα αριθμών K, τότε υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των αδιακλάδωτων αβελιανών επεκτάσεων του K, και των υποομάδων H της ομάδας κλάσεων $\mathcal{H}$. Δηλαδή αν μια επέκταση M, αντιστοιχεί σε μια υποομάδα $H \subset \mathcal{H}$, η Artin απεικόνιση θα επάγει ισομορφισμό*

$$\mathcal{H}/H \cong Gal(M/K).$$

Πόρισμα 3.8.17. *Έστω L το σώμα κλάσεων του Hilbert, ενός σώματος αριθμών K. Έστω επίσης ένα πρώτο ιδεώδες του K, $\mathfrak{p}$. Τότε το $\mathfrak{p}$ θα διασπάται πλήρως στο L αν και μόνο αν είναι ένα κύριο ιδεώδες.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ήδη από την πρόταση 3.8.13, ότι το $\mathfrak{p}$ διασπάται πλήρως αν και μόνο αν $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$. Αφού ο Artin επάγει ισομορφισμό $\mathcal{H} \cong Gal(L/K)$ θα έχουμε ότι $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, αν και μόνο αν έχουμε την τετριμμένη κλάση ιδεωδών. Δηλαδή όλα τα κλασματικά ιδεώδη είναι κύρια, κάτι που φυσικά καθιστά και το $\mathfrak{p}$ κύριο ιδεώδες. $\square$

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Σχημάτων

Όπως ακριβώς τα τοπολογικά ή τα διαφορίσιμα manifolds προκύπτουν κολλώντας ανοιχτές μπάλλες του Ευκλείδειου χώρου, τα σχήματα (schemes) προκύπτουν κολλώντας ανοιχτά σύνολα, τα οποία ονομάζονται affine schemes. Υπάρχει, βέβαια, μια σημαντική διαφορά: σε ένα manifold ένα σημείο μοιάζει τοπικά με οποιοδήποτε άλλο και οι ανοιχτές μπάλλες είναι τα μόνα σύνολα που απαιτούνται για αυτήν την κατασκευή. Αντίθετα, τα σχήματα δέχονται περισσότερες τοπικές διαφορές. Τα μικρότερα ανοιχτά σύνολα σε ένα σχήμα είναι τόσο μεγάλα ώστε να υπάρχει μη τετριμμένη και συνάμα ενδιαφέρουσα γεωμετρία μέσα σε καθένα από αυτά. Πράγματι σε αρκετά σχήματα δύο σημεία δεν έχουν ισομορφικές ανοιχτές γειτονιές (εκτός ολόκληρου του σχήματος). Ξεκινάμε περιγράφοντας τα Affine Schemes.

4.1 Affine Schemes.

Ένα affine scheme είναι ένα αντικείμενο που προκύπτει από έναν μεταθετικό δακτύλιο. Η σχέση γενικεύει τη σχέση μεταξύ ενός affine variety και του δακτυλίου συντεταγμένων του. Συγκεκριμένα, μπορούμε να οδηγηθούμε στον ορισμό του σχήματος με τον ακόλουθο τρόπο. Η βασική αντιστοιχία της κλασσικής αλγεβρικής γεωμετρίας είναι η ακόλουθη 1-1 και επί

$$\{\textit{affine varieties}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{πεπερασμένα παραγόμενοι δακτύλιοι} \\ \text{χωρίς μηδενοδύναμα στοιχεία} \\ \text{πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα K} \end{array} \right\}$$

Το αριστερό μέλος αντιστοιχεί στα affine schemes [1]. Αν ξεκινήσουμε θεωρόντας τα affine varieties ως αντικείμενα μελέτης, καταλήγουμε στην περιορισμένη κατηγορία των δακτυλίων στο δεξί μέλος (στην ουσία είναι ο δακτύλιος συντεταγμένων ενός affine variety). Η θεωρία σχημάτων προκύπτει αν σκεφτούμε με τον αντίθετο τρόπο : αν δεν δεχτούμε τους περιορισμούς « πεπερασμένα περαγόμενο », « χωρίς μηδενοδύναμα στοιχεία » ή « K-άλγεβρα » και επιμείνουμε ότι το δεξί μέλος περιλαμβάνει όλους τους μεταθετικούς δακτυλίους, τι είδους γεωμετρικό αντικείμενο θα πρέπει να βάλουμε στο αριστερό μέλος; Η απάντηση είναι τα

[1] Βλέπε [5] Κεφάλαιο 2

« *affine schemes* » και σ' αυτή την ενότητα θα δείξουμε πως μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω αντιστοιχία σε ένα διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
\{\text{affine varieties}\} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \{\text{δακτύλιοι συντεταγμένων affine variety}\} \arrow[d] \\
\{\text{affine schemes}\} \arrow[r, leftrightarrow] & \{\text{μεταθετικοί δακτύλιοι με μονάδα}\}
\end{tikzcd}$$

Θα δούμε ότι στην πραγματικότητα ο δακτύλιος και το αντίστοιχο affine scheme είναι ισοδύναμα αντικείμενα.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Το affine scheme που ορίζεται από τον R θα καλείται SpecR, το spectrum του R. Αποτελείται από ένα σύνολο σημείων, μια τοπολογία πάνω στο σύνολο αυτό που ονομάζεται Zariski και ένα sheaf $\mathcal{O}_{\mathrm{SpecR}}$ πάνω σ' αυτόν τον τοπολογικό χώρο, που ονομάζεται το sheaf των κανονικών συναρτήσεων ή το structure sheaf του σχήματος. Αν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $|\mathrm{SpecR}|$ για να αναφερόμαστε στο σύνολο ή τον τοπολογικό χώρο χωρίς το sheaf.*

4.1α' Τα Σχήματα σαν Σύνολα.

Ορισμός 4.1.2. *Ορίζουμε ένα σημείο του SpecR να είναι ένα πρώτο ιδεώδες του R. Για την αποφυγή παρεξηγήσεων, θα χρησιμοποιούμε πολλές φορές τον συμβολισμό $[\mathfrak{p}]$ για το σημείο του SpecR που αντιστοιχεί στο πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ του R. Θα υποθέσουμε ότι ο R δεν είναι από μόνος του ένα πρώτο ιδεώδες. Φυσικά, το μηδενικό ιδεώδες $\langle 0\rangle$ είναι πρώτο αν ο R είναι ακέραια περιοχή.*

Αν R είναι ο δακτύλιος συντεταγμένων μια συνηθισμένης αλγεβρικής πολλαπλότητας V πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα, τότε το SpecR θα έχει σημεία που θα αντιστοιχούν σε σημεία της αλγεβρικής πολλαπλότητας - τα μέγιστα ιδεώδη του R - και επίσης ένα σημείο για κάθε μια ανάγωγη υπο-πολλαπλότητα της V. Τα νέα σημεία, που αντιστοιχούν σε υπο-πολλαπλότητες θετικής διάστασης παίζουν τον ρόλο των « *generic points* » της κλασικής αλγεβρικής γεωμετρίας.

Ορισμός 4.1.3. *Κάθε σημείο $f \in R$ ορίζει μια «συνάρτηση», που επίσης συμβολίζουμε με f, στον χώρο SpecR: Αν $x = [\mathfrak{p}] \in$ SpecR, συμβολίζουμε με $\kappa(x)$ ή $\kappa(\mathfrak{p})$ το σώμα πηλίκο της ακεραίας περιοχής $R/\mathfrak{p}$, που ονομάζεται το σώμα υπολοίπων του X στο x, και ορίζουμε $f(x) \in \kappa(x)$ να είναι η εικόνα της f μέσω των κανονικών απεικονίσεων*

$$R \to R/\mathfrak{p} \to \kappa(x).$$

Εν γένει, η « συνάρτηση » f παίρνει τιμές σε σώματα τα οποία διαφέρουν από σημείο σε σημείο. Επιπλέον, το f δεν προσδιορίζεται από τις τιμές αυτής της « συνάρτησης ». Για παράδειγμα, ο δακτύλιος $R = K[x]/\langle x^2\rangle$ έχει μόνο ένα πρώτο ιδεώδες, το $\langle x\rangle$ και έτσι το στοιχείο $x \in R$, μολονότι είναι μη μηδενικό, επάγει μια « συνάρτηση » η τιμή της οποίας είναι 0 σε κάθε σημείο του SpecR.
Μια κανονική συνάρτηση στον SpecR ορίζουμε να είναι απλά ένα στοιχείο του R. Επομένως μια κανονική συνάρτηση επάγει μια « συνάρτηση » στον SpecR, αλλά δεν προσδιορίζεται από τις τιμές αυτής της « συνάρτησης ».

4.16' Τα Σχήματα σαν Τοπολογικοί Χώροι.

Χρησιμοποιόντας τις κανονικές συναρτήσεις, μπορούμε να μετατρέψουμε το SpecR σε τοπολογικό χώρο, με τη Zariski τοπολογία. Τα κλειστά σύνολα ορίζονται ακολούθως.

Ορισμός 4.1.4. *Για κάθε υποσύνολο $S \subset R$, έστω*

$$V(S) = \{x \in SpecR \,|\, f(x) = 0 \text{ για κάθε } f \in S\} = \{[\mathfrak{p}] \in SpecR \,|\, \mathfrak{p} \supset S\}.$$

Η ιδέα πίσω από αυτόν τον ορισμό είναι να κάνουμε κάθε $f \in R$ να συμπεριφέρεται όσο το δυνατόν περισσότερο σαν μια συνεχής συνάρτηση. Φυσικά τα σώματα $\kappa(x)$ δεν έχουν κάποια τοπολογία και αφού ποικίλουν για διάφορα x, η συνηθισμένη έννοια της συνέχειας δεν έχει κανένα νόημα. Τουλάχιστον όμως περιέχουν ένα μηδενικό στοιχείο, οπότε μπορούμε να μιλάμε για γεωμετρικούς τόπους σημείων στο SpecR πάνω στα οποία η f είναι μηδεν και αν η f πρέπει να συμπεριφέρεται σαν μια συνεχής συνάρτηση τότε αυτός ο γεωμετρικός τόπος θα πρέπει να είναι κλειστός.
Εφόσον οι τομές κλειστών συνόλων πρέπει να είναι κλειστό σύνολο, οδηγούμαστε άμεσα στον παραπάνω ορισμό. Τα $V(S)$ είναι απλά οι τομές των γεωμετρικών τόπων όπου τα στοιχεία του S μηδενίζονται.
Για να είναι η οικογένεια των συνόλων $V(S)$ τα κλειστά μιας τοπολογίας είναι απαραίτητο να είναι κλειστά ως προς τις τομές. Από την παραπάνω περιγραφή είναι σαφές ότι για οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων S_a θα έχουμε $\bigcap_a V(S_a) = V(\bigcup_a S_a)$, όπως ακριβώς απαιτήται. Επίσης αξίζει να σημειώσουμε εδώ, ότι αν I είναι το ιδεώδες που παράγεται από το S, τότε $V(I) = V(S)$.

Παρατήρηση 4.1.5. *Ένα ανοιχτό σύνολο στη Zariski είναι απλά το συμπλήρωμα ενός από τα κλειστά σύνολα $V(S)$. Τα ανοιχτά που αντιστοιχούν σε σύνολα S με μόνο ένα στοιχείο παίζουν έναν σημαντικό ρόλο, κυριώς επειδή είναι με τη σειρά τους και αυτά φάσματα (Spec) δακτυλίων. Για το λόγο αυτό έχουν συγκεκριμένο όνομα και συμβολισμό. Αν $f \in R$, ορίζουμε το διακεκριμένο (ή βασικό) ανοιχτό υποσύνολο του $X = SpecR$ που σχετίζεται με το f να είναι*

$$X_f = |SpecR| \backslash V(f).$$

Τα στοιχεία του X_f - δηλαδή, τα πρώτα ιδεώδη του R που δεν περιέχουν το f - είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τα πρώτα ιδεώδη της τοπικοποίησης R_f του δακτυλίου R που προκύπτει επισυνάπτοντας έναν αντίστροφο του f, μέσω της αντιστοιχίας που στέλνει το $p \subset R$ στο $pR_f \subset R_f$. Μπορούμε μ' αυτόν τον τρόπο να ταυτίζουμε τα στοιχεία του X_f με τα στοιχεία του $SpecR_f$.
Τα διακεκριμένα ανοιχτά σύνολα αποτελούν μια βάση για την τοπολογία Zariski με την έννοια ότι κάθε ανοιχτό μπορεί να γραφεί ως η ένωση διακεκριμένων ανοιχτών συνόλων:

$$U = SpecR \backslash V(S) = SpecR \backslash \bigcap_{f \in S} V(f) = \bigcup_{f \in S} (SpecR)_f.$$

Τα διακεκριμένα ανοιχτά είναι επίσης κλειστά κάτω από πεπερασμένες τομές, εφόσον ένα πρώτο ιδεώδες περιέχει ένα γινόμενο αν και μόνο αν περιέχει έναν από τους παράγοντές του. Έχουμε

$$\bigcap_{i=1,\dots,n} (SpecR)_{f_i} = (SpecR)_g,$$

όπου g είναι το γινόμενο $f_1, \dots, f_n$. Συγκεκριμένα, κάθε διακεκριμένο ανοιχτό σύνολο το οποίο είναι ένα υποσύνολο του διακεκριμένου ανοιχτού $(SpecR)_f$ έχει τη μορφή $(SpecR)_{fg}$ για κατάλληλο g.

Παρατήρηση 4.1.6. *Ο χώρος SpecR δεν είναι σχεδόν ποτε ένας Haussdorf χώρος και αυτό γιατί τα ανοιχτά είναι πολύ μεγάλα. Στην πραγματικότητα, τα μόνα σημεία του SpecR τα οποία είναι κλειστά είναι εκείνα που αντιστοιχούν σε μέγιστα ιδεώδη του R. Γενικά, είναι σαφές ότι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει ένα συγκεκριμένο σημείο* $[\mathfrak{p}]$ *πρέπει να είναι το* $V(\mathfrak{p})$, *κι έτσι η κλειστότητα του σημείου* $[\mathfrak{p}]$ *αποτελείται από όλα τα* $[\mathfrak{q}]$ *τέτοια ώστε* $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$. *Το σημείο* $[\mathfrak{p}]$ *είναι κλειστό αν και μόνο αν το* $\mathfrak{p}$ *είναι μέγιστο. Έτσι στην περίπτωση που ο R είναι ένας affine δακτύλιος μιας αλγεβρικής πολλαπλότητας V πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα, τα σημεία της V αντιστοιχούν ακριβώς στα κλειστά σημεία του SpecR και τα κλειστά σημεία που περιέχονται στην κλειστότητα του σημείου* $[\mathfrak{p}]$ *είναι ακριβώς τα σημεία της V στην υποπολλαπλότητα που ορίζεται από το* $\mathfrak{p}$.

Προτού προχωρήσουμε περαιτέρω στη θεωρία των σχημάτων θα χρειαστεί να αναφερθούμε σε κάποια στοιχεία της θεωρίας των sheaves (δραγμάτων).

4.1γ' Sheaf Theory.

Ένα sheaf μας παρέχει έναν συστηματικό τρόπο για να παρακολουθούμε τοπικά αλγεβρικά δεδομένα σε έναν τοπολογικό χώρο, ενώ είναι απαραίτητο για τη μελέτη των σχημάτων που αναφέραμε προηγουμένως. Για να είμαστε πιο ακριβείς, δεν μπορούμε να ορίσουμε ένα σχήμα χωρίς τη βοήθεια των sheaves .

Ορισμός 4.1.7. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα presheaf* $\mathcal{F}$ *αβελιανών ομάδων πάνω στον X αποτελείται από τα ακόλουθα*

(i) *για κάθε ανοιχτό υποσύνολο* $U \subseteq X$, *μια αβελιανή ομάδα* $\mathcal{F}(U)$ *και*

(ii) *για κάθε εγκλεισμό* $V \subseteq U$ *ανοιχτών υποσυνόλων του X, έναν μορφισμό αβελιανών ομάδων* $res_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$,

με τους εξής περιορισμούς

- $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, *όπου* $\emptyset$ *το κενό σύνολο,*
- $res_{U,U}$ *είναι η ταυτοτική απεικόνιση* $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ *και*
- *αν* $W \subseteq V \subseteq U$ *είναι τρία ανοιχτά σύνολα, τότε* $res_{U,W} = res_{V,W} \circ res_{U,V}$.

Ορίζουμε ένα presheaf δακτυλίων, ένα presheaf συνόλων ή ένα presheaf αντικειμένων μιας οποιαδήποτε κατηγορίας $\mathfrak{C}$, αντικαθιστόντας της λέξεις « αβελιανή ομάδα » στον παραπάνω ορισμό με « δακτύλιος », « σύνολο », ή « αντικείμενο της $\mathfrak{C}$ » αντίστοιχα.

Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα presheaf πάνω από τον X, αναφερόμαστε στα $\mathcal{F}(U)$ σαν τα sections του presheaf $\mathcal{F}$ πάνω από το ανοιχτό σύνολο U και μερικές φορές χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Καλούμε τις απεικονίσεις $res_{U,V}$ απεικονίσεις περιορισμού και συχνά γράφουμε $s|_V$ αντί για $res_{U,V}(s)$, αν $s \in \mathcal{F}(U)$.

Ένα sheaf είναι σε γενικές γραμμές ένα presheaf τα sections του οποίου προσδιορίζονται τοπικά. Για να είμαστε πιο ακριβείς δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1.8. *Ένα presheaf πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X είναι ένα sheaf αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συμπληρωματικές συνδήκες:*

(i) *αν U είναι ένα ανοιχτό σύνολο, αν $\{V_i\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του U και $s \in \mathcal{F}(U)$ είναι ένα στοιχείο τέτοιο ώστε $s|_{V_i} = 0$ για κάθε i, τότε $s = 0$,*

(ii) *αν U είναι ένα ανοιχτό σύνολο, αν $\{V_i\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του U και έχουμε στοιχεία $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ για κάθε i, με την ιδιότητα ότι για κάθε i,j, $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $s \in \mathcal{F}(U)$ τέτοιο ώστε $s|_{V_i} = s_i$ για κάθε i.*

Παράδειγμα 4.1.9. *Έστω X ένα variety πάνω από ένα σώμα κ. Για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subseteq X$, έστω $\mathcal{O}(U)$ να είναι ο δακτύλιος των κανονικών απεικονίσεων από το U στο κ και για κάθε $V \subseteq U$, έστω $res|_{U,V} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ να είναι η απεικόνιση περιορισμού (με τη συνήθη έννοια). Τότε το $\mathcal{O}$ είναι ένα sheaf δακτυλίων πάνω από τον X. Είναι προφανές ότι είναι ένα presheaf δακτυλίων. Για να επιβεβαιώσουμε πως ικανοποιεί και τις δύο πρόσθετες συνδήκες, σημειώνουμε πως μια απεικόνιση η οποία είναι 0 τοπικά, είναι 0 και μια απεικόνιση η οποία είναι τοπικά κανονική, είναι κανονική από τον ορισμό της κανονικής απεικόνισης. Καλούμε το $\mathcal{O}$ το sheaf των κανονικών απεικονίσεων στον X.*

Παράδειγμα 4.1.10. *Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε το sheaf των συνεχών συναρτήσεων με πραγματικές τιμές πάνω από οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο, ή το sheaf των διαφορίσιμων συναρτήσεων πάνω από μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα.*

Παράδειγμα 4.1.11. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και A μια αβελιανή ομάδα. Ορίζουμε το σταθερό sheaf $\mathcal{A}$ πάνω στον X που προσδιορίζεται απο την A, ως ακολούθως. Δίνουμε στην A την διακριτή τοπολογία και για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subseteq X$ έστω $\mathcal{A}(U)$ να είναι η ομάδα όλων των συνεχών απεικοκίσεων από το U επί της A. Τότε με τις συνήθεις απεικονίσεις περιορισμού προκύπτει ένα sheaf $\mathcal{A}$. Σημειώνουμε πως για κάθε συνεκτικό ανοιχτό σύνολο U, $\mathcal{A}(U) \cong A$, από όπου προκύπτει και το όνομα σταθερό sheaf. Αν το U είναι ένα ανοιχτό σύνολο του οποίου οι συνεκτικές συνιστώσες είναι ανοιχτές (το οποίό ισχύει πάντα σε ένα τοπικά συνεκτικό τοπολογικό χώρο), τότε το $\mathcal{A}(U)$ είναι το ευθύ γινόμενο αντιγράφων της A, ένα για κάθε συνεκτική συνιστώσα του U.*

Ορισμός 4.1.12. *Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα presheaf πάνω από τον X και αν P είναι ένα σημείο στον X, ορίζουμε το stalk (άξονα) $\mathcal{F}_P$ του $\mathcal{F}$ στο P να είναι το ευθύ όριο των ομάδων $\mathcal{F}(U)$ για όλα τα ανοιχτά σύνολα U που περιέχουν το P, μέσω των απεικονίσεων περιορισμού res.*

Έτσι ένα στοιχείο του $\mathcal{F}_P$ αντιπροσωπεύεται από ένα ζεύγος $\langle U, S\rangle$, όπου U είναι μια ανοιχτή περιοχή του P και s είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{F}(U)$. Δύο τέτοια ζεύγη $\langle U, s\rangle$ και $\langle V, t\rangle$ προσδιορίζουν το ίδιο στοιχείο του $\mathcal{F}_P$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή W του P με $W \subseteq U \cap V$ τέτοια ώστε $s|_W = t|_W$. Έτσι μπορούμε να αναφερόμαστε στα στοιχεία του stalk ως germs των sections του $\mathcal{F}$ στο σημείο P. Στην περίπτωση ενός affine variety X και του sheaf των κανονικών του συναρτήσεων $\mathcal{O}$, το stalk $\mathcal{O}_P$ στο σημείο P είναι απλά ο τοπικός δακτύλιος[2] του P στο X.

