# Εισαγωγή στο Πρόγραμμα ***Langlands***

Γεώργιος Παπάς

Μεταπτυχιακή Εργασία

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, Αύγουστος 2016

Εισηγητής: Αριστείδης Κοντογεώργης

Επιτροπή

Ιωάννης Σακελλαρίδης

Μιχάλης Μαλιάκας

# Περιεχόμενα

**Εισαγωγή**

**1 Στοιχεία Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών** 1
- 1.1 Ακέραια κλειστότητα . . . 1
- 1.2 Πρώτα ιδεώδη . . . 2
  - 1.2.1 Κινέζικο θεώρημα υπολοίπων . . . 3
- 1.3 Δακτύλιοι του *Dedekind* και κλασματικά ιδεώδη . . . 3
- 1.4 Δακτύλιοι διακριτής εκτίμησης . . . 4
- 1.5 Επεκτάσεις *Galois* και πρώτα ιδεώδη . . . 6

**2 $p$-αδικοί Αριθμοί και P-αδικά Σώματα** 9
- 2.1 $p$-αδικοί αριθμοί . . . 9
  - 2.1.1 Το σώμα των $p-$αδικών αριθμών $\mathbb{Q}_p$ . . . 10
- 2.2 Πληρώσεις . . . 11
  - 2.2.1 Το λήμμα του *Hensel* . . . 14
- 2.3 Τοπολογία των P-αδικών σωμάτων . . . 15
- 2.4 Αδιακλάδιστες επεκτάσεις . . . 16

**3 Τοπικά Σώματα και Ομάδα *Weil*** 19
- 3.1 Τοπικά σώματα . . . 19
- 3.2 Ομάδα *Weil* τοπικού μη-αρχιμήδειου σώματος . . . 21
  - 3.2.1 Εναλλακτική περιγραφή της ομάδας *Weil* . . . 22
- 3.3 Τοπική θεωρία σωμάτων κλάσεων και ομάδα *Weil* . . . 23
  - 3.3.1 Τοπική θεωρία σωμάτων κλάσεων . . . 26
  - 3.3.2 Ομάδες *Weil* αρχιμήδειων τοπικών σωμάτων . . . 27

**4 *Adeles*, *Ideles* και Αμοιβαιότητα *Artin*** 29
- 4.1 Κατασκευή των *adeles* και *ideles* ενός σώματος αριθμών . . . 29
- 4.2 *Ideles* . . . 32
- 4.3 Η αμοιβαιότητα *Artin* . . . 35
- 4.4 Απεικόνιση *Artin* και θεωρία σωμάτων κλάσεων . . . 38

**5 $L-$Συναρτήσεις και η Εικασία του *Artin*** 41
- 5.1 Οι $L-$συναρτήσεις του *Artin* . . . 41
  - 5.1.1 Η πλήρωση της $L-$συνάρτησης του *Artin* . . . 44
- 5.2 Χαρακτήρες *Hecke*, η περίπτωση των αβελιανών επεκτάσεων . . . 45

**6 Γενικές Γραμμικές Ομάδες** 51
- 6.1 Γενική γραμμική ομάδα και *adeles* . . . 51
- 6.2 Διπλά σύμπλοκα . . . 52

**7 Αυτομορφικές Μορφές** **55**
7.1 *Modular* μορφές . . . 55
7.1.1 Η $L-$συνάρτηση μιας *cusp* μορφής . . . 58
7.2 Οι τελεστές *Hecke* . . . 59
7.3 Ανύψωση των *modular* μορφών . . . 62
7.3.1 *Cusp* μορφές και αναπαραστάσεις . . . 64
7.4 Αυτομορφικές μορφές σε γενικές γραμμικές ομάδες . . . 66

**8 Αυτομορφικές Αναπαραστάσεις** **71**
8.1 Στοιχεία θεωρίας αναπαραστάσεων . . . 71
8.2 Αυτομορφικές αναπαραστάσεις . . . 73
8.3 Η καθολική άλγεβρα *Hecke* . . . 75
8.4 Πρότυπα της $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$ . . . 79
8.4.1 *Cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις . . . 81

**9 Πρόγραμμα *Langlands* για την $GL_n$** **83**
9.1 Η τοπική αντιστοιχία . . . 83
9.2 $L-$συναρτήσεις των *Godement – Jacquet* . . . 87
9.3 Μια δεύτερη ματιά στην αντιστοιχία . . . 90
9.3.1 Πολλαπλότητα ένα και *Jacquet – Langlands* . . . 93
9.4 Η εικασία του *Langlands* . . . 95

**Α′ Πρόγραμμα *Langlands* σε γενικότερες ομάδες** **101**
Α′.1 *Reductive* γραμμικές ομάδες . . . 101

# Εισαγωγή

Η μεταπτυχιακή εργασία αυτή έχει ως στόχο να παρουσιάσει μια εισαγωγή στο πρόγραμμα *Langlands*. Η θεωρία αυτή του *R. Langlands* αποτελείται από διάφορες εικασίες, τις οποίες διατύπωσε για πρώτη φορά σε ένα γράμμα του στον *A. Weil* το 1967. Το πρόγραμμα *Langlands* αποτελεί ένα από τα παραδείγματα μαθηματικών θεωριών που έχουν σαν σκοπό τους να ενώσουν διαφορετικούς κλάδους της μαθηματικής επιστήμης, και συγκεκριμένα, αυτούς της Θεωρίας Αναπαραστάσεων και της Θεωρίας Αριθμών. Η κεντρική έννοια του προγράμματος *Langlands* είναι οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις, καθώς και η μελέτη των $L-$συναρτήσεών τους. Ένας από τους στόχους του προγράμματος *Langlands* είναι, χονδρικά, να αποδείξει ότι οι υπόλοιπες $\zeta$ και $L$ συναρτήσεις που εμφανίζονται στη Θεωρία Αριθμών είναι ειδικές περιπτώσεις αυτών των κατασκευών. Οι εικασίες, τις οποίες έχουμε ως στόχο να παρουσιάσουμε, αποτελούν προϊόν της προσπάθειας του *Langlands* να αποδείξει την εικασία του *Artin* για τις αναπαραστάσεις των ομάδων *Galois*. Ένα από τα κυριότερα προβλήματα στην μελέτη του παρόντος θέματος είναι το πλήθος των μαθηματικών εννοιών που είναι απαραίτητα για την κατανόηση και διατύπωση των εικασιών αυτών, αλλά και η γενικότερη τεχνική δυσκολία του αντικειμένου. Μεταξύ άλλων, το πρόγραμμα *Langlands* συνδυάζει ιδέες και τεχνικές από κλάδους όπως η Θεωρία Αναπαραστάσεων, η Αλγεβρική Γεωμετρία, η Θεωρία Κλάσεων Σωμάτων, η Αρμονική Ανάλυση και η Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών.

Στο 1ο κεφάλαιο, το οποίο έχει βασιστεί σε μεγάλο βαθμό στο αντίστοιχο σύγγραμμα του *Lang*, *Algebraic Number Theory*, προσπαθούμε να δώσουμε μια σύντομη περίληψη των αποτελεσμάτων της κλασικής Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών που θα χρειαστούμε. Το ενδιαφέρον μας θα εστιαστεί στα πρώτα ιδεώδη κατάλληλων δακτυλίων και τις καλές ιδιότητες που απολαμβάνουν. Οι δακτύλιοι του *Dedekind*, με τους οποίους θα ασχοληθούμε, έχουν την ιδιότητα τα πρώτα ιδεώδη τους να έχουν ανάλογες ιδιότητες με αυτές των πρώτων αριθμών. Μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες αυτές είναι η δράση της ομάδας *Galois* κατάλληλων επεκτάσεων σωμάτων σε κατάλληλα σύνολα πρώτων ιδεωδών, την οποία θα δούμε στην παράγραφο 1.5. Τα αποτελέσματα αυτά είναι θεμελιώδους σημασίας, καθώς περιγράφουν τη δομή των αντικειμένων με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια: των σωμάτων αριθμών.

Το 2ο κεφάλαιο ξεκινάει με μια περιληπτική εισαγωγή στη θεωρία των $p-$αδικών αριθμών. Οι $p-$αδικοί αριθμοί αποτελούν το έναυσμα για τη μελέτη των πληρώσεων ενός σώματος αριθμών. Οι πληρώσεις αυτές μας είναι απαραίτητες στη συνέχεια καθώς θα αποτελούν τις βάσεις στις οποίες θα χτιστεί το τοπικό κομμάτι της θεωρίας μας. Το βασικό μέρος του κομματιού αυτού βρίσκεται στο 3ο κεφάλαιο όπου ξεκινάμε με κάποιες βασικές παρατηρήσεις για τα τοπικά σώματα. Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τον ορισμό και τις ιδιότητες της ομάδας *Weil* ενός τοπικού σώματος καθώς και με τη σύνδεσή της με την Τοπική Θεωρία Κλάσεων Σωμάτων.

Κύρια αντικείμενα μελέτης του 4ου κεφαλαίου αποτελούν τα *adele* και *idele* ενός σώματος αριθμών. Οι κατασκευές αυτές αποτελούν το καθολικό κομμάτι της θεωρίας μας, καθώς θα συνδυάζουν όλη την πληροφορία των τοπικών σωμάτων που θα προκύπτουν από τις πληρώσεις του σώματος αριθμών. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την απεικόνιση *Artin* και την Καθολική Θεωρία Κλάσεων Σωμάτων. Η απεικόνιση *Artin* αποτελεί μια από τις βασικές έννοιες που θα χρειαστούμε στο 5ο κεφάλαιο, όπου θα ορίσουμε τις $L-$συναρτήσεις *Artin* και θα δούμε κάποιες από τις βασικές τους ιδιότητες. Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε και την περίφημη Εικασία του *Artin*, καθώς και την επίλυσή της στην περίπτωση $n = 1$ με τη βοήθεια των χαρακτήρων *Hecke* και της απεικόνισης

*Artin*.

Το 6ο κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη περιγραφή των γενικών γραμμικών ομάδων με συντελεστές στον δακτύλιο των *adele* καθώς και κάποιων από τις βασικές ιδιότητές τους. Οι ομάδες αυτές μας είναι απαραίτητες για να ορίσουμε την έννοια της αυτομορφικής αναπαράστασης. Την έννοια αυτή θα συναντήσουμε για πρώτη φορά στο 7ο κεφάλαιο, κυρίως μέσω της σύνδεσής της με τις κλασικές *modular* και *cusp* μορφές. Μια εναλλακτική περιγραφή της έννοιας αυτής θα συναντήσουμε στο 8ο κεφάλαιο μέσω της έννοιας της Άλγεβρας *Hecke*. Η προσέγγιση αυτή, αν και τεχνικά δυσκολότερη αυτής του προηγούμενου κεφαλαίου, έχει σαφή προτερήματα, με σημαντικότερο τον καλύτερο χειρισμό της, αλλά και τη βαθύτερη κατανόηση της με τη βοήθεια εννοιών της Θεωρίας Αναπαραστάσεων.

Η τελική διατύπωση των εικασιών, στην περίπτωση της $GL_n$, μαζί με κάποιες παρατηρήσεις και βασικά αποτελέσματα διατυπώνονται στο 9ο κεφάλαιο.

Η εργασία αυτή βασίστηκε στη δομή της από τις αντίστοιχες εισαγωγές στο πρόγραμμα *Langlands* $[Kn-1]$ και $[Ge-2]$. Το άρθρο του *Knapp* είναι τεχνικότερο αυτού του *Gelbart*, αλλά προσφέρει εκτενέστερες πληροφορίες για τα αντικείμενα με τα οποία θα ασχοληθούμε. Το άρθρο του *Gelbart* από την άλλη, αν και πιο στοιχειώδες, παρέχει μια διαισθητικότερη περιγραφή, κυρίως στην καταπληκτική εισαγωγή του, καθώς και μια γενικότερη εικόνα του αντικειμένου συνδέοντάς το με έννοιες της Θεωρίας Αριθμών.

Στο σημείο αυτό, θέλω να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου, και μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης, κ. Αριστείδη Κοντογεώργη, κ. Ιωάννη Σακελλαρίδη και κ. Μιχάλη Μαλιάκα για τη συμμετοχή τους σε αυτή αλλά και για το χρόνο που διέθεσαν για την εκπόνηση της εργασίας αυτής. Ιδιαιτέρως θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Αριστείδη Κοντογεώργη για την υπομονή, τη βοήθεια και τον χρόνο του αλλά και για τα μαθηματικά που μου δίδαξε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ιωάννη Σακελλαρίδη για την πολύτιμη βοήθεια, αλλά και τον χρόνο που διέθεσε απλόχερα κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας, καθώς και για τις γνώσεις και την υπομονή του, δίχως τις οποίες τόσο εγώ όσο και η εργασία αυτή θα ήμασταν μαθηματικά φτωχότεροι.

Γεώργιος Παπάς, Αθήνα, 2016.

## Συμβολισμός

Με $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ θα συμβολίζουμε αντίστοιχα τα σύνολα των φυσικών, ακέραιων, ρητών, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών.

Οι παραπομπές στη βιβλιογραφία θα συμβολίζονται με αγκύλες, παραδείγματος χάρη το σύμβολο $[La-1]$ θα είναι αναφορά στον τόμο:

$$S.\ Lang,\ Algebraic\ Number\ Theory,\ Springer-Verlag,\ New\ York,\ 1986.$$

# Κεφάλαιο 1

# Στοιχεία Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η περιληπτική περιγραφή της δομής του δακτυλίου των ακεραίων ενός σώματος αριθμών, δηλαδή μιας πεπερασμένης επέκτασης του $\mathbb{Q}$. Στην πορεία θα δούμε κάποιες από τις βασικότερες έννοιες της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών, που θα μας είναι απαραίτητες στη συνέχεια.

## 1.1 Ακέραια κλειστότητα

Η έννοια της ακέραιας κλειστότητας αποτελεί μια από τις βασικές ιδέες της Μεταθετικής Άλγεβρας. Σε αυτήν την παράγραφο θα κάνουμε μια περίληψη των ορισμών και των βασικών προτάσεων που σχετίζονται με αυτή.

Έστω A ένας δακτύλιος και $a$ ένα στοιχείο μιας επέκτασης $L$ του σώματος πηλίκο του A.

**Ορισμός 1.1.1** Το $a$ θα λέγεται **ακέραιο πάνω από το A** αν υπάρχει μονικό πολυώνυμο $f(x)$ με συντελεστές στο A ώστε $f(a) = 0$. Ένας δακτύλιος B που περιέχει τον A θα λέγεται **ακέραιος πάνω από τον A** αν κάθε στοιχείο του B είναι ακέραιο πάνω από τον A.

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με την ακόλουθη συνθήκη:

Υπάρχει πεπερασμένα παραγόμενο A-πρότυπο $M \subset L$ τέτοιο ώστε $aM \subset M$.

Παραθέτουμε τις βασικές προτάσεις που σχετίζονται με την έννοια της ακεραιότητας και θα μας χρειαστούν στην συνέχεια.

**Πρόταση 1.1.1** Αν A, B, $C$ είναι δακτύλιοι ώστε ο B ακέραιος είναι πάνω από τον A και ο $C$ είναι ακέραιος πάνω από τον B, τότε ο $C$ είναι ακέραιος πάνω από τον A.

Απόδειξη:[$La$-1] Πρόταση 3, Παράγραφος $(I, \S 2)$

**Πρόταση 1.1.2** Αν B είναι δακτύλιος, ο οποίος είναι ακέραιος πάνω από τον A και $\sigma$ είναι ένας ομομορφισμός του B, τότε ο $\sigma(\mathrm{B})$ είναι ακέραιος πάνω από τον $\sigma(\mathrm{A})$.

Απόδειξη:[$La$-1] Πρόταση 4, Παράγραφος $(I, \S 2)$.

**Πρόταση 1.1.3** (Ακέραια Κλειστότητα) Έστω A δακτύλιος που περιέχεται σε ένα σώμα $L$ και B το σύνολο των στοιχείων του $L$ που είναι ακέραια πάνω από το A. Τότε το σύνολο B είναι δακτύλιος και καλείται η ακέραια κλειστότητα του A στο $L$.

Απόδειξη: Αν $x$ και $y$ είναι στοιχεία του $B$ τότε υπάρχουν δύο πεπερασμένα παραγόμενα A-πρότυπα $M$ και $N$ ώστε $xM \subset M$ και $yN \subset N$. Τότε το A-πρότυπο $MN$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο και αναλλοίωτο από τα $x \pm y$ και $xy$. □

**Ορισμός 1.1.2** Ένας δακτύλιος A θα λέγεται **ακέραια κλειστός σε ένα σώμα** $L$ αν κάθε στοιχείο του $L$ που είναι ακέραιο πάνω από τον A ανήκει στον A. Ο A θα λέγεται **ακέραια κλειστός** αν είναι ακέραια κλειστός στο σώμα πηλίκο του.

**Πρόταση 1.1.4** Κάθε περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης A είναι ακέραια κλειστή.

Απόδειξη: Έστω ένα κλάσμα της μορφής $a/b$ με $a$, $b \in A$, το οποίο είναι ακέραιο πάνω από τον A, και έστω $p$ ένα πρώτο στοιχείο του A που διαιρεί τον $b$ αλλά όχι τον $a$. Θα υπάρχει εξ' ορισμού ένα $n \geq 1$ ώστε

$$(a/b)^n + a_{n-1}(a/b)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Τότε θα έχουμε

$$a^n + a_{n-1}ba^{n-1} + \ldots + a_0b^n = 0.$$

Αφού το $p$ διαιρεί το $b$, θα διαιρεί και το $a^n$, και άρα και το $a$, και καταλήγουμε σε άτοπο. □

**Θεώρημα 1.1.1** Έστω A δακτύλιος κυρίων ιδεωδών, και $L$ πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του σώματος πηλίκο του, βαθμού $n$. Έστω B η ακέραια κλειστότητα του A στο $L$, τότε το B είναι ελέυθερο A-πρότυπο τάξης $n$.

Απόδειξη:[$La$-1] Θεώρημα 1, Παράγραφος $(I, \S2)$.

**Παρατήρηση 1.1.1** Εφαρμόζοντας το παραπάνω Θεώρημα για τον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, συμπεραίνουμε ότι η ακέραια κλειστότητα του $\mathbb{Z}$ σε ένα σώμα αριθμών $L$, δηλαδή μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$, θα είναι ένας δακτύλιος, ο οποίος θα λέγεται δακτύλιος των ακεραίων στο σώμα $L$ και θα συμβολίζεται $O_L$. Τέλος ο δακτύλιος $O_L$ θα είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο τάξης $n$.

## 1.2 Πρώτα ιδεώδη

Τα πρώτα ιδεώδη κατάλληλων δακτυλίων θα είναι ένα από τα κυριότερα αντικείμενα μελέτης μας σε όσα θα ακολουθήσουν. Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε κάποιους από τους βασικούς ορισμούς και προτάσεις που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

Έστω A και B δακτύλιοι με $B \supset A$, και $p$, $q$ πρώτα ιδεώδη των A και B αντίστοιχα.

**Ορισμός 1.2.1** Λέμε ότι το $q$ είναι **πάνω από το $p$** αν $q \cap A = p$, τότε γράφουμε $q|p$.

**Παρατήρηση 1.2.1** Στην κατάσταση του παραπάνω ορισμού, η ένθεση $A \hookrightarrow B$ θα επάγει μια ένθεση $A/p \hookrightarrow B/q$ στους αντίστοιχους δακτυλίους πηλίκων. Ακόμα, θα έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1} & A/p \\ {\scriptstyle 2}\big\downarrow & & {\scriptstyle 2}\big\downarrow \\ B & \xrightarrow{1} & B/q \end{array},$$

όπου στο 1 θα είναι οι φυσικοί επιμορφισμοί και στο 2 οι παραπάνω ενθέσεις.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι αν ο B είναι ακέραιος πάνω από τον A, τότε και ο $B/q$ θα είναι ακέραιος πάνω από τον $A/p$.

Θα μας ενδιαφέρει κυρίως η περίπτωση που ο δακτύλιος $B$ είναι ακέραιος πάνω από τον $A$.

