Αριθμητική Τοπολογία

Αναλογίες μεταξύ Αλγεβρικών Σωμάτων Αριθμών και 3-Πολλαπλοτήτων

Γκουνταρούλης Δημοκλής

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

10 Οκτωβρίου 2006

Περιεχόμενα

Αριθμητική Τοπολογία

- Ξεκίνησε από τους Mumford και Mazur. Ακολούθησαν οι εργασίες των Morishita, Ramachandran, Reznikov και Waldspurger.
- Μελετά τις αναλογίες μεταξύ των 3-Πολλαπλοτήτων και των Αλγεβρικών Σωμάτων Αριθμών.
- Υπάρχει ένα λεξικό, το MKR-λεξικό το οποίο μας βοηθά να «μεταφράζουμε» έννοιες από τη μία θεωρία στην άλλη.
- Σκοπός της είναι να ενοποιήσει τις θεωρίες των 3-Πολλαπλοτήτων και της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

Αριθμητική Τοπολογία

- Ξεκίνησε από τους Mumford και Mazur. Ακολούθησαν οι εργασίες των Morishita, Ramachandran, Reznikov και Waldspurger.
- Μελετά τις αναλογίες μεταξύ των 3-Πολλαπλοτήτων και των Αλγεβρικών Σωμάτων Αριθμών.
- Υπάρχει ένα λεξικό, το MKR-λεξικό το οποίο μας βοηθά να «μεταφράζουμε» έννοιες από τη μία θεωρία στην άλλη.
- Σκοπός της είναι να ενοποιήσει τις θεωρίες των 3-Πολλαπλοτήτων και της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

Αριθμητική Τοπολογία

- Ξεκίνησε από τους Mumford και Mazur. Ακολούθησαν οι εργασίες των Morishita, Ramachandran, Reznikov και Waldspurger.
- Μελετά τις αναλογίες μεταξύ των 3-Πολλαπλοτήτων και των Αλγεβρικών Σωμάτων Αριθμών.
- Υπάρχει ένα λεξικό, το MKR-λεξικό το οποίο μας βοηθά να «μεταφράζουμε» έννοιες από τη μία θεωρία στην άλλη.
- Σκοπός της είναι να ενοποιήσει τις θεωρίες των 3-Πολλαπλοτήτων και της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

Αριθμητική Τοπολογία

- Ξεκίνησε από τους Mumford και Mazur. Ακολούθησαν οι εργασίες των Morishita, Ramachandran, Reznikov και Waldspurger.
- Μελετά τις αναλογίες μεταξύ των 3-Πολλαπλοτήτων και των Αλγεβρικών Σωμάτων Αριθμών.
- Υπάρχει ένα λεξικό, το MKR-λεξικό το οποίο μας βοηθά να «μεταφράζουμε» έννοιες από τη μία θεωρία στην άλλη.
- Σκοπός της είναι να ενοποιήσει τις θεωρίες των 3-Πολλαπλοτήτων και της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών

Η Αλγεβρική θεωρία αριθμών ξεκίνησε από τους Kummer, Dedekind και Kronnecker.

Ένα Αλγεβρικό Σώμα Αριθμών $\mathbb{K}$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$.

Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cap \{$ρίζες μονικών πολυωνύμων του $\mathbb{Z}[x]\}$ ονομάζεται ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών του $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα

- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$.
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})]$

Το $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ είναι ρίζα του $x^2 - x - 1 = 0$.

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών

Η Αλγεβρική θεωρία αριθμών ξεκίνησε από τους Kummer, Dedekind και Kronnecker.

Ένα Αλγεβρικό Σώμα Αριθμών $\mathbb{K}$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$.

Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cap \{$ρίζες μονικών πολυωνύμων του $\mathbb{Z}[x]\}$ ονομάζεται ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών του $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα

- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$.
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})]$

Το $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ είναι ρίζα του $x^2 - x - 1 = 0$.

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών

Η Αλγεβρική θεωρία αριθμών ξεκίνησε από τους Kummer, Dedekind και Kronnecker.

Ένα Αλγεβρικό Σώμα Αριθμών $\mathbb{K}$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$.

Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cap \{\text{ρίζες μονικών πολυωνύμων του } \mathbb{Z}[x]\}$ ονομάζεται ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών του $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα

- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$.
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})]$

Το $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ είναι ρίζα του $x^2 - x - 1 = 0$.

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών

Η Αλγεβρική θεωρία αριθμών ξεκίνησε από τους Kummer, Dedekind και Kronnecker.

Ένα Αλγεβρικό Σώμα Αριθμών $\mathbb{K}$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$.

Ο δακτύλιος$\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cap \{$ρίζες μονικών πολυωνύμων του $\mathbb{Z}[x]\}$ ονομάζεται ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών του $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα

- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$.
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, τότε $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})]$

Το $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ είναι ρίζα του $x^2 - x - 1 = 0$.

Βασικές Αναλογίες

- Μια 3-πολλαπλότητα M αντιστοιχεί σε ένα Αλγεβρικό Σώμα Αριθμών $\mathbb{K}$ και πιο συγκεκριμένα αντιστοιχεί στο $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.
- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ μέσα στην M αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες.

