

Η Θεωρία των *Dessins d'Enfants* του Grothendieck

Μανώλης Τζωρτζάκης

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

March 8, 2014



Ιστορία/ Motivation

Αλγεβρικές Καμπύλες και το Θεώρημα Belyi

Dessins και η αντιστοιχία Grothendieck



Που είμαστε στο χάρτη ?

Χονδρικά μιλώντας τα dessins εντάσσονται στον κλάδο των "Γεωμετρικών Δράσεων Galois ", ο οποίος είναι ένας κλάδος που ζει στην τομή της Θεωρίας Αριθμών και της Αλγεβρικής Γεωμετρίας.



Ολα για μια ομάδα

Η αρχή του παραμυθιού αυτού είναι μια συγκεκριμένη μυστηριώδης ομάδα.



Η αρχή του παραμυθιού αυτού είναι μια συγκεκριμένη μυστηριώδης ομάδα.

Η απόλυτη ομάδα Galois των ρητών, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = G_{\mathbb{Q}}$.



Η αρχή του παραμυθιού αυτού είναι μια συγκεκριμένη μυστηριώδης ομάδα.

Η απόλυτη ομάδα Galois των ρητών, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = G_{\mathbb{Q}}$.

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists f(x) \in \mathbb{Q}[x], f(z) = 0\}$$

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \{\sigma \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \sigma|_{\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}\}$$



Γιατί η $G_{\mathbb{Q}}$ είναι μεγάλη?



Γιατί η $G_{\mathbb{Q}}$ είναι μεγάλη? Η $G_{\mathbb{Q}}$ περιέχει την ομάδα Galois κάθε πεπερασμένης επέκτασης Galois $L/\mathbb{Q}$ του $\mathbb{Q}$ ως πηλίκο.

$$G_{\mathbb{Q}}/\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L) \simeq \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$$



Γιατί η $G_{\mathbb{Q}}$ είναι μεγάλη? Η $G_{\mathbb{Q}}$ περιέχει την ομάδα Galois κάθε πεπερασμένης επέκτασης Galois $L/\mathbb{Q}$ του $\mathbb{Q}$ ως πηλίκο.

$$G_{\mathbb{Q}}/\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L) \simeq \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$$

Πως μοιάζουν τα στοιχεία της $G_{\mathbb{Q}}$?



Γιατί η $G_{\mathbb{Q}}$ είναι μεγάλη? Η $G_{\mathbb{Q}}$ περιέχει την ομάδα Galois κάθε πεπερασμένης επέκτασης Galois $L/\mathbb{Q}$ του $\mathbb{Q}$ ως πηλίκο.

$$G_{\mathbb{Q}}/\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L) \simeq \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$$

Πως μοιάζουν τα στοιχεία της $G_{\mathbb{Q}}$?

Δεν μπορούμε να γράψουμε κανένα μη τετριμμένο εκτός από την μιγαδική συζυγία!



Αντίστροφο Πρόβλημα Galois

Αντίστροφο πρόβλημα Galois, 19ος αιώνας : Εστω G μια πεπερασμένη ομάδα, υπάρχει άραγε πεπερασμένη επέκταση Galois $L/\mathbb{Q}$ με $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = G$?



Αντίστροφο πρόβλημα Galois, 19ος αιώνας : Εστω G μια πεπερασμένη ομάδα, υπάρχει άραγε πεπερασμένη επέκταση Galois $L/\mathbb{Q}$ με $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = G$?
Ισοδύναμα, μπορούμε να προσδιορίσουμε όλα τα πεπερασμένα πηλίκια της $G_{\mathbb{Q}}$?



Αντίστροφο πρόβλημα Galois, 19ος αιώνας : Εστω G μια πεπερασμένη ομάδα, υπάρχει άραγε πεπερασμένη επέκταση Galois $L/\mathbb{Q}$ με $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = G$?

Ισοδύναμα, μπορούμε να προσδιορίσουμε όλα τα πεπερασμένα πηλίκια της $G_{\mathbb{Q}}$?

Ανοιχτό Πρόβλημα!



Αντίστροφο πρόβλημα Galois, 19ος αιώνας : Εστω G μια πεπερασμένη ομάδα, υπάρχει άραγε πεπερασμένη επέκταση Galois $L/\mathbb{Q}$ με $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = G$?