**Πρόταση 1.2.1** Έστω A δακτύλίος, $p$ ένα πρώτο ιδεώδες του και B ένας δακτύλιος που περιέχει τον A, ο οποίος είναι ακέραιος πάνω από τον A. Τότε $p*B \neq B$ και υπάρχει πρώτο ιδεώδες $q$ του B πάνω από το $p$.

Απόδειξη:[*La*-1] Πρόταση 9, Παράγραφος $(I, \S 3)$.

**Πρόταση 1.2.2** Έστω A υποδακτύλιος του B, και B ακέραιος πάνω από τον A. Έστω ακόμα $q$ πρώτο ιδεώδες του B πάνω από το πρώτο ιδεώδες $p$ του A. Τότε το $q$ είναι μέγιστο αν και μόνο αν το $p$ είναι μέγιστο.

Απόδειξη: Αν το $p$ είναι μέγιστο τότε το $A/p$ θα είναι σώμα. Αν $x \in B/q$ τότε θα είναι ακέραιο πάνω από το $A/p$, και επομένως από τη Θεωρία *Galois* το σώμα $A/p[x]$ θα περιέχεται στο $B/q$. Επομένως, το $B/q$ είναι σώμα και άρα το $q$ θα είναι μέγιστο.

Αντίστροφα, αν το $q$ είναι μέγιστο και το $p$ όχι, τότε ο δακτύλιος $A/p$ θα περιέχει κάποιο μη-μηδενικό μέγιστο ιδεώδες $m$, το οποίο θα έχει, λόγω της προγούμενης Πρότασης, από πάνω του κάποιο μη-μηδενικό πρώτο ιδεώδες του $B/q$, το οποίο είναι άτοπο αφού το $B/q$ είναι σώμα. □

### 1.2.1 Κινέζικο θεώρημα υπολοίπων

Το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων της κλασσικής Θεωρίας Αριθμών έχει μια φυσική γενίκευση στην περίπτωση των πρώτων ιδεωδών. Συγκεκριμένα θα έχουμε το εξής:

**Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων** Έστω $A$ δακτύλιος και $a_1, \ldots, a_n$ ιδεώδη του $A$ ώστε $a_i + a_j = A$, για κάθε $i \neq J$. Αν ακόμα δίνονται $x_1, \ldots, x_n \in A$, τότε θα υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x \equiv x_i (mod\ a_i)$, για κάθε $i$.

Απόδειξη: [*La*-1] Παράγραφος $(I, \S 4)$.

## 1.3 Δακτύλιοι του *Dedekind* και κλασματικά ιδεώδη

Σ' αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την έννοια των κλασματικών ιδεωδών, που αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας των ιδεωδών ενός δακτυλίου, καθώς και με τους δακτυλίους του *Dedekind*. Τα ιδεώδη ενός δακτυλίου του *Dedekind* απολαμβάνουν καλές ιδιότητες, που θυμίζουν τους ακεραίους αριθμούς. Επίσης, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο δακτύλιος των ακεραίων κάθε σώματος αριθμών είναι δακτύλιος του *Dedekind*.

Ξεκινάμε δίνοντας κάποιους βασικούς ορισμούς.

**Ορισμός 1.3.1** Έστω δακτύλιος $O$ με σώμα πηλίκο $K$. Ένα **κλασματικό ιδεώδες** του δακτυλίου $O$ είναι ένα $O$-πρότυπο $a$ που περιέχεται στο $K$ ώστε υπάρχει $c \neq 0$ στο $O$ ώστε $c \cdot a \subset O$.

**Ορισμός 1.3.2** Ένας ακέραια κλειστός δακτύλιος της *Noether* του οποίου κάθε μη-μηδενικό πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο θα λέγεται **δακτύλιος του *Dedekind***.

**Θεώρημα 1.3.1** Έστω $O$ ένας δακτύλιος του *Dedekind*. Τότε κάθε ιδεώδες του $O$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών και το σύνολο των μη-μηδενικών κλασματικών ιδεωδών του $O$ αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό προτύπων.

Απόδειξη:[*La*-1] *Theorem* 2, Παράγραφος $(I, \S 6)$.

**Παρατήρηση 1.3.1** Ο δακτύλιος των ακεραίων $O_K$ ενός σώματος αριθμών $K$ ικανοποιεί τις συνθήκες για να είναι δακτύλιος του *Dedekind*. Η ομάδα των μη-μηδενικών κλασματικών ιδεωδών του $O_K$ θα συμβολίζεται με $I_K$.

**Ορισμός 1.3.3** Έστω Α ένας δακτύλιος του *Dedekind* με σώμα πηλίκων $K$. Ένα κλασματικό ιδεώδες του Α θα λέγεται **κύριο** αν είναι της μορφής $a \cdot A$ για κάποιο μη-μηδενικό $a \in K$. Η ομάδα πηλίκο των κλασματικών ιδεωδών του Α *modulo* την ομάδα των κύριων κλασματικών ιδεωδών του Α θα λέγεται **ομάδα κλάσεων ιδεωδών του Α**.

## 1.4 Δακτύλιοι διακριτής εκτίμησης

Οι έννοιες της διακριτής εκτίμησης και του αντίστοιχου δακτυλίου είναι απαραίτητες για τη μελέτη των Τοπικών Σωμάτων, τα οποία θα αποτελέσουν ένα από τα βασικά αντικείμενα με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

**Ορισμός 1.4.1** Ένας δακτύλιος Α κυρίων ιδεωδών, ο οποίος έχει μοναδικό μη-μηδενικό πρώτο ιδεώδες $m$, θα λέγεται **δακτύλιος διακριτής εκτίμησης**.

**Παρατηρήσεις 1.4.1** 1. Έστω π ένας γεννήτορας του μοναδικού αυτού μη-μηδενικού πρώτου ιδεώδους $m$. Τότε το π θα είναι το μοναδικό πρώτο στοιχείο του δακτυλίου, ως προς πολλαπλασιασμό με κάποιο αντιστρέψιμο στοιχειό. Επομένως η παραγοντοποίηση των στοιχείων του Α θα έχει την εξής απλούστατη μορφή: κάθε στοιχείο $a \in A$ θα γράφεται στη μορφή $a = u \cdot \pi^r$ για κάποιο $u$ αντιστρέψιμο του Α και κάποιο ακέραιο $r \geq 0$.

2. Κάθε δακτύλιος διακριτής εκτίμησης είναι δακτύλιος του *Dedekind* και κάθε δακτύλιος του *Dedekind* που έχει μοναδικό μέγιστο ιδεώδες είναι δακτύλιος διακριτής εκτίμησης. Επίσης, παίρνοντας την τοπικοποίηση $A_p$, ενός δακτυλίου του *Dedekind* Α ως προς ένα μέγιστο ιδεώδες του $p$, λαμβάνουμε ένα δακτύλιο διακριτής εκτίμησης. Το γεγονός αυτό είναι χρήσιμο στην απόδειξη θεωρημάτων για του δακτυλίους του *Dedekind*, καθώς μέσω της τοπικοποίησης αναγόμαστε στην απλούστερη περίπτωση της απόδειξης του αποτελέσματος για δακτυλίους διακριτής εκτίμησης.

3. Εφόσον κάθε ιδεώδες ενός δακτυλίου διακριτής εκτίμησης είναι κύριο, θα είναι υποχρεωτικά κάποια δύναμη του μέγιστου ιδεώδους $m$.

**Πρόταση 1.4.1** Έστω Α τοπικός δακτύλιος, $M$ ένα ελεύθερο πρότυπο τάξης $n$ πάνω από τον Α, και $p$ το μέγιστο ιδεώδες του Α. Τότε το $M/p \cdot M$ θα είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $n$ πάνω από το σώμα $A/p$.

Απόδειξη: Αν $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι βάση του $M$ πάνω από το $A$, ώστε $M = \sum Ax_i$, τότε $M/p{\cdot}M \cong \sum(A/p)\overline{x}_i$, όπου $\overline{x_i}$ η κλάση του $x_i$ *mod* $p$.

Το δεξί μέλος θα είναι ένας $n-$διάστατος $A/p-$διανυσματικός χώρος. □

Θεωρούμε τώρα έναν δακτύλιο του *Dedekind* Α με σώμα πηλίκο $K$, μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση $L$ του $K$, καθώς και την ακέραια κλειστότητα Β του Α στο σώμα $L$.

Έστω $p$ ένα πρώτο ιδεώδες του Α, τότε το $pB$ είναι ιδεώδες του Β και άρα θα γράφεται ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών του, δηλαδή $pB = {q_1}^{e_1} \cdots {q_t}^{e_t}$, όπου $q_i$ είναι πρώτα ιδεώδη του Β και $e_i \geq 1$ για κάθε $i$. Τα πρώτα ιδεώδη $q_i$ θά είναι ακριβώς τα πρώτα ιδεώδη $q$ του Β με την ιδιότητα

$q|p$.

**Ορισμός 1.4.2** 1. Ο φυσικός αριθμός $e_i$ καλείται **δείκτης διακλάδωσης του $q_i$** πάνω από το $p$, και ορισμένες φορές συμβολίζεται και ως $e_i = e(q_i/p)$.

2. Ορίζουμε τον **βαθμό αδρανείας του $q$** πάνω από το $p$, ο οποίος συμβολίζεται $f_q = f(q/p)$, να είναι ο βαθμός της επέκτασης του σώματος $B/q$ πάνω από το σώμα $A/p$.

Οι παραπάνω ποσότητες συμπεριφέρονται καλά σε διαδοχικές επεκτάσεις του σώματος $K$. Συγκεκριμένα, ισχύει η εξής:

**Πρόταση 1.4.2** Έστω A δακτύλιος του *Dedekind* με σώμα πηλίκο $K$ και $K \subset E \subset L$ δύο πεπερασμένες διαχωρίσιμες επεκτάσεις και $A \subset B \subset C$ ο αντίστοιχος πύργος ακεραίων κλειστοτήτων του A στα $E$ και $L$. Έστω $p$ ένα πρώτο ιδεώδες του A, $q$ ένα πρώτο ιδεώδες του B με $q|p$ και $r$ ένα πρώτο ιδεώδες του $C$ με $r|q$. Τότε θα ισχύουν $e(r/p) = e(r/q)e(q/p)$ και $f(r/p) = f(r/q)f(q/p)$.

Απόδειξη:[*La*-1] *Prop.* 20, Παράγραφος $(I, \S 7)$.

Τα $e_q$ και $f_q$ συνδέονται με την διάσταση της επέκτασης $L/K$ με τον αλγεβρικό τύπο που μας δίνει η ακόλουθη:

**Πρόταση 1.4.3** Έστω A δακτύλιος του *Dedekind*, με σώμα πηλίκο $K$, $L$ μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του $K$ και B η ακέραια κλειστότητα του A στο $L$. Εστω ακόμη $p$ ένα πρώτο ιδεώδες του A. Τότε $[L : K] = \sum_{q|p} e_q f_q$, όπου το άθροισμα είναι πάνω στα πρώτα ιδεώδη του B που είναι πάνω από το $p$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το $A$ είναι δακτύλιος διακριτής εκτίμησης και στη συνέχεια θα έχουμε έναν ισομορφισμό $B/pB \cong \prod B/q_i^{e_i}$.

Η πρόταση μας έπεται συγκρίνοντας τις διαστάσεις των παραπάνω $A/p-$διανυσματικών χώρων. □

Έστω A, $K$, $L$ και B όπως παραπάνω. Έστω ακόμα I(A) και I(B) οι ομάδες των κλασματικών ιδεωδών των A και B αντίστοιχα. Υπάρχει φυσικός μονομορφισμός $I(A) \to I(B)$, με $a \mapsto aB$. Θέλουμε να ορίσουμε έναν ομομορφισμό στην αντίθετη κατεύθυνση.

**Ορισμός 1.4.3** Ορίζουμε τη **νόρμα** ενός πρώτου ιδεώδους $q$ του B να είναι $N_K^L(q) = p^{f_q}$, όπου $p$ είναι το πρώτο ιδεώδες του A με $p = q \cap A$. Στην συνέχεια επεκτείνουμε την συνάρτηση αυτή πολλαπλασιαστικά στα κλασματικά ιδεώδη του B.

**Παρατήρηση 1.4.2** Από τον τύπο της Πρότασης 1.4.2 για τον βαθμό αδρανείας έπεται ότι για κάθε $c \in I(C)$ ισχύει $N_K^L(c) = N_K^E N_E^L(c)$.

Βασιζόμενοι στην προηγούμενη πρόταση έχουμε το εξής προφανές:

**Πόρισμα 1.4.1** Για κάθε $a \in I(A)$ ισχύει $N_K^L(aB) = a^{[L:K]}$, όπου $[L : K]$ ο βαθμός της επέκτασης σωμάτων $L/K$.

## 1.5 Επεκτάσεις *Galois* και πρώτα ιδεώδη

Εάν θεωρήσουμε έναν ακέραια κλειστό δακτύλιο A με σώμα πηλίκων $K$, και $L$ μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* αυτού, τότε η ομάδα *Galois* της επέκτασης αυτής, όπως θα δούμε, δρα στο σύνολο των πρώτων ιδεωδών της ακεραίας κλειστότητας του A στο $L$ που βρίσκονται πάνω από ένα πρώτο ιδεώδες $p$ του A. Η δράση αυτή μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την παραγοντοποίηση του ιδεώδους $p \cdot B$ σε γινόμενο πρώτων ιδεωδών.

**Πρόταση 1.5.1** Έστω A ακέραια κλειστός δακτύλιος με σώμα πηλίκο $K$, και $L$ μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* του $K$ με ομάδα *Galois* $G$. Έστω $p$ ένα μέγιστο ιδεώδες του A και $q$, $r$ πρώτα ιδεώδη της ακέραιας κλειστότητας του A στο $L$ που είναι πάνω από το $p$. Τότε υπάρχει $\sigma \in G$ τέτοιο ώστε $\sigma(q) = r$.

Απόδειξη: Έπεται, με εις άτοπο απαγωγή, από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων και τις ιδιότητες της νόρμας ενός στοιχείου σε επεκτάσεις *Galois*.

**Παρατήρηση 1.5.1** Με χρήση της έννοιας της τοπικοποίησης, η υπόθεση ότι το $p$ είναι μέγιστο μπορεί να αντικατασταθεί από την γενικότερη υπόθεση το $p$ να είναι απλά πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου A.

**Πόρισμα 1.5.1** Έστω A ακέραια κλειστός δακτύλιος με σώμα πηλίκο $K$, $E$ μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του $K$ και B η ακέραια κλειστότητα του A στο $E$. Έστω $p$ ένα μέγιστο ιδεώδες του A, τότε υπάρχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος πρώτα ιδεώδη του B που είναι πάνω από το A.

Απόδειξη: Έστω $L$ η μικρότερη επέκταση *Galois* που περιέχει την $E$, $q_1 \neq q_2$ πρώτα ιδεώδη του $E$ που είναι πάνω από το $p$ και $r_1$, $r_2$ πρώτα ιδεώδη της ακέραιας κλειστότητας του A στο $L$ που είναι πάνω από τα αντίστοιχα $q_i$. Αφού $q_1 \neq q_1$ θα ισχύει $r_1 \neq r_2$, και άρα αρκεί να αποδείξουμε το πόρισμα για πεπερασμένες επεκτάσεις *Galois*.

Στην περίπτωση όμως αυτή το αποτέλεσμα έπεται από την προηγούμενη πρόταση, αφού θα έχουμε το πολύ $|Gal(L/K)|$ το πλήθος διαφορετικά πρώτα ιδεώδη πάνω από το $p$.
□

Έστω A, B, $K$ και $L$ όπως στην προήγουμενη πρόταση. Τότε για κάθε $\sigma \in G$ θα ισχύει $\sigma(B) = B$. Θεωρούμε $p$ ένα μέγιστο ιδεώδες του A και $q$ μέγιστο ιδεώδες του B που είναι πάνω από το $p$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την υποομάδα $G_q$ της $G$ που αποτελείται από τα $\sigma \in G$ που είναι τέτοια ώστε $\sigma(q) = q$. Κάθε στοιχείο της $G_q$ δρα με φυσικό τρόπο στο σώμα πηλίκο $B/q$ και διατηρεί σταθερά τα στοιχειά του σώματος $A/p$. Επομένως, επάγεται μια απεικόνιση $\sigma \longmapsto \overline{\sigma}$ της $G_q$ στην ομάδα των αυτομορφισμών του $B/q$ πάνω από το $A/p$ η οποία είναι ομομορφισμός ομάδων. Η ομάδα $G_q$ καλείται **ομάδα ανάλυσης του** $q$.

**Παρατήρηση 1.5.2** Έστω $G = \bigcup \sigma_j G_q$ να είναι μια γραφή σε ξένα σύμπλοκα της $G_q$ στην $G$. Τότε τα πρώτα ιδεώδη του $B$ που είναι πάνω από το $p$ θα είναι ακριβώς τα $\sigma_j q$.

Ο παραπάνω ομομορφισμός ομάδων είναι στην πραγματικότητα επιμορφισμός, χάρη στην εξής:

**Πρόταση 1.5.2** Έστω A ακέραια κλειστός δακτύλιος με σώμα πηλίκο $K$, $L$ μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* του $K$ με ομάδα *Galois* $G$ και B η ακέραια κλειστότητα του A στο $L$. Έστω ακόμη $p$ ένα μέγιστο ιδεώδες του A και $q$ ένα μέγιστο ιδεώδες του B που είναι πάνω από το $p$. Τότε το $B/q$ είναι κανονική επέκταση του $A/p$ και η απεικόνιση $\sigma \longmapsto \overline{\sigma}$ επάγει επιμορφισμό της ομάδας $G_q$ με την ομάδα *Galois* του $B/q$ πάνω από το $A/p$.

Απόδειξη:[*La*-1] Πρόταση 14, Παράγραφος $(I, \S 5)$.

**Παρατήρηση 1.5.3** Η παραπάνω πρόταση ισχύει όχι μόνο για μέγιστα ιδεώδη, αλλά και για πρώτα ιδεώδη, περνώντας πάλι στην τοπικοποίηση των δακτυλίων.

Ο πυρήνας της απεικόνισης $G_q \to \overline{G(q)} = Gal((B/q)/(A/p))$ ονομάζεται **ομάδα αδρανείας του** $q$ και συμβολίζεται $I_q$.

Θεωρούμε τώρα ένα σώμα αριθμών $k$ και $K$ μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* του $k$ με ομάδα *Galois* $G$, καθώς και πρώτα ιδεώδη $p$ και $q$ των δακτυλίων των ακεραίων $O_k$ και $O_K$ αντίστοιχα, ώστε $q|p$. Τότε το σώμα $O_k/p$ θα είναι πεπερασμένο και συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του με $Np$.

Από την Θεωρία *Galois* πεπερασμένων σωμάτων γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικός αυτομορφισμός του $O_K/q$ πάνω από το $O_k/p$ ο οποίος παράγει την ομάδα *Galois* της επέκτασης αυτής, η οποία είναι κυκλική. Ο αυτομορφισμός αυτός $\overline{\sigma}$ θα δρα στα $x \in O_K/q$ ως εξής:

$$x \mapsto x^{Np}.$$

Από την προηγούμενη πρόταση θα υπάρχει κάποιος $\sigma \in G$ ώστε ο $\overline{\sigma}$ να επάγεται από τον $\sigma$. Ο $\overline{\sigma}$ όμως θα επάγεται και από κάθε στοιχείο του συνόλου $\sigma I_q$.

**Ορισμός 1.5.1** Κάθε στοιχείο του παραπάνω συνόλου θα λέγεται αυτομορφισμός *Frobenius* του $q$ και θα συμβολίζεται $(q, K/k)$ ή $Fr_q$.

**Παρατηρήσεις 1.5.4** 1. Αν η ομάδα αδρανείας $I_q$ είναι τετριμμένη τότε ο $(q, K/k)$ ορίζεται μονοσήμαντα ως στοιχείο της ομάδας $G_q$.