[2] Θα αναφερθούμε στην έννοια του τοπικού δακτυλίου στην επόμενη παράγραφο.

Ορισμός 4.1.13. *Αν $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι presheaves πάνω από τον X, ένας μορφισμός $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ αποτελείται από έναν μορφισμό αβελιανών ομάδων $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ για κάθε ανοιχτό σύνολο U και όποτε $V \subseteq U$ είναι εγκλεισμός, το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi(U)"] \arrow[d, "res_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "res'_{U,V}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi(V)"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό και όπου res και res′ είναι οι συναρτήσεις περιορισμού στα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ αντίστοιχα. Αν $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι sheaves πάνω από τον X, χρησιμοποιούμε τον ίδιο ορισμό για τον μορφισμό μεταξύ sheaves .

Παρατήρηση 4.1.14. *Ένας μορφισμός presheaves $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ πάνω από τον X επάγει μορφισμό $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ στα stalks , για κάθε σημείο $P \in X$.*

Η επόμενη πρόταση (η οποία δεν ισχύει για presheaves) αποδεικνύει τον τοπικό χαρακτήρα των sheaves .

Πρόταση 4.1.15. *Έστω $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ένα μορφισμός από sheaves πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X. Τότε ο ϕ είναι ένας ισομορφισμός αν και μόνο αν η επαγώμενη απεικόνιση στο stalk $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε $P \in X$.*

Απόδειξη. Αν ο ϕ είναι ένας ισομορφισμός είναι σαφές ότι κάθε ένα από τους ϕ_P είναι ισομορφισμός. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο ϕ_P είναι ένας ισομορφισμός για κάθε $P \in X$. Για να δείξουμε ότι ο ϕ είναι ένας ισομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε U, επειδή τότε μπορούμε να ορίσουμε έναν αντίστροφο μορφισμό ψ μέσω του $\psi(U) = \phi(U)^{-1}$ για κάθε U. Πρώτα δείχνουμε ότι ο $\phi(U)$ είναι επί. Έστω $s \in \mathcal{F}(U)$, και υποθέτουμε ότι $\phi(s) \in \mathcal{U}$ είναι 0. Τότε για κάθε σημείο $P \in U$ η εικόνα $\phi(s)_P$ του $\phi(s)$ στο stalk $\mathcal{G}_P$ είναι 0. Εφόσον ο ϕ_P είναι επί για κάθε P, έχουμε ότι $s_P = 0$ στο $\mathcal{F}_P$ για κάθε $P \in U$. Λέγοντας ότι $s_P = 0$ εννοούμε ότι τα s και 0 έχουν την ίδια εικόνα μέσα στο $\mathcal{F}_P$, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή W_P του P, με $W_P \subseteq U$, τέτοιο ώστε $s|_{W_P} = 0$. Τώρα το U καλύπτεται από τις περιοχές W_P όλων των σημείων του, οπότε από την 1η ιδιότητα των sheaves (εδώ εννοούμε την πρώτη από τις πρόσθετες ιδιότητες που αναφέραμε προηγουμένως) το s είναι 0 στο U. Έτσι ο μορφισμός $\phi(U)$ είναι επί.
Στη συνέχεια δείχνουμε ότι ο $\phi(U)$ είναι 1-1. Έστω ότι έχουμε ένα section $t \in \mathcal{G}(U)$. Για κάθε $P \in U$, έστω $t_P \in \mathcal{G}_P$ να είναι το germ στο P. Εφόσον ο ϕ_P είναι 1-1, μπορούμε να βρούμε ένα $s_P \in \mathcal{F}_P$ έτσι ώστε $\phi_P(s_P) = t_P$. Έστω, επίσης, το s_P να αντιπροσωπεύεται από ένα section $s(P)$ σε μια περιοχή V_P του P. Τότε τα $\phi(s_P)$ και $t|_{V_P}$ είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{G}(V_P)$, των οποίων τα germs στο P είναι τα ίδια. Επομένως, αντικαθιστόντας το V_P με μια μικρότερη περιοχή του P είναι χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi(s(P)) = t|_{V_P}$ μέσα στο $\mathcal{G}(V_P)$. Τώρα το U καλύπτεται από τα ανοιχτά σύνολα V_P και σε κάθε ανοιχτό V_P έχουμε ένα section $s(P) \in \mathcal{F}(V_P)$. Αν P, Q είναι δύο σημεία, τότε $s(P)|_{V_P \cap V_Q}$ και $s(Q)|_{V_P \cap V_Q}$ είναι δύο sections του $\mathcal{F}(V_P \cap V_Q)$, τα οποία πηγαίνουν και τα δύο στο $t|_{V_P \cap V_Q}$ μέσω της ϕ. Από το γεγονός ότι η ϕ είναι επί, όπως δείξαμε και προηγουμένως, είναι ίσα. Τότε από τη 2η ιδιότητα των sheaves, υπάρχει ένα section $s \in \mathcal{F}(U)$ τέτοιο ώστε $s|_{V_P} = s(P)$ για κάθε P. Τέλος, πρέπει να ελέγξουμε ότι $\phi(s) = t$. Πράγματι, τα $\phi(s)$, t είναι δύο sections του $\mathcal{G}(U)$ και για κάθε P, $\phi(s)|_{V_P} = t|_{V_P}$,

επόμενως από την 1η ιδιότητα των sheaves και αν την εφαρμόσουμε στο $\phi(s) - t$, καταλήγουμε στο ότι $\phi(s) = t$. □

Το επόμενο που έχουμε να κάνουμε είναι να ορίσουμε τις έννοιες του πυρήνα, του συμπυρήνα και της εικόνας ενός μορφισμού από sheaves

Ορισμός 4.1.16. *Έστω $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ να είναι ένας μορφισμός από presheaves . Ορίζουμε των presheaf πυρήνα του ϕ, presheaf συμπυρήνα του ϕ και presheaf εικόνα του ϕ να είναι τα presheaves που δίνονται από τις $U \mapsto ker(\phi(U))$, $U \mapsto coker(\phi(U))$ και $U \mapsto im(\phi(U))$ αντίστοιχα.*

Παρατήρηση 4.1.17. *Αν $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι ένας μορφισμός από sheaves, τότε ο presheaf πυρήνας του ϕ είναι ένα sheaf, αλλά ο presheaf συμπυρήνας και η presheaf εικόνα του ϕ δεν είναι απαραίτητα sheaves. Αυτό μας οδηγεί στην έννοια του συνεταιρικού sheaf με ένα presheaf.*

Ορισμός 4.1.18. *Έστω ένα presheaf $\mathcal{F}$, τότε υπάρχει ένα sheaf $\mathcal{F}^+$ και ένας μορφισμός $\partial : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, με την ιδιότητα ότι για κάθε sheaf $\mathcal{G}$ και κάθε μορφισμό $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε $\phi = \psi \circ \partial$. Επιπλέον το ζεύγος $(\mathcal{F}^+, \partial)$ είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού. Το $\mathcal{F}^+$ ονομάζεται το συνεταιρικό sheaf με το presheaf $\mathcal{F}$.*

Παρατήρηση 4.1.19. *Μπορούμε να κατασκευάσουμε το sheaf $\mathcal{F}^+$ ως εξής. Για κάθε ανοιχτό σύνολο U, έστω $\mathcal{F}^+(U)$ να είναι το σύνολο των συναρτήσεων s από το U στην ένωση $\cup_{P \in U} \mathcal{F}_P$ των stalks του $\mathcal{F}$ πάνω από σημεία στο U, τέτοια ώστε:*

(i) *για κάθε $P \in U$, $s(P) \in \mathcal{F}_P$ και*

(ii) *για κάθε $P \in U$ υπάρχει μια περιοχή V του P, που περιέχεται στο U και ένα στοιχείο $t \in \mathcal{F}(V)$, τέτοιο ώστε για κάθε $Q \in V$ το germ t_Q του t στο Q είναι ίσο με το $s(Q)$.*

Τώρα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αμέσως ότι το $\mathcal{F}^+$ με τις φυσικές συναρτήσεις περιορισμού είναι ένα sheaf, ότι υπάρχει ένα φυσικός μορφισμός $\partial : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ και ότι έχει την καθολική ιδιότητα που περιγράψαμε προηγουμένως. Σημειώνουμε πως για κάθε σημείο P, $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}^+_P$. Τέλος αν το $\mathcal{F}$ ήταν ένα sheaf τότε το $\mathcal{F}^+$ θα ήταν ισομορφικό με το $\mathcal{F}$ μέσω της ∂.

Ορισμός 4.1.20. *Ένα subsheaf ενός sheaf $\mathcal{F}$ είναι ένα sheaf $\mathcal{F}'$ τέτοιο ώστε για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subseteq X$, το $\mathcal{F}'(U)$ να είναι μια υποομάδα της $\mathcal{F}(U)$ και οι συναρτήσεις περιορισμού του sheaf $\mathcal{F}'$ να επάγονται από αυτές του $\mathcal{F}$. Προκύπτει ότι για κάθε σημείο P, το stalk $\mathcal{F}'_P$ είναι μια υποομάδα της $\mathcal{F}_P$.*

Αν $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι ένας μορφισμός από sheaves , ορίζουμε τον πυρήνα της ϕ,συμβολίζουμε με $ker\phi$, να είναι ο presheaf πυρήνας της ϕ (ο οποίος είναι ένα sheaf). Έτσι ο $ker\phi$ είναι ένα subsheaf το $\mathcal{F}$.
Λέμε ότι ένας μορφισμός από sheaves $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι 1-1 αν ο πυρήνας $ker\phi = 0$. Έτσι ο ϕ είναι 1-1 αν και μόνο αν η επαγώμενη απεικόνιση $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ είναι 1-1 για κάθε ανοιχτό σύνολο του X.
Αν $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι ένας μορφισμός από sheaves, τότε ορίζουμε την εικόνα του ϕ, συμβολίζουμε με $im\phi$, να είναι το συνεταιρικό sheaf στην presheaf εικόνα του ϕ. Από την καθολική ιδιότητα του συνεταιρικού sheaf, υπάρχει μια φυσική απεικόνιση $im\phi \to \mathcal{G}$. Συγκεκριμένα αυτή η απεικόνιση είναι 1-1 και έτσι η εικόνα $im\phi$ μπορεί να ταυτιστεί με ένα subsheaf του $\mathcal{G}$. Λέμε ότι ένας μορφισμός $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ από sheaves είναι επί αν $im\phi = \mathcal{G}$.

Παρατήρηση 4.1.21. *Το παραπάνω μας θυμίζει τον ορισμό που δώσαμε για μια υποπολλαπλότητα στο πρώτο κεφάλαιο μέσω των εμφυτεύσεων. Συγκεκριμένα από το θεώρημα 1.3.2 προέκυπτε πως ένα υποσύνολο $A \subset N$ είναι μια C^r υποπολλαπλότητα αν και μόνο αν το A είναι η εικόνα μιας C^r εμφύτευσης.*
Αυτό ακριβώς περιγράφουμε και εδώ. Ο μορφισμός ϕ είναι ένα «immersion)) με τη διαφορά πως αντί για γραμμική απεικόνιση έχουμε το μορφισμό στα sections $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

Στο πρώτο κεφάλαιο μιλήσαμε επίσης και για ακριβής ακολουθίες από vector bundles. Τα ίδια ισχύουν και στην περίπτωση των sheaves.
Η ακολουθία από sheaves

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\phi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\phi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

είναι ακριβής αν σε κάθε βήμα ισχύει $ker\phi^i = im\phi^{i-1}$. Έτσι, $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ μια ακολουθία είναι ακριβής αν και μόνο αν η ϕ είναι επί και η ακολουθία $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \to 0$ είναι ακριβής αν και μόνο αν η ϕ είναι 1-1.

Ορισμός 4.1.22. *Έστω $\mathcal{F}'$ να είναι ένα subsheaf ενός sheaf $\mathcal{F}$. Ορίζουμε το sheaf πηλίκο $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ να είναι το συνεταιρικό sheaf με το presheaf $U \to \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$. Προκύπτει πως για κάθε σημείο P, το stalk $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_P$ είναι το πηλίκο $\mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$.*

Ορισμός 4.1.23. *Αν $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι ένας μορφισμός από sheaves , ορίζουμε τον συμπυρήνα του ϕ, συμβολίζουμε με cokerϕ, να είναι το συνεταιρικό sheaf με το presheaf συμπυρήνα του ϕ.*

Παρατήρηση 4.1.24. *Είδαμε πως ένας μορφισμός $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ από sheaves είναι 1-1 αν και μόνο η απεικόνιση στα sections $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ είναι 1-1 για κάθε U. Το αντίστοιχο δεν ισχύει για επί μορφισμούς: αν $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι επί, τότε οι απεικονίσεις στα sections $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ δεν είναι απαραίτητα επί. Ωστόσο, μπορούμε να πούμε πως ο ϕ είναι επί αν και μόνο αν οι απεικονίσεις $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ στα stalks είναι επί για κάθε P. Γενικότερα, μια ακολουθία από sheaves και μορφισμούς είναι ακριβής αν και μόνο αν είναι ακριβής στα stalks. Αυτό αποδεικνύει για μια ακόμη φορά τον τοπικό χαρακτήρα των sheaves.*

Ορισμός 4.1.25. *Έστω $f : X \to Y$ να είναι συνεχής απεικόνιση τοπολογικών χώρων. Για οποιοδήποτε sheaf πάνω από τον X, ορίζουμε την ευθεία εικόνα του sheaf, $f_*\mathcal{F}$, πάνω από το Y μέσω της $f_*(\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}^{-1}(V)$ για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subseteq Y$. Για κάθε sheaf πάνω από τον Y, ορίζουμε την αντίστροφη εικόνα του sheaf , $f^{-1}\mathcal{G}$, πάνω από τον X να είναι το συνεταιρικό sheaf με το presheaf $U \mapsto lim_{V \supseteq f(U)}\mathcal{G}(V)$, όπου U είναι ένα οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο στον X και το όριο το παίρνουμε για όλα τα ανοιχτά σύνολα V του Y που περιέχουν το $f(U)$.*

Ορισμός 4.1.26. *Έστω Z ένα υποσύνολο του X θεωρόντας πως είναι ένας τοπολογικός υπόχωρος με την επαγώμενη τοπολογία, έστω $i : Z \to X$ να είναι η συνάρτηση εγκλεισμού και έστω $\mathcal{F}$ να είναι ένα sheaf πάνω από τον X, τότε ονομάζουμε το $i^{-1}\mathcal{F}$ τον περιορισμό του $\mathcal{F}$ στον Z. Συχνά το συμβολίζουμε με $\mathcal{F}|_Z$. Σημειώνουμε πως τα stalk του $\mathcal{F}|_Z$ σε οποιοδήποτε σημείο $P \in Z$ είναι απλά το $\mathcal{F}_P$.*

Στις εφαρμογές μας στα σχήματα, θα αντιμετωπίσουμε καταστάσεις στις οποίες μας δίνεται μια βάση $\mathcal{B}$ από ανοιχτά σύνολα ενός τοπολογικού χώρου X και θα θέλουμε να προσδιορίσουμε το sheaf $\mathcal{F}$ απλά λέγοντας ποιές είναι οι ομάδες $mathcalF(U)$ και οι ομομορφισμοί $res_{V,U}$ για τα ανοιχτά σύνολα U της βάσης μας και τους εγκλεισμούς $U \subset V$ των συνόλων της βάσης.

Ορισμός 4.1.27. *Μια συλλογή ομάδων $\mathcal{F}(U)$ από ανοιχτά σύνολα $U \in \mathcal{B}$ και από απεικονίσεις $res_{V,U} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(U)$ για $V \subset U$ αποτελούν ένα $\mathcal{B}-$sheaf αν ικανοποιούν τις ιδιότητες ενός sheaf και σεβόμενα τους εγκλεισμούς των συνόλων της βάσης μέσα σα σύνολα της βάσης και καλύμματα των συνόλων της βάσης από σύνολα της βάσης. (Η συνθήκη στον ορισμό όπου τα sections των $U_a, U_\beta \in \mathcal{B}$ συμφωνούν στο $U_a \cap U_\beta$ θα πρέπει να αντικατασταθεί με τη συνθήκη ότι συμφωνούν σε οποιοδήποτε σύνολο $V \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $V \subset U_a \cap U_\beta$.)*

Κλείνουμε με την ακόλουθη πρόταση [3].

Πρόταση 4.1.28. *Έστω $\mathcal{B}$ να είναι μια βάση ανοιχτών συνόλων του X.*

(i) *Κάθε $\mathcal{B}-$sheaf στον X επεκτείνεται σε ένα sheaf με μοναδικό τρόπο.*

(ii) *Αν $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ δύο sheaves στον X και μια συλλογή από απεικονίσεις*

$$\tilde{\phi}(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \quad \text{για κάθε } U \in \mathcal{B}$$

που μετατίθενται με τους περιορισμούς, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ από sheaves τέτοιος ώστε $\phi(U) = \tilde{\phi}(U)$ για κάθε $U \in \mathcal{B}$.

Πόρισμα 4.1.29. *Έστω $\mathcal{U}$ να είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X. Αν $\mathcal{F}_U$ είναι ένα sheaf πάνω από το U για κάθε $U \in \mathcal{U}$ και αν*

$$\phi_{UV} : \mathcal{F}_{U|_{U\cap V}} \to \mathcal{F}_{V|_{U\cap V}}$$

είναι ισομορφισμοί που ικανοποιούν τις συνθήκες συμβατότητας

$$\phi_{VW}\phi_{UV} = \phi_{UW} \quad \text{στο } U \cap V \cap W,$$

για κάθε $U, V, W \in \mathcal{U}$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό sheaf $\mathcal{F}$ πάνω στον X του οποίου ο περιορισμός σε κάθε $U \in \mathcal{U}$ είναι ισομορφικός με το $\mathcal{F}_U$ μέσω ισομορφισμών $\Psi_U : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{F}_U$ οι οποίοι είναι συμβατοί με τους ισομορφισμούς ϕ_{UV} - με άλλα λόγια, τέτοιοι ώστε

$$\phi_{UV} \circ \Psi_{U|_{U\cap V}} = \Psi_{V|_{U\cap V}} : \mathcal{F}|_{U\cap V} \to \mathcal{F}_{V|_{U\cap V}}$$

για κάθε U και V στο $\mathcal{U}$.