Ισοδύναμα, μπορούμε να προσδιορίσουμε όλα τα πεπερασμένα πηλίκα της $G_{\mathbb{Q}}$?

Ανοιχτό Πρόβλημα!

Μερικά αποτελέσματα :

- ▶ Ισχύει για επιλύσιμες. (Shafarevitch)
- ▶ Ισχύει για τις σποραδικές ομάδες εκτός ίσως από την M_{23} .



Holy Grail





Διάφορες προσεγγίσεις : Αναπαραστάσεις Galois, Συνομολογία Galois κτλ.

Ιδέα: Ας βρούμε κατάλληλες δράσεις έτσι ώστε να μπορέσουμε να "δούμε" την $G_{\mathbb{Q}}$.

Προφανής δράση στα πολυώνυμα με συντελεστές $/\overline{\mathbb{Q}}$, και άρα δράση στις αλγεβρικές καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$.

(Αλγεβρική Καμπύλη $/K = \text{"Σύνολο ριζών ενός ανάγωγου πολυωνύμου } f(x, y) \in K[x, y]"$)

Οι καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$ είναι δυσνόητα αντικείμενα, αλλά οι καμπύλες $/\mathbb{C}$ αντιστοιχούν σε συμπαγείς επιφάνειες Riemann.



Διάφορες προσεγγίσεις : Αναπαραστάσεις Galois, Συνομολογία Galois κτλ.

Ιδέα: Ας βρούμε κατάλληλες δράσεις έτσι ώστε να μπορέσουμε να "δούμε" την $G_{\mathbb{Q}}$.

Προφανής δράση στα πολυώνυμα με συντελεστές $/\overline{\mathbb{Q}}$, και άρα δράση στις αλγεβρικές καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$.

(Αλγεβρική Καμπύλη $/K = \text{"Σύνολο ριζών ενός ανάγωγου πολυωνύμου } f(x, y) \in K[x, y]\text{"}$)

Οι καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$ είναι δυσνόητα αντικείμενα, αλλά οι καμπύλες $/\mathbb{C}$ αντιστοιχούν σε συμπαγείς επιφάνειες Riemann. Μπορούμε άραγε να ξεδιαλέξουμε μέσα από τις επιφάνειες, αυτές που αντιστοιχούν σε καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$ με κάποιον απλό τρόπο?



Αλγεβρικές Καμπύλες

$\{\text{Συμπαγείς επιφάνειες Riemann}\} \longleftrightarrow \{\text{Αλγεβρικές καμπύλες } / \mathbb{C}\}$

???

$\longleftrightarrow \{\text{Αλγεβρικές καμπύλες } / \overline{\mathbb{Q}}\}$



► G.Belyi, 1979: Ναι!

Θεώρημα Belyi: Αναλυτικός χαρακτηρισμός των συμπαγών επιφανειών Riemann που αντιστοιχούν σε καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$.



▶ G.Belyi, 1979: Ναι!

Θεώρημα Belyi: Αναλυτικός χαρακτηρισμός των συμπαγών επιφανειών Riemann που αντιστοιχούν σε καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$. Ε και?



- ▶ G.Belyi, 1979: Ναι!
Θεώρημα Belyi: Αναλυτικός χαρακτηρισμός των συμπαγών επιφανειών Riemann που αντιστοιχούν σε καμπύλες $/\overline{\mathbb{Q}}$. Ε και?
- ▶ A.Grothendieck, 1984 (*Esquisse d 'un programme*): Ο χαρακτηρισμός του Belyi μπορεί να εκφραστεί με συνδυαστικό τρόπο, συγκεκριμένα με ένα διμερές γράφημα(dessin) πάνω στην επιφάνεια Riemann. Αρα η $G_{\mathbb{Q}}$ δρα στα dessins.
Είναι καλή η δράση? Ναι, η $G_{\mathbb{Q}}$ δρα πιστά στα dessins.



"This discovery made a very strong impression on me, and it represents a shift in particular of my centre of interest in mathematics. I do not believe that a mathematical fact has ever struck me quite so strongly as this one, nor had a comparable psychological impact. This is surely because of the very familiar, non-technical nature of the objects considered, of which any child's drawing (dessin d'enfant) scrawled on a bit of paper gives a perfectly explicit example."