2. Αν $r$ είναι ένα άλλο πρώτο ιδεώδες του $O_K$ με $r|p$, και $\tau \in G$ τέτοιο ώστε $\tau(q) = r$, τότε η ομάδα ανάλυσης του $r$, $G_r$ θα δίνεται από τον τύπο $G_r = G_{\tau q} = \tau G_q \tau^{-1}$, ενώ αντίστοιχος τύπος θα ισχύει και για την ομάδα αδρανείας του $r$, και τον αυτομορφισμό *Frobenius* του $r$ που θα δίνεται από $(r, K/k) = (\tau q, K/k) = \tau(q, K/k)\tau^{-1}$.

3. Αν η επέκταση $K/k$ είναι αβελιανή και η ομάδα αδρανείας $I_q$ είναι τετριμμένη για κάποιο $q|p$, και άρα, λόγω της παραπάνω παρατήρησης, για όλα τα πρώτα με αυτή την ιδιότητα, έπεται ότι στο πρώτο ιδεώδες $p$ του $O_k$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό στοιχείο της $G$, που θα ανήκει στην $G_q$, το οποίο θα καλείται αυτομορφισμός *Artin* του $p$ στην $G$ και θα συμβολίζεται $\sigma = (p, K/k)$. Ο αυτομορφισμός αυτός θα ικανοποιεί την ισοδυναμία $\sigma(a) \equiv a^{Np}(mod q)$, για κάθε $a \in O_K$.

Επιστρέφουμε τώρα στην κατάσταση της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή θεωρούμε έναν δακτύλιο του *Dedekind* με σώμα πηλίκο $K$, $L$ μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του $K$ και B την ακέραια κλειστότητα του A στο $L$. Έστω ακόμη ένα πρώτο ιδεώδες $p$ του A το οποίο παραγοντοποιείται ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών του B ως εξής $pB = {q_1}^{e_1} \cdots {q_r}^{e_r}$. Συνδυάζοντας τις προτάσεις αυτής και της προηγούμενης παραγράφου έχουμε τα εξής δύο πορίσματα:

**Πόρισμα 1.5.2** Υποθέτουμε ότι η επέκταση $L/K$ είναι *Galois*. Τότε όλα τα $e_q$ είναι ίσα με τον ίδιο αριθμό $e$ και όλα τα $f_q$ είναι ίσα με τον ίδιο αριθμό $f$, για κάθε $q|p$. Επίσης, αν $pB = {q_1}^e \cdots {q_r}^e$, τότε ισχύει $[L : K] = efr$.

Απόδειξη: Όλα τα $q$ που είναι πάνω από το $p$ θα είναι συζυγή μεταξύ τους. Επομένως, από τη μοναδικότητα της γραφής του $pB$ σε γινόμενο πρώτων ιδεωδών του $B$ θα έχουμε ότι όλοι οι δείκτες διακλάδωσης θα είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λόγω της συζυγίας θα έχουμε ότι οι βαθμοί αδρανείας θα είναι ίσοι μεταξύ τους, για παράδειγμα αν $\sigma(q_1) = q_2$, τότε η απεικόνιση

$$B \xrightarrow{\sigma} B \to B/q_2$$

ϑα έχει πυρήνα $q_1$ και ϑα επάγει ισομορφισμό $B/q_1$ και $B/q_2$, και επομένως ισότητα των $f_1$ και $f_2$.
$\square$

**Πόρισμα 1.5.3** Υποθέτουμε πάλι ότι η επέκταση $L/K$ είναι *Galois* με ομάδα $G$. Έστω, $q$ ένα πρώτο ιδεώδες του B που είναι πάνω από το ιδεώδες $p$ του A. Τότε $N_K^L(q) = \prod_{\sigma\in G} \sigma q = (q_1 \cdots q_r)^{ef}$, όπου $e$, $f$, $r$ είναι όπως στο προηγούμενο πόρισμα. Τέλος, η τάξη της ομάδας ανάλυσης $G_q$ του $q$ είναι ίση με $ef$, ενώ η τάξη της ομάδας αδρανείας $I_q$ είναι ίση με $e$.

Απόδειξη: Άμεση από την Πρόταση 1.5.2 και την μεταθετικότητα της δράσης της ομάδας *Galois*.

# Κεφάλαιο 2

# $p$-αδικοί Αριθμοί και P-αδικά Σώματα

Οι $p-$αδικοί αριθμοί και τα $P-$άδικά σώματα είναι δύο από τις βασικές έννοιες που θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τους βασικούς ορισμούς και προτάσεις αυτών των εννοιών. Απώτερος σκοπός μας είναι η περιγραφή των απολύτων τιμών, ή νορμών, στα σώματα αριθμών.

## 2.1 $p$-αδικοί αριθμοί

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τις $p-$αδικές νόρμες στο σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών, καθώς και τα σώματα των $p-$αδικών αριθμών.

Αρχικά, θεωρούμε έναν πρώτο αριθμό $p$, και έστω $a$ ένας ακέραιος αριθμός. Ορίζουμε $ord_p a$ τον μέγιστο μη-αρνητικό $m$ ώστε το $p^m$ να διαιρεί το $a$.

Έστω τώρα $x \in \mathbb{Q}$ με $x = a/b$ όπου $a, b \in \mathbb{Z}$ και είναι πρώτοι μεταξύ τους. Ορίζουμε $ord_p x$ να είναι η διαφορά $ord_p a - ord_p b$.

**Ορισμός 2.1.1** Η ***p*−αδική νόρμα** στο $\mathbb{Q}$ ορίζεται να είναι η συνάρτηση $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ με

$$|x|_p = \begin{cases} 1/p^{ord_p x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

**Πρόταση 2.1.1** Η συνάρτηση $|\cdot|_p$ είναι νόρμα στο $\mathbb{Q}$.
Απόδειξη: Άμεση από τους ορισμούς.

Οι $p-$αδικές νόρμες επάγουν διαφορετικές γεωμετρικές και αναλυτικές ιδιότητες στο $\mathbb{Q}$ από τη συνήθη Ευκλείδεια νόρμα, την οποία θα συμβολίζουμε με $|\cdot|_\infty$. Ο λόγος για αυτό είναι ότι είναι μη-Αρχιμήδειες, δηλαδή ικανόποιούν την ανισότητα $|x+y|_p \leq max(|x|_p, |y|_p)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}$.

Το επόμενο θέμα μας είναι η ταξινόμηση των νορμών στο σώμα των ρητών αριθμών. Υπενθυμίζουμε ότι δύο μετρικές $d_1$, $d_2$ σε ένα σύνολο $X$ λέγονται **ισοδύναμες** αν μια ακολουθία είναι *Cauchy* ως προς την $d_1$ αν και μόνο αν είναι *Cauchy* ως προς την $d_2$, ενώ δύο νόρμες είναι ισοδύναμες αν επάγουν ισοδύναμες μετρικές.

Ακόμα, ορίζουμε την τετριμμένη νόρμα $|\cdot|_0$ στο $\mathbb{Q}$ να είναι τέτοια ώστε $|0|_0 = 0$ και $|x|_0 = 1$ αν $x \neq 0$.

Για τις νόρμες του $\mathbb{Q}$, η ταξινόμησή τους οφείλεται στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 2.1.1** (*Ostrowski*) Κάθε μη-τετριμμένη νόρμα στο $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμη με την $|\cdot|_p$ όπου $p$ είναι είτε κάποιος πρώτος αριθμός είτε $p = \infty$.

Απόδειξη: Περίπτωση 1η: υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $|n| > 1$. Έστω $n_0$ ο ελάχιστος φυσικός με αυτή την ιδιότητα. Τότε θα υπάρχει κάποιος $a \in \mathbb{R}^+$ με $|n_0| = n_0^a$.

Γράφοντας ένα τυχαίο $n \in \mathbb{N}$ με βάση το $n_0$, δηλαδή στη μορφή

$$n = a_0 + a_1 n_0 + \ldots + a_r n_0^r,$$

με $0 \leq a_i \leq n_0$ και $a_r \neq 0$, θα έχουμε την ανισότητα

$$|n| \leq n^a [\sum (1/n_0^a)^i].$$

Η ποσότητα στις αγκύλες θα φράσσεται από μια σταθερά $C$, και άρα θα έχουμε $|n| \leq Cn^a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Βάζοντας $n^N$ στη θέση του $n$, παίρνοντας $N-$οστές ρίζες και αφήνοντας το $N \to \infty$ προκύπτει ότι $|n| \leq n^a$, για κάθε $n$.

Με κατάλληλη χρήση της τριγωνικής ανισότητας μπορούμε να πάρουμε και την αντίστροφη ανισότητα και καταλήγουμε ότι $|n| = n^a$ για κάθε $n$. Κάθε τέτοια νόρμα αποδεικνύεται ότι θα είναι ισοδύναμη της $|\cdot|_\infty$[1].

Περίπτωση 2η: Υποθέτουμε ότι $|n| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε $n_0$ τον ελάχιστο φυσικό με $|n < 1|$, ο οποίος θα υπάρχει αφού η νόρμα μας είναι μη-τετριμμένη.

Από την επιλογή του ο $n_0$ θα είναι υποχρεωτικά ένας πρώτος αριθμός $p$.

Αν $q$ είναι ένας άλλος πρώτος αριθμός, τότε $|q| = 1$. Σε διαφορετική περίπτωση επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|q|^N < 1/2$ και $M$ ώστε $|p|^M < 1/2$. Τότε θα υπάρχουν $x$ και $y$ ακέραιοι ώστε $xp^M + yq^N = 1$.

Στην περίπτωση αυτή θα ισχύει $1 = |xp^M + yq^N| \leq |x||p|^M + |y||q|^N$. Αλλά $|x|$, $|y| \leq 1$ και λόγω των παραπάνω υποθέσεων καταλήγουμε στην αντίφαση $1 < 1$.

Αν θέσουμε $\rho = |p|$ τότε για κάθε $a \in \mathbb{Q}$, από τις ιδιότητες της νόρμας και των φυσικών αριθμών προκύπτει ότι $|a| = \rho^{ord_p(a)}$.

Κάθε τέτοια νόρμα αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη της $p-$αδικής[2]. □

### 2.1.1 Το σώμα των $p-$αδικών αριθμών $\mathbb{Q}_p$

Όπως και στην περίπτωση της συνήθους νόρμας, έτσι και στη περίπτωση των $p-$αδικών νορμών, το σώμα $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρες ως προς κάποια από αυτές. Ακολουθώντας τη διαδικασία της πλήρωσης καταλήγουμε στο σώμα $\mathbb{Q}_p$ των $p-$αδικών αριθμών.

Η διαδικασία αυτή είναι η ίδια που ακολουθεί κανείς όταν θέλει να κατασκευάσει το σώμα των πραγματικών αριθμών από το σώμα των ρητών. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τις ακολουθίες $Cauchy$ στο $\mathbb{Q}$ ως προς την $p-$αδική νόρμα. Αυτές θα σχηματίζουν ένα δακτύλιο, στον οποίο οι μηδενικές ακολουθίες θα σχηματίζουν ένα μέγιστο ιδεώδες. Παίρνοντας το πηλίκο του δακτυλίου αυτού ως προς το μέγιστο ιδεώδες αυτό καταλήγουμε στο σώμα $\mathbb{Q}_p$ των $p-$αδικών αριθμών.

Το σώμα $\mathbb{Q}$ εμφυτεύεται με φυσικό τρόπο στο $\mathbb{Q}_p$, και είναι πυκνό σε αυτό, αφού μπορούμε να το ταυτίσουμε με τις σταθερές ακολουθίες. Τέλος, η πλήρωση του δακτυλίου των ακεραίων $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}_p$ θα συμβολίζεται με $\mathbb{Z}_p$ και είναι μια ακεραία περιοχή με μοναδικό μέγιστο ιδεώδες το $p\mathbb{Z}_p$.

**Παρατήρηση 2.1.1** Από την μη-αρχιμήδεια ιδιότητα της $p-$αδικής νόρμας και τη διαδικασία της πλήρωσης προκύπτει ότι θα ισχύει $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1\}$ και $p\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p < 1\}$.

[1] $[Ko-2]$ $Ex.$ 8 § 1.2
[2] $[Ko-2]$ $Ex.$ 5 § 1.2

Μια εναλλακτική περιγραφή του $\mathbb{Q}_p$ μπορεί να γίνει ορίζοντας πρώτα τον δακτύλιο $\mathbb{Z}_p$ ως το αντίστροφο όριο $\underset{\leftarrow}{lim}\mathbb{Z}/(p^n)$. Το αντίστροφο όριο επάγει τοπολογία σε αυτόν τον δακτύλιο που θα είναι συμπαγής και θα έχει μοναδικό πρώτο μέγιστο ιδεώδες το $p\mathbb{Z}_p$. Το $\mathbb{Q}_p$ σε αυτή την περίπτωση περιγράφεται αλγεβρικά ως το σώμα κλασμάτων του $\mathbb{Z}_p$, ή ισοδύναμα ως $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Q}$ ή ως $\bigcup_{n\geq 0} p^{-n}\mathbb{Z}_p$.

Η τελευταία περιγραφή μας δίνει και πληροφορίες για την τοπολογία μας, αφού κάθε $p^{-n}\mathbb{Z}_p$ θα είναι ανοιχτό και ισόμορφο του $\mathbb{Z}_p$.

## 2.2 Πληρώσεις

Έχοντας δει τους βασικούς ορισμούς για τις $p-$αδικές νόρμες θέλουμε να γενικεύσουμε την παραπάνω εικόνα σε γενικότερα σώματα. Συγκεκριμένα, θέλουμε να εξετάσουμε τις νόρμες, ή απόλυτες τιμές, των σωμάτων αριθμών.

Ξεκινάμε με κάποιους ορισμούς.

**Ορισμός 2.2.1** Έστω K σώμα. Μια **απόλυτη τιμή στο K** θα είναι μια συνάρτηση $|\cdot|_u : K \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω υποθέσεις:

1. Ισχύει $|x|_u \geq 0$ για κάθε $x \in K$ και $|x|_u = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

2. Για κάθε $x, y \in K$ ισχύει $|xy|_u = |x|_u|y|_u$.

3. $|x+y|_u \leq |x|_u + |y|_u$, για κάθε $x, y \in K$.

Στην περίπτωση που η απόλυτη τιμή αντί για την 3 ικανοποιεί την

4. $|x+y|_u \leq max(|x|_u, |y|_u)$ για κάθε $x, y \in K$,

τότε θα λέμε ότι η $|\cdot|_u$ είναι **εκτίμηση**, ή ότι είναι **μη-αρχιμήδεια**.

Τέλος, δύο απόλυτες τιμές θα λέγονται **ισοδύναμες** αν επάγουν την ίδια τοπολογία στο σώμα K.

Σημαντικό στη μελέτη μας είναι το ακόλουθο:

**Λήμμα 2.2.1** Έστω $k$ σώμα που είναι πλήρες ως προς μια απόλυτη τιμή και $V$ ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω από το $k$. Τότε όλες οι νόρμες στον $V$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη: Αποδεικνύεται ότι κάθε νόρμα είναι ισοδύναμη της νόρμας *supremum*. Για περισσότερα παραπέμπουμε στα αντίστοιχα Κεφάλαια των $[La-1]$ και $[La-2]$.

Βασιζόμενοι στο παραπάνω λήμμα έχουμε άμεσα την ακόλουθη:

**Πρόταση 2.2.1** Αν το K είναι πλήρες ως προς μια απόλυτη τιμή και E μια πεπερασμένη επέκταση του K. Τότε υπάρχει μοναδική επέκταση της απόλυτης τιμής του K σε απόλυτη τιμή του E. Επίσης, αν $\sigma$ είναι ένας ισομορφισμός του E πάνω από το K τότε $|\sigma a| = |a|$ για κάθε $a \in E$.

Θεωρούμε τώρα ένα σώμα αριθμών K με δακτύλιο ακεραίων A και $P$ ένα πρώτο ιδεώδες του A. Έστω ακόμα $\pi \in P \backslash P^2$ και $p$ ο πρώτος που παράγει το ιδεώδες $P \cap \mathbb{Z}$. Τότε θα ισχύει $p = \pi^e u$, όπου $u$ είναι κάποιο αντιστρέψιμο στοιχείο του $P$, δηλαδή ένα $u \in A \backslash P$, και $e \in \mathbb{N}$. Με τη βοήθεια των παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε μια απόλυτη τιμή στο K που καθορίζεται από το $P$. Η απόλυτη τιμή αυτή, θα είναι τέτοια ώστε $|p|_P = 1/p$ και $|\pi|_P = 1/p^{1/e}$, και θα είναι εκτίμηση του σώματος $K$.

Η καλή συμπεριφορά των $e_P$ και $f_P$, που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε διαδοχικές επεκτάσεις σωμάτων, μας εξασφαλίζει ότι ο παραπάνω ορισμός απολύτων τιμών είναι συμβατός με την διαδοχική επέκταση σωμάτων.

Για τις εκτιμήσεις αυτές ισχύει η ακόλουθη βασική:

**Πρόταση 2.2.2** Κάθε επέκταση κάποιας $p-$αδικής εκτίμησης του $\mathbb{Q}$ σε κάποιο σώμα αριθμών Κ επάγεται από κάποιο πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου των ακεραίων Α στο Κ.

Απόδειξη: Έστω $O = \{a \in K : |a|_p \leq 1\}$ ο δακτύλιος και $m = \{a \in K : |a|_p < 1\}$ το μέγιστο ιδεώδες της εκτίμησης. Τότε $m \cap A \neq 0$ και άρα θα είναι κάποιο πρώτο ιδεώδες $P$ του $A$.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $O = A_P$ και η πρόταση έπεται. □

Περνάμε τώρα στην περίπτωση των αρχιμήδειων απολύτων τιμών. Θα έχουμε ότι κάθε εμφύτευση του σώματος Κ στο $\mathbb{C}$ ή στο $\mathbb{R}$ θα επάγει μια απόλυτη τιμή στο Κ, η οποία θα αποκαλείται μιγαδική ή πραγματική αντίστοιχα.

**Ορισμός 2.2.2** Το σύνολο των απόλυτων τιμών στο σώμα Κ, που αποτελείται από τις απόλυτες τιμές $|\cdot|_P$ που περιγράψαμε παραπάνω και τις μιγαδικές και πραγματικές απόλυτες τιμές του σώματος θα λέγεται **κανονικό σύνολο** και θα συμβολίζεται $M_K$, ενώ οι πραγματικές και μιγαδικές απόλυτες τιμές στο $M_K$ θα λέγονται **αρχιμήδειες**.

Αν Ε είναι μια επέκταση του Κ και $u \in M_K$, τότε κάθε $w$ απόλυτη τιμή του Ε που επεκτείνει την $u$ θα είναι στο $M_E$ και θα γράφουμε $w|u$.

Στην περίπτωση των απολύτων τιμών ισχύει το προσεγγιστικό θεώρημα, των $Artin-Whaples$, που είναι το ανάλογο του Κινέζικου Θεωρήματος Υπολοίπων.

**Θεώρημα 2.2.1**(Προσεγγιστικό) Έστω Κ σώμα και $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$, …, $|\cdot|_s$ μη-τετριμμένες ανεξάρτητες ανά δύο απόλυτες τιμές στο Κ, $x_1$, $x_2$, …, $x_s \in K$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $x \in K$ τέτοιο ώστε $|x - x_i|_i < \epsilon$, για κάθε $i$.

Απόδειξη:$[La-1]$ Θεώρημα 1, Παράγραφος $(II, \S 1)$.

Έστω τώρα Κ ένα σώμα αριθμών και $u \in M_K$. Όπως και στην περίπτωση των $p-$αδικών αριθμών παίρνουμε την πλήρωση του Κ ως προς την $u$, και καταλήγουμε σε ένα σώμα $K_u$ που περιέχει το Κ, το οποίο θα είναι και πυκνό σε αυτό.