Πως μπορούμε να το δούμε αυτό;

Βασικές Αναλογίες

- Μια 3-πολλαπλότητα M αντιστοιχεί σε ένα Αλγεβρικό Σώμα Αριθμών $\mathbb{K}$ και πιο συγκεκριμένα αντιστοιχεί στο $\mathit{Spec}\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.
- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ μέσα στην M αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες.

Πως μπορούμε να το δούμε αυτό;

Βασικές Αναλογίες

- Μια 3-πολλαπλότητα M αντιστοιχεί σε ένα Αλγεβρικό Σώμα Αριθμών $\mathbb{K}$ και πιο συγκεκριμένα αντιστοιχεί στο $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.
- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ μέσα στην M αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες.

Πως μπορούμε να το δούμε αυτό;

Οι κόμποι είναι πρώτα ιδεώδη

Έστω $\mathcal{K} \subset M$ ένας κόμπος μέσα στην M.

- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ είναι μια εμφύτευση

$$S^1 \hookrightarrow M$$

- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Έστω $\mathfrak{p} \in Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

- Κάθε σημείο του φάσματος $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν την εμφύτευση

$$Spec\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$$

- Πρόβλημα : $\pi_1(\mathbb{F}_{p^n}) =$;

Οι κόμποι είναι πρώτα ιδεώδη

Έστω $\mathcal{K} \subset M$ ένας κόμπος μέσα στην M.

- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ είναι μια εμφύτευση

$$S^1 \hookrightarrow M$$

- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Έστω $\mathfrak{p} \in Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

- Κάθε σημείο του φάσματος $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν την εμφύτευση

$$Spec\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$$

- Πρόβλημα : $\pi_1(\mathbb{F}_{p^n}) =$;

Οι κόμποι είναι πρώτα ιδεώδη

Έστω $\mathcal{K} \subset M$ ένας κόμπος μέσα στην M.

- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ είναι μια εμφύτευση

$$S^1 \hookrightarrow M$$

- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Έστω $\mathfrak{p} \in Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

- Κάθε σημείο του φάσματος $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν την εμφύτευση

$$Spec\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$$

- Πρόβλημα : $\pi_1(\mathbb{F}_{p^n}) = ;$

Οι κόμποι είναι πρώτα ιδεώδη

Έστω $\mathcal{K} \subset M$ ένας κόμπος μέσα στην M.

- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ είναι μια εμφύτευση

$$S^1 \hookrightarrow M$$

- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Έστω $\mathfrak{p} \in Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

- Κάθε σημείο του φάσματος $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν την εμφύτευση

$$Spec\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$$

- Πρόβλημα : $\pi_1(\mathbb{F}_{p^n}) =$;

Οι κόμποι είναι πρώτα ιδεώδη

Έστω $\mathcal{K} \subset M$ ένας κόμπος μέσα στην M.

- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ είναι μια εμφύτευση

$$S^1 \hookrightarrow M$$

- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Έστω $\mathfrak{p} \in Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

- Κάθε σημείο του φάσματος $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν την εμφύτευση

$$Spec\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$$

- Πρόβλημα : $\pi_1(\mathbb{F}_{p^n}) =$;

Οι κόμποι είναι πρώτα ιδεώδη

Έστω $\mathcal{K} \subset M$ ένας κόμπος μέσα στην M.

- Ένας κόμπος $\mathcal{K}$ είναι μια εμφύτευση
$$S^1 \hookrightarrow M$$
- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Έστω $\mathfrak{p} \in Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

- Κάθε σημείο του φάσματος $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν την εμφύτευση
$$Spec\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$$
- Πρόβλημα : $\pi_1(\mathbb{F}_{p^n}) =$;

Η αλγεβρική θεμελιώδης ομάδα π_1^{alg}

Ορισμός

Ο *Grothendieck* όρισε την αλγεβρική θεμελιώδη ομάδα, η οποία για ένα πεπερασμένο σώμα $\mathbb{F}_p$ είναι

$$\pi_1^{alg}(\mathbb{F}_p) = Gal(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \varprojlim_{[K:\mathbb{F}_p]} Gal(K/\mathbb{F}_p) = \widehat{\mathbb{Z}}$$

Ο Grothendieck έδειξε επίσης το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Αν X τοπολογικός χώρος στον οποίο να μπορεί να οριστεί συνηθισμένη $\pi_1(X)$τότε

$$\pi_1^{alg}(X) = \widehat{\pi^1(X)}.$$

Η αλγεβρική θεμελιώδης ομάδα π_1^{alg}

Ορισμός

Ο *Grothendieck* όρισε την αλγεβρική θεμελιώδη ομάδα, η οποία για ένα πεπερασμένο σώμα $\mathbb{F}_p$ είναι

$$\pi_1^{alg}(\mathbb{F}_p) = Gal(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \varprojlim_{[K:\mathbb{F}_p]} Gal(K/\mathbb{F}_p) = \widehat{\mathbb{Z}}$$