-Alexander
Grothendieck-



Genaddy Belyi
1951-2001



Alexander Grothendieck
1928-???

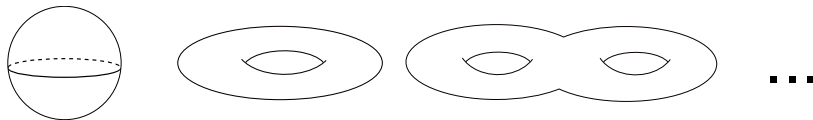


Μια επιφάνεια Riemann, είναι ένας τοπολογικός χώρος S που μοιάζει τοπικά με το $\mathbb{C}$. Δηλαδή υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i \in I}$ και αμφιολόμορφες απεικονίσεις $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C}$ (χάρτες) οι οποίες πληρούν μια συνθήκη συμβατότητας: για $i, j \in I$, $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ να είναι αμφιολόμορφες εκεί που ορίζονται. Μέσω των χαρτών μπορούν να οριστούν έννοιες όπως ολόμορφες και μερόμορφες απεικονίσεις.



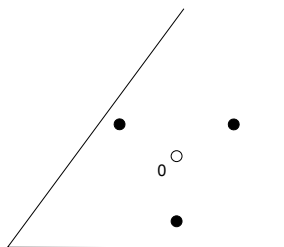
Συμπαγείς προσανατολίσιμες επιφάνειες

Η μιγαδική δομή συνεπάγεται προσανατολισσιμότητα, άρα αν απαιτήσουμε επιπλέον συνεκτικότητα και συμπαγεια τότε τοπολογικά η επιφάνεια μοιάζει με ένα λουκουμά με g τρύπες:

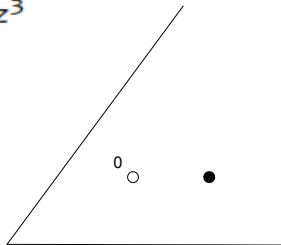




Δομή ολομόρφων απεικονίσεων



$$z \mapsto z^3$$

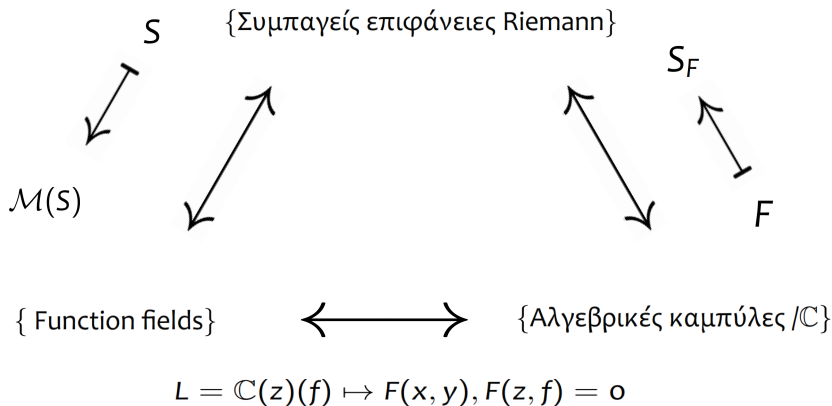




Οι ολόμορφες απεικονίσεις μεταξύ συμπαγών επιφανειών Riemann $f : S_1 \rightarrow S_2$ μοιάζουν τοπικά με μια $z \mapsto z^n$. Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός m ο οποίος λέγεται βαθμός της f ($\deg f$) έτσι ώστε $|f^{-1}(Q)| = \deg f$ για όλα εκτός από πεπερασμένα $Q \in S_2$. Αυτά τα Q λέγονται regular values ενώ τα υπόλοιπα (όπως το 0 στην $z \mapsto z^3$) λέγονται critical values.



Μια τριπλή αντιστοιχία





Θεώρημα (Belyi)

Για μια συμπαγή επιφάνεια Riemann S τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η S ορίζεται πάνω από το $\overline{\mathbb{Q}}$.



Θεώρημα (Belyi)

Για μια συμπαγή επιφάνεια Riemann S τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η S ορίζεται πάνω από το $\overline{\mathbb{Q}}$.
2. Υπάρχει μια ολόμορφη απεικόνιση $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ με το πολύ τρεις κρίσιμες τιμές.