Στην περίπτωση που η απόλυτη τιμή $u$ είναι αρχιμήδεια, το $K_u$ θα περιέχει το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε το Κ, αλλά και το $\mathbb{R}$, ως εμφυτευμένα στο $K_u$. Τότε το $K\mathbb{R}$ θα είναι μια επέκταση του $\mathbb{R}$ η οποία θα είναι πλήρες σαν σώμα, αφού θα ισούται είτε με το $\mathbb{R}$ είτε με το $\mathbb{C}$, και άρα θα είναι κλειστό υπόσωμα του σώματος $K_u$, το οποίο θα περιέχει το πυκνό Κ. Επομένως $K\mathbb{R} = K_u$.

Αν η απόλυτη τιμή μας είναι μη-αρχιμήδεια, δηλαδή εκτίμηση που αντιστοιχεί σε κάποιο πρώτο ιδεώδες $P$ του Κ, τότε το $K_u$, θα συμβολίζεται και $K_P$, και θα λέγεται σώμα των $P-$αδικών αριθμών. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο δακτύλιος $A_u$, ο οποίος θα είναι η κλειστότητα στο σώμα $K_P$ του δακτυλίου $A$ των ακεραίων του $K$. Οι βασικές ιδιότητες του δακτυλίου αυτού συνοψίζονται στην ακόλουθη:

**Πρόταση 2.2.3** 1. Κάθε στοιχείο του $A_u$ έχει $P-$αδική απόλυτη τιμή $\leq 1$.

2. Η κλειστότητα του ιδεώδους $P$ αποτελείται από τα στοιχεία του $A_u$ με $P-$αδική απόλυτη τιμή $< 1$.

3. Εάν $x \in K_u \backslash A_u$ τότε, το $x$ θα έχει $P-$αδική απόλυτη τιμή $> 1$.

Θεωρούμε τώρα την τοπικοποίηση του A στο $P$, $A_P = O$, και $m_P$ το μέγιστο ιδεώδες αυτής. Τότε κάθε στοιχείο του $O \subset K$ θα έχει $P-$αδική απόλυτη τιμή $\leq 1$, εξ ορισμού του τοπικού δακτυλίου $A_P$. Επομένως, ο $O$, που περιέχει τον A, θα έχει κλειστότητα στο $K_P$ που θα περιέχεται στο $A_u$. Άρα η κλειστότητά του θα είναι ο $A_u$.

Ο δακτύλιος αυτός, θα αποκαλείται **δακτύλιος των P-αδικών ακεραίων**. Έχουμε έτσι το ακόλουθο:

**Πόρισμα 2.2.1** Αν $P_u$ η κλειστότητα του ιδεώδους $P$ τότε έχουμε κανονικούς ισομορφισμούς $A_P/m_P \leftrightarrow A/P \leftrightarrow A_u/P_u$.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις θα έχουμε ότι κάθε $a \in A_u$, $a \neq 0$, θα γράφεται $a = \pi^r e$, όπου $\pi \in P\backslash P^2$, $r$ είναι κάποιος θετικός ακέραιος και $e \in A_u$ με $|e|_P = 1$ είναι κάποιο αντιστρέψιμο στοιχείο του $A_u$. Δηλαδή ο $A_u$ θα είναι μια περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης με ένα μοναδικό πρώτο ιδεώδες, που θα είναι και κύριο, και άρα θα είναι δακτύλιος διακριτής παραγοντοποίησης.

Έστω τώρα E μια πεπερασμένη επέκταση του K και $u \in M_K$. Μας ενδιαφέρει να χαρακτηρίσουμε τις απόλυτες τιμές του E που είναι πάνω από την $u$, όπως κάναμε αντίστοιχα για τα πρώτα ιδεώδη. Την απάντηση μας δίνει το ακόλουθο:

**Θεώρημα 2.2.2** Έστω K σώμα αριθμών, $u \in M_K$ και E μια πεπερασμένη επέκταση του. Δύο εμφυτεύσεις $\sigma, \tau : E \to \overline{K_u}$, πάνω από το K, επάγουν την ίδια απόλυτη τιμή στο E αν και μόνο αν είναι συζυγείς πάνω από το $K_u$, δηλαδή αν υπάρχει ισομορφισμός λ του $\sigma E \cdot K_u$ επί του $\tau E \cdot K_u$, του οποίου ο περιορισμός στο $K_u$ είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός του $K_u$.

Απόδειξη:$[La-1]$ Θεώρημα 2, Παράγραφος $(II, \S1)$.

Έχουμε άμεσα το εξής:

**Πόρισμα 2.2.2** Έστω σώμα αριθμών K και E μια πεπερασμένη επέκτασή του βαθμού $n$. Έστω $u \in M_K$ και για κάθε απόλυτη τιμή $w$ στο E που επεκτείνει την υ, έστω $n_w = [E_w : K_u]$. Τότε $\sum\limits_{w|u} n_w = n$.

Απόδειξη: Άμεση από το παραπάνω Θεώρημα και το γεγονός ότι σε τέτοιες επεκτάσεις το πλήθος των συζυγών είναι ίσο με το βαθμό της επέκτασης, όπως γνωρίζουμε από τη Θεωρία $Galois$.

**Παρατήρηση 2.2.1** Από το παραπάνω Πόρισμα βλέπουμε ότι επάγεται ο εξής χρήσιμος ισομορφισμός:

$$K \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}_{u_0} \cong \prod_{u|u_0} K_u \text{ , για } u_0 \in M_{\mathbb{Q}}.$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να εξάγουμε κάποια άμεσα συμπεράσματα για τις απόλυτες τιμές ενός σώματος αριθμών.

Πρώτα απ΄ όλα, το πλήθος των αρχιμήδειων απόλυτων τιμών του σώματός μας είναι πεπερασμένο, αφού θα είναι όλες πάνω από την μοναδική αρχιμήδεια απόλυτη τιμή του $\mathbb{Q}$.

Όσον αφορά τις μη-αρχιμήδειες απόλυτες τιμές, αυτές θα καθορίζονται μονοσήμαντα από τα πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου των ακεραίων του σώματός μας. Το γεγονός αύτο οφείλεται στο ότι κάθε τέτοια απόλυτη τιμή, περιορισμένη στο $\mathbb{Q}$ θα επάγει μια απόλυτη τιμή που θα είναι ισοδύναμη με κάποια $p-$αδική απόλυτη τιμή, και επομένως, η απόλυτη τιμή του σώματος αριθμών θα καθορίζεται από κάποιο πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου των ακεραίων που θα είναι πάνω από το πρώτο ιδεώδες

$(p)$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}$.

Μια χρήσιμη έννοια στην μελέτη των $P-$αδικών σωμάτων είναι η έννοια του σώματος υπολοίπου.

**Ορισμός 2.2.3** Έστω $L = K_P$ ένα $P-$αδικό σώμα με δακτύλιο ακεραίων $O_L = A_u$ και πρώτο ιδεώδες $m_L = P_u$. Το **σώμα υπολοίπων** του $L$ ορίζεται να είναι το σώμα $k_L = O_L/m_L$.

Θεωρούμε τώρα Ε και Κ όπως παραπάνω, και Β να είναι η ακέραια κλειστότητα του Α στο Ε. Έστω ακόμη $q$ ένα πρώτο ιδεώδες του Β που είναι πάνω από το $P$ και $w \in M_E$ η απόλυτη τιμή που αντιστοιχεί στο $q$. Τότε χάρη στο προηγούμενο πόρισμα θα έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_u \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B_w \end{array}$$

καθώς και το αντίστοιχο μεταθετικό διάγραμμα στα σώματα υπολοίπων

$$\begin{array}{ccc} A/p & \longrightarrow & A_u/p_u \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/q & \longrightarrow & B_w/q_w \end{array}$$

.

Αντικαθιστώντας όπου Κ το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών θα έχουμε το εξής προφανές:

**Πόρισμα 2.2.3** Το σώμα υπολοίπων $k_L$ ενός $P-$αδικού σώματος $L$ θα είναι πεπερασμένη επέκταση του σώματος $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, όπου $p$ ο μοναδικός πρώτος που ανήκει στο πρώτο ιδεώδες $P$.

Για τα $P-$αδικά σώματα έχουμε τον χρήσιμο χαρακτηρισμό της ακόλουθης:

**Πρόταση 2.2.4** Έστω $K$ μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}_p$. Τότε θα υπάρχει πεπερασμένη επέκταση $E$ του $\mathbb{Q}$ ώστε $E \subset K$ και $[K : \mathbb{Q}_p] = [E : \mathbb{Q}]$ και το $E$ να είναι πυκνό στο $K$ ώστε να ισχύει $K = E\mathbb{Q}_p$.
Απόδειξη:$[La - 1]$, Πόρισμα σελίδας 44.

Λόγω της παραπάνω πρότασης θα αποκαλούμε $P-$αδικό σώμα και κάθε πεπερασμένη επέκταση του σώματος $\mathbb{Q}_p$.

### 2.2.1 Το λήμμα του *Hensel*

Ιδιάζουσας σημασίας στη θεωρία των $P-$αδικών αλλά και των $p-$αδικών νορμών είναι το Λήμμα του $Hensel$, το οποίο μας δίνει ένα σημαντικό κριτήριο για την ύπαρξη ριζών πολυωνύμων με συντελεστές σε $P-$αδικά και $p-$αδικά σώματα.

**Λήμμα του *Hensel*** Έστω $f(X)$ ένα πολυώνυμο με συντελεστές στον δακτύλιο των $P-$αδικών αριθμών, $O$. Έστω ότι υπάρχει ένα $a_0 \in O$ ώστε $|f(a_0)| < |f'(a_0)^2|$. Τότε η ακολουθία $a_{i+1} = a_i - f(a_i)/f'(a_i)^2$ συγκλίνει σε μια ρίζα $a$ του $f(X)$ στο Ο. Ακόμα, $|a - a_0| \leq |f(a_0)/f'(a_0)^2| < 1$.
Απόδειξη: Έστω $c = |f(a_0)/f'(a_0)^2|$.
Αρκεί να αποδείξουμε επαγωγικά τα εξής:

$i.$ $|a_i| \leq 1$
$ii.$ $|a_i - a_0| \leq c$, και
$iii.$ $|f(a_i)/f'(a_i)^2| \leq c^{2^i}$.
Για $i = 0$ τα παραπάνω είναι υποθέσεις. Για το επαγωγικό βήμα έχουμε τα εξής:

Από την $iii.$ θα έχουμε $|a_{i+1} - a_i| < c^{2^i}$, και από την μη-αρχιμήδεια ιδιότητα θα έχουμε $|a_{i+1}| \leq 1$.
Το $ii.$ έπεται άμεσα από την παραπάνω σχέση, την επαγωγική υπόθεση και την μη-αρχιμήδεια ιδιότητα.
Για το $iii.$ από το ανάπτυγμα $Taylor$ θα έχουμε $|f(a_{i+1})| \leq |f(a_i)/f'(a_i)|^2$, και $|f'(a_{i+1})| = |f'(a_i)|$, και τελικά $|f(a_{i+1})/f'(a_{i+1})^2| \leq c^{2^{i+1}}$. □

## 2.3 Τοπολογία των P-αδικών σωμάτων

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε κάποιες από τις ιδιαίτερες τοπολογικές ιδιότητες που εμφανίζει ένα σώμα ως προς την τοπολογία που επάγει μια εκτίμηση σε αυτό.

Στο υπόλοιπο της παραγράφου αυτής θεωρούμε φιξαρισμένα ένα δακτύλιο διακριτής εκτίμησης $O = O_K$ με μέγιστο ιδεώδες $p$, K το σώμα πηλίκων του δακτυλίου αυτού, έναν γεννήτορα π του ιδεώδους $p$ καθώς και την εκτίμηση που επάγεται από τον δακτύλιο στο σώμα, το οποίο υποθέτουμε ότι είναι πλήρες ως προς αυτήν.

**Πρόταση 2.3.1** Οι υποομάδες $p^r$ σχηματίζουν μια οικογένεια ανοιχτών περιοχών του 0 στο K.

Απόδειξη: Έστω $x$ και $y \in K$ ώστε $|x - y| < |x|$. Τότε, από την μη-αρχιμήδεια ιδιότητα $|x| = |y|$. Άρα τα $p^r$ είναι φθίνουσα ακολουθία ανοιχτών που περιέχουν το 0. □

**Παρατήρηση 2.3.1** Ως προσθετικές ομάδες οι $p^r/p^{r+1}$ είναι όλες ισόμορφες με την $O/p$, μέσω του πολλαπλασιασμού με το στοιχείο $\pi^r$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων του $O_K$, την οποία θα συμβολίζουμε με $U$. Στην μελέτη της $U$ θα χρειαστούμε τις ομάδες που μας δίνει ο ακόλουθος:

**Ορισμός 2.3.1** Για κάθε ακέραιο $i \geq 1$ ορίζουμε $U_i = 1 + p^i$ και $U_0 = U$.

**Παρατηρήσεις 2.3.2** 1. Δεν είναι δύσκολο με χρήση του ορισμού της εκτίμησης μας να δούμε ότι οι $U_i$ είναι πράγματι πολλαπλασιαστικές ομάδες.

2. Η ομάδα $U$ των αντιστρέψιμων στοιχείων είναι ανοιχτό σύνολο στο K. Ενώ οι $U_i$ αποτελούν οικογένεια ανοιχτών περιοχών του $1 \in K$.

3. Ισχύει ότι, τόσο τοπολογικά όσο και αλγεβρικά, το $K^*$ είναι ισόμορφο του γινομένου $< \pi > \times U$, όπου $< \pi >$ η κυκλική ομάδα που παράγει το π.

Μέσω της φυσικής απεικόνισης $O_K \to O_K/p$ η ομάδα $U$ απεικονίζεται επί του συνόλου των μη-μηδενικών στοιχείων του $O/p$, λόγω της παραπάνω παρατήρησης, ενώ ο πυρήνας της απεικόνισης $U \to (O_K/p)^*$ θα είναι η $U_1$. Επομένως, θα έχουμε έναν ισομορφισμό $U/U_1 \cong (O_K/p)^*$.

Ακόμα, θα έχουμε ισομορφισμούς $p^i/p^{i+1} \cong U_i/U_{i+1}$ που θα επάγονται από τις απεικονίσεις στο $p^i$ που δίνονται από $x \mapsto (1 + x) mod U_{i+1}$, οι οποίες θα έχουν πυρήνα $p^{i+1}$.

Με χρήση των παραπάνω καταλήγουμε στην ακόλουθη:

**Πρόταση 2.3.2** Αν το $O_K/p$ είναι πεπερασμένο, τότε τα $O_K$ και $U$ είναι συμπαγή.

Απόδειξη: Το $O_K$ θα είναι το προβολικό όριο των $O/p^i$, και άρα θα είναι συμπαγές, αφού λόγω των παραπάνω παρατηρήσεων τα σύνολα αυτά θα είναι πεπερασμένα. Όμοια, η $U$ θα είναι το προβολικό όριο των πεπερασμένων ομάδων $U/U_i$, και άρα θα είναι συμπαγής. □

**Παρατήρηση 2.3.3** Χάρη στις προηγούμενες Προτάσεις έχουμε ότι κάθε $P-$αδικό σώμα είναι τοπικά συμπαγές.

## 2.4 Αδιακλάδιστες επεκτάσεις

Συνεχίζουμε, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, με ένα πλήρες σώμα K, με εκτίμηση που επάγεται από έναν δακτύλιο O και το μέγιστο ιδεώδες του, έστω $p$. Θεωρούμε, ακόμα, μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση E του K και B την ακέραια κλειστότητα του O στο E. Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο ο B θα είναι δακτύλιος διακριτής εκτίμησης και θα έχει μοναδικό μέγιστο ιδεώδες $q$.

Αν $e$ είναι ο δείκτης διακλάδωσης και $f$ ο δείκτης αδρανείας των αντιστοίχων ιδεωδών τότε γνωρίζουμε ότι $ef = [E : K]$.

Παρατηρούμε ότι $e = 1$ αν και μόνο αν $[E : K] = [B/q : O/p]$.

**Ορισμός 2.4.1** Αν η παραπάνω ισότητα ισχύει θα λέμε ότι το $q$ είναι αδιακλάδιστο πάνω από το $p$, ή, ισοδύναμα, ότι το E είναι αδιακλάδιστο πάνω από το K.

Οι αδιακλάδιστες επεκτάσεις απολαμβάνουν καλές ιδιότητες, τις οποίες και συνοψίζουμε στην ακόλουθη:

**Πρόταση 2.4.1** Έστω E πεπερασμένη επέκταση του K.

1. Αν $K \subset F \subset E$, τότε το E είναι αδιακλάδιστο πάνω από το K αν και μόνο αν το E είναι αδιακλάδιστο πάνω από το $F$ και το $F$ είναι αδιακλάδιστο πάνω από το K.

2. Αν το $E$ είναι αδιακλάδιστο πάνω από το K, και $K_1$ είναι πεπερασμένη επέκταση του K, τότε το σώμα $EK_1$ είναι αδιακλάδιστη επέκταση του $K_1$.

3. Αν τα $E_1$ και $E_2$ είναι πεπερασμένες και αδιακλάδιστες επεκτάσεις του K, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το $E_1E_2$.

Θεμελιώδους σημασίας για τη συνέχεια, όπως θα δούμε, είναι η ακόλουθη:

**Πρόταση 2.4.2** Έστω $\overline{K}$ μια αλγεβρική κλειστότητα του K. Για κάθε πεπερασμένη επέκταση E του K με $E \subset \overline{K}$ θεωρούμε $B_E$ την ακέραια κλειστότητα του O στο E, και $\overline{O}$ την ακέραια κλειστότητα του O στο $\overline{K}$.

Έστω $\varphi$ ένας ομομορφισμός του $\overline{O}$, του οποίου ο περιορισμός στο $B_E$ έχει το μέγιστο ιδεώδες $q_E$ ως πυρήνα. Τότε η απεικόνιση $B_E \mapsto \varphi(B_E)$ θα επάγει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία ανάμεσα στις αδιακλαδιστες επεκτάσεις E του K και τις διαχωρίσιμες επεκτάσεις του $\varphi(O)$.

Απόδειξη:$[La-1]$ Πρόταση 9, Παράγραφος $(II, \S 4)$.

Η περίπτωση που το $\varphi(O)$ είναι πεπερασμένο σώμα, όπως στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών, μας δίνει τη σημαντικότερη για τη σύνεχεια εφαρμογή της παραπάνω πρότασης.

Όπως γνωρίζουμε από τη Θεωρία $Galois$ πεπερασμένων σωμάτων κάθε επέκταση ενός πεπερασμένου σώματος είναι κυκλική, ενώ η ομάδα $Galois$ της παράγεται από τον αυτομορφισμό $Frobenius$ $\sigma$ με $\sigma(x) = x^q$, για κάθε $x$, όπου $q = |O/p|$. Από την προήγουμενη πρόταση θα έχουμε ότι κάθε αδιακλάδιστη επέκταση του K θα είναι κυκλική, ενώ θα έχει και μοναδικά προσδιορισμένο αυτομορφισμό που θα αντιστοιχεί στον *Frobenius*. Χρησιμοποιώντας τα απότελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, βλέπουμε ότι η ομάδα *Galois* $G$ μιας αδιακλάδιστης επέκτασης θα είναι ίση με την ομάδα $G_q$ αφού υπάρχει μοναδικό $q$ πάνω από το $p$ και η $G_q$ θα είναι ισόμορφη με την ομάδα της επέκτασης των αντίστοιχων σωμάτων κλάσεων υπολοίπων.

Έχουμε επίσης το εξής σημαντικό:

**Πόρισμα 2.4.1** Έστω K ένα $P-$αδικό σώμα, δηλαδή η πλήρωση ενός σώματος αριθμών ως προς κάποια $P-$αδική εκτίμηση, και E μια αδιακλάδιστη επέκταση του K. Τότε κάθε αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου εκτίμησης του K είναι νόρμα κάποιου αντιστρέψιμου στοιχείου του αντίστοιχου δακτυλίου του E.

Απόδειξη: Βασίζεται στο Θεώρημα 90 *Hilbert* και υπάρχει στην σελίδα 50 του $[La-1]$.

# Κεφάλαιο 3

# Τοπικά Σώματα και Ομάδα *Weil*

Είμαστε τώρα σε θέση να δούμε δύο από τα βασικά αντικείμενα που θα συναντήσουμε στη Θεωρία του *Langlands*, τα τοπικά σώματα και τις ομάδες *Weil* τους.