4.1δ' Ευθέα και αντίστροφα όρια.

Η έννοια του ευθέως και αντιστρόφου ορίου είναι μία γενίκευση της τομής και της ένωσης. Έστω ότι έχουμε μια οικογένεια $\{X_i\}$ από υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X, όπου για κάθε δύο σύνολα η τομή $X_i \cap X_j$ και η ένωση $X_i \cup X_j$ να είναι στοιχεία της οικογένειας.. Το αντίστροφο και ευθύ όριο ορίζονται να είναι

$$\varprojlim_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i \text{ και } \varinjlim_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} X_i.$$

[3] Για απόδειξη βλέπε [1] σελίδα 17.

Θα γράφουμε $x \leq y$ αν $X_j \subset X_i$ (αντίστοιχα $X_i \subset X_j$), οπότε με αυτό τον τρόπο το σύνολο δεικτών I γίνεται ένα διατεταγμένο σύνολο, το οποίο έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε ζευγάρι i, j υπάρχει ένα k με $i \leq k$, $j \leq k$. Στην περίπτωση μας ένα τέτοιο k δίνεται από το $X_k = X_i \cap X_j$ (αντίστοιχα $X_k = X_j \cup X_i$). Για $i \leq j$ θεωρούμε την συνάρτηση εγκλεισμού $f_{ij} : X_j \hookrightarrow X_i$ (αντ. $X_i \hookrightarrow X_j$) και έχουμε ένα σύστημα από σύνολα και συναρτήσεις. Την έννοια αυτή γενικεύουμε στο παρακάτω

Ορισμός 4.1.30. *Θεωρούμε ένα διατεταγμένο σύνολο I για το οποίο ισχύει ότι για κάθε ζευγάρι i, j υπάρχει ένα k με $i \leq k$. Ένα ευθύ (αντ. αντίστροφο) σύστημα υπέρ του συνόλου δεικτών I, είναι μία οικογένεια $\{X_i, f_{ij}, i, j \in I, i \leq j\}$ από τοπολογικούς χώρους X_i και συνεχείς απεικονίσεις f_{ij},*

$$f_{ij} : X_j \to X_i \text{ αντιστ. } f_{ij} : X_i \to X_j,$$

ώστε $f_{ii} = Id$, και

$$f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk} \text{ αντιστ. } f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij},$$

όπου $i \leq j \leq k$.

Ορισμός 4.1.31. *Το αντίστροφο όριο*

$$X = \varinjlim_{i \in I} X_i,$$

του αντιστρόφου συστήματος $\{X_i, f_{ij}\}$ είναι το υποσύνολο

$$X = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : f_{ij}(x_j) = x_i \text{ για } i \leq j\}.$$

Ορισμός 4.1.32. *Το ευθύ όριο*

$$X = \varprojlim_{i \in I} X_i,$$

του ευθέως συστήματος $\{X_i, f_{ij}\}$ είναι το πηλίκο

$$X = \{(x_i)_{i \in I} \coprod_{i \in I} X_i / \sim,$$

όπου δύο στοιχεία $x_i \sim x_j$ είναι ισοδύναμα αν υπάρχει $k \geq i, j$ ώστε $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$.

Οι παραπάνω δύο γενικεύσεις της ένωσης και της τομής μοιάζουν να είναι αρκετά τεχνικοί και δύσχρηστοί, παρόλα αυτά αρκετές έννοιες της άλγεβρας όπως η θεωρία Galois των απείρων ομάδων, η θεωρία των καλυπτικών απεικονίσεων και της αλγεβρικής πρωταρχικής ομάδας, η θεωρία των p-αδικών πληρώσεων και η θεωρία των *φύτρων*, που θα περιγράψουμε σε λίγο, τους απαιτούν.

Η θεωρία των φύτρων έχει την βάση της στην μιγαδική και πραγματική ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, όλες οι μιγαδικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής (και ορισμένες από τις απειροδιαφορίσιμες πραγματικές) δέχονται σε γειτονιές σημείων τους ένα ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά. Το ανάπτυγμα αυτό συγκλίνει μέσα σε ένα μικρό δίσκο που εξαρτάται από την ακτίνα σύγκλισης· η αρχική συνάρτηση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{C}$. Θέλουμε με κάποιο τρόπο να κάνουμε τις συναρτήσεις αυτές, που έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού, ίσες. Όμως εξ ορισμού συναρτήσεις με διαφορετικά πεδιά ορισμού δεν μπορεί ποτέ να είναι ίσες. Ορίζουμε λοιπόν δύο συναρτήσεις ότι είναι ισοδύναμες γύρω από το σημείο P αν υπάρχει κοινός περιορισμός τους γύρω από το P στον οποίο να ταυτίζονται. Τις κλάσεις ισοδυναμίας των συναρτήσεων τις ονομάζουμε *φύτρα* (germs). Τα φύτρα στο P σχηματίζουν ένα δακτύλιο, τον οποίο τον ονομάζουμε *άξονα* (stalk) στο P. Όλη η θεωρία αυτή θυμίζει αυτή των sheafs.

Πράγματι, για ένα sheaf $\mathcal{F}$ και ένα σημείο P μπορούμε να δείξουμε ότι τα $\mathcal{F}(U)$, όπου το U διατρέχει τα σύνολα που περιέχουν το P και συναρτήσεις $F_{U,V}$, $U \subset V$, $F_{U,V} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ τις γνωστές συναρτήσεις περιορισμού, είναι ένα ευθή όριο και μπορούμε να σχηματίσουμε το stalk του $\mathcal{F}_P$.

4.1ε' Schemes και Structure Sheaves.

Θα ολοκληρώσουμε την κατασκευή του σχήματος $X = SpecR$ ορίζοντας το structure sheaf $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{SpecR}$. Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή αυτού του κεφαλαίου θέλουμε η σχέση μεταξύ των $SpecR$ και R να γενικεύει αυτή μεταξύ ενός affine variety και του δακτυλίου συντεταγμένων του. Συγκεκριμένα θέλουμε ο δακτύλιος των global sections του structure sheaf $\mathcal{O}_X$ να είναι ο δακτύλιος R.

Αυτό που θα κάνουμε είναι να επεκτείνουμε τον δακτύλιο συναρτήσεων R σε ένα ολόκληρο sheaf δακτυλίων. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε ανοιχτό σύνολο U του X, θα αντιστοιχίσουμε ένα δακτύλιο $\mathcal{O}_X(U)$ και για κάθε ζεύγος ανοιχτών συνόλων $U \subset V$ θα αντιστοιχίσουμε ένα ομομορφισμό περιορισμού

$$res_{V,U} : \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U)$$

ο οποίος ικανοποιεί τα αξιώματα που αναφερθήκανε προηγουμένως. Είναι πολύ εύκολο να βρούμε ποιοί θα είναι οι δακτύλιοι που θα αντιστοιχούν στα διακεκριμένα ανοιχτά σύνολα U και V καθώς και οι συναρτήσεις περιορισμού. Θέτουμε

$$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f.$$

Αν $X_f \supset X_g$, κάποια δύναμη του g είναι πολλαπλάσιο του f (θυμίζουμε ότι το ριζικό ιδεώδες του $\langle f \rangle$ είναι η τομή όλων των πρώτων που περιέχουν το f). Έτσι η συνάρτηση περιορισμού res_{X_f,X_g} μπορεί να προσδιοριστεί από την απεικόνιση τοπικοποίησης $R_f \to R_{fg} = R_g$. Από την πρόταση 4.1.28 αυτό επαρκεί για να ορίσουμε το structure sheaf $\mathcal{O}$.

Λήμμα 4.1.33. *Έστω $X = SpecR$ και έστω $\{f_a\}$ να είναι μια συλλογή στοιχείων του R. Τα ανοιχτά σύνολα X_{f_a} καλύπτουν τον X αν και μόνο αν τα στοιχεία f_a παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες. Συγκεκριμένα, ο X είναι ημισυμπαγής (quasicompact) σαν τοπολογικός χώρος.*

Παρατήρηση 4.1.34. *Θυμίζουμε ότι ημίσυμπαγής σημαίνει ότι κάθε ανοιχτό κάλυμμα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Το «ημί-» υπάρχει διότι ο χώρος δεν είναι απαραίτητα Hausdorff. Για την ακρίβεια, τα σχήματα δεν είναι σχεδόν ποτέ Hausdorff! Δυστυχώς αυτό το γεγονός αναιρεί τα περισσότερα από τα πλεονεκτήματα της συμπάγειας. Για παράδειγμα, σε αντίθεση με την περίπτωση των συμπαγών πολλαπλοτήτων, η συνεχής εικόνα ενός affine scheme σε ένα άλλο δεν είναι απαραίτητα κλειστό.*

Απόδειξη. Τα X_{f_a} καλύπτουν τον X αν και μόνο αν κανένα από τα πρώτα του R δεν περιέχει όλα τα f_a, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν τα f_a παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες. Αυτό αποδεικνύει και το πρώτο μέρος. Για το δεύτερο, σημειώνουμε πωε κάθε ανοιχτό κάλυμμα έχει μια εκλέπτυνση της μορφής $X = \bigcup X_{f_a}$, όπου κάθε $f_a \in R$. Εφόσον τα X_{f_a} καλύπτουν τον X, τα f_a παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες, οπότε το 1 μπορεί να γραφεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός (πεπερασμένος απαραίτητα) των f_a. Παίρνοντας μόνο τα f_a που εμπλέκονται σ' αυτή την ανάλυση του 1, βλέπουμε πως το κάλυμμα $X = \bigcup X_{f_a}$ και μαζί μ' αυτό το αρχικό κάλυμμα έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα. □

Πρόταση 4.1.35. *Έστω $X = SpecR$, και υποθέετουμε ότι το X_f καλύπτεται από τα ανοιχτά σύνολα $X_{f_a} \subset X_f$.*

(i) *Αν τα $g, h \in R_f$ γίνονται ίσα μέσα σε κάθε R_{f_a}, τότε είναι ίσα.*

(ii) *Αν για κάθε a υπάρχει ένα $g_a \in R_{f_a}$ τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος a και β οι εικόνες των g_a και g_β μέσα στο $R_{f_a f_\beta}$ να είναι ίσες, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $g \in R_f$ του οποίου η εικόνα μέσα στο R_f είναι το g_a για κάθε a.*

Ισοδύναμα, αν $\mathcal{B}$ είναι η συλλογή των διακεκριμένων ανοιχτών συνόλων $SpecR_f$ του SpecR και αν θέσουμε $\mathcal{O}_X(SpecR_f) := R_f$, τότε το $\mathcal{O}_X$ είναι ένα $\mathcal{B}-sheaf$. Από την πρόταση 4.1.28, το $\mathcal{O}_X$ επεκτείνεται σε ένα sheaf πάνω από τον X με μοναδικό τρόπο.

Απόδειξη. Βλέπε [1] σελίδα 19 □

Η πρόταση ισχύει και στην περίπτωση που αντικαταστήσουμε τα R_f και R_{f_a} με M_f και M_{f_a} για οποιοδήποτε R-module M , ενώ η απόδειξη παραμένει η ίδια.

Ορισμός 4.1.36. *Το sheaf $\mathcal{O}_X$ που ορίζεται στην παραπάνω πρόταση ονομάζεται το structure sheaf πάνω από τον X ή του sheaf των κανονικών συναρτήσεων πάνω από τον X.*

Σε αντίθεση με πολλές γεωμετρικές θεωρίες, μπορεί να υπάρχουν σχετικά λίγες κανονικές συναρτήσεις σε ένα σχήμα. Για παράδειγμα, όταν ορίζουμε τυχαία σχήματα, θα δούμε ότι τα σχήματα τα οποία είναι τα ανάλογα των συμπαγών πολλαπλοτήτων μπορεί να έχουν μόνο σταθερές κανονικές συναρτήσεις. Για αυτό το λόγο, οι μερικώς ορισμένες συναρτήσεις σε ένα σχήμα X (δηλαδή, στοιχεία $\mathcal{O}_X(U)$ για κάποιο ανοιχτό πυκνό υποσύνολο U) παίζουν έναν ασυνήθιστα σημαντικό ρόλο. Ονομάζονται *ρητές συναρτήσεις* στον X γιατί στην περίπτωση που $X = SpecR$ με R να είναι μια ακέραια περιοχή και $U = X_f$, τα στοιχεία του $\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$ είναι κλάσματα με στοιχεία από το R.

4.2 Τα Σχήματα Γενικότερα.

Μετά από αυτή τη εκτεταμμένη περιγραφή των affine schemes είναι εύκολο να ορίσουμε τα σχήματα πιο γενικά.

Ορισμός 4.2.1. *Ένα σχήμα X είναι απλά ένας τοπολογικός χώρος, που ονομάζεται το support του X και συμβολίζεται με $|X|$ ή με supp X, μαζί με ένα sheaf $\mathcal{O}_X$ δακτυλίων πάνω από τον X, τέτοιο ώστε το ζεύγος $(|X|, \mathcal{O}_X)$ να είναι τοπικά affine. Τοπικά affine σημαίνει ότι ο $|X|$ καλύπτεται από ανοιχτά σύνολα U_i τέτοια ώστε να υπάρχουν δακτύλιοι R_i και ομοιομορφισμοί $U_i \cong |SpecR_i|$ με $\mathcal{O}_X|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{SpecR_i}$.*

Για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτόν τον ορισμό, πρέπει πρώτα να ορίσουμε τις βασικές ιδιότητες του structure sheaf ενός affine σχήματος.

Ορισμός 4.2.2. *Έστω X να είναι ένας οποιοσδήποτε τοπολογικός χώρος και έστω $\mathcal{O}$ να είναι το sheaf των δακτυλίων πάνω από αυτόν τον χώρο. Καλούμε το ζεύγος $(X, \mathcal{O})$ ringed space και θέλουμε να δούμε πότε είναι ισομορφικό με ένα affine σχήμα $(|SpecR|, \mathcal{O}_{SpecR})$. Σημειώνουμε εδώ πως άν το $(X, \mathcal{O})$ ήταν ένα affine σχήμα τότε θα έπρεπε να είναι το σχήμα SpecR.*

Έστω τώρα $(X, \mathcal{O})$ να είναι ένας οποιοσδήποτε ringed space και έστω $R = \mathcal{O}(X)$. Για οποιοδήποτε $f \in R$ μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο $U_f \subset X$ ως το σύνολο των σημείων $x \in X$ τα οποία η f τα απεικονίζει σε μια μονάδα του stalk $\mathcal{O}_x$. Αν $(X, \mathcal{O})$ είναι ένα affine σχήμα τότε θα πρέπει να έχουμε:

(i) $\mathcal{O}(U_f) = R[f^{-1}]$.
Παρόλα αυτά αυτή η συνθήκη δεν είναι αρκετή. Για να έχουμε την ύπαρξη μιας απεικόνισης μεταξύ του X και του $|SpecR|$ πρέπει να υποθέσουμε μια επιπλέον συνθήκη την οποία έχουν τα affine σχήματα.

(ii) Τα stalks $\mathcal{O}_x$ του $\mathcal{O}$ είναι τοπικοί δακτύλιοι.
Ένα ringed space που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα συχνά ονομάζεται ένα τοπικά ringed space. Αν, επιπλέον, το $(X, \mathcal{O})$ ικανοποιεί την προαναφερθήσα ιδιότητα, τότε υπάρχει μια φυσική απεικόνιση $X \to |Spec\mathcal{O}(X)|$ που στέλνει το $x \in X$ στο πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}(X)$ το οποίο είναι η προεικόνα του μέγιστου ιδεώδους του $\mathcal{O}_x$.

(iii) Η απεικόνιση $X \to |Spec\mathcal{O}(X)|$ είναι ένας ομοιομορφισμός.

Δεδομένων των παραπάνω, λέμε ότι το ζεύγος $(X, \mathcal{O})$ είναι affine αν ικανοποιεί τις τρεις αυτές ιδιότητες. Έτσι, ο ορισμός που δώσαμε προηγουμένως γίνεται:

Ορισμός 4.2.3. *Ένα ζεύγος $(X, \mathcal{O})$ είναι ένα σχήμα αν είναι τοπικά affine.*

Ορισμός 4.2.4. (i) *Μια κανονική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset X$ είναι ένα section του $\mathcal{O}_X$ πάνω από το U. Μια καθολική κανονική συνάρτηση είναι μια κανονική συνάρτηση στον X.*

(ii) *Τα stalks $\mathcal{O}_{X,x}$ του structure sheaf $\mathcal{O}_X$ στα σημεία $x \in X$ ονομάζονται οι τοπικοί δακτύλιοι του $\mathcal{O}_X$. Το σώμα υπολοίπων του $\mathcal{O}_{X,x}$ συμβολίζεται με $\kappa(x)$. 'Οπως ακριβώς και στην παράγραφο 4.1α' ένα section του $\mathcal{O}_X$ μπορεί να θεωρηθεί σαν μια «συνάρτηση» που παίρνει τιμές μέσα στα σώματα $\kappa(x)$: αν $f \in \mathcal{O}_X(U)$ και $x \in U$, η εικόνα του f μέσω της σύνθεσης*

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x)$$

είναι η τιμή του f στο x.

4.2α' Subschemes.

Έστω U να είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο ένος σχήματος X. Το ζεύγος $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ είναι πάλι ένα σχήμα, παρόλο που αυτό δεν είναι εντελώς ξεκάθαρο. Για να το δούμε, σημειώνουμε ότι ένα διακεκριμένο ανοιχτό σύνολο ενός affine σχήματος είναι ξανά ένα affine σχήμα: αν $X = SpecR$ και $U = X_f$, τότε $(U, \mathcal{O}_X|_U) =$

$SpecR_f$. Εφόσον τα διακεκριμένα ανοιχτά σύνολα του X τα οποία περιέχονται στο U καλύπτουν το U, αυτό αποδεικνύει ότι το $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ καλύπτεται από affine σχήματα.

Ορισμός 4.2.5. *Ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός σχήματος ονομάζεται ανοιχτό subscheme αν έχει την δομή που περιγράφηκε προηγουμένως.*

Ο ορισμός ενός κλειστού subscheme είναι πιο πολύπλοκος. Δεν αρκεί να προσδιορίσουμε μόνο έναν κλειστό υπόχωρο του X, επειδή η δομή του sheaf δεν ορίζεται μ' αυτόν τον τρόπο.
Θεωρούμε αρχικά ένα affine σχήμα $X = SpecR$. Για κάθε ιδεώδες I του δακτυλίου R, μπορούμε να μετατρέψουμε το κλειστό υποσύνολο $V(I) \subset X$ σε ένα affine σχήμα απλά ταυτίζοντας το με το $Y = SpecR/I$.

Παρατήρηση 4.2.6. *Αυτό έχει νόημα επειδή τα πρώτα του R/I είναι ακριβώς τα πρώτα του R που περιέχουν το I modulo I και κατά συνέπεια ο τοπολογικός χώρος $|SpecR/I|$ είναι ομοιομορφικός με κανονικό τρόπο με το κλειστό σύνολο $V(I) \subset X$.*

Ορισμός 4.2.7. *Ορίζουμε ένα κλειστό subscheme του X να είναι ένα σχήμα Y το οποίο είναι το spectrum ενός δακτυλίου πηλίκου του R (έτσι ώστε τα κλειστά subschemes του X εξ ορισμού να αντιστοιχούν 1-1 με τα ιδεώδη στον δακτύλιο R).*

Παρατήρηση 4.2.8. *Μπορούμε, λοιπόν, με βάση τα παραπάνω να ορίσουμε όλες τις συνήθεις σχέσεις μεταξύ κλειστών subschemes ενός δοσμένου σχήματος $X = SpecR$. Έτσι, λέμε ότι ένα κλειστό subscheme $Y = SpecR/I$ του X περιέχει το κλειστό subscheme $Z = SpecR/J$ αν το Z είναι με τη σειρά ένα κλειστό subscheme του Y, δηλαδή αν $J \supset I$. Αυτό επάγει ότι $V(J) \supset V(I)$, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Η ένωση των κλειστών subschemes $SpecR/I$ και $SpecR/J$ ορίζεται ως

$$SpecR/(I \cap J)$$

και η τομή τους ως $SpecR/(I + J)$. Είναι σημαντικό να πούμε εδώ ότι οι έννοιες του περιέχειν, της τομής και της ένωσης *δεν* έχουν όλες τις συνηθισμένες ιδιότητες των συνολοθεωρητικών τους αντιστοίχων (Βλέπε[1, σελίδα 69]).