Θεώρημα (Belyi)

Για μια συμπαγή επιφάνεια Riemann S τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η S ορίζεται πάνω από το $\overline{\mathbb{Q}}$.
 2. Υπάρχει μια ολόμορφη απεικόνιση $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ με το πολύ τρεις κρίσιμες τιμές.
- ▶ Συνήθως διαλέγουμε τις κρίσιμες τιμές να περιέχονται στο $\{0, 1, \infty\}$.
 - ▶ Το ζεύγος (S, f) θα λέγεται ζεύγος Belyi.



Τι είναι ένα *Dessin d'enfant*?

- ▶ Για ένα ζεύγος Belyi (S, f) το σύνολο $f^{-1}[0, 1]$ είναι ένα διμερές, συνεκτικό γράφημα πάνω στην S του οποίου η όψεις είναι ομοιομορφικές με δίσκους.

Ορισμός

Ενα (Grothendieck) *Dessin d'enfant* είναι ένα ζεύγος (S, D) όπου S είναι μια συμπαγής επιφάνεια και D ένα διμερές συνεκτικό γράφημα πάνω στην S του οποίου οι όψεις είναι ομοιομορφικές με δίσκους.



Παραδείγματα

$$f_1(z) = z^3$$



$$f_2(z) = 1 - z^3 = 1 - f_1(z)$$



$$f_3(z) = \frac{(4-z)(1+2z)^2}{27z}$$



$$f_4(z) = \frac{4(z-1)^3}{27z} = 1 - f_3(z)$$



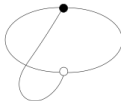


Παραδείγματα

$$f_5(z) = \frac{z^3 + 3z^2}{4}$$

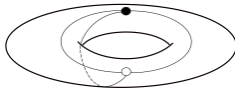


$$f_6(z) = \frac{z^3}{z^3 - 1}$$



$$f_7(x, y) = \frac{1}{2}(1 + y)$$

$$C : \{y^2 = x^3 + 1\}$$





Και τι δεν είναι

Τι μπορεί να πάει στραβά στην εμφύτευση ενός διμερούς γραφήματος σε μια συμπαγή επιφάνεια S ?



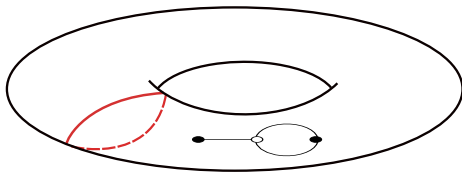
Τι μπορεί να πάει στραβά στην εμφύτευση ενός διμερούς γραφήματος σε μια συμπαγή επιφάνεια S ?
Στην πραγματικότητα η συνθήκη ότι οι όψεις είναι δίσκοι είναι το μόνο που μπορεί να παραβιαστεί.



Τι μπορεί να πάει στραβά στην εμφύτευση ενός διμερούς γραφήματος σε μια συμπαγή επιφάνεια S ?

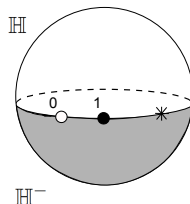
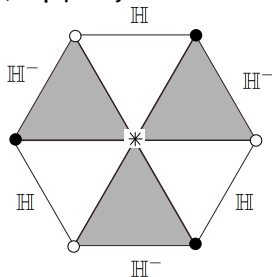
Στην πραγματικότητα η συνθήκη ότι οι όψεις είναι δίσκοι είναι το μόνο που μπορεί να παραβιαστεί.

Αυτό δεν είναι dessin:





Ο Grothendieck παρατήρησε ότι αντίστροφα τα dessins ορίζουν ζεύγη Belyi:





Θεώρημα (Αντιστοιχία Grothendieck)

Οι παραπάνω διαδικασίες είναι καλά ορισμένες (ανεξάρτητη επιλογών) και άρα υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ :

1. Dessins d' Enfants.
2. Ζεύγη Belyi.



Συνεπώς έχουμε επιτέλους την δράση Galois για ένα $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ στα dessins μέσω του κανόνα:

$$\begin{array}{ccc} D & \cdots \rightarrow & D^{\sigma} \\ \downarrow & & \uparrow \\ (S_D, f_D) & \xrightarrow{\sigma} & (S_D^{\sigma}, f_D^{\sigma}) \end{array}$$