## 3.1 Τοπικά σώματα

Εφαρμόζοντας όσα έχουμε δει στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, εξετάζουμε την έννοια του Τοπικού Σώματος.

**Ορισμός 3.1.1** Κάθε μη-διακριτό, τοπικά συμπαγές τοπολογικό σώμα θα λέγεται **τοπικό σώμα**.

Τα τοπικά σώματα με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι αυτά που έχουν χαρακτηριστική μηδέν, και ειδικότερα τα $P-$αδικά σώματα, που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, και ταυτίζονται με πεπερασμένες επεκτάσεις του $\mathbb{Q}_p$ για κάποιον πρώτο $p$, και τα σώματα των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών.

**Παρατήρηση 3.1.1** Τα τοπικά σώματα έχουν ταξινομηθεί και αποδεικνύεται ότι, στην χαρακτηριστική μηδέν είναι ακριβώς τα παραπάνω.

Για το υπόλοιπο της παραγράφου, θεωρούμε Κ μια επέκταση του $\mathbb{Q}_p$ βαθμού $n$, $O_K$ τον δακτύλιο των ακεραίων του Κ, $m_K$ το μέγιστο ιδεώδες του και $k_K$ το αντίστοιχο σώμα υπολοίπων του.

Εφαρμόζοντας τα αποτελέσμτα των προηγούμενων κεφαλαίων καταλήγουμε στις παρακάτω βασικές:

**Παρατηρήσεις 3.1.2** 1. Το σώμα $k_K$ περιέχει το σώμα $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Το $k_K$ θα είναι πεπερασμένη επέκταση του σώματος $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ και άρα θα έχει $p^f$ το πλήθος στοιχεία όπου $f$ ο δείκτης αδρανείας του Κ πάνω από το $\mathbb{Q}_p$.

2. Απ΄ το 1ο Κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι το ιδεώδες $pO_K$ του $O_K$ θα είναι ίσο με $m_K^e$, όπου $e$ είναι ο δείκτης διακλάδωσης του Κ πάνω από το $\mathbb{Q}_p$.

3. Θα ισχύει η σχέση $[K:\mathbb{Q}_p] = ef$.

Έστω τώρα Ε μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* του Κ. Κάθε $K-$αυτομορφισμός του Ε θα διατηρεί την απόλυτη τιμή του Ε, λόγω της Πρότασης 2.2.1, και άρα θα απεικονίζει το δακτύλιο $O_E$ στον εαυτό του, και το ίδιο θα ισχύει για το μέγιστο ιδεώδες $m_E$ του $O_E$. Άρα κάθε τέτοιος αυτομορφισμός σωμάτων θα επάγει αυτομορφισμό του σώματος υπολοίπων $k_E$ ο οποίος θα είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο σώμα $k_K$. Δηλαδή θα έχουμε έναν ομομορφισμό $Gal(E/K) \to Gal(k_E/k_K)$.

Από την Πρόταση 1.5.2 ο παραπάνω ομομορφισμός θα είναι επιμορφισμός, και έχουμε την ακόλουθη:

**Πρόταση 3.1.1** Αν $E/K$ είναι επέκταση *Galois* πεπερασμένων επεκτάσεων του $\mathbb{Q}_p$ και $k_E$,$k_K$ τα αντίστοιχα σώματα υπολοίπων τότε η $Gal(E/K)$ απεικονίζεται επί της $Gal(k_E/k_K)$.

Από την παραπάνω πρόταση θα έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία

$$1 \to I_{E/K} \to Gal(E/K) \to Gal(k_E/k_K) \to 0, \qquad (3.1)$$

όπου $I_{E/K}$ η ομάδα αδρανείας της επέκτασης $E/K$.

Παρατηρούμε ακόμα ότι όταν η επέκταση $E/K$ είναι αδιακλάδιστη τότε $I_{E/K} = 1$ και οι δύο ομάδες *Galois* της παραπάνω ακριβούς ακολουθίας θα είναι ισόμορφες.

Σκοπός μας είναι να αφήσουμε το Ε στην παραπάνω ακολουθία να μεγαλώνει και να φτάσει την αλγεβρική κλειστότητα $\overline{K}$ του Κ. Αυτή τη διαδικασία την πραγματοποιούμε πρώτα για τις αδιακλάδιστες επεκτάσεις Ε του Κ, βασιζόμενοι στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 3.1.1** Έστω $F$ πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}_p$, και $k$ μια πεπερασμένη επέκταση του σώματος υπολοίπων $k_F$. Τότε θα υπάρχει αδιακλάδιστη πεπερασμένη επέκταση Κ του $F$ με σώμα υπολοίπων $k_K \cong k$. Ένα τέτοιο Κ θα είναι μοναδικό ως προς $F-$ισομορφισμό και θα είναι *Galois* πάνω από το $F$.

Απόδειξη: Η επέκταση $k/k_F$ θα είναι πεπερασμένη και διαχωρίσιμη. Άρα θα παράγεται από ένα πρωταρχικό στοιχείο $\xi$. Θεωρούμε $\phi$ το ελάχιστο πολυώνυμο του $\xi$ πάνω από το $k_F$, που θα έχει βαθμό ίσο με $n = [k : k_F]$.

Έστω τώρα $f \in O_K(x)$ ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε $f \equiv \phi mod(p)$, όπου $p$ το μέγιστο ιδεώδες του $O_K$.

Τότε αποδεικνύεται[1] ότι ο δακτύλιος $O_K(x)/(f)$ θα είναι δακτύλιος διακριτής εκτίμησης.

Το σώμα πηλίκων του, $K$, θα ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος.

Για την μοναδικότητα παραπέμπουμε στο $[Se-2]$, Θεώρημα 3, $(III, \S 3)$. $\square$

Επομένως, για κάθε $f \geq 1$, θα υπάρχει, ως προς $K-$ισομορφισμό, μοναδική αδιακλάδιστη επέκταση $E = E_f$ του Κ, βαθμού $f$, η οποία θα είναι *Galois*. Σε αυτή την περίπτωση η ομάδα αδρανείας $I_{E/K}$ θα είναι τετριμμένη, οι ομάδες *Galois* $Gal(E/K)$ και $Gal(k_E/k_K)$ θα είναι ισόμορφες και το στοιχείο *Frobenius* $Fr \in Gal(E/K)$ θα παράγει την $Gal(E/K)$.

Θεωρούμε τώρα, μια φιξαρισμένη αλγεβρική κλειστότητα $\overline{K}$ του Κ και θεωρούμε ότι τα $E_f$ περιέχονται στη $\overline{K}$. Έστω $f, f'$ δύο βαθμοί αδρανείας ώστε $f|f'$. Τότε χάρη στην πολλαπλασιαστική ιδιότητα των βαθμών αδρανείας και βαθμών διακλάδωσης θα έχουμε ότι $K_f \subset K_{f'}$.

Χάρη στα παραπάνω, καθώς ο βαθμός αδρανείας αυξάνεται, θα έχουμε ένα κατευθυνόμενο σύστημα υποσωμάτων του $\overline{K}$, η ένωση των οποίων θα είναι επίσης υπόσωμα του $\overline{K}$.

**Ορισμός 3.1.2** Το παραπάνω υπόσωμα του $\overline{K}$ θα λέγεται μέγιστη αδιακλάδιστη επέκταση του Κ και θα συμβολίζεται με $K_{ur}$.

Από τη Θεωρία *Galois* γνωρίζουμε ότι κάθε $K-$αυτομορφισμός ενός υποσώματος του $\overline{K}$ θα επεκτείνεται σε $K-$αυτομορφισμό του $\overline{K}$. Επομένως κάθε στοιχείο της $Gal(K_{ur}/K)$ θα επεκτείνεται σε ένα στοιχείο της $Gal(\overline{K}/K)$, δηλαδή ο ομομορφισμός $\pi : Gal(\overline{K}/K) \to Gal(K_{ur}/K)$ που δίνεται από τον περιορισμό των αυτομορφισμών στο σώμα $K_{ur}$ θα είναι επί και θα έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία:

[1] $[Se-2]$, Πρόταση 15, $(I, \S 6)$

$$1 \to I_K \to Gal(\overline{K}/K) \xrightarrow{\pi} Gal(K_{ur}/K) \to 0, \qquad (3.2)$$

όπου $I_K$ ο πυρήνας της π.

**Ορισμός 3.1.3** Η ομάδα $I_K$ καλείται **ομάδα αδρανείας του σώματος K**.

Επιστρέφουμε τώρα στην ακριβή ακολουθία (3.1) και αφήνουμε το E να αυξάνεται μέσα στο $\overline{K}$. Επομένως, μπορούμε να πάρουμε το αντίστροφο όριο της ακριβούς ακολουθίας και να καταλήξουμε σε έναν ομομορφισμό από το $Gal(\overline{K}/K)$ στο $Gal(\overline{k_K}/k_K)$, όπου $\overline{k_K}$ η αλγεβρική κλειστότητα του $k_K$. Συνδιάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

**Θεώρημα 3.1.2** Κάθε πεπερασμένη επέκταση του K στο $K_{ur}$ είναι αδιακλάδιστη. Ο φυσικός ομομορφισμός της $Gal(\overline{K}/K)$ στην $Gal(\overline{k_K}/k_K)$ μέσω της ακριβούς ακολουθίας (3.2) κατεβαίνει σε τοπολογικό ισομορφισμό της $Gal(K_{ur}/K)$ επί τη $Gal(\overline{k_K}/k_K)$.

Από τη Θεωρία *Galois* απείρων επεκτάσεων γνωρίζουμε ότι η ομάδα $Gal(\overline{k_K}/k_K)$ θα είναι το αντίστροφο όριο των κυκλικών ομάδων $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, με διάταξη ως προς την διαιρετότητα των βαθμών επέκτασης. Η ομάδα αυτή είναι συμπαγής τοπολογική ομάδα και συμβολίζεται με $\hat{\mathbb{Z}}$.

Το στοιχείο *Frobenius* της ομάδας $Gal(\overline{k_K}/k_K)$, με $Fr(x) = x^{|k_K|}$, θα αντιστοιχεί στον ακέραιο $+1$, ενώ η ομάδα των ακεραίων $\mathbb{Z}$ που παράγει το $+1$ στην $\hat{\mathbb{Z}}$ θα είναι πυκνή σε αυτό.

Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να ξαναγράψουμε την ακριβή ακολουθία (3.2) ως εξής:

$$1 \to I_K \to Gal(\overline{K}/K) \xrightarrow{\pi} \hat{\mathbb{Z}} \to 0, \qquad (3.3)$$

όπου π θα είναι η σύνθεση της συνάρτησης περιορισμού από το $\overline{K}$ στο $K_{ur}$ με τον ισομορφισμό της $Gal(K_{ur}/K)$ στο $\hat{\mathbb{Z}}$.

## 3.2 Ομάδα *Weil* τοπικού μη-αρχιμήδειου σώματος

Η ομάδα *Weil* ενός τοπικού σώματος, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι απαραίτητη στην τελική διατύπωση και περιγραφή των εικασιών του *Langlands*.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση των μη-αρχιμήδειων τοπικών σωμάτων. Θεωρούμε λοιπόν, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο μια πεπερασμένη επέκταση K του $\mathbb{Q}_p$, $\overline{K}$ μια αλγεβρική κλειστότητα του K και θέτουμε $G_K = Gal(\overline{K}/K)$.

Επιστρέφουμε στην ακριβή ακολοθία (3.3) για το σώμα K.

**Ορισμός 3.2.1** Η ομάδα *Weil* του K ορίζεται να είναι η υποομάδα $W_K = \pi^{-1}(\mathbb{Z})$ της $G_K$.

Με την βοήθεια της ομάδας *Weil* μπορούμε να ξαναγράψουμε την ακριβή ακολουθία (3.3), η οποία θα έχει τώρα την εξής μορφή:

$$1 \to I_K \to W_K \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \to 0. \qquad (3.4)$$

Η τοπολογία της $W_K$ θα επάγεται από την παραπάνω ακριβή ακολουθία. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το $\mathbb{Z}$ εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία, και ορίζουμε την τοπολογία στην $W_K$ έτσι ώστε η συνάρτηση π να είναι συνεχής και το $I_K$ να είναι ομοιομορφικό του $\pi^{-1}(\{0\})$.

Στόχος μας τώρα είναι να δουμε με περισσότερη λεπτομέρεια τα στοιχεία της ομάδας $Weil$, τα οποία θα προκύπτουν από την παρακάτω διαδικασία.

Θεωρούμε μια πεπερασμένη επέκταση $Galois$ E του K. Τότε από τη θεωρία $Galois$ γνωρίζουμε ότι η $G_K$ θα απεικονίζεται επί της $Gal(E/K)$ με πηρήνα $G_E$, ενώ από την Πρόταση 3.1.1 η $Gal(E/K)$ θα απεικονίζεται επί της $Gal(k_E/k_K)$.

Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι να αντιστοιχούμε σε κάθε $\sigma \in G_K$ έναν ακέραιο $n$ και τον αυτομορφισμό $x \mapsto x^{q_K{}^n}$, με τον $n$ να εξαρτάται από την επέκταση $E/K$ και να είναι ορισμένος $modulo$ τον δείκτη αδρανείας της επέκτασης. Τότε το αντίστροφο όριο αυτών των στοιχείων καθώς το E μεταβάλλεται θα μας δίνει ένα $\pi(\sigma) \in \hat{\mathbb{Z}}$. Για να ανήκει αυτό το στοιχείο στην υποομάδα $\mathbb{Z}$ του $\hat{\mathbb{Z}}$ θα πρέπει να μπορούμε να το δούμε σαν ένα μόνο ακέραιο, δηλαδή τα στοιχεία της ομάδας $Weil$ θα είναι εκείνα τα $\sigma \in G_K$ τα οποία επάγουν στην αλγεβρική κλειστότητα $\overline{k_K}$ τον αυτομορφισμό $x \mapsto x^{q_K{}^n}$ για κάποιον ακέραιο $n$.

Επόμενος στόχος μας είναι να εξετάσουμε την συμπεριφορά της ομάδας $Weil$ καθώς το σώμα μεταβάλλεται, δηλαδή τη σχέση των ομάδων $W_E$ και $W_K$ όταν $E/K$ είναι πεπερασμένη επέκταση.

Αρχικά παρατηρούμε ότι από τη θεωρία $Galois$, για την ομάδα $G_E$, θα ισχύει

$$G_E = \{g \in G_K | g(x) = x \ \forall x \in E\},$$

επομένως, θα ισχύει $W_E \subset G_K$. Μπορούμε να προσδιορίσουμε επακριβώς την $W_E$ ως υποομάδα της $G_K$ χάρη στην επόμενη:

**Πρόταση 3.2.1** Αν $E/K$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση τοπικών σωμάτων, τότε θα ισχύει $W_E = G_E \cap W_K$.

Απόδειξη: Ο εγκλεισμός $W_K \subset W_E \cap G_K$ είναι προφανής.

Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $k_K \subset k_E$ και ότι $\overline{k_E} = \overline{k_K}$.

Έστω $\sigma \in G_E \cap W_K$, τότε $\sigma \in G_K$ και θα είναι τέτοιο ώστε $\pi(\sigma)$ είναι ο αυτομορφισμός του $\overline{k_K}$ ο οποίος θα στέλνει το $x \mapsto x^{q_K^n}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και κρατάει σταθερό το $k_E$.

Άρα θα έχουμε ότι $x = x^{q_K^n}$ $\forall x \in k_E$, και επομένως $[k_E : k_K] | n$. Αν $m = n/[k_E : k_K]$ τότε $q_K^n = q_E^m$, και άρα η $\pi(\sigma)$ θα στέλνει το $x \mapsto x^{q_E^m}$, με $m \in \mathbb{N}$.

Επομένως, $\sigma \in W_E$, και άρα έχουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό $G_E \cap W_K \subset W_E$. □

Χάρη στην παραπάνω Πρόταση έχουμε και το ακόλουθο:

**Πόρισμα 3.2.1** Έστω $E/K$ μια πεπερασμένη επέκταση τοπικών σωμάτων, τότε θα έχουμε μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση ανάμεσα στα σύνολα $W_E/W_K$ και $G_E/G_K \cong Hom_K(E, \overline{K})$. Στην περίπτωση που η επέκταση είναι $Galois$, τότε $Hom_K(E, \overline{K}) = Gal(E/K)$, και η παραπάνω απεικόνιση είναι ισομορφισμός ομάδων.

### 3.2.1 Εναλλακτική περιγραφή της ομάδας $Weil$

Θα δώσουμε τώρα μια εναλλακτική περιγραφή της ομάδας $Weil$ ενός τοπικού μη-αρχιμήδειου σώματος.

Ξεκινάμε πρώτα με κάποιες γενικές παρατηρήσεις για τοπολογικές ομάδες.

**Ορισμός 3.2.2** Έστω $G$ τοπολογική ομάδα και $G^c$ η κλειστότητα της υποομάδας των μεταθετών της. Ορίζουμε $G^{ab} = G/G^c$.

**Παρατήρηση 3.2.1** Από τη θεωρία ομάδων, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η $G^c$ θα είναι κανονική υποομάδα της $G$ και ότι θα είναι η μέγιστη υποομάδα, με την ιδιότητα η ομάδα πηλίκο

$G/G^c$ να είναι αβελιανή.

Η υποομάδα $G_K^c$ της $G_K$ θα αντιστοιχεί, μέσω της αντιστοιχίας *Galois* σε άπειρες επεκτάσεις, σε ένα υπόσωμα του $\overline{K}$, το οποίο θα συμβολίζουμε με $K^{ab}$.

Το σώμα $K^{ab}$ θα καλείται **μέγιστη αβελιανή επέκταση του K**, ενώ η ομάδα *Galois* του, $Gal(K^{ab}/K)$ θα είναι η $G_K^{ab}$.

Θεωρούμε τώρα E μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* του K στο $\overline{K}$ και σχηματίζουμε το $E^{ab}$. Εφόσον η ομάδα $Gal(K_{ur}/K) = \hat{\mathbb{Z}}$ είναι αβελιανή θα έχουμε, πάλι από την αντιστοιχία *Galois* σε άπειρες επεκτάσεις, ότι $K_{ur} \subset K^{ab} \subset E^{ab}$. Θα έχουμε επομένως επιμορφισμούς, που θα επάγονται από τους αντίστοιχους περιορισμούς $G_K \to Gal(E^{ab}/K) \to Gal(K_{ur}/K) = \hat{\mathbb{Z}}$.

Ορίζουμε τώρα $W_{E/K}$ να είναι η αντίστροφη εικόνα του $\mathbb{Z}$ στην $Gal(E^{ab}/K)$ μέσω των παραπάνω απεικονίσεων. Οι ομάδες $W_{E/K}$ σχετίζονται με την ομάδα $Weil$, $W_K$ του τοπικού σώματος K με την ακόλουθη:

**Πρόταση 3.2.2** Η ομάδα $Weil$ του σώματος K, $W_K$, είναι ίση με το αντίστροφο όριο των $W_{E/K}$ δηλαδή θα ισχύει $W_K = \lim\limits_{\overleftarrow{E}} W_{E/K}$, όπου τα E στο όριο θα είναι πεπερασμένες επεκτάσεις *Galois* του σώματος K.

Απόδειξη: Ο ορισμός των $W_{E/K}$ εμπεριέχει, αυτομάτως, και επιμορφισμούς $W_K \to W_{E/K}$, οι οποίοι θα είναι συμβατοί μεταξύ τους καθώς το $E$ αλλάζει.

Θεωρούμε τώρα ένα $x \in \overline{K}$. Τότε θα υπάρχει πεπερασμένη επέκταση $E/K$ με $x \in E$ και προφανώς $x \in E^{ab}$.