Ένα από τα πιο σημαντικά κλειστά subschemes ενός affine σχήματος X είναι το reduced συνεταιρικό σχήμα με το X.

Ορισμός 4.2.9. *Το reduced συνεταιρικό σχήμα με το X, είναι το $X_{red} = SpecR_{red}$, όπου R_{red} είναι ο δακτύλιος R modulo το nilradical ιδεώδες, δηλαδή το ιδεώδες των μηδενοδύναμων στοιχείων του R. Θυμίζουμε ότι το nilradical ιδεώδες ενός δακτυλίου R ισούται με την τομή όλων των πρώτων του R. Επομένως οι $|X|$ και $|X_{red}|$ είναι ταυτόσημοι ως τοπολογικοί χώροι. Λέμε ότι το σχήμα X είναι reduced αν $X = X_{red}$.*

Παράδειγμα 4.2.10. *Ένα παράδειγμα reduced σχήματος είναι αυτό που προκύπτει από τον reduced δακτύλιο $K[x, y]/x^2+y^2-1$. Από την άλλη, ο δακτύλιος $K[x, y]/(x^2+y^2-1)^2$ δεν είναι reduced καθώς περιέχει μηδενοδύναμα στοιχεία, για την ακρίβεια το $x^2 + y^2 - 1$. Έτσι το σχήμα που προκύπτει από τον δακτύλιο αυτό δεν είναι reduced. Παρόλα αυτά, αν το K είναι σώμα, είναι ίδιοι σαν τοπολογικοί χώροι.*

4.2β' Ο Τοπικός Δακτύλιος σε ένα Σημείο.

Η ιδιότητα της Noether είναι μια θεμελιώσης ιδιότητα για τη θεωρία των δακτυλίων και η επέκταση αυτής είναι εξίσου θεμελιώδους σημασίας στη θεωρία των σχημάτων.

Ορισμός 4.2.11. *Λέμε ότι ένα σχήμα έχει την ιδιότητα της Noether αν δέχεται ένα πεπερασμένο κάλυμμα από ανοιχτά affine subschemes, το καθένα από τα οποία είναι το spectrum ενός δακτυλίου της Noether.*

Ορισμός 4.2.12. *Έστω R ο δακτύλιος συντεταγμένων ενός affine variety X και έστω $P < R$ να είναι το ιδεώδες των συναρτήσεων που μηδενίζονται στο x. Ο τοπικός δακτύλιος του X στο x, προκύπτει από τον R αντιστρέφοντας όλα τις συναρτήσεις που δεν μηδενίζονται στο x και είναι ο δακτύλιος R_P.*

Το μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}_{X,x}$ αυτού του τοπικού δακτυλίου είναι το σύνολο όλων των sections τα οποία μηδενίζονται στο x. Ο τοπικός δακτύλιος είναι ένα πολύ απλό αντικείμενο: για να τον υπολογίσουμε, μπορούμε να ξεκινήσουμε αντικαθιστόντας τον X με μια affine ανοιχτή περιοχή του x και έτσι να υποθέσουμε ότι $X = SpecR$ και $x = [\mathfrak{p}]$. Στη συνέχεια μπορούμε να περιορίσουμε τα ανοιχτά υποσύνολα U στο ευθύ όριο με τα διακεκριμένα ανοιχτά σύνολα $SpecR_f$ τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$, δηλαδή $f \notin \mathfrak{p}$. Έτσι

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} R_f = R_{\mathfrak{p}}$$

και

$$\mathfrak{m}_{X,x} := \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} \mathfrak{p}R_f = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}},$$

η τοπικοποίηση του R στο $\mathfrak{p}$. Μπορούμε να φανταστούμε το germ στο x σαν το $Spec\mathcal{O}_{X,x}$.

4.2γ' Μορφισμοί Σχημάτων.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τους μορφιμούς μεταξύ των σχημάτων. Στην κλασική αλγεβρική γεωμετρία μια κανονική απεικόνιση μεταξύ affine varieties επάγει, μέσω σύνθεσης, μια απεικόνιση μεταξύ των δακτυλίων συντεταγμένων αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αυτή η αντιστοιχία κάνει αυτά την κατηγορία των affine varieties και αυτή των δακτυλίων συντεταγμένων ισοδύναμες. Ο ορισμός που θα δώσουμε στη συνέχεια αυτής της παραγράφου γενικεύει το εξής: Θα δούμε ότι οι απεικονίσεις μεταξύ affine σχημάτων δίνονται απλά από τις απεικονίσεις μεταξύ των αντίστοιχων δακτυλίων συντεταγμένων (προς την αντίθετη κατεύθυνση).
Έχοντας λοιπόν την παραπάνω περιγραφή για τους μορφισμούς των affine σχημάτων ως προς τις απεικονίσεις δακτυλίων, μπορούμε να ορίσουμε ένα μορφισμό σχημάτων να είναι κάτι το οποίο είναι «τοπικά ένας μορφισμός affine σχημάτων». Αυτό οδηγεί σε σωστά αποτελέσματα αλλά έχει το μειονέκτημα να οδηγεί σε προβλήματα ελέγχου της ανεξαρτησίας της επιλογής του affine καλύμματος. Για το λόγο αυτό δίνουμε έναν ορισμό παρακάτω ο οποίος δουλεύει χωρις την επιλογή ενός affine καλύμματος. Παρόλο που αρχικά φαίνεται πιο πολύπλοκος αποδεικνύεται πως είναι αρκετά ευχρηστός και έχει το πλεονέκτημα ότι δουλεύει ομοιόμορφα για όλους τους «τοπικά ringed χώρους»- δομές που ορίζονται από έναν τοπολογικό χώρο και ένα sheaf δακτυλιών των οποίων τα stalks είναι τοπικοί δακτύλιοι.

Για να παρουσιάσουμε καλύτερα τα κίνητρα που μας οδήγησαν να χρησιμοποιήσουμε αυτον τον ορισμό θα καταφύγουμε για μια ακόμη φορά στην περίπτωση των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων.

Μια συνεχής απεικόνιση $\psi : M \to N$ μεταξύ διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση f πάνω σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset N$, το pullback $\psi^\sharp f := f \circ \psi$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση πάνω στο $\psi^{-1} \subset M$. Αυτό μπορούμε να εκφράσουμε και με τη γλώσσα των sheaves. Μια συνεχής απεικόνιση $\psi : M \to N$ επάγει μια απεικόνιση από sheaves πάνω στο N

$$\psi^\sharp : \mathcal{C}(N) \to \psi_* \mathcal{C}(M)$$

και στέλνει μια συνεχή συνάρτηση $f \in \mathcal{C}(N)(U)$ ορισμένη σε ανοιχτό υποσύνολο $U \subset N$ στο pullback $f \circ \psi \in \mathcal{C}(M)(\psi^{-1}U) = (\psi_*\mathcal{C}(M))(U)$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\psi : M \to N$ μπορεί να οριστεί σαν μια συνεχής απεικόνιση $\psi : M \to N$ τέτοια ώστε η επαγώμενη απεικόνιση $\psi^\sharp$ στέλνει το subsheaf $\mathcal{C}(N) \subset \mathcal{N}$ στο subsheaf $\psi_*\mathcal{C}^\infty(M) \subset \psi_*\mathcal{C}(M)$. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(N) \arrow[r, "\psi^\sharp"] & \psi_*\mathcal{C}(M) \\
\mathcal{C}^\infty(N) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi^\sharp"] & \psi_*\mathcal{C}^\infty(M) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Θα θέλαμε, λοιπόν, να εισάγουμε αυτήν την ιδέα στην περίπτωση των σχημάτων. Η διαφορά είναι ότι το structure sheaf $\mathcal{O}_X$ ενός σχήματος X *δεν* είναι ένα subsheaf ενός συγκεκριμένου sheaf συναρτήσεων πάνω από τον X. Έτσι, για να ορίσουμε μια απεικόνιση μεταξύ σχημάτων, θα πρέπει να ορίσουμε και την συνεχή συνάρτηση $\psi^\sharp : X \to Y$ πάνω από τους τοπολογικούς χώρους και την απεικόνιση pullback

$$\psi^\sharp : \mathcal{O}_X \to \psi_*\mathcal{O}_Y.$$

Φυσικά θα πρέπει οι ψ και $\psi^\sharp$ να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες συμβατότητας.

Παρατήρηση 4.2.13. *Το πρόβλημα στο να ορίσουμε τις παράπανω συναρτήσεις βρίσκεται στο ότι ένα section του structure sheaf $\mathcal{O}_Y$ δεν παίρνει τιμές σε ένα συγκεκριμένο σώμα αλλά σε ένα σώμα $\kappa(q)$ το οποίο διαφέρει ανάλογα με το σημείο $q \in Y$. Συγκεκριμένα δεν έχει νόημα να απαιτούμε η τιμή της $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ στο σημείο $q \in U \subset Y$ να είναι ίδια με την τιμή της $\psi^\sharp f \in \psi_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(U)$ σε ένα σημείο $p \in \psi^{-1}U \subset X$ που απεικονίζεται στο q, εφόσον αυτές οι «τιμές» βρίσκονται σε διαφορετικά σώματα. Αυτό που έχει νόημα είναι να απαιτούμε από την f να μηδενίζεται στο q αν και μόνο αν η $\psi^\sharp f$ μηδενίζεται στο p. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.*

Ορισμός 4.2.14. *Ένας μορφισμός, ή απεικόνιση, μεταξύ σχημάτων X και Y είναι ένα ζεύγος $(\psi, \psi^\sharp)$, όπου $\psi : X \to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ των τοπολογικών χώρων και*

$$\psi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to \psi_*\mathcal{O}_X$$

είναι μια απεικόνιση από sheaves στον Ψ που ικανοποιεί την ακόλουθη συνδήκη.

Για κάθε σημείο $x \in X$ και για κάθε περιοχή U του $q = \psi(p)$ στο Y ένα section $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ μηδενίζεται στο q αν και μόνο αν το section $\psi^\sharp f$ του $\psi_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}U)$ μηδενίζεται στο p.

Παρατήρηση 4.2.15. *Αυτή η τελευταία συνδήκη μπορεί να αναδιατυπωθεί και με τη χρήση των τοπικών δακτυλίων $\mathcal{O}_{X,p}$ και $\mathcal{O}_{Y,q}$. Οποιαδήποτε απεικόνιση από sheaves $\psi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to \psi_*\mathcal{O}_X$ επάγει μια απεικόνιση*

$$\mathcal{O}_{Y,q} = \varinjlim_{q \in U \subset Y} \mathcal{O}_Y(U) \to \varinjlim_{q \in U \subset Y} \mathcal{O}_X(\psi^{-1}U),$$

και αυτός ο τελευταίος δακτύλιος απεικονίζεται με φυσιολογικό τρόπο στο όριο

$$\varinjlim_{p \in V \subset X} \mathcal{O}_X(V)$$

πάνω από όλα τα ανοιχτά υποσύνολα V που περιέχουν το p, που είναι τα $\mathcal{O}_{X,p}$. Έτσι η $\psi^\sharp$ επάγει μια απεικόνιση τοπικών δακτυλίων $\mathcal{O}_{Y,q} \to \mathcal{O}_{X,p}$. Λέγοντας ότι ένα section $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ μηδενίζεται στο q αν και μόνο αν το $\psi^\sharp f \in \psi_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\psi^{-1}U)$ μηδενίζεται στο p σημαίνει ότι αυτή η απεικόνιση $\mathcal{O}_{Y,q} \to \mathcal{O}_{X,p}$ στέλνει το μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}_{Y,q}$ στο $\mathfrak{m}_{X,p}$ (με άλλα λόγια είναι ένας τοπικός ομομορφισμός τοπικών δακτυλίων).

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω ένας μορφισμός από affine schemes

$$\psi : X = SpecS \to SpecR = Y$$

είναι το ίδιο με ένα ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : R \to S$. Εδώ παραθέτουμε το ακριβές αποτέλεσμα, μαζί με μια σημαντική προσθήκη η οποία περιγράφει απεικονίσεις από ένα τυχαίο σχήμα σε ένα affine σχήμα.

Θεώρημα 4.2.16. *Για κάθε σχήμα X και για κάθε δακτύλιο R, οι μορφισμοί*

$$(\psi, \psi^\sharp) : X \to SpecR$$

είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τους ομομορφισμούς δακτυλίων

$$\phi : R \to \mathcal{O}_X(X)$$

μέσω της

$$\phi = \psi^\sharp(SpecR) : R = \mathcal{O}_{SpecR}(SpecR) \to \psi_*(\mathcal{O}_X)(SpecR) = \mathcal{O}_X(X).$$

Απόδειξη. Θα περιγράψουμε την αντίστροφη αντιστοιχία. Θέτουμε $Y = SpecR$ και έστω $\phi : R \to \mathcal{O}_X(X)$ να είναι μια απεικόνιση μεταθετικών δακτυλίων. Αν $p \in |X|$ είναι ένα σημείο, τότε η προεικόνα του μέγιστου ιδεώδους μέσω της απεικόνισης $R \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,p}$ να είναι ένα πρώτο ιδεώδες, έτσι ώστε η ϕ να επάγει μια απεικόνιση συνόλων

$$\psi : |X| \to |Y|,$$

η οποία είναι συνεχής με τη Zariski τοπολογία. Στη συνέχεια, για κάθε διακεκριμένο ανοιχτό σύνολο $U = SpecR_f \subset Y$, ορίζουμε την απεικόνιση $\psi^\sharp : R_f = \mathcal{O}_Y(U) \to (\psi_* \mathcal{O})(U)$ να αείναι η σύνθεση

$$R_f \to \mathcal{O}_X(X)_{\varphi(f)} \to \mathcal{O}_X(\psi^{-1}U)$$

που προκύπτει με την τοπικοποίση της ψ. Από την πρόταση 4.1.28 αυτό αρκεί για να ορίσουμε μια απεικόνιση από sheaves. Με περαιτέρω τοπικοποίηση βλέπουμε ότι αν $\psi(p) = q$, τότε η $\psi^\sharp$ ορίζει μια τοπική απεικόνιση από τοπικούς δακτυλίους $R_q \to \mathcal{O}_{X,p}$ και έτσι το ζεύγος $(\psi, \psi^\sharp)$ είναι ένας μορφισμός από σχήματα. Προφανώς, η επαγώμενη απεικόνιση ικανοποιεί την

$$\psi^\sharp = \varphi,$$

και πράγματι η κατσκευή είναι η αντίστροφη της δοθείσας. □

Παράδειγμα 4.2.17. *Κάθε σημείο $[\mathfrak{p}]$ του $X = SpecR$ αντιστοιχεί σε ένα σχήμα $Spec\kappa(\mathfrak{p})$ το οποίο έχει μια φυσική απεκόνιση στο X που ορίζεται από τη σύνδετη απεικόνιση δακτυλίων*

$$R \to R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = \kappa(\mathfrak{p}).$$

Φυσικά, ο εγκλεισμός κάνει το $[\mathfrak{p}]$ ένα κλειστό subscheme αν και μόνο αν το $\mathfrak{p}$ είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του R (εν γένει, το $[\mathfrak{p}]$ είναι μια άπειρη τομή από ανοιχτά subschemes ενός κλειστού subscheme).

Ορισμός 4.2.18. *Αν $\psi : Y \to X$ είναι ένας μορφισμός από affine σχήματα, $X = SpecR, Y = SpecT$ και X' είναι ένα κλειστό subscheme του X που ορίζεται από ένα ιδεώδες I του R, τότε ορίζουμε την προεικόνα $\psi^{-1}X'$ της ψ πάνω από το X' να είναι το κλειστό sbscheme του Y που ορίζεται από το ιδεώδες $\varphi(I)T$ στον T. Αν το X' είναι ένα κλειστό σημείο p του X, καλούμε το $\psi^{-1}p$ fiber (ίνα) πάνω από το X'.*

4.2δ' Κατασκευές με κολλήματα Σχημάτων.

Χρησιμοποιόντας την έννοια του μορφισμού, μπορούμε να κατασκευάσουμε πιο πολύπλοκα σχήματα (για παράδειγμα, μη affine σχήματα) ταυτίζοντας πιο απλά σχήματα πάνω από ανοιχτά σύνολα. Αυτή είναι βασική διαδικασία, που ονομάζεται « κατασκευή με κολλήματα » (the glueing construction.)

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συλλογή από σχήματα $\{X_a\}_I$ και ένα ανοιχτό σύνολο $X_{a\beta}$ στο X_a για κάθε $\beta \neq a$ στο I. Υποθέτουμε επίσης ότι έχουμε μια οικογένεια ισομορφισμών από σχήματα

$$\psi_{a\beta} : X_{a\beta} \to X_{\beta a} \quad \text{για κάθε} a \neq \beta \,\text{στο}\, I,$$

που ικανοποιούν τις συνθήκες $\psi_{\beta a} = \psi_{a\beta}^{-1}$ για κάθε a και β,

$$\psi_{a\beta}(X_{a\beta} \cap X_{a\gamma}) = X_{\beta a} \cap X_{\beta\gamma} \quad \text{για κάθε}\; a,\, \beta,\, \gamma,$$

και η συνθήκη συμβατότητας

$$\psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{a\beta}|_{(X_{a\beta} \cap X_{a\gamma})} = \psi_{a\gamma}|_{(X_{a\beta} \cap X_{a\gamma})}.$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορούμε να ορίσουμε ένα σχήμα X κολλώντας τα X_a μέσω των $\psi_{a\beta}$ με προφανή τρόπο. Υπάρχει δηλαδή ένα (μοναδικό) σχήμα X με ένα κάλλυμα από ανοιχτά subschemes ισομορφικά με τα X_a τέτοια ώστε οι ταυτοτικές απεικονίσεις στις τομές $X_a \cap X_\beta \subset X$ να αντιστοιχούν στους ισομορφισμούς $\psi_{a\beta}$.

Αυτή η κατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, για να ορίσουμε προβολικά σχήματα από affine.

Στην παραπάνω και σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις, δεν χρειάζεται να ορίσουμε τις απεικονίσεις $\psi_{a\beta}$ αυστηρά. Στην ουσία μας δίνεται ένας τοπολογικός χώρος $|X|$ και μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων $|X_a|$, καθένα από αυτά εφοδιασμένο με τη δομή ενός affine σχήματος (δηλαδή, με ένα structure sheaf $\mathcal{O}_{X_a}$) με τέτοια τρόπο ώστε το $\mathcal{O}_{X_a}(X_a \cap X_\beta)$ να ταυτίζεται με φυσιολογικό τρόπο με το $\mathcal{O}_{X_\beta}(X_a \cap X_\beta)$. Για παράδειγμα, μπορεί και τα δύο να είναι υποσύνολα ένος συγκεκριμένου συνόλου. Οπότε ικανοποιούνται οι συνθήκες του πορίσματος 4.1.29, έτσι ώστε να υπάρχει ένα μοναδικά ορισμένο sheaf $\mathcal{O}_X$ πάνω από τον X που να επεκτείνεται σε όλα τα X_a. Τελικά το ζεύγος $(|X|, \mathcal{O}_X)$ είναι ένα σχήμα.