Ο Grothendieck έδειξε επίσης το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Αν X τοπολογικός χώρος στον οποίο να μπορεί να οριστεί συνηθισμένη $\pi_1(X)$τότε

$$\pi_1^{alg}(X) = \widehat{\pi^1(X)}.$$

Η αλγεβρική θεμελιώδης ομάδα π_1^{alg}

Ορισμός

Ο *Grothendieck* όρισε την αλγεβρική θεμελιώδη ομάδα, η οποία για ένα πεπερασμένο σώμα $\mathbb{F}_p$ είναι

$$\pi_1^{alg}(\mathbb{F}_p) = Gal(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \varprojlim_{[K:\mathbb{F}_p]} Gal(K/\mathbb{F}_p) = \widehat{\mathbb{Z}}$$

Ο Grothendieck έδειξε επίσης το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Αν X τοπολογικός χώρος στον οποίο να μπορεί να οριστεί συνηθισμένη $\pi_1(X)$τότε

$$\pi_1^{alg}(X) = \widehat{\pi^1(X)}.$$

Ποιά είναι η $\pi_1^{alg}(S^1)$?

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(Y_n/S^1),$$

όπου Y_n τα αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1.

$\rightsquigarrow$ Ποια είναι όμως αυτά;

- Τα μοναδικά αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1 είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \to & S^1 \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

- $Aut(S^1/S^1) = \mu_n(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(S^1_{(n)}/S^1) = \varprojlim_n = \mu_n(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{Z}} = \widehat{\pi_1(S^1)}$$

Ποιά είναι η $\pi_1^{alg}(S^1)$?

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(Y_n/S^1),$$

όπου Y_n τα αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1.

$\rightsquigarrow$ Ποια είναι όμως αυτά;

- Τα μοναδικά αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1 είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & S^1 \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

- $Aut(S^1/S^1) = \mu_n(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(S^1_{(n)}/S^1) = \varprojlim_n = \mu_n(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{Z}} = \widehat{\pi_1(S^1)}$$

Ποιά είναι η $\pi_1^{alg}(S^1)$?

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(Y_n/S^1),$$

όπου Y_n τα αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1.

$\rightsquigarrow$ Ποια είναι όμως αυτά;

- Τα μοναδικά αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1 είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \to & S^1 \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

- $Aut(S^1/S^1) = \mu_n(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(S^1_{(n)}/S^1) = \varprojlim_n = \mu_n(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{Z}} = \widehat{\pi_1(S^1)}$$

Ποιά είναι η $\pi_1^{alg}(S^1)$?

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(Y_n/S^1),$$

όπου Y_n τα αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1.

$\rightsquigarrow$ Ποια είναι όμως αυτά;

- Τα μοναδικά αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1 είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \to & S^1 \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

- $Aut(S^1/S^1) = \mu_n(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(S^1_{(n)}/S^1) = \varprojlim_n = \mu_n(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{Z}} = \widehat{\pi_1(S^1)}$$

Ποιά είναι η $\pi_1^{alg}(S^1)$?

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(Y_n/S^1),$$

όπου Y_n τα αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1.

$\rightsquigarrow$ Ποια είναι όμως αυτά;

- Τα μοναδικά αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1 είναι της μορφής
$$\begin{array}{ccc} S^1 & \to & S^1 \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$
- $Aut(S^1/S^1) = \mu_n(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(S^1_{(n)}/S^1) = \varprojlim_n = \mu_n(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{Z}} = \widehat{\pi_1(S^1)}$$

Ποιά είναι η $\pi_1^{alg}(S^1)$?

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(Y_n/S^1),$$

όπου Y_n τα αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1.

$\rightsquigarrow$ <u>Ποια είναι όμως αυτά;</u>

- Τα μοναδικά αδιακλάδιστα καλύμματα του S^1 είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \to & S^1 \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

- $Aut(S^1/S^1) = \mu_n(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\pi_1^{alg}(S^1) = \varprojlim_n Aut(S^1_{(n)}/S^1) = \varprojlim_n = \mu_n(\mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{Z}} = \widehat{\pi_1(S^1)}$$

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για την S^3

- $\pi_1(S^3) = 0$.
- Κάθε κάλυμμα έχει για branch locus ένα link (Alexander).
- $\widetilde{S^3} = \frac{S^3}{[\pi_1(S^3), \pi_1(S^3)]} = S^3$.
- Κάθε vector bundle πάνω από την S^3 είναι τετριμμένο.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για την S^3

- $\pi_1(S^3) = 0$.
- Κάθε κάλυμμα έχει για branch locus ένα link (Alexander).
- $\widetilde{S^3} = \frac{S^3}{[\pi_1(S^3), \pi_1(S^3)]} = S^3$.
- Κάθε vector bundle πάνω από την S^3 είναι τετριμμένο.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για την S^3

- $\pi_1(S^3) = 0$.
- Κάθε κάλυμμα έχει για branch locus ένα link (Alexander).
- $\widetilde{S^3} = \frac{S^3}{[\pi_1(S^3), \pi_1(S^3)]} = S^3$.
- Κάθε vector bundle πάνω από την S^3 είναι τετριμμένο.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για την S^3

- $\pi_1(S^3) = 0$.
- Κάθε κάλυμμα έχει για branch locus ένα link (Alexander).
- $\widetilde{S^3} = \frac{S^3}{[\pi_1(S^3), \pi_1(S^3)]} = S^3$.
- Κάθε vector bundle πάνω από την S^3 είναι τετριμμένο.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για το $\mathbb{Q}$

- Ιδεώδη $\longrightarrow$ locally free sheaves με rank 1
- Vector bundle πάνω από το $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-projective module με rank n
- Το $\mathbb{Z}$ είναι ΠΚΙ, άρα :
- Κάθε vector bundle τετριμμένο.
- Κάθε επέκταση του $\mathbb{Q}$ διακλαδίζεται με Branch Locus το σύνολο όλων των ιδεωδών που διαιρούν τη διακρίνουσα.