Λόγω της παραπάνω παρατήρησης, είναι προφανές ότι αν $\sigma \in W_K$ με $\sigma \neq 1$ τότε δεν γίνεται να ισχύει $\sigma|_{W_{E/K}} = 1$ για κάθε πεπερασμένη επέκταση $E/K$. Επομένως, η $W_K$ θα είναι το αντίστροφο όριο των $W_{E/K}$. $\square$

## 3.3 Τοπική θεωρία σωμάτων κλάσεων και ομάδα *Weil*

Σημαντικό ρόλο στην περαιτέρω κατανόηση της ομάδας $Weil$ παίζει η Τοπική Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων. Το Θεώρημα Ύπαρξης της Τοπικής Θεωρίας Σωμάτων Κλάσεων μας παρέχει μια αντιστοιχία, μεταξύ των πεπερασμένων αβελιανών επεκτάσεων *Galois* ενός τοπικού σώματος K και των ανοιχτών υποομάδων πεπερασμένου δείκτη της ομάδας $K^*$. Η μετάφραση αυτού του αποτελέσματος στη θεωρία των ομάδων $Weil$ θα μας δώσει σημαντικές πληροφορίες για την δομή της ομάδας $Weil$ ενός τοπικού σώματος.

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε K μια, φιξαρισμένη, πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}_p$ και $\overline{K}$ μια αλγεβρική κλειστότητα του K.

Έστω τώρα E μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* βαθμού $n$ του K που περιέχεται στο $\overline{K}$ και $G_{E/K} = Gal(E/K)$. Από τη θεωρία συνομολογίας των ομάδων *Galois*, γνωρίζουμε ότι η δεύτερη ομάδα συνομολογίας $H^2(G_{E/K}, K^*)$ θα είναι μια κυκλική ομάδα βαθμού $n$ με κάποιον κανονικό γεννήτορα $u_{E/K}$. Η αφετηρία μας για τη σύνδεση της Τοπικής Θεωρίας Σωμάτων Κλάσεων και της ομάδας $Weil$ βρίσκεται στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 3.3.1** Αν $E/K$ είναι πεπερασμένη επέκταση *Galois* ο κανονικός γεννήτορας $u_{E/K}$ της $H^2(G_{E/K}, K^*)$ ορίζει, μέσω του *cup product*[2], έναν ισομορφισμό της $G_{E/K}^{ab}$ επί της $K^*/N_{E/K}(E^*)$, όπου $N_{E/K}(\cdot)$ είναι η απεικόνιση νόρμα των δύο σωμάτων.

[2] Για τις έννοιες αυτές της συνομολογίας, αλλά και τη σύνδεση τους με τη Θεωρία *Galois* παραπέμπουμε στο $[At - Wa]$.

Απόδειξη: $[Se-1]$, σελίδα 140.

Βασιζόμενοι στο παραπάνω Θεώρημα μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο:

**Ορισμός 3.3.1** Έστω $\theta_{E/K} : K^*/N_{E/K}(E^*) \to G^{ab}_{E/K}$ η αντίστροφη της απεικόνισης του παραπάνω θεωρήματος. Η $\theta_{E/K}$ θα λέγεται **τοπική απεικόνιση αντιστροφής** της επέκτασης $E/K$.

**Παρατηρήσεις 3.3.1** 1. Στην περίπτωση που η επέκταση μας είναι αβελιανή, η ομάδα $G^{ab}_{E/K}$ θα είναι ίση με την $G_{E/K}$, επομένως η τοπική απεικόνιση αντιστροφής $\theta_{E/K}$ θα είναι ισομορφισμός μεταξύ της $K^*/N_{E/K}(E^*)$ και της ομάδας *Galois* $G_{E/K}$ σε αυτή την περίπτωση.

2. Αν το $x \in K^*$ είναι στο σύμπλοκο $\overline{x}$ της $K^*/N_{E/K}(E^*)$, τότε γράφουμε $\theta_{E/K}(\overline{x}) = (x, E/K) \in G^{ab}_{E/K}$.

3. Τα σύμβολα $(x, E/K)$ θα ορίζουν απεικονίσεις $K^* \to G_{E/K}$, οι οποίες θα είναι συμβατές μεταξύ τους όταν $K \subset E \subset E'$ και $E'/K$ αβελιανή, δηλαδή σε διαδοχικές αβελιανές επεκτάσεις του K.

Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να πάρουμε το αντίστροφο όριο αυτών των απεικονίσεων, για να καταλήξουμε σε έναν ομομορφισμό $\theta_K : K^* \to G(K^{ab}/K) = G^{ab}_K$.

Η παραπάνω απεικόνιση μας δίνει πληροφορίες για την ακριβή ακολουθία (3.3). Η εικόνα της απεικόνισης π της ακριβούς ακολουθίας έχει αβελιανή εικόνα, συνεπώς η $G^c_K$ θα είναι υποομάδα του πυρήνα της π, και επομένως η π θα επάγει μια απεικόνιση $\pi^{ab}$ της ομάδας $G^{ab}_K$ στην $\hat{\mathbb{Z}}$. Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε την αρχική μας ακολουθία με την

$$1 \to I_{K^{ab}/K} \to G^{ab}_K \xrightarrow{\pi^{ab}} \hat{\mathbb{Z}} \to 0, \qquad (3.5)$$

όπου $I_{K^{ab}/K}$ ο πυρήνας της $\pi^{ab}$. Από όσα γνωρίζουμε από τη Θεωρία *Galois* η ομάδα $I_{K^{ab}/K}$ θα είναι ισόμορφη της $G_{K^{ab}/K_{ur}}$.

Παρατηρούμε ότι, όπως γνωρίζουμε από τον ορισμό της απόλυτης τιμής του τοπικού σώματος, η απόλυτη τιμή ενός $x \in K^*$, $|x|_K$, θα είναι μια ακέραια δύναμη του $q^{-1}$, όπου $q = p^f$ και $f$ ο δείκτης αδρανείας του K. Ο εκθέτης αυτός θα συμβολίζεται με $u(x)$, και μας επιτρέπει να περιγράψουμε την απεικόνιση $\pi^{ab} \circ \theta_K : K^* \to \hat{\mathbb{Z}}$.

**Θεώρημα 3.3.2** Αν $E/K$ είναι πεπερασμένη αδιακλάδιστη επέκταση, και $Fr \in G_{E/K}$ συμβολίζει το στοιχείο *Frobenius*, τότε $(x, E/K) = Fr^{u(x)}$.
Απόδειξη: $[Se-1]$, σελίδα 141.

Χάρη στο παραπάνω Θεώρημα παίρνουμε την απάντηση στο πρόβλημά μας, στο ακόλουθο:

**Πόρισμα 3.3.1** Για κάθε $x \in K^*$, θα ισχύει $\pi^{ab}(\theta_K(x)) = u(x) \in \hat{\mathbb{Z}}$.

**Παρατηρήσεις 3.3.2** 1. Το παραπάνω Πόρισμα μας λέει ότι η $\pi^{ab}(\theta_K(x)) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in K^*$, όπου $\mathbb{Z}$ η ομάδα των ακεραίων στο $\hat{\mathbb{Z}}$. Άρα κάθε προεικόνα στην $G_K$ του στοιχείου $\theta_K(x)$ θα ανήκει στην ομάδα *Weil*.

2. Γνωρίζουμε, από όσα έχουμε δει στο προηγούμενο Κεφάλαιο για τις πληρώσεις, ότι για κάθε $x \in O^*_K$ θα ισχύει $|x|_K = 1$ και άρα $u(x) = 0$, δηλαδή ο περιορισμός της $\theta_K$ στο $O^*_K$ θα περιέχεται

στον πυρήνα της $\pi^{ab}$.

Επόμενος στόχος μας είναι να πάρουμε μια ακριβή ακολουθία για την ομάδα $Weil$ αντίστοιχη της (3.5). Ξεκινάμε με το ακόλουθο:

**Λήμμα 3.3.1** Θα ισχύει $W_K^c = G_K^c$.

Απόδειξη: Ο εγκλεισμός $W_K^c \subset G_K^c$ είναι προφανής.

Θεωρούμε αρχικά ένα $\sigma \in W_K$ με $\pi(\sigma) = 1 \in \mathbb{Z}$. Τότε η $W_K$ θα είναι το ημι-ευθύ γινόμενο της $\{\sigma^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και της $I_K$.

Επομένως, το $W_K^c$ θα είναι η κλειστότητα του συνόλου των μεταθετών της $I_K$ και των στοιχείων της μορφής $\sigma^n i \sigma^{-n} i^{-1}$, όπου $i \in I_K$.

Έστω $Y$ η ελάχιστη κλειστή υποομάδα της $G_K$ που περιέχει το στοιχείο $\sigma$. Η $Y$ θα είναι συμπαγής και αβελιανή, και αφού το $\mathbb{Z}$ είναι πυκνό στο $\hat{\mathbb{Z}}$ θα έχουμε $\pi(Y) = \hat{\mathbb{Z}}$, λόγω του ορισμού της $\sigma$.

Έστω $g \in G_K$, από την παραπάνω σχέση υπάρχει $y \in Y$ ώστε $\pi(g) = \pi(y)$. Επομένως, $gy^{-1} \in I_K$, και η ταυτότητα $g = (gy^{-1})y$ δείχνει ότι κάθε στοιχείο της $G_K$ είναι γινόμενο ενός στοιχείου της $I_K$ και ενός στοιχείου της $Y$.

Επομένως, το $G_K^c$ θα είναι η κλειστότητα των μεταθετών της $I_K$ και των στοιχείων της μορφής $yiy^{-1}i^{-1}$, με $y \in Y$ και $i \in I_K$. Όμως τα στοιχεία $yiy^{-1}i^{-1}$ θα ανήκουν στην $W_K^c$ αφού θα είναι τα όρια κάποιων $\sigma^n i \sigma^{-n} i^{-1}$, και έτσι καταλήγουμε και στον αντίστροφο εγκλεισμό. □

Χάρη στο παραπάνω Λήμμα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την ακόλουθη:

**Πρόταση 3.3.1** Ο ομομορφισμός $W_K^{ab} \to G_K^{ab}$ που επάγεται από τον $W_K \to G_K$ θα είναι ένα προς ένα.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο πυρήνας $W_K \cap G_K^c$ ισούται με την $W_K^c$. Για την απεικόνιση $\pi$ ισχύει $\pi(xyx^{-1}y^{-1}) = 0$, για κάθε $x$ και $y \in G_K$, αφού η $\hat{\mathbb{Z}}$ είναι αβελιανή. Επομένως, αφού η $\pi$ είναι και συνεχής, θα ισχύει $G_K^c \subset I_K \subset W_K$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $W_K^c = G_K^c$, που είναι ακριβώς το αποτέλεσμα του προηγούμενου Λήμματος. □

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι μπορούμε να ταυτίσουμε την $(\pi^{ab})^{-1}(\mathbb{Z})$ με την $W_K^{ab}$. Η ταύτιση αυτή, καθώς και η παραπάνω παρατήρηση, μας επιτρέπει να σχηματίσουμε μέσω της ακριβούς ακολουθίας (3.5) μια ακριβή ακολουθία για την ομάδα $Weil$ η οποία θα είναι η

$$1 \to G_{K^{ab}/K_{ur}} \to G_{K^{ab}/K_{ur}} \to \mathbb{Z} \to 0. \qquad (3.6)$$

Χάρη στην ακριβή ακολουθία αυτή και τις παρατηρήσεις που έπονται του Πορίσματος (3.3.1) μπορούμε να συνοψίσουμε τη συμπεριφορά της απεικόνισης $\theta_K$ στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & O_K^* & \longrightarrow & K^* & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\theta_K} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_K} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
1 & \longrightarrow & Gal(K^{ab}/K_{ur}) & \longrightarrow & W_K^{ab} & \xrightarrow{\pi^{ab}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

όπου οι οριζόντιες γραμμές είναι ακριβείς ακολουθίες και όλα τα τετράγωνα είναι μεταθετικά.

### 3.3.1 Τοπική θεωρία σωμάτων κλάσεων

Το Θεώρημα ύπαρξης της Τοπικής Θεωρίας Σωμάτων Κλάσεων μας δίνει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των επεκτάσεων $Galois$ ενός τοπικού σώματος $K$ και κατάλληλων υποομάδων της $K^*$. Στην περίπτωσή μας περισσότερο ενδιαφερόμαστε για τις εφαρμογές στην ομάδα $Weil$.

**Θεώρημα (Τοπική Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων)** Η απεικόνιση $F \mapsto N_K^F(F^*)$ είναι μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των πεπερασμένων αβελιανών επεκτάσεων $Galois$ του σώματος $K$ και των ανοιχτών υποομάδων πεπερασμένου δείκτη της $K^*$.

Μέσω της ομάδας $Weil$ το παραπάνω θεώρημα μας δίνει το ακόλουθο:

**Πόρισμα 3.3.2** Η απεικόνιση τοπικής αντιστροφής του σώματος K, $\theta_K$, θα είναι τοπολογικός ισομορφισμός των ομάδων $K^*$ και $W_K^{ab}$.

Απόδειξη: Αν $E/K$ είναι μια πεπερασμένη αβελιανή επέκτασης, από το Θεώρημα 3.3.1, αν $\phi : G_K^{ab} \to Gal(E/K)$ είναι ο φυσικός επιμορφισμός, τότε η απεικόνιση

$$\phi \circ \theta_K : K^* \to G_{E/K}^{ab} = Galk(E/K),$$

θα είναι επιμορφισμός ομάδων.

Από την κατασκεύη της $G_K^{ab}$ ως αντιστρόφου ορίου, αφήνοντας το $E$ να αλλάζει, βλέπουμε ότι η $\theta_K$ θα στέλνει το $K^*$ σε μια πυκνή υποομάδα της $G_K^{ab}$.

Από το γεγονός ότι η $O_K^*$ είναι συμπαγής υποομάδα της $K^*$, και από το μεταθετικό διάγραμμα, που μας λέει ότι $\theta_K(O_K^*) \subset G_{K^{ab}/K_{ur}}$, θα έχουμε ότι το σύνολο $\theta_K(O_K^*)$ είναι πυκνό και συμπαγές, και άρα $\theta_K(O_K^*) = G_{K^{ab}/K_{ur}}$.

Από τη μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος θα έχουμε ακόμη ότι η $\theta_K$ θα είναι επί της $W_K^{ab}$.

Πράγματι, έστω $w \in W_K^{ab}$, αφού η απεικόνιση $u$ του διαγράμματος είναι επί θα υπάρχει $x \in K^*$, ώστε $u(x) = \pi^{ab}(w)$. Όμως, από το Πόρισμα 3.3.1, $u(x) = \pi^{ab}(\theta_K(x))$, και άρα $\pi^{ab}(w) = \pi^{ab}(\theta_K(x))$, και επομένως, $w \cdot \theta_K(x)^{-1} \in G_{K^{ab}/K_{ur}} = \theta_K(O_K^*)$. Καταλήγουμε ότι υπάρχει $y \in O_K^*$ ώστε $w\theta_K(xy)$, και επομένως η $\theta_K$ είναι επιμορφισμός της $K^*$ επί της $W_K^{ab}$.

Από το ορισμό της $\theta_K$, και των $\theta_{E/K}$, ο πυρήνας της $\theta_K$ θα ισούται με $kre\theta_K = \bigcap_E N_{E/K}(E^*)$, όπου η τομή είναι πάνω από τις πεπερασμένες αβελιανές επεκτάσεις $E$ με $K \subset E \subset K^{ab}$.

Για κάθε $i$, $j$ μη-αρνητικούς ακεραίους, ορίζουμε $H_{(i,j)} = \left\{(\varpi_K^i)^n\left(1 + O_K^j\right) : n \in \mathbb{Z}\right\}$, όπου $\varpi_K$ ένα πρώτο στοιχείο του δακτυλίου $O_K$. Κάθε υποομάδα $H_{(i,j)}$ της $K^*$ είναι ανοιχτή και πεπερασμένου δείκτη, επομένως, από το Θεώρημα της Τοπικής Θεωρίας Σωμάτων Κλάσεων, έχουμε ότι υπάρχει κάποια πεπερασμένη αβελιανή επέκταση $Galois$ $E$ του $K$, ώστε $N_{E/K}(E^*) = H_{(i,j)}$. Καταλήγουμε επομένως στη σχέση $\bigcap_E N_{E/K}(E^*) \subset \bigcap_{(i,j)} H_{(i,j)} = (1)$, και επομένως η $\theta_K$ θα είναι και ένα προς ένα.

Έχουμε, έτσι ότι η $\theta_K : K^* \to W_K^{qb}$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων. Όπως είδαμε ισχύει επίσης και ότι η απεικόνιση $\theta_K : O_K^* \to G_{K^{ab}/K_{ur}}$ είναι συνεχής ισομορφισμός ομάδων, και η υποομάδα $O_K^*$ είναι συμπαγές σύνολο. Επομένως, από γνωστό Λήμμα της συνολοθεωρητικής Τοπολογίας, η $\theta_K|_{O_K^*}$ θα είναι ομοιομορφισμός.

Το συμπέρασμα για την $\theta_K : K^* \to W_K^{ab}$ έπεται από το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα, λόγω της συνέχειας των υπόλοιπων απεικονίσεων και της μεταθετικότητάς τους. □

**Παρατηρήσεις 3.3.3** 1. Η απεικόνιση $\theta_K$ θα στέλνει ένα πρώτο στοιχείο $x \in O_K$ σε ένα αυτομορφισμό, που θα ανήκει στην $W_K^{ab}$, και θα δρα σαν αυτομορφισμός $Frobenius$ σε κάθε αδιακλάδιστη επέκταση.

2. Χάρη στην συνάρτηση $\theta_K$ και το παραπάνω Πόρισμα μπρούμε να συμπεράνουμε ότι οι συνεχείς μονοδιάστατες αναπαραστάσεις της $K^*$ θα παραμετροποιούνται από τους συνεχείς ομομορφισμούς της $W_K$ στο $\mathbb{C}^*$. Η παρατήρηση αυτή είναι χαρακτηριστική των αποτελεσμάτων που ήθελε να εξάγει ο *Langlands*.

### 3.3.2 Ομάδες *Weil* αρχιμήδειων τοπικών σωμάτων

Οι ομάδες *Weil* των αρχιμήδειων τοπικών σωμάτων ορίζονται με τη βοήθεια μιας σχέσης που ικανοποιούν οι αντίστοιχες ομάδες των μη-αρχιμήδειων σωμάτων.

Είχαμε ορίσει στην παράγραφο 3.2.1 τις ομάδες $W_{F/K}$ μιας επέκτασης. Οι ομάδες αυτές θα εμφυτεύονται στην $W_K$ και ο πυρήνας της απεικόνισης τους θα συμπίπτει με την ομάδα $W_F^c$. Θα έχουμε δηλαδή την ακόλουθη:

**Πρόταση 3.3.2** Έστω $E/K$ μια επέκταση τοπικών σωμάτων. Τότε θα ισχύει $W_{E/K} \cong W_K/W_E^c$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό της $W_{E/K}$ θα έχουμε και έναν επιμορφισμό $W_K \xrightarrow{\lambda_E} W_{E/K}$. Από την ακολουθία ομομορφισμών

$$G_K \to Gal(E^{ab}/K) \to Gal(K_{ur}/K) = \hat{\mathbb{Z}},$$

μέσω της οποίας ορίστηκε η $W_{E/K}$, βλέπουμε ότι ο ομομορφισμός $\lambda_E$ θα έχει πυρήνα ο οποίος θα αποτελείται από τα $\sigma \in W_K$ τα οποία δρουν όπως ο ταυτοτικός αυτομορφισμός 1 στο σώμα $E^{ab}$.