Παράδειγμα 4.2.19. *Το πιο απλό παράδειγμα της κατασκευής που μόλις περιγράψαμε, είναι ο ορισμός του affine $\mathbb{A}^n_S$ πάνω από ένα οποιοδήποτε σχήμα S. Αρχικά, για κάθε affine σχήμα $X = SpecR$ ορίζουμε τον affine $n-$χώρο πάνω από το X να είναι απλά το $SpecR[x_1, \dots, x_n]$ (συμβολίζουμε με $\mathbb{A}^n_X$ ή $\mathbb{A}^n_R$). Κάθε μορφισμός $X \to Y$ από affine σχήματα επάγει μια φυσιολογική απεικόνιση $\mathbb{A}^n_X \to \mathbb{A}^n_Y$. Συνέπεια αυτού είναι το ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το glueing construction ως εξής. Έστω S να είναι ένα τυχαίο σχήμαα που καλύπτεται από τα affine σχήματα $U_a = SpecR_a$, τότε ορίζουμε τον affine χώρο $\mathbb{A}^n_S$ πάνω από το S να είναι η ένωση των affine σχημάτων $\mathbb{A}^n_{U_a}$, με τις απεικόνισεις «κολλήματος» (τα transition functions στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων) να είναι αυτές που επάγονται από τις ταυτοτικές απεικονίσεις στο $U_a \cap U_\beta$.*

Παράδειγμα 4.2.20. *Ένα ακόμη παράδειγμα ενός σχήματος που κατασκευάζεται με κολλήματα είναι ο προβολικός $n-$χώρος πάνω από ένα δακτύλιο R, συμβολίζουμε με $\mathbb{P}^n_R$. Προκύπτει κολλώντας $n+1$ αντίγραφα του affine χώρου*

$$\mathbb{A}^n_R = SpecR[x_1, \dots, x_n]$$

πάνω από τον δακτύλιο R.

Η κατασκευή είναι ακριβώς αντίστοιχη με την κλασική κατασκευή του προβολικού χώρου σαν ένα variety πάνω από ένα σώμα. Ξεκινάμε με ένα πολυωνιμικό δακτύλιο σε $n+1$ μεταβλητές $R[X_0, \dots, X_n]$ και παίρνουμε την τοπικοποιήση

$$A := R[X_0, X_0^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}].$$

Ο δακτύλιος A έχει μια ανάλυση σε ευθύ γινόμενο (ως αβελιανή ομάδα) σε υποομάδες $A^{(n)}$, για $n \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε $A^{(n)}A^{(m)} \subset A^{(m+n)}$.

Εδώ το $A^{(n)}$ παράγεται από μονόνυμα ρητών κλασμάτων βαθμού n. Συγκεκριμένα, το μηδενικού βαθμού $A^{(0)}$ είναι ένας υποδακτύλιος του A. Στη συνέχεια παίρνουμε τους δακτυλίους που ορίζουν το affine κάλυμμά μας να είναι $R-$υποάλγεβρες του $A^{(0)}$, ο $i-$οστός υποδακτύλιος να είναι μια υποάλγεβρα A_i που αποτελείται από πολυώνυμα $P/X_i^{deg(P)}$, όπου P ένα ομογενές στοιχείο του $R[x_0, \dots, x_n]$. Το A_i παράγεται πάνω από το R από τα n αλγεβρικά ανεξάρτητα στοιχεία

$$X_0/X_i, \dots, \widehat{X_i/X_i}, \dots, X_n/X_i,$$

όπου το $\widehat{\quad}$ *συμβολίζει ως συνήθως ένα στοιχείο το οποίο παραλείπουμε. Το* A_i *είναι επομένως ισόμορφο με τον πολυωνιμικό δακτύλιο σε* n *μεταβλητές πάνω από τον* R*. Επιπλέον για* $i \neq j$ *έχουμε*

$$A_i[(X_j/X_i)^{-1}] = A_j[(X_i/X_j)^{-1}]$$

σαν υποσύνολα του A*, ενώ και τα δύο μπορούν να περιγραφούν ως οι υποάλγεβρες όλων των στοιχείων μηδενικού βαθμού που έχουν παρονομαστή της μορφής* $X_i^a X_j^\beta$*. Αν χρησιμοποιήσουμε τις ταυτοτικές απεικονίσεις για κολλήματα, τότε οι συνθήκες συμβατότητες είναι προφανείς.*

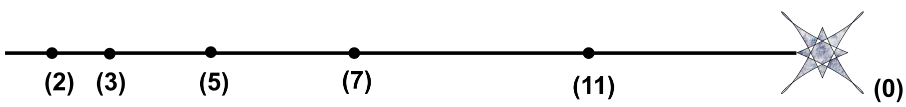
Αν $X = SpecR$ *είναι ένα affine σχήμα, συχνά γράφουμε* $\mathbb{P}_X^n$ *αντί του* $\mathbb{P}_R^n$ *και αναφερόμαστε στον χώρο σαν τον προβολικό χώρο πάνω από το* X*. Κάθε μορφισμός* $X \to Y$ *από affine σχήματα επάγει μια φυσιολογική απεικόνιση* $\mathbb{P}_X^n \to \mathbb{P}_Y^n$*. Σαν συνέπεια αυτού, μπορούμε να εφαρμόσουμε το glueing construction ξανά για ορίσουμε τον προβολικό χώρο* $\mathbb{P}_D^n$ *πάνω από ένα τυχαίο σχήμα* S*. Αυτό είναι άμεσο: Αν το* S *καλύπτεται από τα affine σχήματα* $U_a = SpecR_a$*, ορίζουμε τον προβολικό χώρο* $\mathbb{P}_S^n$ *να είναι η ένωση των προβολικών χώρων* $\mathbb{P}_{U_a}^n$ *και τα κολλήματα να είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις στα* $U_a \cap U_\beta$*.*

4.3 Αριθμητικά Σχήματα.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα μιλήσουμε για spectra δακτυλίων πεπερασμένα παραγόμενων πάνω από το $\mathbb{Z}$, τα οποία ονομάζουμε *αριθμητικά σχήματα*. Προκύπτουν κυριώς από τη θεωριά αριθμών, παρόλο που δεν είναι όλα τα αριθμοθεωρητικά σχήματα αυτού του τύπου. Στα παρακάτω παραδείγματα θα δούμε μια απίστευτη ενοποίηση, την οποία προσφέρουν τα σχήματα, μεταξύ της αριθμητικής και γεωμετρικής προσέγγισης.

4.4 Spec$\mathbb{Z}$.

Ξεκινάμε με το πιο προφανές παράδειγμα, με το σχήμα *Spec*$\mathbb{Z}$. Τα πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}$ είναι, φυσικά, τα ιδεώδη (p), όπου $p \in \mathbb{Z}$ ένας πρώτος αριθμός και το ιδεώδες (0) το οποίο αντιστοιχεί στα κλειστά σημεία του *Spec*$\mathbb{Z}$, σώμα πηλίκο $\mathbb{F}_p$ και το (0) να αντιστοιχεί σε ένα « γενικευμένο » σημείο (generic point) , του οποίου η κλειστότητα είναι ολόκληρο το *Spec*$\mathbb{Z}$ και το σώμα πηλίκο του το $\mathbb{Q}$. Η εικόνα είναι η εξής:



Σχήμα 4.1: *Spec*$\mathbb{Z}$

Παρατηρούμε μια ομοιότητα με την affine ευθεία $\mathbb{A}_K^1$ πάνω από ένα σώμα. Παρόλα αυτά η αναλογία αυτή έχει και κάποιους περιορισμούς: Ενώ το *Spec*$\mathbb{Z}$ συμπεριφέρεται περίπου σαν το $\mathbb{A}_K^1$ δεν είναι, για παράδειγμα, ένα ανοιχτό subscheme κανενός σχήματος το οποίο να είναι ανάλογο με το $\mathbb{P}_K^1$. Παρόλα αυτά μια

« συμπαγοποίηση » του $\mathbb{A}^1_K$ μας προσφέρει η θεωρία του Arakelov, αλλά δεν θα ασχοληθούμε εδώ μ' αυτήν.

4.5 Το Spec του Δακτυλίου Ακεραίων Αλγεβρικών σε ένα Σώμα Αριθμών.

Θεωρούμε ένα σχήμα της μορφής *SpecA*, όπου $A \subset K$ είναι ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών σε ένα σώμα αριθμών K. Θα αναλύσουμε το παράδειγμα $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ και $A = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Όπως και στην περίπτωση του *Spec*$\mathbb{Z}$, υπάρχουν δυο τύποι σημείων: κλειστά σημεία που αντιστοιχούν σε μη μηδενικά πρώτα ιδεώδη του A, που έχουν πεπερασμένο σώμα πηλίκο και ένα generic σημείο που αντιστοιχεί στο (0) με σώμα πηλίκο το K. Αυτό που κάνει το συγκεκριμένο παράδειγμα ενδιαφέρον είναι η απεικόνιση *SpecA* $\to$ *Spec*$\mathbb{Z}$ που επάγεται από τον εγκλεισμό του $\mathbb{Z}$ στο A. Θεωρούμε, για παράδειγμα, την ίνα πάνω από το σημείο $[(p)] \in$ *Spec*$\mathbb{Z}$. Αυτό είναι απλά το σύνολο των πρώτων του A που περιέχουν το ιδεώδες $pA \subset A$ και μπορεί να συμπεριφέρεται με τους ακόλουθους τρεις τρόπους:

(i) Αν το p διαιρεί τη διακρίνουσα 12 του K πάνω από $\mathbb{Q}$ (δηλαδή είναι $p = 2$ ή 3) το ιδεώδες (p) είναι το τετράγωνο ενός ιδεώδους του A: Έχουμε

$$2A = (1 + \sqrt{3})^2$$

και φυσικά

$$3A = (\sqrt{3})^2.$$

Τα σώματα πηλίκο στα σημείο $(1 + \sqrt{3})^2$ και $(\sqrt{3}) \in$ *SpecA* είναι τα σώματα $\mathbb{F}_2$ και $\mathbb{F}_3$, αντίστοιχα.

(ii) Διαφορετικά, αν το 3 είναι ένα τετράγωνο modp , ο πρώτος (p) θα παραγοντοποιείται σε ένα γινόμενο διακεκριμένων πρώτων: για παράδειγμα

$$11A = (4 + 3\sqrt{3})(4 - 3\sqrt{3})$$

και

$$13A = (4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}).$$

Τα σώματα πηλίκο σ' αυτά τα σημεία θα είναι ξανά τα πρώτα σώματα, σ' αυτήν την περίπτωση τα $\mathbb{F}_{11}$ και $\mathbb{F}_{13}$, αντίστοιχα.

(iii) Τέλος, αν $p > 3$ και το 3 δεν είναι ένα τετράγωνο modp , για παράδειγμα $p = 5$ ή 7, το ιδεώδες pA είναι πάλι πρώτο και αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο στο *SpecA*. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, το σώμα πηλίκο είναι η τετραγωνική επέκταση του $\mathbb{F}_p$, π.χ. $\mathbb{F}_{25}$ και $\mathbb{F}_{49}$ στα δύο παραδείγματα.

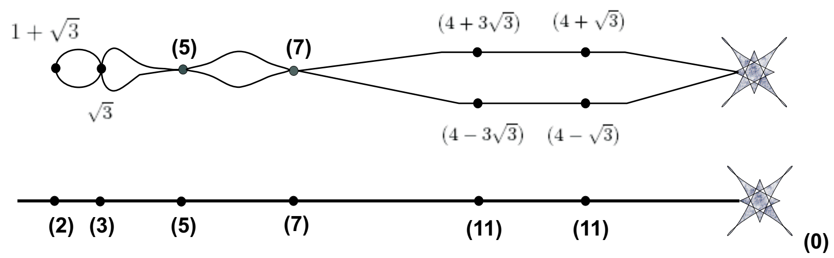
Στη γενική περίπτωση, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, αν το K είναι ένα τετραγωνικό σώμα αριθμών και A είναι ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών στο K, τότε ο εγκλεισμός $\mathbb{Z} \subset A$ επάγει μια απεικόνιση σχημάτων ψ : *SpecA* $\to$ *Spec*$\mathbb{Z}$ όπου η ίνα πάνω από κάθε κλειστό σημείο $(p) \in$ *Spec*$\mathbb{Z}$ είναι ένα από τα ακόλουθα:

(i) Ένα μοναδικό, nonreduced σημείο, με δακτύλιο συντεταγμένων ισόμορφο με το $A\mathfrak{p}^2$, το reduced σημείο $\mathfrak{p}$, του οποίου, έχει σώμα πηλίκο $\mathbb{F}_p$, αν ο p διακλαδίζεται στο A, δηλαδή αν το pA είναι το τετράγωνο ενός πρώτου ιδεώδους $\mathfrak{p}$ στο A.

(ii) Η ξένω ένωση δύο reduced σημείων $\mathfrak{p}$ και $\mathfrak{p}'$, με σώματα πηλίκο $A/\mathfrak{p} = A/\mathfrak{p}' = \mathbb{F}_p$, αν το p είναι το γινόμενο δύο διακεκριμένων πρώτων ιδεωδών του A.

(iii) Ένα μοναδικό reduced σημείο $\mathfrak{p}$, με σώμα πηλίκο $A/\mathfrak{p}$ βαθμού 2 πάνω από το $\mathbb{F}_p$, αν το p παραμένει πρώτο στο A.

Σε κάθε περίπτωση ο δακτύλιος συντεταγμένων της ίνας έχει διάσταση 2 σαν μια $\mathbb{F}_p-$άλγεβρα. Αυτό συμβαίνει επειδή το A είναι ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}-$*module* βαθμού 2. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η αναλογία μεταξύ της απεικόνισης *SpecA* $\to$ *Spec*$\mathbb{Z}$ και ενός διακλαδισμένου καλύμματος πάνω από επιφάνειες Riemann ή ακόμη πιο γενικά, των μονοδιάστατων σχημάτων πάνω από αλγεβρικά κλειστά σώματα όπως το $\mathbb{C}$. Ουσιαστικά μπορούμε να φανταστούμε το *SpecA* σαν ένα κάλυμμα με δύο φύλλα πάνω από *Spec*$\mathbb{Z}$, με διακλάδωση πάνω από τα « διακλαδιζόμενα » πρώτα, όπως, για παράδειγμα, είναι το *Spec*$\mathbb{C}[z]$ ένα διπλό κάλυμμα του *Spec*$\mathbb{C}[z^2]$ με διακλάδωση στο 0. Η μόνη εμφανής διαφορά είναι ότι πάνω από κάποια σημεία $(p) \in$ *Spec*$\mathbb{Z}$ εκτός των σημείων διακλάδωσης μπορεί να εμφανίζονται, αντί για δύο διακεκριμένα σημεία με πολλαπλότητα 1, ένα σημείο πολλαπλότητας 1 αλλά με σώμα πηλίκο το οποίο είναι μια τετραγωνική επέκταση του σώματος πηλίκου $\mathbb{F}_p$ στο (p). Αυτά συμβολίζονται με τις γκρι κουκίδες στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.2: *Spec*$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

Μια πιο περιεκτική αναλογία είναι αυτή μεταξύ μονοδιάστατων σχημάτων πάνω από μη-αλγεβρικά κλειστό σώμα μέσω πεπερασμένης απεικόνισης.

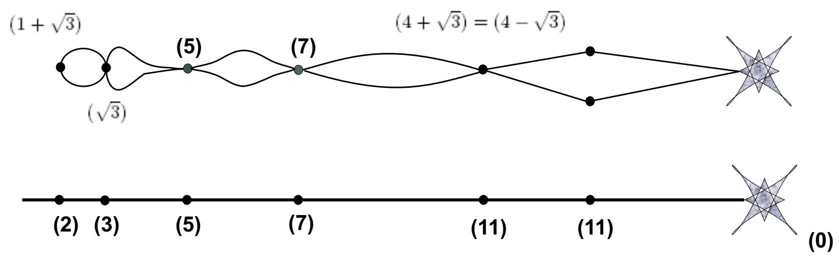
Παράδειγμα 4.5.1. *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\mathit{Spec}\mathbb{R}[x][y]/(y^2 - x) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \mathit{Spec}\mathbb{R}[x].$$

Κοιτάζοντας τα σημεία του $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \mathit{Spec}\mathbb{R}[x]$ *με σώμα πηλίκο το* $\mathbb{R}$ *(τα σημεία της μορφής* $(x-\lambda)$ *με* $\lambda \in \mathbb{R}$*), έχουμε διακλάδωση πάνω από το σημείο* (x) *και για* $\lambda \neq 0$ *η αντίστροφη εικόνα του* $(x-\lambda)$ *είναι είτε δύο διακεκριμένα σημεία με σώμα πηλίκο το* $\mathbb{R}$ *(αν* $\lambda > 0$*) ή ένα σημείο με σώμα πηλίκο το* $\mathbb{C}$ *(αν* $\lambda < 0$*).*

Θα προχωρήσουμε αυτή την αναλογία λίγο περισσότερο με το να εξετάσουμε σχήματα της μορφής *SpecB*, όπου $B \subset A \subset\subset K$ είναι ένα order μέσα σ' ένα σώμα αριθμών, δηλαδή ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου των ακεραίων αλγεβρικών με σώμα πηλίκο K.

Παράδειγμα 4.5.2. *Έστω* $A = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ *και θεωρούμε τον δακτύλιο* $B = \mathbb{Z}[11\sqrt{3}]$ *και σχήμα SpecB. Η απεικόνιση SpecA* $\to$ *Spec*$\mathbb{Z}$ *που περιγράφηκε προηγουμένως* *παραγοντοποιείται στο SpecB και πράγματι η απεικόνιση SpecA $\to$ SpecB είναι ένας ισομορφισμός αν εξαιρέσουμε το γεγονός ότι τα σημεία $(4+3\sqrt{3})$ και $(4-3\sqrt{3}) \in$ SpecA απεικονίζονται στο ίδιο σημείο $(11, 11\sqrt{3}) \in$ SpecB. Έτσι μπορούμε να απεικονίσουμε το SpecB σαν μια «καμπύλη με κόμβο», το διπλό κάλυμμα, δηλαδή, SpecA του Spec$\mathbb{Z}$ με δύο σημεία να ταυτίζονται.*



Σχήμα 4.3:

Διαφορετικά μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $A = Spec\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ και $B = Spec\mathbb{Z}[2\sqrt{3}]$. Εδώ η απεικόνιση *SpecA* $\to$ *SpecB* είναι 1-1 αλλά όχι ισομορφισμός στο σημείο $[(1+\sqrt{3})]$ που απεικονίζεται στο $[(2, 2\sqrt{3})]$.

4.5α' Οι Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες είναι Ringed Spaces αλλά όχι Σχήματα!

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.2 ένα σχήμα είναι ένας τοπολογικός χώρος X μαζί με ένα sheaf συναρτήσεων $\mathcal{O}_X$ πάνω από τον X έτσι ώστε το ζεύγος $(|X|, \mathcal{O}_X)$ να είναι τοπικά affine. Να καλύπτεται ο X δηλαδή από ανοιχτά U_i έτσι ώστε να υπάρχουν δακτύλιοι R_i και ομοιομορφισμοί $U_i \cong SpecR_i$ με $\mathcal{O}_X|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{SpecR_i}$.

Μια πολλαπλότητα δεν μπορεί ποτέ να είναι τοπικά affine σαν σχήμα. Θεωρούμε κάλυμμα ανοιχτών U_i για την πολλαπλότητα M και παίρνουμε σαν structure sheaf το δακτύλιο των $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων. Αν για κάθε ανοιχτό U_i θεωρήσουμε ως R_i το δακτύλιο όλων των $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων $U_i \to \mathbb{R}^n$, τότε δεν θα μπορέσουμε ποτέ να βρούμε ομοιομορφισμό $U_i \cong SpecR_i$. Ο λόγος είναι ότι το $SpecR_i$ εκτός από τα σημεία του U_i περιέχει και πρώτα ιδεώδη που αντιστοιχούν σε κλειστές ανάγωγα subvarieties του U_i, τις καμπύλες με άλλα λόγια που ορίζονται στο U_i. Παρόλα αυτά είναι ένας ringed space με οποιοδήποτε structure sheaf επιλέξουμε.