Συμπέρασμα: Το $\mathbb{Q}$ είναι απλά συνεκτικό κατά Grothendieck.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για το $\mathbb{Q}$

- Ιδεώδη $\longrightarrow$ locally free sheaves με rank 1
- Vector bundle πάνω από το $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-projective module με rank n
- Το $\mathbb{Z}$ είναι ΠΚΙ, άρα :
- Κάθε vector bundle τετριμμένο.
- Κάθε επέκταση του $\mathbb{Q}$ διακλαδίζεται με Branch Locus το σύνολο όλων των ιδεωδών που διαιρούν τη διακρίνουσα.

Συμπέρασμα: Το $\mathbb{Q}$ είναι απλά συνεκτικό κατά Grothendieck.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για το $\mathbb{Q}$

- Ιδεώδη $\longrightarrow$ locally free sheaves με rank 1
- Vector bundle πάνω από το$Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-projective module με rank n
- Το $\mathbb{Z}$ είναι ΠΚΙ, άρα :
- Κάθε vector bundle τετριμμένο.
- Κάθε επέκταση του $\mathbb{Q}$ διακλαδίζεται με Branch Locus το σύνολο όλων των ιδεωδών που διαιρούν τη διακρίνουσα.

Συμπέρασμα: Το $\mathbb{Q}$ είναι απλά συνεκτικό κατά Grothendieck.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για το $\mathbb{Q}$

- Ιδεώδη $\longrightarrow$ locally free sheaves με rank 1
- Vector bundle πάνω από το $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-projective module με rank n
- Το $\mathbb{Z}$ είναι ΠΚΙ, άρα :
- Κάθε vector bundle τετριμμένο.
- Κάθε επέκταση του $\mathbb{Q}$ διακλαδίζεται με Branch Locus το σύνολο όλων των ιδεωδών που διαιρούν τη διακρίνουσα.

Συμπέρασμα: Το $\mathbb{Q}$ είναι απλά συνεκτικό κατά Grothendieck.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για το $\mathbb{Q}$

- Ιδεώδη $\longrightarrow$ locally free sheaves με rank 1
- Vector bundle πάνω από το$Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-projective module με rank n
- Το $\mathbb{Z}$ είναι ΠΚΙ, άρα :
- Κάθε vector bundle τετριμμένο.
- Κάθε επέκταση του $\mathbb{Q}$ διακλαδίζεται με Branch Locus το σύνολο όλων των ιδεωδών που διαιρούν τη διακρίνουσα.

Συμπέρασμα: Το $\mathbb{Q}$ είναι απλά συνεκτικό κατά Grothendieck.

Το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στην S^3

Για το $\mathbb{Q}$

- Ιδεώδη $\longrightarrow$ locally free sheaves με rank 1
- Vector bundle πάνω από το $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-projective module με rank n
- Το $\mathbb{Z}$ είναι ΠΚΙ, άρα :
- Κάθε vector bundle τετριμμένο.
- Κάθε επέκταση του $\mathbb{Q}$ διακλαδίζεται με Branch Locus το σύνολο όλων των ιδεωδών που διαιρούν τη διακρίνουσα.

Συμπέρασμα: Το $\mathbb{Q}$ είναι απλά συνεκτικό κατά Grothendieck.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Ιδεώδη

Έστω $G = Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ και $\mathfrak{q}$ ένα πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$.

Ορισμός

Η ομάδα διακλάδωσης του $\mathfrak{q}$, $D_{\mathfrak{q}} \subset G$ είναι η ομάδα των στοιχείων της G που διατηρούν το $\mathfrak{q}$,

$$D_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}.$$

- $\forall \sigma \in G$ επάγει έναν αυτομορφισμό $\bar{\sigma}$ του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}$.
- Ο $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ επάγει τον $D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Ιδεώδη

Έστω $G = Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ και $\mathfrak{q}$ ένα πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$.

Ορισμός

Η ομάδα διακλάδωσης του $\mathfrak{q}$, $D_{\mathfrak{q}} \subset G$ είναι η ομάδα των στοιχείων της G που διατηρούν το $\mathfrak{q}$,

$$D_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}.$$

- $\forall \sigma \in G$ επάγει έναν αυτομορφισμό $\bar{\sigma}$ του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}$.
- Ο $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ επάγει τον $D_{\mathfrak{q}} \longrightarrow Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Ιδεώδη

Έστω $G = Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ και $\mathfrak{q}$ ένα πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$.

Ορισμός

Η ομάδα διακλάδωσης του $\mathfrak{q}$, $D_{\mathfrak{q}} \subset G$ είναι η ομάδα των στοιχείων της G που διατηρούν το $\mathfrak{q}$,

$$D_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}.$$

- $\forall \sigma \in G$ επάγει έναν αυτομορφισμό $\bar{\sigma}$ του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}$.
- Ο $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ επάγει τον $D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Ιδεώδη

Έστω $G = Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ και $\mathfrak{q}$ ένα πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$.