Από το γεγονός ότι κάθε τέτοιο $\sigma$ θα ανήκει και στην ομάδα $G_K$, και εφόσον είναι ίσα με τον ταυτοτικό στο $E^{ab}$ αυτομορφισμό, το ίδιο θα ισχύει και για τη δράση τους στο $E$, δηλαδή θα ισχύει $\sigma \in G_E$. Επομένως, αφού $Gal(E^{ab}/E) = G_E/G_E^c$, θα έχουμε ότι $\sigma \in G_E^c = W_E^c$, και άρα $ker\lambda_E \subset W_E^c$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αν $\sigma \in W_E^c = G_E^c$, λόγω των παραπάνω $\sigma|_{E^{ab}} = 1$, και άρα $\sigma \in ker\lambda_E$. $\square$

Θα έχουμε, λόγω των παραπάνω, μια ακριβή ακολουθία

$$1 \to W_F/W_F^c \to W_K/W_F^c \to W_K/W_F \to 1, \qquad (3.7)$$

η οποία από τα αποτελέσματα της παραγράφου θα είναι ισοδύναμη της ακριβούς ακολουθίας

$$1 \to F^* \to W_{F/K} \to Gal(F/K) \to 1. \qquad (3.8)$$

Από την συνομολογία ομάδων, η παραπάνω ακριβής ακολουθία θα μας δίνει ένα στοιχείο της ομάδας $H^2(Gal(F/K), F^*)$. Μελετώντας τους ισομορφισμούς που μας οδήγησαν στην παραπάνω ακριβή ακολουθία μπορούμε να προσδιορίσουμε επακριβώς το στοιχείο αυτό, και θα είναι ο κανονικός γεννήτορας της επέκτασης $u_{F/K}$.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ακολουθία για να ορίσουμε τις $W_{\mathbb{C}}$ και $W_{\mathbb{R}}$ μπορούμε να καταλήξουμε στην μορφή που θα έχουν.

Συγκεκριμένα, θα έχουμε ότι:

$$W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*, \text{ και } W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} = \mathbb{C}^* \cup j \cdot \mathbb{C}^*,$$

όπου το $j$ δρα στο $\mathbb{C}$ μέσω της $jzj^{-1} = \bar{z}$ και $j^2 = -1 \in \mathbb{C}^*$.

# Κεφάλαιο 4

# *Adeles*, *Ideles* και Αμοιβαιότητα *Artin*

Τα *Adeles* και *Ideles* είναι έννοιες που εισήχθησαν από τον *Chevalley* στην προσπάθειά του να γενικεύσει την Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων σε άπειρες αβελιανές επεκτάσεις *Galois*. Τελικά όμως από τη θεωρία αυτή του *Chevalley* προέκυψαν ενδιαφέρουσες γενικεύσεις εννοιών σχετικές με τα κλασματικά ιδεώδη που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Η ιδέα πίσω από την κατασκευή των εννοιών αυτών είναι η κωδικοποίηση της πληροφορίας που δίνουν όλες οι πληρώσεις ενός σώματος αριθμών στη δομή μιας ομάδας ή δακτυλίου.

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να δούμε κάποιες από τις βασικές τοπολογικές και αλγεβρικές ιδιότητες των *Adeles* και *Ideles* ενός σώματος αριθμών. Η σημαντικότερη εφαρμογή όσων θα δούμε είναι η απεικόνιση του *Artin*, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο σε όσα θα δούμε στη συνέχεια.

## 4.1 Κατασκευή των *adeles* και *ideles* ενός σώματος αριθμών

Στο $2^o$ κεφάλαιο είδαμε την κατασκευή των $p-$αδικών αριθμών. Η κατασκευή αυτή είχε ως στόχο την κωδικοποίηση της πληροφορίας για όλα τα υπόλοιπα $mod\ p^k$ για κάποιον πρώτο αριθμό $p$ και κάθε $k \geq 1$, και πραγματοποιούταν μέσω μιας οριακής διαδικασίας, συγκεκριμένα ενός αντιστόφου ορίου. Όπως και στην περίπτωση των $p-$αδικών αριθμών, τα *adeles* και *ideles* ενός σώματος αριθμών θα είναι το αποτέλεσμα μιας οριακής διαδικασίας, η οποία ονομάζεται *περιορισμένο ευθύ γινόμενο*, και την οποία θα περιγράψουμε σε πλήρη γενικότητα.

#### Περιορισμένο Ευθύ Γινόμενο

Θεωρούμε αρχικά ένα σύνολο δεικτών I και $\forall i \in I$ έναν τοπικά συμπαγή $Hausdorff$ τοπολογικό χώρο $X_i$. Θεωρούμε επίσης και ένα πεπερασμένο υποσύνολο $S_\infty$ του συνόλου I των δεικτών και υποθέτουμε ότι για κάθε $i \in I \backslash S_\infty$ υπάρχει ένα καθορισμένο ανοιχτό και συμπαγές υποσύνολο $K_i$ του χώρου $X_i$.

Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $S \subset I$, τέτοιο ώστε $S_\infty \subset S$, θέτουμε $A(S) = \prod_{i \in S} X_i \times \prod_{i \notin S} K_i$.

Όπως γνωρίζουμε από την συνολοθεωρητική τοπολογία ο τοπολογικός χώρος $A(S)$ θα είναι τοπικά συμπαγής χώρος $Hausdorff$ ενώ κατά προφανή τρόπο αν $S_1$ και $S_2$ είναι σύνολα δεικτών όπως παραπάνω, με $S_1 \subset S_2$, τότε θα ισχύει $A(S_1) \subset A(S_2)$.

**Ορισμός 4.1.1** Το ευθύ όριο των $A(S)$ καθώς το $S$ αυξάνεται θα λέγεται το **περιορισμένο ευθύ γινόμενο** των $X_i$ ως προς τα $K_i$.

**Παρατηρήσεις 4.1.1** 1. Το περιορισμένο ευθύ γινόμενο όπως ορίστηκε θα είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος $Hausdorff$, χάρη στην τοπολογία που θα επάγεται από το όριο. Τα $A(S)$ θα είναι όλα ανοιχτά στο περιορισμένο ευθύ γινόμενο.

2. Το περιορισμένο ευθύ γινόμενο A θα γράφεται σαν ένωση των $A(S)$, δηλαδή $A = \bigcup_S A(S)$, όπου ο δείκτης $S$ στην ένωση θα τρέχει το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του $I$ που περιέχουν το σύνολο $S_\infty$. Μέσω αυτής της γραφής συμπεραίνουμε ότι, ο τοπολογικός χώρος A θα αποτελείται από τα στοιχεία $x = (x_i)_{i\in I}$ του χώρου $X = \prod_{i\in I} X_i$ των οποίων όλες εκτός από πεπερασμένες οι συντεταγμένες $x_i$ θα ανήκουν στους υπόχωρους $K_i$.

3. Συνήθως η παραπάνω διαδικασία ακολουθείται όταν έχουμε μια οικογένεια τοπολογικών τοπικά συμπαγών ομάδων ή δακτυλίων και συμπαγείς υποομάδες ή υποδακτυλίους τους αντίστοιχα, και το αποτελέσμά της, δηλαδή το περιορισμένο ευθύ γινόμενο, θα είναι ιδίου τύπου με τους αρχικούς χώρους, δηλαδή ομάδα ή δακτύλιος αντίστοιχα.

Θεωρούμε τώρα $K$ ένα σώμα αριθμών. Από όσα έχουμε δει στο $2^o$ Κεφάλαιο, αν $u$ είναι μια απόλυτη τιμή του σώματος $K$, τότε το $K_u$ θα είναι ένας τοπικά συμπαγής τοπολογικός δακτύλιος και η ομάδα $K_u^*$ θα είναι μια τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα.

Στην περίπτωση που η απόλυτη τιμή μας $u$ είναι μη-αρχιμήδεια, κάθε ένας από τους παραπάνω τοπολογικούς χώρους θα περιέχει ένα ανοιχτό και συμπαγές υποσύνολο το οποίο θα είναι ταυτοχρόνως και υποδακτύλιος, ή υποομάδα αντίστοιχα. Το υποσύνολο αυτό θα είναι ο υποδακτύλιος των αλγεβρικών ακεραίων $O_u$, ή αντίστοιχα η υποομάδα $O_u^*$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου των αλγεβρικών ακεραίων.

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή του περιορισμένου ευθέος γινομένου, μας μένει να προσδιορίσουμε ένα κατάλληλο σύνολο δεικτών και ένα πεπερασμένο υποσύνολό του. Το σύνολο δεικτών μας θα είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας των απολύτων τιμών του σώματος, με σχέση ισοδυναμίας την ισοδυναμία απολύτων τιμών, δηλαδή θα είναι το σύνολο των κανονικών απολύτων τιμών $M_K$ του σώματος K. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας θα λέγεται και **θέση** του $K$. Οι θέσεις του $K$ που αντιστοιχούν σε μη-αρχιμήδειες απόλυτες τιμές του σώματος θα αποκαλούνται πεπερασμένες, ενώ αυτές που αντιστοιχούν σε αρχιμήδειες απόλυτες τιμές θα αποκαλούνται άπειρες. Τέλος το πεπερασμένο υποσύνολο των δεικτών θα είναι το σύνολο των αρχιμήδειων θέσεων, που θα αντιστοιχούν στις αρχιμήδειες απόλυτες τιμές του σώματος $K$, το οποίο θα συμβολίζουμε και με $S_\infty$.

**Παρατήρηση 4.1.2** Σε σε κάθε μία αό τις πεπερασμένες θέσεις του σώματος $K$ μπορούμε να αντιστοιχισούμε με κανονικό τρόπο ένα πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου $O_K$ των ακεραίων του σώματός μας. Έστω $u$ ένα πεπερασμένο μέρος του $K$, τότε το $u$ θα αντιστοιχεί σε κάποια μη-αρχιμήδεια πλήρωση $K_P$ του σώματός μας, η οποία, όπως έχουμε δει, θα προέρχεται από την απόλυτη τιμή που θα επάγει κάποιο πρώτο ιδεώδες $P$ με μονοσήμαντο τρόπο, εφόσον οι θέσεις του σώματος αντιστοιχούν στις κανονικές απόλυτες τιμές. Μπορούμε έτσι να αντιστοιχίσουμε στη θέση $u$ το αντίστοιχο πρώτο ιδεώδες $P = P(u)$.

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε τα *adeles* και *ideles* του σώματος $K$.

**Ορισμός 4.1.2** Έστω $K$ ένα σώμα αριθμών και $M_K$ το σύνολο των θέσεών του.
1. Ο **δακτύλιος των *adele*** του σώματος ορίζεται να είναι το περιορισμένο ευθύ γινόμενο των $K_u$ ως προς τους δακτυλίους των ακεραίων $O_u$ και θα συμβολίζεται με $\mathbb{A}_K$.

2. Η **ομάδα των *idele*** του σώματος ορίζεται να είναι το περιορισμένο ευθύ γινόμενο των τοπολογικών ομάδων $K_u^*$ ως προς τις υποομάδες $O_u^*$ και θα συμβολίζεται με $J_K$.

Τα στοιχειά του $\mathbb{A}_K$ θα λέγονται *adele* και τα στοιχεία της $J_K$ *idele*.

**Παρατηρήσεις 4.1.3** 1. Από την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{A}_K$ και της ομάδας $J_K$. Τα *adeles*, ή αντίστοιχα τα *ideles*, ενός σώματος αριθμών $K$ θα είναι εκείνα τα στοιχεία του χώρου $\prod\limits_{u\in M_K} K_u$, ή του χώρου $\prod\limits_{u\in M_K} K_u^*$, των οποίων όλες εκτός από πεπερασμένες οι συντεταγμένες $x_u$ θα ανήκουν στους αντίστοιχους δακτυλίους των ακεραίων $O_u$, ή στις αντίστοιχες ομάδες $O_u^*$.

2. Από την κατασκευή των δύο παραπάνω εννοιών βλέπουμε ότι τα *idele* ταυτίζονται αλγεβρικά με τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου των *adele*, όμως η τοπολογία που επάγει στο σύνολο αυτό η τοπολογία του δακτυλίου των *adele* είναι διαφορετική από αυτή που επάγεται στο σύνολο των *idele* από την κατασκευή της ομάδας τους ως περιορισμένο ευθύ γινόμενο.

3. Γνωρίζουμε ότι το σώμα $K$ θα εμφυτεύεται με φυσικό τρόπο σε κάθε $K_u$, και ότι για κάθε $x \in K$ θα ισχύει $|x|_u \leq 1$ για όλες εκτός από πεπερασμένες από τις μη-αρχιμήδειες απόλυτες τιμές του σώματος $K$. Δηλαδή, αν δούμε το $x$ ως στοιχείο των σωμάτων $K_u$, θα ισχύει ότι $x \in O_u$ για όλα εκτός από πεπερασμένα $u \in M_K$. Επομένως χάρη στην παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να βλέπουμε κάθε $x \in K$ ως το στοιχείο $(x, x, x, \ldots) \in \mathbb{A}_K$.

Η θεμελιώδης αυτή παρατήρηση μας επιτρέπει να θεωρούμε το $K$ εμφυτευμένο διαγώνια στον δακτύλιο $\mathbb{A}_K$, και ομοίως την ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων $K^*$, να τη θεωρούμε εμφυτευμένη διαγώνια στην ομάδα των *ideles* $J_K$ του σώματός μας. Η αλγεβρική εμφύτευση αυτή έχει και ιδιαίτερες τοπολογικές ιδιότητες.

**Θεώρημα 4.1.1** Η διαγώνια εμφύτευση του $K$ στο $\mathbb{A}_K$ είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{A}_K$. Ομοίως, η διαγώνια εμφύτευση της πολλαπλασιαστικής ομάδας $K^*$ στην ομάδα των *Ideles* $J_K$ αποτελεί διακριτή υποομάδα της $J_K$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι το 0 είναι απομωνομένο σημείο, ή αντίστοιχα το 1, λόγω των ιδιοτήτων του τοπολογικού δακτυλίου και ομάδας αντίστοιχα.

Έστω $a \in K$, ένα στοιχείο της διαγώνιας εμφύτεσης. Για να είναι το $a$ κοντά στο 0 στην τοπολογία του $\mathbb{A}_K$ πρέπει $|a_u|_u = |a|_u \leq 1$ για όλες εκτός από πεπερασμένες θέσεις και το $|a|_u$ είναι μικρό για τις υπόλοιπες πεπερασμένες θέσεις.

Από τον τύπο γινομένου του *Artin* γνωρίζουμε ότι $\prod\limits_u |a|_u = 1$ για κάθε $a \in K^*$, επομένως θα έχουμε υποχρεωτικά ότι $a = 0$, και άρα το 0 είναι απομονωμένο.

Επομένως το $K$ είναι διακριτό στο $\mathbb{A}_K$.

Το ίδιο επιχείρημα μπορούμε να το εφαρμόσουμε για το 1 και το στοιχείο $a - 1 \in K^*$, και προκύπτει ότι το $K^*$ είναι διακριτό υποσύνολο της ομάδας $J_K$. □

Οι διαγώνιες εμφυτεύσεις συμβολίζονται και αυτές με $K$ και $K^*$ αντίστοιχα. Θα έχουμε ακόμα το εξής:

**Θεώρημα 4.1.2** Ισχύει $K + \mathbb{A}(S_\infty) = \mathbb{A}_K$ και η προσθετική ομάδα $\mathbb{A}_K/K$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Για τον πρώτο ισχυρισμό έστω $x \in \mathbb{A}$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε, αν $mx = (mx_u)_u$, να ισχύει $mx_u \in O_u$ για κάθε μη-αρχιμήδεια θέση $u$.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $S = \{p \in Spec(O_K) : p|m\}$. Από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων θα υπάρχει $a \in O_K$ ώστε

$$mx_p \equiv a \; modp^n,$$

για κάθε $p \in S$ και κάθε αρκούντως μεγάλο $n \in \mathbb{N}$.

Τότε θα έχουμε ότι το $x_p - a/m$ είναι στο $O_K$ για κάθε $p$, αν $n$ είναι αρκούντως μεγάλο. Δηλαδή θα έχουμε ότι $x - a/m \in \mathbb{A}(S_\infty)$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, έχουμε ότι το $K$ εμφυτεύεται στο $\prod\limits_{u \in S_\infty} K_u = \mathbb{R}^N$, και σε αυτή την περίπτωση ο δακτύλιος $O_K$ θα σχηματίζει ένα *lattice* τάξης $N = [K : \mathbb{Q}]$ στο $\mathbb{R}^N$.

Από το πρώτο μέρος του Θεωρήματος αν $x \in \mathbb{A}$ θα υπάρχει $a \in K$ ώστε $x - a \in \mathbb{A}(S_\infty)$. Επειδή το *lattice* $O_K$ έχει μέγιστη τάξη στο $\mathbb{R}^N$, δηλαδή το $\mathbb{R}^N/O_K$ είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε $y \in O_K$ ώστε το $x - a - y$ να έχει φραγμένους συντελεστές σε κάθε άπειρη θέση. Επομένως κάθε στοιχείο του $\mathbb{A}/K$ θα έχει έναν αντιπρόσωπο σε ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{A}(S_\infty)$, και επομένως είναι συμπαγές. □

Χρήσιμη στη συνέχεια θα μας φανεί και η απεικόνιση νόρμας ανάμεσα στις ομάδες των *idele* δυο σώματων αριθμών $E$ και $K$, όπου το $E$ είναι επέκταση $K$. Η απεικόνιση αυτή διαδραματίζει πρωταρχικό ρόλο στην τελική διατύπωση της Θεωρίας Σωμάτων Κλάσεων για αλγεβρικές επεκτάσεις.

Αν $u \in M_K$ και $w \in M_E$ ώστε $w|u$ τότε ορίζεται καλά, από τη Θεωρία *Galois*, η απεικόνιση της νόρμας των τοπικών σωμάτων $N_{E_w/K_u} : E_w^* \to K_u^*$.

**Ορισμός 4.1.3** Έστω $E/K$ επέκταση σωμάτων αριθμών και $J_E$, $J_K$ οι αντίστοιχες ομάδες των *idele*. Για $x = (x_w)_w \in J_E$ ορίζουμε $N_{E/K}(x)$ το στοιχείο $y = (y_u) \in J_K$ με $y_u = \prod\limits_{w|u} N_{E_w/K_u}(x_w)$.

**Παρατήρηση 4.1.4** Το στοιχείο $N_{E/K}(x)$ είναι καλά ορισμένο ως στοιχείο της $J_K$. Πράγματι, αφού $x \in J_E$ θα ισχύει $x_w \in O_w$ για όλα εκτός από πεπερασμένα $w$. Επομένως, το $y_u = N_{E_w/K_u}(x_w)$ θα ανήκει στον δακτύλιο $O_u$, για όλα εκτός από πεπερασμένα από τα $u \in M_K$, και άρα το $y = y_u$ θα είναι καλώς ορισμένο στοιχείο της ομάδας των *idele* του σώματος $K$.

## 4.2 *Ideles*

Η ομάδα των *idele* του σώματος $K$ μας δίνει, όπως θα δούμε, αριθμοθεωρητικές πληροφορίες για το σώμα $K$ μέσω της κατασκευής του κλασματικού ιδεώδους ενός *idele*.

Από την παρατήρηση για τη μορφή των στοιχείων της ομάδας $J_K$, τα οποία όπως είδαμε θα είναι της μορφής $x = (x_u)_u$ με $x_u \in O_u^*$, και άρα $|x_u|_u = 1$, για όλα εκτός από πεπερασμένα $u$, μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω:

**Ορισμός 4.2.1** Έστω $x = (x_u)_u \in J_K$ ορίζουμε συνάρτηση $|\cdot| : J_K \to \mathbb{R}^+$ μέσω της σχέσης $|x| = \prod\limits_u |x_u|_u$.

**Παρατηρήσεις 4.2.1** 1. Η παραπάνω συνάρτηση είναι ομομορφισμός από την ομάδα των *idele* στην πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{R}^+$.

2. Από τον τύπο γινομένου του *Artin* γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in K^* \subset J_K$ θα ισχύει $|x| = 1$, δηλαδή το $K^*$ θα περιέχεται στον πυρήνα του ομομορφισμού αυτού, ο οποίος θα συμβολίζεται με $J_K^0$.

3. Αν θεωρήσουμε $u$ μια αρχιμήδεια θέση του $K$ και το αντίστοιχο σώμα $K_u$. Τότε το $K_u$, το οποίο θα είναι ή το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ ή το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, θα περιέχει πολλαπλασιαστική ομάδα ισόμορφη της $\mathbb{R}_+^*$. Θέτουμε $N$ την εμφύτευση της ομάδας αυτής στην $u$ συντεταγμένη της ομάδας $J_K$. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι θα ισχύει $J_K = J_K^0 \times N$.