4.6 Vector Bundles σε σχήματα.

Έστω Y ένα σχήμα. Ένα γεωμετρικό vector bundle τάξης n επί του Y είναι ένα σχήμα X μαζί με ένα μορφισμό $f : X \to Y$, και την επιπλέον δομή που αποτελείται από ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i\}$ του Y και ισομορφισμούς $\psi_i : f^{-1}(U_i) \to \mathbb{A}^n_{U_i}$, ώστε για κάθε i,j και για κάθε ανοιχτό αφινικό υποσύνολο $V = \mathrm{Spec}A \subset U_i \cap U_j$ ο αυτομορφισμός $\psi = \psi_j \circ \psi_j^{-1}$ του $\mathbb{A}^n_V = \mathrm{Spec}A[x_1, \ldots, x_n]$ να δίνεται από ένα γραμμικό αυτομορφισμό ∂ του $A[x_1, \ldots, x_n]$, δηλαδή $\partial(a) = a$ για κάθε $a \in A$ και $\partial(x_i) = \sum_j a_{ij} x_j$ για κατάλληλα $a_{ij} \in A$.

Παρατηρούμε ότι αυτός ο ορισμός είναι η φυσιολογική γενίκευση του ορισμού του vector bundle που δώθηκε στο 1.4.

Ένας ισομορφισμός $g : (X, f, \{U_i\}, \{\psi_i\}) \to (X', f', \{U_i'\}, \{\psi'\})$ από ένα vector bundle τάξης n σε ένα άλλο είναι ένας ισομορφισμός $X \to X'$ των αντίστοιχων σχημάτων ώστε $f = f' \circ g$, ώστε τα X, f μαζί με το κάλυμμα του Y που αποτελείται από τα U_i, U_i' και τους ισομορφισμούς ψ_i, $\psi_i' \circ g$ να έχει επίσης δομή vector bundle.

Ένα τοπικά ελεύθερο sheaf $\mathcal{E}$ στο U τάξης n, είναι ένα sheaf $\mathcal{E}$ στο Y, ώστε για κατάλληλα ανοιχτά U_i του Y να έχουμε $\mathcal{E}(U) = \mathcal{O}_Y(U)^n$. Έστω $S(\mathcal{E})$ η συμμετρική άλγεβρα στο $\mathcal{E}$, και $X = \mathrm{Spec} S(\mathcal{E})$ με συνάρτηση προβολής $f : X \to Y$. Για κάθε ανοιχτό αφινικό σύνολο $U \subseteq Y$ ώστε το $\mathcal{E}(U)$ να είναι ελεύθερο, επιλέγουμε μία βάση του $\mathcal{E}(U)$, δηλαδή γράφουμε $\mathcal{E}(U) = x_1\mathcal{O}_Y \oplus \cdots \oplus x_n\mathcal{O}_Y$ και έστω $\psi : f^{-1}(U) \to \mathbb{A}^n(U)$ ο ισομορφισμός που προκύπτει από την ταύτιση του $S(\mathcal{E})$ με το $\mathcal{O}(U)[x_1, \ldots, x_n]$. Τότε το $(X, f, \{U\}, \{\psi\})$ είναι ένα vector bundle τάξης n στο U, το οποίο μέχρι ισομορφισμού δεν εξαρτάται από την βάση που διαλέξαμε για το $\mathcal{E}(U)$. Θα το ονομάζουμε το *γεωμετρικό vector bundle* συσχετισμένο με το $\mathcal{E}$ και θα το συμβολίζουμε με $V(\mathcal{E})$.

Για κάθε μορφισμό $f : X \to Y$, μία section της f υπέρ του ανοιχτού $U \subseteq Y$ είναι ένας μορφισμός $s : U \to X$ ώστε $f \circ s = id_U$. Είναι σαφές ότι μπορούμε να περιορίζουμε τα sections σε μικρότερα ανοιχτά σύνολα, ή να τα κολλάμε μαζί και μπορούμε να δείξουμε ότι το presheaf

$$U \mapsto \{\text{σύνολο sections της } f \text{ υπέρ } U\}$$

είναι ένα sheaf συνόλων στο Y, το οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(X/Y)$. Αν το $f : X \to Y$ είναι ένα vector bundle τάξης n, τότε το sheaf των sections $\mathcal{L}(X/Y)$ έχει μία φυσική δομή $\mathcal{O}_Y$-module, που το καθιστά τοπικά ελεύθερο $\mathcal{O}_Y$-module τάξης n. Πράγματι, αρκεί να ορίζουμε την δομή τοπικά, οπότε υποθέτουμε ότι το Y είναι αφινικό δηλαδή $Y = \mathrm{Spec} A$, οπότε $X = \mathbb{A}^n_Y$. Σε αυτή την περίπτωση και το X είναι αφινικό, $X = \mathrm{Spec} A[x_1, \ldots, x_n]$. Οι sections $U \to X$ ταυτίζονται με τους μορφισμούς δακτυλίων $\partial : A[x_1, \ldots, x_n] \to A$. οι οποίοι αντιστοιχούν στις διατεταγμένες n-άδες $(\partial(x_1), \ldots, \partial(x_n)) \in A^n$ δηλαδή με τον χώρο A^n.

Ας είναι $\mathcal{E}$ ένα τοπικά ελεύθερο sheaf τάξης n στο Y, και $X = V(\mathcal{E})$ το αντίστοιχο vector bundle, και $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X/Y)$ το sheaf των sections του X υπέρ το Y. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{L} = Hom(\mathcal{E}, \mathcal{O}_Y)$. Πράγματι, αν $s \in \Gamma(Hom(\mathcal{E}, \mathcal{O}_Y), U)$, τότε $s \in Hom(\mathcal{E}(U), \mathcal{O}_Y)$, και ο s επεκτείνεται σε ένα ομομορφισμό $S(\mathcal{E}(U)) \to \mathcal{O}_U$. Η επέκταση αυτή με την σειρά της δίνει ένα μορφισμό στα Spectra $U = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_Y(U) \to \mathrm{Spec} S(\mathcal{E}(U)) = f^{-1}(U)$ ο οποίος είναι μία section. Η αντιστοιχία αυτή είναι ισομορφισμός που ταυτίζει το $Hom(\mathcal{E}, \mathcal{O}_Y)$ με το $\mathcal{L}$.

Κατασκευάσαμε μία ένα προς ένα αντοιστοιχία ανάμεσα σε κλάσεις ισομορφισμών τοπικά ελεύθερων sheaves τάξης n στο Y και κλάσεων ισομορφισμών από vector bundles στο Y. Για αυτό τον λόγο πολύ συχνά οι έννοια τοπικά ελεύθερου sheaf και αυτή του vector bundle στην βιβλιογραφία ταυτίζονται.

4.7 Προβολικά modules.

Ένα R-P θα λέγεται προβολικό αν υπάρχει ένα module Q ώστε το ευθύ άθροισμα $P \oplus Q$ να είναι ελεύθερο. Η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την *προβολική ιδιότητα ανύψωσης*, δηλαδή για κάθε επιμορφισμό $s : M \to N$ από R-modules και κάθε συνάρτηση $g : P \to N$ θέλουμε να υπάρχει μία συνάρτηση $f : P \to M$

ώστε $g = sf$ ή με άλλα λόγια ζητάμε να υπάρχει f που να κάνει το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists f"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "s"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι ισοδύναμες. Καταρχάς κάθε ελέυθερο module ικανοποιεί την ιδιότητα προβολικής ανύψωσης. Αρκεί να ορίσουμε την συνάρτηση f πάνω σε μια βάση του P. Αν όμως x_i είναι ένα στοιχείο της βάσης τότε $g(x_i) \in N$ και αφού η s είναι επί, υπάρχουν $m_i \in M$ ώστε $s(m_i) = g(x_i)$. Δεν έχουμε λοιπόν παρά να θέσουμε $f(x_i) = m_i$. Αν λοιπόν το P είναι προβολικό τότε υπάρχει Q ώστε $P \oplus Q$ να είναι ελεύθερο. Η προβολική ιδιότητα ισχύει για το ελεύθερο $P \oplus Q$ σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση άρα ισχύει πολύ περισσότερο και για τον περιορισμό της στο P.

Αντιστρόφως, αν ένα πεπερασμένα παραγόμενο module ικανοποιεί την προβολική ιδιότητα ανύψωσης τότε θα δείξουμε ότι υπάρχει Q ώστε $P \oplus Q$ να είναι ελεύθερο. Αφού το P είναι πεπερασμένα παραγόμενο, είναι πηλίκο ενός ελεύθερου module F, δηλαδή υπάρχει ένας επιμορφισμός $F \to P \to 0$. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists f"'] \arrow[d, "g"] & \\ F \arrow[r, "s"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

και παρατηρούμε ότι $F = P \oplus \ker(s)$.

Ασφαλώς δεν είναι όλα τα προβολικά ελεύθερα modules προβολικά. Η θεωρία των vector bundles μας δίνει μερικά όμορφα παραδείγματα. Ας υποθέσουμε ότι το X είναι ένας παρασυμπαγής τοπολογικός χώρος.

Παράδειγμα 4.7.1. *Θεωρούμε τον δακτύλιο $R = C^0(X)$ των συνεχών συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$. Αν $\eta : E \to X$ είναι ένα vector bundle στον Q, τότε το σύνολο $\Gamma(E) = \{s : Z \to E : \eta s = 1_X\}$ των συνεχών sections σχηματίζει ένα vector bundle. Η απόδειξη για αυτό είναι φυσικά παρόμοια με την πιο γενική απόδειξη που δώσαμε ποιό πάνω για την κατηγορία των σχημάτων. Αν το T^n είναι το τετριμμένο vector bundle $\mathbb{R}^n \times X \to X$ τότε $\Gamma(T^n) = R^n$. Αν το E δεν είναι τετριμμένο vector bundle τότε το $\Gamma(E)$ δεν είναι δυνατόν να είναι ελεύθερο. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι αν το $\Gamma(E)$ ήταν ελεύθερο και οι sections $s_1, \ldots, s_n$ σχηματίζαν μία βάση τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια συνάρτηση στην κατηγορία των vector bundles $f : T^n \to E$ ώστε $\Gamma(T^n) = \Gamma(E)$. αφού ο πυρήνας και ο συνπυρήνας του f δεν έχουν μη μηδενικές sections θα πρέπει να μηδενίζονται και ο f είναι ισομορφισμός.*

Είναι γνωστό ότι αν το X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος τότε η κατηγορία των προβολικών modules είναι ισοδύναμη με την κατηγορία των vector bundles στον X. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως *Θεώρημα Swan*.

Θα περιοριστούμε να δείξουμε γιατί η εφαπτόμενες δέσμες σε υποπολλαπλότητες M του $\mathbb{R}^n$ οδηγούν σε προβολικά modules.. Δεν έχουμε παρά να συμπληρώσουμε τον εφαπτόμενο χώρο σε κάθε σημείο $T_p(M)$ σε μία βάση του περιβάλοντος χώρου $\mathbb{R}^n$, δηλαδή να κατασκευάσουμε την κάθετη δέσμη $N_p(M)$ στο M. Προφανώς $\Gamma(TM) \oplus \Gamma(TN)$ είναι ελεύθερο module.

Στην δομή των modules κρύβονται αρκετές τοπολογικές ιδιότητες της πολλαπλότητας M. Θα αναφέρουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε το πότε ένα σχήμα είναι απλά συνεκτικό. Είναι για παράδειγμα γνωστό [4]. ότι οι απλά συνεκτικοί χώροι, που έχουν « αρκετά καλή » τοπολογία ώστε να μπορούμε να κάνουμε θεωρία καλυπτικών απεικονίσεων δεν επιδέχονται αδιακλάδιστα καλύματα.

Το σώμα $\mathbb{Q}$ έχει δακτύλιο ακεραίων αλγεβρικών το $\mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι κάθε αλγεβρικό σώμα αριθμών έχει τουλάχιστον ένα πρώτο να διακλαδίζεται, αφού έχει διακρίνουσα μεγαλύτερη της μονάδας και οι πρώτοι που διακλαδίζονται είναι ακριβώς αυτοί που διαιρούν την διακρίνουσα. Με άλλα λόγια το $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ είναι « απλά συνεκτικό ».

Η απλή συνεκτικότητα του $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ είναι ορατή και σε επίπεδο $\mathbb{Z}$-modules:

Θεώρημα 4.7.2. *Τα προβολικά modules πάνω από περιοχές κυρίων ιδεωδών είναι πάντα ελεύθερα.*

Απόδειξη. Αυτό είναι το θεώρημα δομής για modules πάνω από περιοχές κυριών ιδεωδών. Παρατηρήστε ότι ένα προβολικό module δεν μπορεί να έχει torsion αφού αυτή δεν μπορεί να εξαφανιστεί αν προσθέσουμε εικόνες του R. □

[4] Βλέπε [27].

Μέροσ ΙΙΙ

Αναλογίες Αλγεβρικών Σωμάτων Αριθμών και 3-Πολλαπλοτήτων

Κεφάλαιο 5

Αριθμητική Τοπολογία

Πρωτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση του λεξικού και των αναλογιών, κρίνουμε απαραίτητο να εισάγουμε την έννοια της αλγεβρικής θεμελιώδους ομάδας καθώς και να αναφερθούμε στο θεώρημα του Seifert.

5.1 Links, Κόμποι και το θεώρημα του Seifert.

Ορισμός 5.1.1. *Έστω M μια 3-πολλαπλότητα. Ένα link L από m συνιστώσες είναι μια συμπαγής υποπολλαπλότητα της M όπου κάθε μια συνιστώσα του L είναι ομοιομορφική με τον κύκλο S^1. Ένα link με μόνο μια συνιστώσα είναι ένα κόμπος.*

Σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.3, μπορούμε να πούμε ότι ένας κόμπος είναι ένα immersion του κύκλου μέσα στην πολλαπλότητα. Ο πιο απλός κόμπος, ο unknot, είναι απλά ο κύκλος εμφυτευμένος στην 3-σφαίρα.

Ορισμός 5.1.2. *Ένας κόμπος είναι tame αν μπορεί να «φουσκώσει», δηλαδή αν υπάρχει μια επέκταση του σε ένα embedding ενός τόρου μαζί με το εσωτερικό του $S^1 \times D^2$ μέσα στην 3-σφαίρα. Οι κόμποι οι οποίοι δεν είναι tame, ονομάζονται wild. Στην παρούσα εργασία θα θεωρούμε μόνο tame κόμπους και links.*

Σχήμα 5.1: Ένας tame Trefoil Κόμπος.

Ορισμός 5.1.3. *Μια ισοτοπία H δεν είναι τίποτε άλλο από μια ομοτοπία με την απαίτηση ότι $\forall t$ η $H(x,t)$ να είναι ομοιομορφισμός.*

Απαιτώντας δύο μονοπάτια να είναι ισοτοπικά είναι μια πιο ισχυρή απαίτηση από την ομοτοπία. Για παράδειγμα η απεικόνιση στη μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (-x,-y)$ είναι ισοδύναμη με την στροφή κατα π κι έτσι η ταυτοτική απεικόνιση και η f είναι ισοτοπικές καθώς μπορούν να συνδεθούν με μια περιστροφή. Αντίθετα στο διάστημα $[-1,1]$ του $\mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = -x$ δεν είναι ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση.

Ορισμός 5.1.4. *Θεωρούμε δύο κόμπους K_1 και K_2 στον $\mathbb{R}^3$. Οι κόμποι αυτοί είναι ισοδύναμοι αν μπορέσουμε με συνεχή τρόπο να πάρουμε τον έναν από τον άλλο. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει μια ισοτοπία στον $\mathbb{R}^3$ η οποία ξεκινάει από τον ταυτοτικό ομοιομορφισμό του $\mathbb{R}^3$ και καταλήγει σε έναν ομοιομορφισμό h, έτσι ώστε ο h μετακινεί τον K_1 στον K_2.*

Στη συνέχεια θα δούμε ότι κάθε link στην 3-σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί σαν το σύνορο μιας επιφάνειας εμφυτευμένης στην S^3. Αυτές οι επιφάνειες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες καθώς επιτρέπουν τη μελέτη των links από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Εδώ θα τις χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι κάθε κόμπος μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε ένα γινόμενο πρώτων κόμπων.

Ορισμός 5.1.5. *Μια Seifert επιφάνεια για ένα προσανατολίσιμο link L στον S^3 είναι μια συνεκτική, συμπαγής, προσανατολίσιμη επιφάνεια η οποία περιέχεται στον S^3 και έχει το L για σύνορο.*

Θεώρημα 5.1.6. *Για κάθε προσανατολισμένο link L του $\mathbb{R}^3$, υπάρχει μια επιφάνεια Seifert για το L.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι κατασκευαστική και χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο του Seifert. [8, σελίδα 47] □

Σχήμα 5.2: Η Seifert επιφάνεια για τον trefoil κόμπο.

5.2 Αλγεβρικές Θεμελιώδεις ομάδες.

Στο κεφάλαιο 2 είδαμε πως η θεωρία των καλυπτικών απεικονίσεων μπορεί να συνδιαστεί με αυτή τον θεμελιωδών ομάδων και είδαμε για ένα « καλό » τοπολογικό χώρο Q ότι υπάρχει ο universal covering space $\tilde{X}$ στον οποίο δρά η θεμελιώδεις ομάδα $\pi_1(X)$ και ότι κάθε τοπολογικό κάλλυμα του U του Q προκύπτει ως πηλίκο του $\tilde{X}/H$, όπου $H < \pi_1(X)$. Μία από τις μεγάλες επιτυχίες του Grothendick ήταν να ορίσει όλα τα παραπάνω σε μια πολύ γενικότερη μορφή. Η ιδέα του Grothendick βασίζεται στην αναλογία μεταξύ των ομάδων Galois από σώματα συναρτήσεων επιφανειών Riemann και των ομάδων Galois των καλυπτικών απεικονίσεων. Φυσικά η επέκταση $\tilde{X} \to X$ είναι στις περισσότερες περιπτωσεις άπειρη. Για τις άπειρες επεκτάσεις σωμάτων υπήρχε ήδη μία θεωρία Galois από τον Krull την οποία ο Grothendick μετέτρεψε στην θεωρία των *αλγεβρικών θεμελιωδών ομάδων*. Στην θεωρία αυτή αποτυπώνωνται όλη η πληροφορία των αδιακλάδιστων καλυμμάτων. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στις άπειρες επεκτάσεις του Galois προτείνουμε το [28, Παράρτημα], [17, IV. 1]. Για την αλγεβρική θεμελιώδη ομάδα η κλασική αναφορά είναι το [22] ενώ μιά ποιό βατή εισαγωγή είναι το Lectures on Etale Cohomology [15].