Ορισμός

Η ομάδα διακλάδωσης του $\mathfrak{q}$, $D_{\mathfrak{q}} \subset G$ είναι η ομάδα των στοιχείων της G που διατηρούν το $\mathfrak{q}$,

$$D_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}.$$

- $\forall \sigma \in G$ επάγει έναν αυτομορφισμό $\bar{\sigma}$ του $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}$.
- Ο $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ επάγει τον $D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ορισμός

Ο πυρήνας του παραπάνω ομομορφισμού ονομάζεται ομάδα αδράνειας του $\mathfrak{q}$.

$$I_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\alpha) \equiv \alpha mod \mathfrak{q} \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}\}.$$

Έτσι έχουμε την ακόλουθη exact ακολουθία

$$0 \to I_{\mathfrak{q}} \to D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}) \to 0.$$

Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις έχω $D_{\mathfrak{q}} \cong Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ορισμός

Το στοιχείο της $D_{\mathfrak{q}}$ που απεικονίζεται στο γεννήτορα της $Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$ ονομάζεται το σύμβολο του Artin $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{q}}\right)$.

Ορισμός

Ο πυρήνας του παραπάνω ομομορφισμού ονομάζεται ομάδα αδράνειας του $\mathfrak{q}$.

$$I_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\alpha) \equiv \alpha mod \mathfrak{q} \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}\}.$$

Έτσι έχουμε την ακόλουθη exact ακολουθία

$$0 \to I_{\mathfrak{q}} \to D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}) \to 0.$$

Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις έχω $D_{\mathfrak{q}} \cong Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ορισμός

Το στοιχείο της $D_{\mathfrak{q}}$ που απεικονίζεται στο γεννήτορα της $Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$ ονομάζεται το σύμβολο του Artin $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{q}}\right)$.

Ορισμός

Ο πυρήνας του παραπάνω ομομορφισμού ονομάζεται ομάδα αδράνειας του $\mathfrak{q}$.

$$I_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\alpha) \equiv \alpha \, mod \mathfrak{q} \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}\}.$$

Έτσι έχουμε την ακόλουθη exact ακολουθία

$$0 \to I_{\mathfrak{q}} \to D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}) \to 0.$$

Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις έχω $D_{\mathfrak{q}} \cong Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ορισμός

Το στοιχείο της $D_{\mathfrak{q}}$ που απεικονίζεται στο γεννήτορα της $Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$ ονομάζεται το σύμβολο του Artin $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{q}}\right)$.

Ορισμός

Ο πυρήνας του παραπάνω ομομορφισμού ονομάζεται ομάδα αδράνειας του $\mathfrak{q}$.

$$I_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\alpha) \equiv \alpha mod \mathfrak{q} \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}\}.$$

Έτσι έχουμε την ακόλουθη exact ακολουθία

$$0 \to I_{\mathfrak{q}} \to D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}) \to 0.$$

Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις έχω $D_{\mathfrak{q}} \cong Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ορισμός

Το στοιχείο της $D_{\mathfrak{q}}$ που απεικονίζεται στο γεννήτορα της $Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$ ονομάζεται το σύμβολο του Artin $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{q}}\right)$.

Ορισμός

Ο πυρήνας του παραπάνω ομομορφισμού ονομάζεται ομάδα αδράνειας του $\mathfrak{q}$.

$$I_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G : \sigma(\alpha) \equiv \alpha \, mod \mathfrak{q} \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}\}.$$

Έτσι έχουμε την ακόλουθη exact ακολουθία

$$0 \to I_{\mathfrak{q}} \to D_{\mathfrak{q}} \to Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}) \to 0.$$

Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις έχω $D_{\mathfrak{q}} \cong Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$.

Ορισμός

Το στοιχείο της $D_{\mathfrak{q}}$ που απεικονίζεται στο γεννήτορα της $Gal(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}/\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$ ονομάζεται το σύμβολο του Artin $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{q}}\right)$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Κόμπους.

- Έστω G πεπερασμένη ομάδα που δρα σε πολλαπλότητα M.
- $p : M \to M/G$ είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα.
- Η υποομάδα $D_{\mathcal{K}} \subset G$ η οποία απεικονίζει τον $\mathcal{K} \subset M$ στον εαυτό του είναι η ομάδα αδράνειας του $\mathcal{K}$.
- Η εικόνα του ομομορφισμού $D_{\mathcal{K}} \to Homeo(\mathcal{K})$ είναι ακριβώς η ομάδα των deck transformations $Aut(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$ του καλύμματος $\mathcal{K} \to \mathcal{K}' = K/D_{\mathcal{K}}$.
- Σε αναλογία με τη θεωρία αριθμών, ο πυρήνας της παραπάνω είναι η ομάδα αδράνειας του κόμπου.
- Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις μπορεί να οριστεί το σύμβολο του Artin, $\left(\frac{M/M/G}{\mathcal{K}}\right)$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Κόμπους.