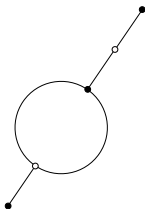
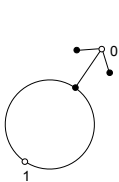
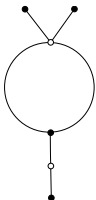


Προφανείς αναλλοίωτες της δράσης Galois:

- ▶ Πλήθος των ακμών.
- ▶ Το πλήθος των λευκών/μαύρων κορυφών και το πλήθος των όψεων.
- ▶ Η λίστα των βαθμών των λευκών/μαύρων κορυφών και των όψεων.
- ▶ Το γένος.
- ▶ Η ομάδα αυτομορφισμών.



Υπολογίζοντας τροχιές Galois





$$f(z) = \frac{z^4(z-1)^2}{z-b}$$

$$f'(z) = \frac{z^3(z-1)(5z^2 + (-3-6b)z + 4b)}{(z-b)^2}$$

$$36b^2 - 44b + 9 = 0$$

$$b = \frac{-9 + 2\sqrt{10}}{18} \quad \text{ή} \quad b = \frac{-9 - 2\sqrt{10}}{18}$$



- ▶ Η δράση Galois είναι πιστή στα dessins με μια όψη (δέντρα). Ειδικότερα είναι πιστή στα dessins γένους 0. (Lenstra)
- ▶ Η δράση είναι πιστή στις υπερελλειπτικές καμπύλες γένους g . (Girondo, Gonzalez-Diez)
- ▶ Η δράση Galois είναι πιστή στα regular dessins. (Guillot)



Και για την $G_{\mathbb{Q}}$?

Ηταν γνωστό ότι υπάρχει ένας μονομορφισμός

$$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Out}(\widehat{F}_2)$$

Ο Drinfeld το '90 όρισε μια υποομάδα της $\text{Out}(\widehat{F}_2)$ που λέγεται Grothendieck-Teichmuller $\widehat{GT}$, κι ο Ihara το '94 χρησιμοποιώντας ως βασική ιδέα τα dessins απέδειξε ότι η εικόνα της $G_{\mathbb{Q}}$ περιέχεται στην $\widehat{GT}$.



Και για την $G_{\mathbb{Q}}$?

Ηταν γνωστό ότι υπάρχει ένας μονομορφισμός

$$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Out}(\widehat{F}_2)$$

Ο Drinfeld το '90 όρισε μια υποομάδα της $\text{Out}(\widehat{F}_2)$ που λέγεται Grothendieck-Teichmuller $\widehat{GT}$, κι ο Ihara το '94 χρησιμοποιώντας ως βασική ιδέα τα dessins απέδειξε ότι η εικόνα της $G_{\mathbb{Q}}$ περιέχεται στην $\widehat{GT}$.

Είναι άραγε η $G_{\mathbb{Q}}$ γνήσια υποομάδα της $\widehat{GT}$?



Και για την $G_{\mathbb{Q}}$?

Ηταν γνωστό ότι υπάρχει ένας μονομορφισμός

$$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Out}(\widehat{F}_2)$$

Ο Drinfeld το '90 όρισε μια υποομάδα της $\text{Out}(\widehat{F}_2)$ που λέγεται Grothendieck-Teichmuller $\widehat{GT}$, κι ο Ihara το '94 χρησιμοποιώντας ως βασική ιδέα τα dessins απέδειξε ότι η εικόνα της $G_{\mathbb{Q}}$ περιέχεται στην $\widehat{GT}$.

Είναι άραγε η $G_{\mathbb{Q}}$ γνήσια υποομάδα της $\widehat{GT}$?
Ανοιχτό πρόβλημα!



- ▶ Ταξινόμηση των τροχιών Galois.
- ▶ Άλλες καλύτερες συνδυαστικές/τοπολογικές αναλλοίωτες? Όσες έχουν οριστεί ως τώρα είναι γνωστό ότι δεν ταξινομούν τις τροχιές.
- ▶ Ταξινόμηση διάφορων κλάσεων επιφανειών Riemann χρησιμοποιώντας dessins.
- ▶ Ποιες επιφάνειες Riemann επιδέχονται μοναδικό dessin?
- ▶ Απαρίθμηση dessins με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, εύρεση γεννητριών συναρτήσεων.



Ευχαριστώ για την προσοχή σας!