Ποιό συγκεκριμένα θα προσπαθήσουμε να προσεγκύσουμε την θεμελιώδη ομάδα από όλες της πεπερασμένες κανονικές υποομάδες της. Ας θεωρήσουμε την αφινική ευθεία $\mathbb{A}^1$, υπέρ ενός σώματος k αλγεβρικά κλειστού, χαρακτηριστικής 0. Οι αδιακλάδιστες επεκτάσεις του $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$ είναι οι συναρτήσεις

$$\mathbb{A}^1 \backslash \{0\} \to \mathbb{A}^1 \backslash \{0\} \quad t \mapsto t^n \tag{5.1}$$

Αν το $k = \mathbb{C}$ τότε υπάρχει ανάμεσα σε όλα αυτά τα καλύμματα ένα « μεγαλύτερο », ο universal covering space που είναι το $\mathbb{C}$ και η universal coverin map είναι η γνωστή εκθετική συνάρτηση $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Τι θα κάνουμε αν το k δεν είναι οι μιγαδικοί αριθμοί; Ας είναι $X_i \to X$ ένα αδιακλάδιστο κάλυμμα του X. και ας είναι $\mathrm{Aut}_X(X_i)$ η ομάδα των deck transformations δηλαδή τα στοιχεία $\sigma : X_i \to X_i$ τα οποία κάνουν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr] & & X_i \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

Αν X_n είναι το κάλυμμα της (5.1) τότε $\mathrm{Aut}_X(X_n) = \mu_n(k)$, όπου $\mu_n(k)$ συμβολίζει την ομάδα των n-ριζών της μονάδας, όπου $\zeta \in \mu_n(k)$ δρα ως $x \mapsto \zeta x$. Η ομάδα

$$\pi_1^{alg}(\mathbb{A}^1 \backslash \{0\} = \varprojlim_n \mu_n(k) =: \hat{\mathbb{Z}}.$$

Το σύνολο $\hat{\mathbb{Z}} \sim \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell$ είναι η πλήρωση του $\mathbb{Z}$ ως προς την τοπολογία που ορίζεται από τις υποοομάδες πεπερασμένου δείκτη. Το $\mathbb{Z}_\ell$ είναι ο γνωστός δακτύλιος των ακαιρέων ℓ-αδικών αριθμών. Γενικότερα αν G είναι μία ομάδα η *προπεπερασμένη πλήρωση* της $\hat{G}$ ορίζεται ως το αντίστροφο όριο

$$\hat{G} = \varprojlim_{N \lhd G, [G:N] < \infty} G/N,$$

Το παραπάνω φαινόμενο είναι περισσοτερό γενικό και συγκεκριμένα ο Grothendick απέδειξε το παρακάτω

Θεώρημα 5.2.1. *Αν X τοπολογικός χώρος στον οποίο να μπορεί να οριστεί συνηθισμένη $\pi_1(X)$τότε*

$$\pi_1^{alg}(X) = \widehat{\pi^1(X)}.$$

Έστω $\mathbb{F}_p$ το πεπερασμένο σώμα με p το πλήθος στοιχεία. Θεωρούμε μία αλγεβρική κλειστότητα $\bar{\mathbb{F}}_p$ του $\mathbb{F}_p$. Η ομάδα Galois $Gal(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ είναι μία άπειρη επέκταση, και είναι ίση με

$$Gal(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \varprojlim_{[K:\mathbb{F}_p]<\infty} Gal(K/\mathbb{F}_p) = \widehat{\mathbb{Z}}.$$

αφού οι πεπερασμένες αλγεβρικές επεκτάσεις βαθμού n είναι της μορφής $K = \mathbb{F}_{p^n}$ και $Gal(\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Το γεγονός ότι $\pi_1^{alg}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) = \widehat{\pi_1(S^1)} = \pi_1^{alg}\mathbb{F}_p$, μας δίνει μία ομοιότητα μεταξύ πρώτων αριθμών και κόμπων. Αυτό έκανε πολλούς συγγραφείς να θεωρούν ότι η διάσταση των δακτυλίων ακεραίων αλγεβρικών είναι 3 (Βλέπε [11]).

5.3 Το MKR λεξικό.

Οι Kapranov και Reznikov βασιζόμενοι σε ιδέες του Mazur, πρότειναν το ακόλουθο λεξικό που αντιστοιχίζει τους όρους της τοπολογίας τριών διαστάσεων με αυτούς της θεωρίας αριθμών.

(i) Οι κλειστές, προσανατολίσιμες, συνεκτικές, λειές 3-πολλαπλότητες αντιστοιχούν στα σχήματα $Spec\mathcal{O}_K$, όπου K είναι ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών.

(ii) Ένα link στην M αντιστοιχεί σε ένα ιδεώδες στον δακτύλιο των ακεραίων αλγεβρικών $\mathcal{O}_K$ και ένας κόμπος στην M αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες στον $\mathcal{O}_K$. Θεωρούμε μόνο tame links και κόμπους. Σημειώνουμε ότι οι κόμποι είναι immersions του S^1 στην πολλαπλότητα M, ενώ τα πρώτα ιδεώδη του $\mathcal{O}_K$ μπορούν να ταυτιστούν με τα κλειστά immersions $Spec\mathbb{F}_p \to Spec\mathcal{O}_K$, όπου $\mathbb{F}_p$ είναι πεπερασμένα σώματα. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} - \{0\}$, όπου $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ η αφινική ευθεία πάνω από το $\mathbb{C}$. Η θεμελιώδης ομάδα αυτού του χώρου είναι

$$\pi_1(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) = \pi_1 S^1 = \mathbb{Z}.$$

Όλες οι πεπερασμένες επεκτάσεις αυτού του χώρου είναι οι

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} - \{0\} & \to & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} - \{0\} \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$$

Η αλγεβρική θεμελιώδης ομάδα του είναι

$$\pi_1^{alg}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Η ομάδα των deck transformations είναι η $Aut(Y/S^1) = \mu_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, όπου μ_n οι $n-$ρίζες της μονάδας. Στην περίπτωση των πεπερασμένων σωμάτων $\mathbb{F}_p$, η αλγεβρική θεμελιώδης ομάδα είναι

$$Gal(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \varprojlim_{[K:\mathbb{F}_p]<\infty} = \pi_1^{alg}(\mathbb{F}_p) = \widehat{\mathbb{Z}},$$

όπου $\bar{\mathbb{F}}_p$ η αλγεβρική κλειστότητα του $\mathbb{F}_p$. Κάθε επέκταση $Gal(K/\mathbb{F}_p)$ είναι μια πεπερασμένη Galois επέκταση. Οι μόνες πεπερασμένες Galois επεκτάσεις του $\mathbb{F}_p$ είναι τα σώματα $\mathbb{F}_{p^n}$ με ομάδα Galois $Gal(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

και γεννήτορα αυτής της ομάδας τον αυτομορφισμό του Frobenius $x \mapsto x^p$, τάξης n. Έτσι προκύπτει η ομοιότητα μεταξύ πρώτων αριθμών και κόμπων. Κάθε link παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο σε μια ένωση κόμπων ενώ κάθε ιδεώδες παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο επίσης, σε ένα γινόμενο πρώτων ιδεωδών.

Εδώ σημειώνουμε ότι κάθε $Spec\mathbb{F}_p$ αποτελείται από ένα σημείο $\langle 0 \rangle$ πάνω από το οποίο υπάρχει το ίδιο το $\mathbb{F}_p$ σαν structure sheaf. Δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να θεωρούμε όλα τα $\mathbb{F}_p$ ίδια. Διαφέρουν στο structure sheaf.

(iii) Ένας ακέραιος αλγεβρικός $w \in \mathcal{O}_K$ είναι ανάλογος με μια εμφυτευμένη επιφάνεια (πιθανώς και με σύνορο) $S \subset M$. Η απεικόνιση $w \to \langle w \rangle \triangleleft \mathcal{O}_K$ αντιστοιχεί στην $S \to \partial S$.

(iv) Μια κλειστή embedded επιφάνεια $F \subset M$ είναι ανάλογη με μια μονάδα στο $\mathcal{O}_K$.

(v) Οι πεπερaασμένες επεκτάσεις των σωμάτων αριθμών $K \subset L$ αντιστοιχούν σε πεπερασμένα διακλαδιζόμενα καλύμματα 3-πολλαπλοτήτων $\pi : M \to N$. (Το σύνολο των διακλαδιζόμενων σημείων μπορεί να είναι και κενό.)

(vi) Κάθε Galois επέκταση $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ με ομάδα $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = G$ επάγει το μορφισμό $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \to (Spec\mathcal{O}_{\mathbb{L}})/G = Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Τέτοιες απεικονίσεις αντιστοιχούν σε απεικονίσεις πηλίκο $M \to M/G$ που επάγονται από δράσεις των πεπερασμένων ομάδων G, οι οποίες διατηρούν τον προσανατολισμό, πάνω σε 3-πολλαπλότητες M. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το M/G είναι πάντα μια 3-πολλαπλότητα και ότι οι απεικονίσεις $M \to M/G$ είναι διακλαδιζόμενα καλύμματα. (Παρόλα αυτά, αν η G δεν είναι κυκλική τότε πρέπει να θεωρήσουμε μια μεγαλύτερη κλάση από διακλαδιζόμενα καλύμματα των οποίων τα σύνολα των σημείων που διακλαδίζονται μπορεί να είναι γράφοι.)

(vii) Η σφαίρα S^3 αντιστοιχεί στο $\mathbb{Q}$. Η 3-σφαίρα είναι μια απλά συνεκτική πολλαπλότητα, η θεμελιώδης ομάδα της είναι τετριμμένη. Μπορούμε να πούμε, επίσης, ότι έχει μόνο διακλαδισμένα καλύμματα.
Στην περίπτωση του $\mathbb{Q}$, η αλγεβρική θεμελιώδης ομάδα είναι τετριμμένη επίσης.
Η αναλογία δεν σταματάει όμως εδώ. Έχουμε αποδείξει ότι κάθε vector bundle πάνω από έναν απλά συνεκτικό χώρο είναι globally trivial. Επιπλέον είδαμε, πως κάθε ιδεώδες μπορεί να θεωρηθεί και σαν ένα locally free sheaf, το οποίο με τη σειρά του είναι ένα vector bundle.
Έστω K ένα σώμα και έστω $\mathfrak{p}$ ένα ιδεώδες $\mathcal{O}_K$ του δακτυλίου των ακεραίων αλγεβρικών. Το ιδεώδες αυτό θα είναι κύριο στην τοπικοποίηση $(\mathcal{O}_K)_f, f \in \mathcal{O}_K$ αφού κάθε τοπικοποιήση δακτυλίου είναι μια περιοχή κυρίων ιδεωδών. Σαν vector bundle δε, είναι τοπικά τετριμμένο. Στην περίπτωση του $\mathbb{Q}$, τώρα, κάθε ιδεώδες του $\mathbb{Z}$είναι κύριο άρα και globally trivial αν τα δούμε σαν vector bundles. Το $\mathbb{Q}$ είναι λοιπόν, απλά συνεκτικό κατά Grothendieck.

Τέλος, όλα τα καλύμματα της 3-σφαίρας έχουν σύνολο διακλάδωσης ένα link L. Από την άλλη, στις επεκτάσεις του $\mathbb{Q}$ έχουμε διακλάδωση όσων ιδεωδών διαιρούν τη διακρίνουσα Δ. Έτσι μπορούμε να δούμε τη διακρίνουσα σαν το αριθμοθεωρητικό αντίστοιχο αυτού του link.

Παρά τις αναλογίες που μόλις αναφέραμε, δεν μπορούμε να ελπίζουμε σε μια 1-1 και επι αντιστοιχία μεταξύ των 3-πολλαπλοτήτων και των σωμάτων αριθμών.Για παράδειγμα το $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ δεν αντιστοιχεί σε καμία συγκεκριμένη 3-πολλαπλότητα. Συγκεκριμένα, θα δούμεπαρακάτω ότι υπάρχουν σώματα αριθμών διαφορετικά από το $\mathbb{Q}$ τα οποία είναι επίσης « 3-σφαίρες ομοτοπικά ». Παρόλα αυτά, πιστεύουμε ότι υπάρχει μια θεωρία η οποία περικλύει (τουλάχιστον μερικώς) και την αλγεβρική θεωρία αριθμών και την τοπολογία τριών διαστάσεων.

5.4 Επεκτάσεις Galois και Galois διακλαδιζόμενα καλύμματα.

Έστω $G = Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ και έστω $\mathfrak{q}$ να είναι ένα πρώτο ιδεώδες στο $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$. Η ομάδα διακλάδωσης του $\mathfrak{q}$, $D_{\mathfrak{q}} \subset G$, είναι όπως είπαμε και στο κεφάλαιο 3, η ομάδα των στοιχείων της G που σταθεροποιούν το $\mathfrak{q}$,

$$D_{\mathfrak{q}} = \{g \in G : g(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}.$$

Το πηλίκο $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}$ είναι ένα πεπερασμένο σώμα και η εικόνα του ομομορφισμού $D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q})$ αποτελείται από ακριβώς αυτούς τους αυτομορφισμούς του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}$ οι οποίοι σταθεροποιούν τα υπόσωμα $\mathcal{O}_{\mathbb{K}/\mathfrak{p}}$, όπου πυρήνας αυτού του ομομορφισμού, $I_{\mathfrak{q}}$, είναι η ομάδα αδράνειας του $\mathfrak{q}$. Επομένως, έχουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία,

$$0 \to I_{\mathfrak{q}} \to D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}) \to 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι μια πεπερασμένη ομάδα δρα πάνω σε μια 3-πολλαπλότητα M και ότι $M \to M/G$ είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα (υποθέτουμε ότι το σύνολο διακλάδωση είναι ένα link). Η υποομάδα $D_{\mathcal{K}} \subset G$ η οποία αποτελείται από τα στοιχεία που απεικονίζουν τον κόμπο $\mathcal{K} \subset M$ στον εαυτό του θα ονομάζεται η ομάδα διακλάδωσης του $\mathcal{K}$. Υποθέτουμε ότι η δράση της $D_{\mathcal{K}}$) πάνω στο $\mathcal{K}$ διατηρεί τον προσανατολισμό. Σ' αυτή την περίπτωση η εικόνα του φυσιολογικού ομομορφισμού $D_{\mathcal{K}} \to Homeo(\mathcal{K})$ είναι ακριβώς η ομάδα των deck transformations, $\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$, του καλύμματος $\mathcal{K} \to \mathcal{K}' = \mathcal{K}/D_{\mathcal{K}}$. Κατ' αναλογία με τη θεωρία αριθμών, ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού, $I_{\mathcal{K}}$, ονομάζεται ομάδα αδράνειας του $\mathcal{K}$. Όπως και πριν, έχουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία

$$0 \to I_{\mathcal{K}} \to D_{\mathcal{K}} \to Gal(\mathcal{K}/\mathcal{K}') \to 0.$$

Συμβολίζουμε τις τάξεις των $I_{\mathcal{K}}$ και $Gal(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$ με $e_{\mathcal{K}}$ και $f_{\mathcal{K}}$ αντίστοιχα. Θα ονομάζουμε το $e_{\mathcal{K}}$ βαθμό διακλάδωσης του $\mathcal{K}$. Σημειώνουμε ότι και η $Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$ και η $Gal(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$ είναι πάντοτε κυκλικές ομάδες.

Όπως και πριν, έστω $\mathfrak{q}$ να είναι ένα πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ και έστω $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, $G = Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. Το ιδεώδες $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \lhd \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ διακλαδίζεται με μοναδικό τρόπο σε ένα γινόμενο πρώτων ιδεωδών, $\mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_g^{e_g}$, όπου e_i είναι ο βαθμός διακλάδωσης του $\mathfrak{p}_i$ και $\mathfrak{q}$ είναι ένα από τα ιδεώδη $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_g$.

Θεώρημα 5.4.1. *Αν ισχύουν τα παραπάνω τότε*

(i) *Η ομάδα G δρα μεταβατικά στο $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_g$,*

(ii) $e_1 = \dots = e_g \overset{\text{ορισμ.}}{=} e$ *και* $f_{\mathfrak{p}_1} = \dots = f_{\mathfrak{p}_g} \overset{\text{ορισμ.}}{=} f$

(iii) $|G| = efg$.

Σύμφωνα μ' αυτά που έχουμε περιγράψει για την αντιστοιχία κόμπων και πρώτων ιδεωδών, το 5.4.1 μπορεί να αναδιατυπωθεί έτσι ώστε να περιγράφει και την περίπτωση των κόμπων.

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω G να δρα πάνω σε μια 3-πολλαπλότητα M έτσι ώστε $\pi : M \to M/G$ να είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα. Θεωρούμε τον κόμπο $\mathcal{K}$ στην M έτσι ώστε ο $\mathcal{K}/G$ να είναι ένας κόμπος στην M/G, η οποία είναι είτε μια συνιστώσα του συνόλου διακλάδωσης είτε είναι ξένο ως προς το σύνολο αυτό. Σ' αυτή την περίπτωση, το $\pi^{-1}(\mathcal{K})$ είναι ένα link στην M τις συνιστώσες του οποίου ονομάζουμε $\mathcal{K}_1, \ldots \mathcal{K}_g$. Σύμφωνα μ' αυτά που μόλις ορίστηκαν, ισχύουν τα παρακάτω*

(i) *Η G δρα μεταβατικά πάνω στα $\mathcal{K}_1, \ldots \mathcal{K}_g$*

(ii) $e_{\mathcal{K}_1} = \ldots = e_{\mathcal{K}_g} \overset{\text{ορισμ.}}{=} e$ *και* $f_{\mathcal{K}_1} = \ldots = f_{\mathcal{K}_g} \overset{\text{ορισμ.}}{=} f$

(iii) $|G| = efg$.

5.5 Αδιακλάδωτοι, Διακλαδιζόμενοι και Αδρανείς Κόμποι.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάσαμε αναλυτικά το πότε ένα ιδεώδες διακλαδίζεται, πότε όχι και πότε παραμένει αδρανές. Σε πλήρη αναλογία μ' αυτή τη θεωρία μπορούμε να ορίσουμε αδιακλάδωτους, διακλαδιζόμενους και αδρανείς κόμπους.
Θεωρούμε, λοιπόν, ένα Galois διακλαδισμένο κάλυμμα $\pi : M \to M/G$ και έναν κόμπο $\mathcal{K} \subset M$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο (από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε μόνο τέτοιους κόμπους). Θα λέμε ότι ο $\mathcal{K}$ διακλαδίζεται στο κάλυμμα π αν $e_{\mathcal{K}} > 1$, είναι αδιακλάδιστος αν $e_{\mathcal{K}} = f_{\mathcal{K}} = 1$ και ο $\mathcal{K}$ είναι αδρανής αν $e_{\mathcal{K}} = 1, f_{\mathcal{K}} = |G|$. Παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{K}$ διακλαδίζεται αν και μόνο αν είναι μια συνιστώσα του συνόλου διακλάδωσης.
Έστω C_p να είναι η κυκλική ομάδα τάξης p, p πρώτος και $\pi : M \to M/G$ είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα. Αν $\mathcal{K} \subset M$ είναι ένας κόμπος στην πολλαπλότητα Μ, τότε ο $\mathcal{K}$ είτε διακλαδίζεται, είτε όχι, είτε παραμένει αδρανής.

- Αν $\pi^{-1}(\mathcal{K}/G) = \mathcal{K}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{K}_p$, όπου $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_p$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους κόμποι, ένας από τους οποίους είναι ο $\mathcal{K}$, τότε ο $\mathcal{K}$ είναι αδιακλάδιστος. Στην περίπτωση αυτή η C_p μεταθέτει κυκλικά τους κόμπους αυτούς.

- Αν το $\mathcal{K}/G$ είναι μια συνιστώσα του συνόλου διακλάδωσης, τότε ο $\mathcal{K}$ διακλαδίζεται. Εδώ η C_p σταθεροποιεί την $\pi^{-1}(\mathcal{K}/G) = \mathcal{K}$.

- Αν $\pi^{-1}(\mathcal{K}/g) = \mathcal{K}$ και η δράση της C_p πάνω στον $\mathcal{K}$ είναι μη τετριμμένη, τότε ο κόμπος είναι αδρανής. (Η C_p περιστρέφει τον $\mathcal{K}$ κατά $\frac{2\pi}{p}$).

Θεώρημα 5.5.1. *Έστω μια επέκταση Galois $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, $G = Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ και ένα Galois διακλαδισμένο κάλυμμα $\pi : M \to M/G$.*

(i) *Υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος διακλαδισμένα πρώτα ιδεώδη μέσα στον δακτύλιο $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$. Το ίδιο ισχύει και για τους διακλαδιζόμενους κόμπους στην Μ.*

(ii) *Υπάρχουν άπειρα το πλήθος αδιακλάδιστα πρώτα ιδεώδη μέσα στον δακτύλιο $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ και άπειροι το πλήθος αδιακλάδιστοι κόμποι στην Μ.*

(iii) *Αν η G είναι κυκλική τότε υπάρχουν άπειρα αδρανή ιδεώδη μέσα στον $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ και άπειροι το πλήθος αδρανείς κόμποι στην M.*

(iv) *Αν η G δεν είναι κυκλική τότε δεν υπάρχουν αδρανή πρώτα ιδεώδη ούτε αδρανείς κόμποι.*

(v) *Αν η G είναι κυκλική με τάξη πρώτο, τότε κάθε κόμπος και κάθε πρώτο ιδεώδες είτε διακλαδίζεται, είτε όχι, είτε παραμένει αδρανές.*

Παρατήρηση 5.5.2. *Το MKR λεξικό μαζί με την αναλογία για τους διακλαδισμένους, αδιακλάδιστους και αδρανείς κόμπους και πρώτους επαρκούν για να μεταφέρουμε την εικασία του Poincarè στην θεωρία αριθμών. Η εικασία λέει ότι η S^3 είναι η μοναδική κλεστή 3-πολλαπλότητα χωρίς αδιακλάδιστα καλύμματα. Παρόλα αυτά η γεωμετρική εικασία δίνει κάτι ακόμη πιο ισχυρό: Η S^3 είναι το μοναδική κλειστή 3-πολλαπλότητα που δεν έχει πεπερασμένα αδιακλάδιστα καλύμματα. Παραδόξως η αλγεβρική μετάφραση αυτής της εικασίας, ότι δηλαδή « Το μοναδικό σώμα αριθμών που δεν έχει αδιακλάδιστα καλύμματα είναι το $\mathbb{Q}$» είναι* ***ψευδής****. Για τις ανάγκες αυτής της εργασίας θεωρούμε ότι μια επέκταση σώματος διακλαδίζεται αν έχει τουλάχιστον ένα διακλαδισμένο πρώτο ιδεώδες. Παρόλα αυτά μόνο λίγα αντιπαραδείγματα είναι γνωστά και τα παραθέτουμε στο ακόλουθο θεώρημα.*

Θεώρημα 5.5.3. *Αν $d < 0$ και η ομάδα κλάσεων της επέκτασης $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ είναι τετριμμένη τότε η $\mathbb{L}$ δεν έχει αδιακλάδιστες επεκτάσεις. Υπάρχουν ακριβώς 9 τέτοιες τιμές για το d: -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.*

Απόδειξη. Βλέπε [24].