- Έστω G πεπερασμένη ομάδα που δρα σε πολλαπλότητα M.
- $p : M \to M/G$ είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα.
- Η υποομάδα $D_{\mathcal{K}} \subset G$ η οποία απεικονίζει τον $\mathcal{K} \subset M$ στον εαυτό του είναι η ομάδα αδράνειας του $\mathcal{K}$.
- Η εικόνα του ομομορφισμού $D_{\mathcal{K}} \to Homeo(\mathcal{K})$ είναι ακριβώς η ομάδα των deck transformations $Aut(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$ του καλύμματος $\mathcal{K} \to \mathcal{K}' = K/D_{\mathcal{K}}$.
- Σε αναλογία με τη θεωρία αριθμών, ο πυρήνας της παραπάνω είναι η ομάδα αδράνειας του κόμπου.
- Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις μπορεί να οριστεί το σύμβολο του Artin, $(\frac{M/M/G}{\mathcal{K}})$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Κόμπους.

- Έστω G πεπερασμένη ομάδα που δρα σε πολλαπλότητα M.
- $p : M \to M/G$ είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα.
- Η υποομάδα $D_{\mathcal{K}} \subset G$ η οποία απεικονίζει τον $\mathcal{K} \subset M$ στον εαυτό του είναι η ομάδα αδράνειας του $\mathcal{K}$.
- Η εικόνα του ομομορφισμού $D_{\mathcal{K}} \to Homeo(\mathcal{K})$ είναι ακριβώς η ομάδα των deck transformations $Aut(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$ του καλύμματος $\mathcal{K} \to \mathcal{K}' = K/D_{\mathcal{K}}$.
- Σε αναλογία με τη θεωρία αριθμών, ο πυρήνας της παραπάνω είναι η ομάδα αδράνειας του κόμπου.
- Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις μπορεί να οριστεί το σύμβολο του Artin, $\left(\frac{M/M/G}{\mathcal{K}}\right)$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Κόμπους.

- Έστω G πεπερασμένη ομάδα που δρα σε πολλαπλότητα M.
- $p : M \to M/G$ είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα.
- Η υποομάδα $D_{\mathcal{K}} \subset G$ η οποία απεικονίζει τον $\mathcal{K} \subset M$ στον εαυτό του είναι η ομάδα αδράνειας του $\mathcal{K}$.
- Η εικόνα του ομομορφισμού $D_{\mathcal{K}} \to Homeo(\mathcal{K})$ είναι ακριβώς η ομάδα των deck transformations $Aut(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$ του καλύμματος $\mathcal{K} \to \mathcal{K}' = K/D_{\mathcal{K}}$.
- Σε αναλογία με τη θεωρία αριθμών, ο πυρήνας της παραπάνω είναι η ομάδα αδράνειας του κόμπου.
- Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις μπορεί να οριστεί το σύμβολο του Artin, $\left(\frac{M/M/G}{\mathcal{K}}\right)$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Κόμπους.

- Έστω G πεπερασμένη ομάδα που δρα σε πολλαπλότητα M.
- $p : M \to M/G$ είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα.
- Η υποομάδα $D_{\mathcal{K}} \subset G$ η οποία απεικονίζει τον $\mathcal{K} \subset M$ στον εαυτό του είναι η ομάδα αδράνειας του $\mathcal{K}$.
- Η εικόνα του ομομορφισμού $D_{\mathcal{K}} \to Homeo(\mathcal{K})$ είναι ακριβώς η ομάδα των deck transformations $Aut(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$ του καλύμματος $\mathcal{K} \to \mathcal{K}' = K/D_{\mathcal{K}}$.
- Σε αναλογία με τη θεωρία αριθμών, ο πυρήνας της παραπάνω είναι η ομάδα αδράνειας του κόμπου.
- Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις μπορεί να οριστεί το σύμβολο του Artin, $\left(\frac{M/M/G}{\mathcal{K}}\right)$.

Ομάδες Διακλάδωσης και Αδράνειας για Κόμπους.

- Έστω G πεπερασμένη ομάδα που δρα σε πολλαπλότητα M.
- $p : M \to M/G$ είναι ένα διακλαδισμένο κάλυμμα.
- Η υποομάδα $D_{\mathcal{K}} \subset G$ η οποία απεικονίζει τον $\mathcal{K} \subset M$ στον εαυτό του είναι η ομάδα αδράνειας του $\mathcal{K}$.
- Η εικόνα του ομομορφισμού $D_{\mathcal{K}} \to Homeo(\mathcal{K})$ είναι ακριβώς η ομάδα των deck transformations $Aut(\mathcal{K}/\mathcal{K}')$ του καλύμματος $\mathcal{K} \to \mathcal{K}' = K/D_{\mathcal{K}}$.
- Σε αναλογία με τη θεωρία αριθμών, ο πυρήνας της παραπάνω είναι η ομάδα αδράνειας του κόμπου.
- Σε αδιακλάδιστες επεκτάσεις μπορεί να οριστεί το σύμβολο του Artin, $(\frac{M/M/G}{\mathcal{K}})$.

Το MKR λεξικό

Οι Kapranov και Reznikov βασιζόμενοι σε ιδέες του Mazur προτείνανε το ακόλουθο λεξικό που αντιστοιχεί τις έννοιες των 3-Πολλαπλοτήτων με αυτές της Αλγεβρικής θεωρίας αριθμών.

- Οι κλειστές, προσανατολίσιμες, συνεκτικές, λείες 3-πολλαπλότητες αντιστοιχούν στα σχήματα $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, όπου K είναι ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών.
- Ένα link στην M αντιστοιχεί σε ένα ιδεώδες στον δακτύλιο των ακεραίων αλγεβρικών $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ και ένας κόμπος στην M αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες στον $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Θεωρούμε μόνο tame links και κόμπους.
- Ένας ακέραιος αλγεβρικός $w \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ είναι ανάλογος με μια εμφυτευμένη επιφάνεια $S \subset M$. Η απεικόνιση $w \to \langle w \rangle \lhd \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ αντιστοιχεί στην $S \to \partial S$.

Το MKR λεξικό

Οι Kapranov και Reznikov βασιζόμενοι σε ιδέες του Mazur προτείνανε το ακόλουθο λεξικό που αντιστοιχεί τις έννοιες των 3-Πολλαπλοτήτων με αυτές της Αλγεβρικής θεωρίας αριθμών.

- Οι κλειστές, προσανατολίσιμες, συνεκτικές, λείες 3-πολλαπλότητες αντιστοιχούν στα σχήματα $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, όπου K είναι ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών.
- Ένα link στην M αντιστοιχεί σε ένα ιδεώδες στον δακτύλιο των ακεραίων αλγεβρικών $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ και ένας κόμπος στην M αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες στον $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Θεωρούμε μόνο tame links και κόμπους.
- Ένας ακέραιος αλγεβρικός $w \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ είναι ανάλογος με μια εμφυτευμένη επιφάνεια $S \subset M$. Η απεικόνιση $w \to \langle w \rangle \lhd \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ αντιστοιχεί στην $S \to \partial S$.

Το MKR λεξικό

Οι Kapranov και Reznikov βασιζόμενοι σε ιδέες του Mazur προτείνανε το ακόλουθο λεξικό που αντιστοιχεί τις έννοιες των 3-Πολλαπλοτήτων με αυτές της Αλγεβρικής θεωρίας αριθμών.

- Οι κλειστές, προσανατολίσιμες, συνεκτικές, λείες 3-πολλαπλότητες αντιστοιχούν στα σχήματα $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, όπου K είναι ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών.
- Ένα link στην M αντιστοιχεί σε ένα ιδεώδες στον δακτύλιο των ακεραίων αλγεβρικών $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ και ένας κόμπος στην M αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες στον $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Θεωρούμε μόνο tame links και κόμπους.
- Ένας ακέραιος αλγεβρικός $w \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ είναι ανάλογος με μια εμφυτευμένη επιφάνεια $S \subset M$. Η απεικόνιση $w \to \langle w \rangle \lhd \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ αντιστοιχεί στην $S \to \partial S$.

Το MKR λεξικό

Οι Kapranov και Reznikov βασιζόμενοι σε ιδέες του Mazur προτείνανε το ακόλουθο λεξικό που αντιστοιχεί τις έννοιες των 3-Πολλαπλοτήτων με αυτές της Αλγεβρικής θεωρίας αριθμών.

- Οι κλειστές, προσανατολίσιμες, συνεκτικές, λείες 3-πολλαπλότητες αντιστοιχούν στα σχήματα $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, όπου K είναι ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών.
- Ένα link στην M αντιστοιχεί σε ένα ιδεώδες στον δακτύλιο των ακεραίων αλγεβρικών $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ και ένας κόμπος στην M αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες στον $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Θεωρούμε μόνο tame links και κόμπους.
- Ένας ακέραιος αλγεβρικός $w \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ είναι ανάλογος με μια εμφυτευμένη επιφάνεια $S \subset M$. Η απεικόνιση $w \to \langle w \rangle \lhd \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ αντιστοιχεί στην $S \to \partial S$.

Θεώρημα (Seifert)

Για κάθε *link* L στην S^3 υπάρχει μια εμφυτευμένη επιφάνεια στην S^3 με σύνορο το L. Αυτή η επιφάνεια ονομάζεται *Seifert* επιφάνεια.

- Οι πεπερασμένες επεκτάσεις των σωμάτων αριθμών $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ αντιστοιχούν σε πεπερασμένα διακλαδιζόμενα καλύμματα 3-πολλαπλοτήτων $\pi : M \to N$.
- Κάθε Galois επέκταση $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ με ομάδα $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = G$ επάγει το μορφισμό $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \to (Spec\mathcal{O}_{\mathbb{L}})/G = Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.
- Η σφαίρα S^3 αντιστοιχεί στο $\mathbb{Q}$.

- Οι πεπερασμένες επεκτάσεις των σωμάτων αριθμών $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ αντιστοιχούν σε πεπερασμένα διακλαδιζόμενα καλύμματα 3-πολλαπλοτήτων $\pi : M \to N$.
- Κάθε Galois επέκταση $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ με ομάδα $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = G$ επάγει το μορφισμό $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \to (Spec\mathcal{O}_{\mathbb{L}})/G = Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.
- Η σφαίρα S^3 αντιστοιχεί στο $\mathbb{Q}$.