□

Η εικασία του Poincarè ήταν μέχρι πρόσφατα ένα από τα πιο διάσημα άλυτα προβλήματα της τοπολογίας. Το 2000 μάλιστα, το Clay Mathematics Institute το συμπεριέλαβε ως ένα από τα Millennium Prize Problems προσφέροντας \$1.000.000 σε όποιον κατάφερνε να λύσει ένα από αυτά. Στα τέλη του 2002 ο Grigori Perelman του Steklon Institute of Mathematics της Αγίας Πετρούπολης ισχυρίστηκε ότι απέδειξε μια ακόμη πιο γενική εικασία, αυτή του Thurston κάνοντας χρήση της Ricci flow theory. Τον Ιούλιο του 2006 το Clay Mathematics Institude αποδέχτηκε την απόδειξή του και για το λόγο αυτό τιμήθηκε με το Fields Medal, το οποίο δεν αποδέχτηκε τελικά - όπως και το έπαθλο για την απόδειξη της εικασίας.

5.6 Το θεώρημα του κυρίου ιδεώδους.

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών και θα δώσουμε μια εικασία για το τι πρέπει να ισχύει στην θεωρία των κόμπων.

Θεώρημα 5.6.1. *Έστω K ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών με $\mathcal{O}_K$ τον δακτύλιο των ακαιρέων αλγεβρικών του, K^1 ας είναι το σώμα κλάσεων του Hilbert και $\mathcal{O}_K^1$ ας είναι ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών του K^1. Κάθε ιδεώδες P του $\mathcal{O}_K$ όταν επεκταδεί σε ιδεώδες $P\mathcal{O}_{K^1}$ του K^1 γίνεται κύριο.*

Το θεώρημα αυτό ήταν εικασία του Hilbert την οποία ο E. Artin την μετέτρεψε σε ένα πρόβλημα της θεωρίας ομάδων το οποίο έλυσε ο Ph. Furtwangler.

Έστω $H < G$, τα διαφορετικά σύμπλοκα της H στην G θα τα συμβολίζουμε με

$$H\tau_1, \ldots, H\tau_n. \tag{5.2}$$

Για κάθε $\sigma \in G$ και για κάθε i υπάρχει ένα στοιχείο $\phi_i(\sigma) \in H$, και ένας δείκτης $j = (i)\sigma$, με

$$\tau_i \sigma = \phi_i(\sigma)\tau_j.$$

Η αντιστοιχία $i \mapsto (i)\sigma$ είναι μία μετάθεση των ριζών.

Η συνάρτηση transfer από το G στο H είναι ένας ομομορφισμός που θα τον συμβολίζουμε με $V = V_{G \to H}$

$$V : G \to \frac{H}{[H, H]},$$

$$V(\sigma) = [H, H]\phi_1(\sigma)\phi_2(\sigma) \cdots \phi_n(\sigma). \tag{5.3}$$

Παρατηρούμε ότι η ομάδα $H/[H, H]$ είναι αβελιανή και συνεπώς το παραπάνω γινόμενο είναι ανεξάρτητο από την σειρά των παραγόντων. Αν έχουμε ένα διαφορετικό σύνολο αντιπροσώπων για τα σύμπλοκα από αυτό που διαλέχαμε στο (5.2), τότε το γινόμενο στο (5.3) μεταβάλεται με στοιχεία που ανήκουν στον μεταθέτη και συνεπώς είναι αναξάρτητο των αντιπροσώπων. Αν η H είναι αβελιανή τότε η transfer είναι μια συνάρτηση $V : G \to H$.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 5.6.2. *Για μία πεπερασμένη ομάδα η συνάρτηση transfer* $G \to [G, G]$ *είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.*

Απόδειξη. [23, 2, κεφάλαιο 13] □

Θα συμβολίζουμε με K^2 το σώμα κλάσεων του Hilbert του K^1. Θέτουμε $G = Gal(K^2/K)$. Η επέκταση K^2/K είναι αδιακλάδιστη, συνεπώς κάθε αβελιανή επέκταση L του K που περιέχεται στο K^2 είναι υπόσωμα του K^1, αφού L/K είναι αβελιανή και αδιακλάδιστη. Δηλαδή η K^1 είναι η μέγιστη αβελιανή επέκταση του K που περιέχεται στο K^2. Αυτό σημαίνει ότι $Gal(K^2/K^2) = [G, G]$, αφού το $[G, G]$ είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα του G ώστε το πηλίκο να είναι αβελιανή.

Έστω $\mathcal{O}_{K^2}$ ο δακτύλιος των ακεραίων του K^2. Έστω P ιδεώδες του $\mathcal{O}_K$ θα συμβολίζουμε με $P^{(1)}$ την επέκταση του στο $\mathcal{O}_{K^1}$, δηλαδή $P^{(1)} = P\mathcal{O}_{K^1}$. Επιπλέον θα συμβολίζουμε με $[P]$ την εικόνα του ιδεώδους στην ομάδα κλάσεων.

Θα χρειαστεί να μελετήσουμε την παρακάτω κατάσταση: Ας είναι $K \subset E \subset L$ ένας πύργος επεκτάσεων με L/K επέκταση του Galois. Η $E = L^H$ δεν είναι απαραίτητα Galois επέκταση του K ή ισοδύναμα η H δεν είναι απαραίτητα κανονική υποομάδα της G.

Θεωρούμε την ανάλυση σε σύμπλοκα

$$G = H\sigma_1 \cup \cdots \cup H\sigma_k.$$

Ένα στοιχείο $\sigma \in G$ αντιμεταθέτει τα παραπάνω σύμπλοκα μέσω του πολλαπλασιασμού: $H\sigma_i \mapsto H\sigma_i\sigma$. Με τον όρο *κύκλο μήκους* t θα εννοούμε μία ακολουθία

$$H\sigma_i, H\sigma_i\sigma, H\sigma_i\sigma^2, \ldots, H\sigma_i\sigma^{t-1},$$

όπου τα παραπάνω αναγραφόμενα σύμπλοκα είναι ανά δύο διαφορετικά και $H\sigma_i\sigma^t = H\sigma_i$. Φυσικά ο παραπάνω όρος ταυτίζεται με την γνωστή έννοια κύκλου από την θεωρία των μεταθέσεων. Το σύνολο όλων των συμπλόκων της H μπορεί να διαμεριστεί σε ξένες ενώσεις κύκλων.

Πρόταση 5.6.3. *Έστω $K \subset E \subset L$ ένας πύργος επεκτάσεων με L/K επέκταση του Galois. και έστω Q ένας πρώτος του L με $P = Q \cap K$. Υποθέτουμε ότι το Q/P δεν διακλαδίζεται. Έστω σ ο αυτομορφισμός του Frobenious για το Q υπέρ το P. Υποθέτουμε ότι ο σ έχει κύκλους με μήκη $t_1, \ldots, t_s$ όταν δρα στα σύμπλοκα της $H = Gal(L/E)$. Τότε ο P είναι γινόμενο s το πλήθος διαφορετικών πρώτων στο E με σχετικούς βαθμούς αδράνειας $t_1, \ldots .t_s$.*

Απόδειξη. Ας είναι $H\tau$ ένα σύμπλοκο σε ένα κύκλο μήκους t για τον σ. Θέτουμε $P_0 = \tau(Q) \cap E$. Το P_0 είναι ένας πρώτος του E που επεκτείνει τον P. Ο βαθμός αδράνειας $f(P_0/P)$ μπορεί να υπολογιστεί με τον παρακάτω τρόπο: Ο βαθμός αδράνειας του $\tau(Q)$ υπέρ το P_0 είναι η τάξη της ομάδας ανάλυσης

$$H(\tau(Q)) = H \cap G(\tau(Q)) = H \cap \tau G(Q)\tau^{-1}.$$

Ο αυτομορφισμός του Frobenious παράγει την ομάδα ανάλυσης, συνεπώς

$$\langle \sigma \rangle = G(Q).$$

Οπότε

$$H \cap \langle \tau\sigma\tau^{-1} \rangle = \langle \tau\sigma^t\tau^{-1} \rangle,$$

όπου t είναι ο μικρότερος θετικός ακαίρεος για τον οποίο ισχύει

$$H\tau = H\tau\sigma^t.$$

Δηλαδή καταλήξαμε στο ότι

$$H(\tau(Q)) = \langle \tau\sigma^t\tau^{-1} \rangle.$$

Τέλος

$$f(P_0/P) = \frac{f(Q/P)}{f(P/P_0)} = \frac{|G(Q)|}{|H(\tau(Q))|} = \frac{|\langle \sigma \rangle|}{|\langle \sigma^t \rangle|} = t.$$

Δηλαδή ένας κύκλος μήκους t αντιστοιχεί σε ένα πρώτο του E υπέρ το P, με βαθμό αδράνειας t. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η αντιστοιχία αυτή είναι ένα προς ένα.

Θεωρούμε τα σύμπλοκα $H\tau$ και $H\lambda$ για τα οποία ισχύει ότι

$$P_0 = E \cap \tau(Q) = E \cap \lambda(Q).$$

Τότε τα $\tau(Q)$ και $\lambda(Q)$ είναι πρώτοι του L που επεκτείνουν τον P. Αφού η ομάδα Galois $H = Gal(L/E)$ δρά μεταβατικά στους πρώτους του L που επεκτείνουν ένα πρώτο του E, έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $\gamma \in H$ με

$$\gamma\lambda(Q) = \tau(Q).$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι $\tau^{-1}\gamma\lambda \in G(Q) = \langle \sigma \rangle$ Συνεπώς $\gamma\lambda = \tau\sigma^i$ για κάποιο ακαίρεο i. Δηλαδή $H\tau\sigma^i = H\gamma\lambda = H\lambda$, δηλαδή τα $H\tau, H\lambda$ ανήκουν στον ίδιο κύκλο του σ στα σύμπλοκα της H.

Για να συμπληρωθεί η απόδειξη θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε πρώτος του E που επεκτείνει το P μπορεί να κατασκευαστεί με αυτό τον τρόπο. Κάθε ένας από τους s το πλήθος κύκλους αντιστοιχεί σε ένα πρώτο P_i με βαθμό αδράνειας $t_i = f(P_i/P)$. Όμως

$$\sum t_i = [G : H] = [E : K] = \sum f_i,$$

και αφού το άθροισμα όλων των βαθμών αδρανείας μας δίνει τελικά τον βαθμό της επεκτάσης δεν έχουμε αφήσει έξω κανένα πρώτο διαιρέτη.

□

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση Artin $\phi_{K^1/K}$ στέλνει την ομάδα I_K των κλασματικών ιδεωδών του K εντός της ομάδας κλάσεων $C_K = G/[G,G]$ και ο πυρήνας της είναι η ομάδα των κύριων κλασματικών ιδεωδών, οπότε επάγει ένα ισομορφισμό

$$\phi_1 : C_K \to G/[G,G].$$

Ομοίως, η συνάρτηση Artin ϕ_{K^2/K^1} επάγει ένα ισομορφισμό

$$\phi_2 : C_{K^1} \to [G,G].$$

Επίσεις, έχουμε την συνάρτηση $C_K \to C_{K^1}$ η οποία ορίζεται από την $[P] \mapsto [P^1]$ οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε την σύνθεση των συναρτήσεων

$$G \to \frac{G}{[G,G]} \xrightarrow{\phi_1^{-1}} C_K \to C_{K^1} \xrightarrow{\phi_2} [G,G], \tag{5.4}$$

όπου ο πρώτος μορφισμός είναι η φυσική προβολή. Θα δείξουμε ότι η σύνθεση των συναρτήσεων αυτών είναι η συνάρτηση transfer.

Για κάθε $\sigma \in G$ υπάρχει ένας πρώτος P του K ώστε $\phi_1[P] = [G,G]\sigma$. Ας θεωρήσουμε ότι η παραγωντοποίηση του σε γινόμενο πρώτων στο K^2 είναι

$$P = Q_1 \cdots Q_g.$$

Μπορούμε να διαλέξουμε για

$$\sigma = \left[\frac{K^2/K}{Q_1}\right].$$

Θα κάνουμε χρήση της πρότασης 5.6.3 προκειμένου να περιγράψουμε την παραγοντοποίηση του P στο K^1. Γνωρίζουμε ότι οι παράγοντες του P στο K^1 είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους κύκλους της δράσης του σ στα σύμπλοκα του $[G,G]$. Το μήκος του κύκλου αντιστοιχεί στους βαθμούς αδρανείας των διαφορετικών πρώτων του K^1 που επεκτείνουν το P. Φυσικά στην περίπτωση μας η επέκταση K^1/K είναι Galois, οπότε όλοι οι βαθμοί αδρανείας ταυτίζονται και έστω f η κοινή τιμή τους. Διατάσουμε τα σύμπλοκα του $[G,G]$ ως εξής:

$$\begin{array}{cccc}
[G,G]\tau_1 & [G,G]\tau_1\sigma & \dots & [G,G]\tau_1\sigma^{f-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
[G,G]\tau_t & [G,G]\tau_t\sigma & \dots & [G,G]\tau_t\sigma^{f-1}
\end{array}$$

Οι πρώτοι παράγοντες του $P^{(1)}$ είναι λοιπόν οι $Q_j = \tau_j(Q_1) \cap K^1$ και

$$P^{(1)} = Q_1 \cdots Q_t.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left[\frac{K^2/K^1}{Q_1}\right] = \left[\frac{K^2/K}{P}\right]^f = \sigma^f$$

και συνεπώς

$$\phi_{K^2/K^1}(Q_j) = \tau_j \phi_{K^2/K^1} Q_1 \tau_j^{-1} = \tau_j \sigma^f \tau_j^{-1}.$$

Τέλος υπολογίζουμε ότι η σύνθεση της (5.4) είναι

$$\sigma \mapsto [G,G]\sigma \mapsto [P] \mapsto [P^{(1)}] \mapsto [Q_1 \cdots Q_t] \mapsto \prod \tau_j \sigma^f \tau_j^{-1}.$$

Αν υπολογίσουμε την συνάρτηση transfer με βάση τα σύμπλοκα που γράψαμε παραπάνω έχουμε

$$V(\sigma) = \prod \tau_j \sigma^f \tau_j^{-1},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Τώρα το θεώρημα 5.6.2 μας δίνει ότι η transfer είναι η τετριμμένη συνάρτηση, και η μοναδική συνάρτηση στην σύνθεση (5.4) μπορεί να είναι μόνο η $[P] \mapsto [P^{(1)}]$. Δηλαδή η εικόνα του P στην ομάδα κλάσεων του $K^{(1)}$ είναι τετριμμένη, ή με άλλα λόγια το $P^{(1)}$ είναι κύριο.

5.7 Το θεώρημα κυρίων ιδεώδων για κόμπους.

Κλείνουμε διατυπώνοντας μιά εικασία για το τι πρέπει να ισχύει για την περίπτωση των κόμπων σε τρισδιάστατες πολλαπλότητες.

Εικασία. *Ας είναι M μιά συμπαγής 3-πολλαπλότητα και ας είναι*

$$M^{(1)} = \tilde{M}/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$$

η αντίστοιχη Hilbert πολλαπλότητα της. Κάθε κόμπος $S^1 \to M$ όταν γίνει lift σε κόμπο της $M^{(1)}$ είναι σύνορο επιφάνειας Seifert.

Βιβλιογραφία

[1] David Eisenbud, Joe Harris, *The Geometry of Schemes*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 197.

[2] David Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 150.

[3] John B. Fraleigh, *Εισαγωγή Στην 'Αλγεβρα (μετάφρ. Γιαννόπουλος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[4] Gerald J. Janusz, *Algebraic Number Fields*, American Mathematical Society.

[5] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 52.

[6] Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer - Verlag, Graduate Texts in Mathematics 33.

[7] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 73.

[8] Akio Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser.

[9] Louis H. Kauffman, *New Invariantsd in the Theory of Knots*, American Mathematical Monthly, Volume95, Issue 3 (Mar. 1988), 195-242.

[10] Michio Kuga, *Galois Dream*, Birkhäuser

[11] Yuri I. Manin, *The Notion of Dimension in Geometry and Algebra*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society Volume 43, Number 2, Pages 139-161 S 0273-0979(06)01081-0 Article electronically published on February 8, 2006

[12] Daniell Marcus, *Number Fields*, Springer.

[13] J.W. Milnor, *Topology from the differential viewpoint*, Princeton University Press; Revised edition 1997.

[14] J.S. Milne, *Algebraic Number Theory*, www.math.lsa.umich.edu/jmilne/

[15] J.S. Milne, *Lectures on Etale Cohomology*, same as above

[16] Masanori Morishita, *On Certain Analogies Between Knots and Primes*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 2002, 141-167.

[17] Neukirch Jürgen, *Algebraic Number Theory*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 322.

[18] Matthew Ong, *The Galois Correspondance for Branched Covering Spaces and its Relationship to Hecke Algebras.*

[19] Adam Sikora, *Analogies Between Group Actions on 3-Manifolds and Number Fields*, arXiv:math.GT/0107210 v2 7 Jun 2003.

[20] Ian Stewart, *Algebraic Number Theory*, Chapman and Hall Mathematics.

[21] Ian Stewart, *Galois Theory*, Chapman and Hall Mathematics.

[22] Revetements Etales et groupe fondamental (SGA 1). (French) [Etale coverings and fundamental group (SGA 1)], *Seminaire de geometrie algebrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61] Directed by A. Grothendieck. With two papers by M. Raynaud. Updated and annotated reprint of the 1971 original, [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin; MR0354651 (50 #7129)].* Documents Mathematiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 3. Societe Mathematique de France, Paris, 2003. xviii+327 pp. ISBN 2-85629-141-4

[23] Artin, E. and Tate, J., Class Field Theory, Benjamin, New York, 1968

[24] L. C. Washington, Introduction to Cyclotomic Fields, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1982.

[25] Νίκος Γκερπινής, *Θεωρία Κλάσων Σωμάτων και Εφαρμογές στην Κρυπτογραφία*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2005.

[26] Σωτήρης Καρανικολόπουλος, *Εισαγωγή στην Αλγεβρική Τοπολογία*, Πτυχιακή Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2003.

[27] Σωτήρης Καρανικολόπουλος, *Uniformization Αλγεβρικών Καμπυλών*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2005.

[28] Α. Κοντογεώργης, *Ημιευσταθείς ελλειπτικές καμπύλες και το τελευταίο θεώρημα του Φερματ.*

[29] Κ. Λάκκη, *Θεωρία Αριθμών*, Εκδόσεις Ζήτη.

[30] Πνευματικός Σπύρος, Μαθήματα Διαίρεσης στον δακτύλιο των αναλυτικών συναρτήσεων, Σειρά επιστημονικών μονογραφιών « Μαθηματικά και Θεμελιώδεις Εφαρμογές », Πανεπιστήμιο Κρήτης 1991.