- Οι πεπερασμένες επεκτάσεις των σωμάτων αριθμών $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ αντιστοιχούν σε πεπερασμένα διακλαδιζόμενα καλύμματα 3-πολλαπλοτήτων $\pi : M \to N$.
- Κάθε Galois επέκταση $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ με ομάδα $Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = G$ επάγει το μορφισμό $Spec\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \to (Spec\mathcal{O}_{\mathbb{L}})/G = Spec\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.
- Η σφαίρα S^3 αντιστοιχεί στο $\mathbb{Q}$.

Η Εικασία του Poincare

Εικασία (Poincare)

Η S^3 είναι το μοναδική κλειστή 3-πολλαπλότητα που δεν έχει πεπερασμένα αδιακλάδιστα καλύμματα.

- Η εικασία του Poincare ήταν ένα από τα Millennium Prize Problems για τα οποία το Clay Mathematics Institute προσφέρει $1.000.000 για την επίλυσή τους.

Η Εικασία του Poincare

Εικασία (Poincare)

Η S^3 είναι το μοναδική κλειστή 3-πολλαπλότητα που δεν έχει πεπερασμένα αδιακλάδιστα καλύμματα.

- Η εικασία του Poincare ήταν ένα από τα Millennium Prize Problems για τα οποία το Clay Mathematics Institute προσφέρει \$1.000.000 για την επίλυσή τους.

Η Εικασία του Poincare

Εικασία (Poincare)

Η S^3 είναι το μοναδική κλειστή 3-πολλαπλότητα που δεν έχει πεπερασμένα αδιακλάδιστα καλύμματα.

- Η εικασία του Poincare ήταν ένα από τα Millennium Prize Problems για τα οποία το Clay Mathematics Institute προσφέρει \$1.000.000 για την επίλυσή τους.

- Αποδείχθηκε από τον Grigori Perelman, ο οποίος τιμήθηκε με το Fields Medal.

- Αρνήθηκε να παραλάβει και τα δύο βραβεία.

- Αποδείχθηκε από τον Grigori Perelman, ο οποίος τιμήθηκε με το Fields Medal.

- Αρνήθηκε να παραλάβει και τα δύο βραβεία.

Η εικασία του Poincare σε Σώματα Αριθμών

Η αλγεβρική μετάφραση αυτής της εικασίας, ότι δηλαδή « Το μοναδικό σώμα αριθμών που δεν έχει αδιακλάδιστα καλύμματα είναι το $\mathbb{Q}$» είναι ψευδής.

Θεώρημα

Αν $d < 0$ και η ομάδα κλάσεων της επέκτασης $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ είναι τετριμμένη τότε η $\mathbb{L}$ δεν έχει αδιακλάδιστες επεκτάσεις. Υπάρχουν ακριβώς 9 τέτοιες τιμές για το d: -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.

Η εικασία του Poincare σε Σώματα Αριθμών

Η αλγεβρική μετάφραση αυτής της εικασίας, ότι δηλαδή « Το μοναδικό σώμα αριθμών που δεν έχει αδιακλάδιστα καλύμματα είναι το $\mathbb{Q}$» είναι ψευδής.

Θεώρημα

Αν $d < 0$ και η ομάδα κλάσεων της επέκτασης $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ είναι τετριμμένη τότε η $\mathbb{L}$ δεν έχει αδιακλάδιστες επεκτάσεις. Υπάρχουν ακριβώς 9 τέτοιες τιμές για το d: -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.

Θεώρημα (Principal Ideal Theorem)

Έστω K ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών με $\mathcal{O}_K$ τον δακτύλιο των ακεραίων αλγεβρικών του, K^1 ας είναι το σώμα κλάσεων του *Hilbert* και $\mathcal{O}_K^1$ ας είναι ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών του K^1. Κάθε ιδεώδες P του $\mathcal{O}_K$ όταν επεκταθεί σε ιδεώδες $P\mathcal{O}_{K^1}$ του K^1 γίνεται κύριο.

Εικασία

Ας είναι M μιά συμπαγής 3-πολλαπλότητα και ας είναι

$$M^{(1)} = \tilde{M}/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$$

η αντίστοιχη *Hilbert* πολλαπλότητα της. Κάθε κόμπος $S^1 \to M$ όταν γίνει *lift* σε κόμπο της $M^{(1)}$ είναι σύνορο επιφάνειας *Seifert*.

Θεώρημα (Principal Ideal Theorem)

Έστω K ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών με $\mathcal{O}_K$ τον δακτύλιο των ακεραίων αλγεβρικών του, K^1 ας είναι το σώμα κλάσεων του *Hilbert* και $\mathcal{O}_K^1$ ας είναι ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών του K^1. Κάθε ιδεώδες P του $\mathcal{O}_K$ όταν επεκταθεί σε ιδεώδες $P\mathcal{O}_{K^1}$ του K^1 γίνεται κύριο.

Εικασία

Ας είναι M μιά συμπαγής 3-πολλαπλότητα και ας είναι

$$M^{(1)} = \tilde{M}/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$$

η αντίστοιχη *Hilbert* πολλαπλότητα της. Κάθε κόμπος $S^1 \to M$ όταν γίνει *lift* σε κόμπο της $M^{(1)}$ είναι σύνορο επιφάνειας *Seifert*.