Για τις παραπάνω έννοιες ισχύει το ακόλουθο:

**Θεώρημα 4.2.1** Η ομάδα $K^*$ είναι διακριτή υποομάδα της $J_K^0$ και η ομάδα πηλίκο $J_K^0/K^*$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Η ομάδα $K^*$ είναι διακριτή υποομάδα της $J_K$ και άρα το ίδιο θα ισχύει και για την $J_K^0$, δεδομένου ότι $K^* \subset J_K^0$.

Έστω $\psi : J_K \to \mathbb{R}^+$, ο ομομορφισμός με $a \mapsto |a|$. Από την προηγούμενη παρατήρηση $\psi(K^*) = 1$ και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\psi$ σαν ομομορφισμό $\psi : J_K/K^* \to \mathbb{R}^+$, και ο πυρήνας της απεικόνισης αυτής θα είναι το σύνολο $J_K^0/K^* = C_K^0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$ θεωρώ το σύνολο $C^x = \psi^{-1}(x)$. Το σύνολο αυτό θα είναι τοπολογικά ισομορφικό με το $C_K^0 = C^0$.

Πράγματι θεωρώντας το *idele* $a_x = (x^{1/N}, \ldots, x^{1/N}, 1, 1, \ldots)$, με συντεταγμένη $x^{1/N}$ σε κάθε αρχιμήδεια θέση θα έχουμε ότι $C^x = a_x C^0$ και $\psi(a_x) = x$.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το $C^x$ είναι συμπαγές για κάποιο $x$.

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται στο ακόλουθο προσεγγιστικό:

**Λήμμα** Υπάρχει σταθερά $c_1(K) > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x > c_1$ και για κάθε $a \in J_K^x$ υπάρχει $y \in K^*$ τέτοιο ώστε

$$1 \leq |ay|_u \leq x,$$

για κάθε $u \in M_K$.

Απόδειξη: $[La-1]$ Λήμμα Παραγράφου $(VII, \S 3)$ σελίδας 143.

Από το παραπάνω Λήμμα έχουμε ένα συμπαγές υποσύνολο $X$ του $J_K$, το οποίο θα απεικονίζεται σε ένα υποσύνολο του $C_K$ που θα περιέχει το $C^x$. □

Από την παραπάνω Παρατήρηση και το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε το ακόλουθο προφανές:

**Πόρισμα 4.2.1** Για κάθε υποομάδα $M$ της $J_K$ που περιέχει την $NK^*$ θα ισχύει ότι η ομάδα πηλίκο $J_K/M$ είναι συμπαγής.

Το αρχιμήδειο κομμάτι της ομάδας των *idele*, δηλαδή το σύνολο των $x = (x_u)_u \in J_K$ με $x_u = 1$ για κάθε μη-αρχιμήδεια θέση $u$ του $K$, θα ισούται με το σύνολο των αντιστρεψίμων στοιχείων του αρχιμήδειου παράγοντα του δακτυλίου $\mathbb{A}_K$, δηλαδή του υποσυνόλου των *adele* με $x_u = 1$ για κάθε μη-αρχιμήδεια θέση $u$ του $K$, ενώ το αρχιμήδειο κομμάτι του $\mathbb{A}_K$ θα ισούται με $K_\infty = K \otimes \mathbb{R}$. Το κομμάτι αυτό των *idele* θα το συμβολίζουμε με $J_K^\infty$.

Θετουμε ακόμα $K_1 = \prod_{u \notin S_\infty} O_u^*$, το γινόμενο των αντιστρεψίμων στοιχείων των δακτυλίων των αλγεβρικών ακεραίων των σωμάτων $K_u$ για τα μη-αρχιμήδεια $u \in M_K$. Το $K_1$ θα είναι προφανώς υποομάδα της $J_K$.

Από όσα έχουμε δεί μέχρι στιγμής λαμβάνουμε το ακόλουθο:

**Πόρισμα 4.2.2** Έστω $G$ ανοιχτή και συμπαγής υποομάδα της $K_1$. Τότε το σύνολο των διπλών συμπλόκων $X_G = K^* \backslash J_K / J_K^\infty G$ θα είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη: Από τα παραπάνω, το σύνολο $J_K/J_K^\infty K^*$ θα είναι συμπαγές και άρα το ίδιο θα ισχύει και για το $X_G$. Από την άλλη η υποομάδα $J_K^\infty G$ θα είναι ανοιχτή στην $J_K$ και επομένως το σύνολο $J_K/J_K^\infty G$ θα είναι διακριτό και άρα το ίδο θα ισχύει και για το $X_G$. Ως διακριτό και συμπαγές το $X_G$ θα είναι πεπερασμένο. □

### Το Κλασματικό ιδεώδες ενός *idele*

Η ομάδα των *idele* μας δίνει πληροφορίες για τα κλασματικά ιδεώδη του αριθμητικού σώματος $K$, αντιστοιχώντας σε κάθε *idele* ένα κλασματικό ιδεώδες.

Θεωρούμε ένα $x = (x_u)_u \in J_K$, κάθε μη-αρχιμήδεια απόλυτη τιμή $u$ γνωρίζουμε ότι θα αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες $p_u$ του δακτυλίου των ακεραίων του σώματός μας $O_K$.

Από το $2^o$ Κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι ο αντίστοιχος δακτύλιος των ακεραίων $O_u$ του σώματος $K_u$ θα έχει μοναδικό μέγιστο ιδεώδες $m_u$, ενώ το σώμα υπολοίπων $O_u/m_u$ θα έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ίσο με $q_u$. Από όσα είδαμε στο $3^o$ Κεφάλαιο για την απεικόνιση τοπική αντιστροφής γνωρίζουμε ότι θα ισχύει $|x_u|_u = q_u^{-u(x_u)}$, όπου $u(x_u)$ θα είναι κάποιος ακέραιος. Εφόσον $x \in J_K$ θα ισχύει $x_u \in O_u^*$, και άρα $u(x_u) = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένα από τα $u \in M_K$. Επομένως, μόνο πεπερασμένα από τα ιδεώδη $p_u^{u(x_u)}$ θα είναι διαφορετικά από τη μονάδα, δηλαδή το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας των κλασματικών ιδεωδών, και άρα το γινόμενο $\prod\limits_{u \in M_K} p_u^{u(x_u)}$ θα είναι πεπερασμένο και θα ορίζει ένα κλασματικό ιδεώδες του σώματός μας.

Το παραπάνω κλασματικό ιδεώδες θα λέμε ότι αντιστοιχεί στο *idele* $x$ και θα συμβολίζεται με $(x)$.

Κάθε $x \in K^*$, αν το δούμε ως στοιχείο της $J_K$, θα παράγει ένα κλασματικό ιδεώδες το οποίο θα συμπίπτει, κατά προφανή τρόπο, με το κύριο κλασματικό ιδεώδες $xO_K$ που παράγει το $x$ ως στοιχείο του σώματός μας αυτή τη φορά.

**Ορισμός 4.2.2** Κάθε $x \in K$ όταν το βλέπουμε σαν στοιχείο της $J_K$ θα λέγεται **κύριο** *idele*.

Ισχύει επίσης η παρακάτω:

**Πρόταση 4.2.1** Η απεικόνιση $J_K \to I_K$ με $x \mapsto (x)$, είναι επιμορφισμός ομάδων ανάμεσα στην ομάδα των *idele* και την ομάδα των κλασματικών ιδεωδών του σώματος $K$.

Απόδειξη: Προφανής από τον τρόπο ορισμού της απεικόνισης και των *idele* καθώς και από τις ιδιότητες που είδαμε στο $2^o$ Κεφάλαιο.

**Παρατηρήσεις 4.2.2** 1. Ο πυρήνας του παραπάνω ομομορφισμού είναι ακριβώς τα *idele* $x = (x_u)_u \in J_K$ για τα οποία θα ισχύει $|x_u|_u = 1$ για κάθε μη-αρχιμήδεια θέση, δηλαδή $x_u \in O_u^*$ για κάθε μη-αρχιμήδεια θέση. Αυτά θα είναι ακριβώς τα στοιχεία του συνόλου $J_K(S_\infty)$, όπως αυτό περιγράφεται στην κατασκευή του περιορισμένου ευθέυς γινομένου. Επομένως θα έχουμε έναν ισομορφισμό $J_K/J_K(S_\infty) \cong I_K$.

2. Από την παραπάνω παρατήρηση, και το γεγονός ότι κύρια *idele* θα αντιστοιχούν σε κύρια κλασματικά ιδεώδη, και αντιστόφως κύρια κλασματικά θα έχουν προεικόνα στην ομάδα των *idele* στο σύνολο $K^* J_K(S_\infty)$, θα έχουμε έναν ισομορφισμό $J_K/K^* J_K(S_\infty) \cong I_K/P$, όπου το $P$ είναι η ομάδα των κύριων κλασματικών ιδεωδών του $K$.

Στην μελέτη των *idele* χρήσιμος είναι και ο ακόλουθος:

**Ορισμός 4.2.3** Έστω $J_K$ η ομάδα των *idele* του σώματος $K$. Θεωρώ την διαγώνια εμφύτευση του $K^*$ στο $J_K$. Η ομάδα πηλίκο $C_K = J_K/K^*$ θα λέγεται **ομάδα των κλάσεων *idele* του σώματος** $K$.

**Παρατηρήσεις 4.2.3** 1. Η ομάδα των κλάσεων *idele* θα περιέχει την κλειστή υποομάδα $J_K^0/K^*$, η οποία θα συμβολίζεται με $C_K^0$ και, όπως γνωρίζουμε, θα είναι συμπαγής.

2. Για τη συνάρτηση της νόρμας που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, παρατηρούμε ότι θα ισχύει $N_{E/K}(E^*) \subset K^*$, όπου $E^*$ και $K^*$ οι αντίστοιχες διαγώνιες εμφυτεύσεις στις ομάδες των *idele* $J_E$ και $J_K$, και επομένως μπορούμε να θεωρούμε την νόρμα ως απεικόνιση στις αντίστοιχες ομάδες κλάσεων *idele*, δηλαδή $N_{E/K} : C_E \to C_K$.

Χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία *idele* και κλασματικών ιδεωδών μαζί με το Πόρισμα 4.2.2, μπορούμε να πάρουμε μια απόδειξη ενός από τα θεμελιώδη αποτελέσματα της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

**Θεώρημα 4.2.2** Το πλήθος των κλάσεων ιδεωδών ενός σώματος αριθμών $K$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή η ομάδα $I_K/P$ είναι πεπερασμένη.
Απόδειξη: Όταν $G = K_1$ το Πόρισμα 4.2.2 μας δίνει ότι το σύνολο των διπλών συμπλόκων $K^*\backslash J_K/J_K^\infty K_1$ θα είναι πεπερασμένο. Το σύνολο όμως αυτό θα είναι ίσο με το σύνολο $J_K/K^*J_K(S_\infty)$. Σαν ομάδα το σύνολο $J_K/K^*J_K(S_\infty)$ θα είναι ισόμορφο της ομάδας $I_K/P$, όπως είδαμε στην παραπάνω παρατήρηση. Επομένως, $|I_K/P| < \infty$. □

**Παρατήρηση 4.2.4** Η κλασσική απόδειξη του πεπερασμένου των αριθμών κλάσεων ιδεωδών, η οποία περιέχεται στο [La − 1], γίνεται με τη βοήθεια της σταθεράς *Minkowski*, και είναι κατά πολύ μακροσκελέστερη της παραπάνω αδελικής απόδειξης.

## 4.3 Η αμοιβαιότητα *Artin*

Χάρη στην κατασκευή των *adele*, που όπως είπαμε μας βοηθάει να κωδικοποιήσουμε την πληροφορία που δίνουν όλες οι πληρώσεις ενός σώματος αριθμών, λαμβάνουμε μία Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων σε αβελιανές επεκτάσεις. Ακόμα μέσω της θεωρίας των *adele* μπορούμε να κατασκευάσουμε την συνάρτηση *Artin*, η οποία θα εμπεριέχει την πληροφορία για όλες τις συναρτήσεις τοπικής αντιστροφής που είδαμε στο $2^o$ Κεφάλαιο.
Θεωρούμε μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* αριθμητικών σωμάτων $E/K$ και ένα πρώτο ιδεώδες $p$ του δακτυλίου $O_K$ των ακεραίων του σώματος $K$. Το πρωτό ιδεώδες αυτό στον δακτύλιο $O_E$ θα έχει μια παραγοντοποίηση σε πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου αυτού, δηλαδή $pO_K = q_1^e q_2^e \cdots q_r^e$, όπου τα $q_i$ είναι πρώτα ιδεώδη του $O_E$. Στην περίπτωση που το ιδεώδες $p$ στο $E$ είναι αδιακλάδιστο, δηλαδή όταν $e = 1$ και η αντίστοιχη ομάδα αδρανείας είναι τετριμμένη, γνωρίζουμε ότι για κάθε $q|p$ θα ορίζεται μονοσήμαντα ένας αυτομορφισμός *Frobenius*, $Fr_q$, ο οποίος θα ανήκει στην αντίστοιχη ομάδα ανάλυσης $G_q = \{\sigma \in Gal(E/K) | \sigma(q) = q\}$.

Για καθένα από τα $q|p$ η ομάδα $G_q$ είναι ο σταθεροποιητής της δράσης της ομάδας *Galois* της επέκτασής μας στο σύνολο των πρώτων ιδεωδών του $O_E$ που είναι πάνω από το $p$ και η δράση αυτή, όπως έχουμε δει είναι μεταθετική, δηλαδή για κάθε $q_1 \neq q_2$ που είναι πάνω από το $p$ θα υπάρχει ένα $\sigma \in G$ ώστε $\sigma(q_1) = q_2$. Στην περίπτωση αυτή γνωρίζουμε από τη Θεωρία Ομάδων ότι οι ομάδες των σταθεροποιητών, δηλαδή οι $G_q$ για $q|p$ θα είναι συζηγείς υποομάδες της $G$. Η συζυγία αυτή θα στέλνει τον *Frobenius* της μιας ομάδας στον *Frobenius* της άλλης. Επομένως, στη γενική περίπτωση, δεδομένου του πρώτου ιδεώδους $p$, το στοιχείο *Frobenius* της επέκτασης των σωμάτων υπολοίπων θα αντιστοιχεί σε μια κλάση συζυγίας της ομάδας *Galois* $G = Gal(E/K)$.

Η αμοιβαιότητα *Artin* ασχολείται με την περίπτωση των αβελιανών επεκτάσεων, δηλαδή την περίπτωση όπου η παραπάνω ομάδα $G$ είναι αβελιανή. Στην περίπτωση αυτή η κλάση συζυγίας που μόλις είδαμε θα είναι ένα μοναδικό στοιχείο $\sigma$ της $G$ το οποίο θα προσδιορίζεται από το $p$ μοναδικά ως προς την ιδιότητα $\sigma a \equiv a^{Np} mod(q)$ για κάθε $q|p$ και κάθε $a \in O_E$. Το στοιχείο αυτό της ομάδας $G$ θα συμβολίζεται με $(p, E/K)$.

Ο τελικός μας στόχος είναι να ανυψώσουμε την παραπάνω απεικόνιση, $p \mapsto (p, E/K)$, στο σύνολο των *idele* του σώματος $K$.

Θεωρούμε, αρχικά, το πεπερασμένο υποσύνολο $S_E$ του $M_K$ που αποτελείται από όλες τις άπειρες θέσεις του σώματος $K$, καθώς και από τις πεπερασμένες θέσεις του $K$ που διακλάδίζονται στο σώμα $E$. Για τις πεπερασμένες θέσεις του παραπάνω υποσυνόλου θεωρούμε επίσης τα αντίστοιχα πρώτα ιδεώδη, το σύνολο των οποίων θα είναι πεπερασμένο, $\{p_1, \ldots, p_r\}$.

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε κλασματικό ιδεώδες του σώματος $K$ θα γράφεται στη μορφή $a = \prod\limits_p p^{a(p)}$, όπου $p$ τα πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου των ακεραίων και $a(p) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $p$.

Χρήσιμος σε όσα ακολουθούν είναι ο ακόλουθος:

**Ορισμός 4.3.1** 1. Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $S \subset M_K$ με $S_\infty \subset S$ ορίζουμε $I^S$ να είναι η υποομάδα της ομάδας των κλασματικών ιδεωδών $I_K$ του $K$ που αποτελείται από τα κλασματικά ιδεώδη, στην παραγοντοποίηση των οποίων σε γινόμενο πρώτων δεν εμφανίζεται κανένα από τα $p \in S$, δηλαδή θα είναι τα $a \in I_K$ ώστε $a(p) = 0$ για κάθε $p \in S$.

2. Αν $a = \prod\limits_p p^{a(p)}$ είναι ένα τυχαίο κλασματικό ιδεώδες του σώματός μας, και $S$ όπως παραπάνω, ορίζουμε $a^S = \prod\limits_{p \notin S} p^{a(p)}$, και προφανώς θα ισχύει $a^S \in I^S$.

Παρατηρούμε, τώρα, ότι μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω απεικόνιση, που στέλνει το $p$ στο $(p, E/K)$, στην υποομάδα $I^{S_E}$ της $I_K$ πολλαπλασιαστικά, δηλαδή αν $a \in I^{S_E}$ με $a = \prod\limits_j q_j^{a(j)}$, όπου το σύνολο δεικτών $j$ είναι πεπερασμένο και τα πρώτα ιδεώδη $q_j$ είναι τέτοια ώστε $q_j \neq p_i$ για κάθε $i, j$, θέτουμε $(a, E/K) = \prod\limits_j (q_j, E/K)^{a(j)}$. Η απεικόνιση αυτή τότε θα είναι ομομορφισμός ομάδων $I^{S_E} \to Gal(E/K)$ και αποκαλείται **σύμβολο *Artin* της επέκτασης $E/K$**.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε τις διάφορες μορφές της αμοιβαιότητας *Artin*, η οποία θα μας δίνει πληροφορίες για τη συμεριφορά του συμβόλου *Artin* στην περίπτωση όπου το $a \in I^{S_E}$ είναι ένα κατάλληλο κύριο κλασματικό ιδεώδες.

**Θεώρημα 4.3.1** (Αμοιβαιότητα *Artin*, Πρώτη μορφή) Έστω $E/K$ μια πεπερασμένη αβελιανή επέκταση *Galois* αριθμητικών σωμάτων βαθμού $n$ και $S_E$ το υποσύνολο των μερών του $K$ που ορίσαμε παραπάνω. Αν $a \in K^*$ είναι τέτοιο ώστε $a \in (K_u^*)^n$ για κάθε $u \in S_E$ και $(a) = aO_E$, τότε θα ισχύει $((a)^{S_E}, E/K) = 1$.
Απόδειξη: Βρίσκεται στο $[Ta-2]$, στη σελίδα 167.

Η παραπάνω μορφή της αμοιβαιότητας *Artin* είναι η πρώτη από τις τρεις που θα δούμε. Η δεύτερη μορφή, που ακολουθεί στο επόμενό μας θεώρημα, είναι ισχυρότερη της πρώτης και αποτελεί το βασικό βήμα για την ανύψωση του συμβόλου *Artin* στα *idele* του σώματος μας. Συγκεκριμένα, έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 4.3.2** (Αμοιβαιότητα *Artin*, Δεύτερη μορφή) Έστω $E$, $K$ και $S_E$ όπως στο προηγούμενο Θεώρημα. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $a \in K^*$ με $|a-1|_u < \delta$ για κάθε $u \in S_E$, τότε $((a)^{S_E}, E/K) = 1$.
Απόδειξη: Βρίσκεται στο $[Ta-2]$, στη σελίδα 167.

### Αποδεκτοί Ομομορφισμοί και Αμοιβαιότητα *Artin*

Το σύμβολο *Artin* αποτελεί παράδειγμα της έννοιας των αποδεκτών ομομορφισμών.

Αρχικά θεωρούμε ένα αριθμητικό σώμα $K$ και για κάθε πεπερασμένο σύνολο $S \subset M_K$ με $S_\infty \subset S$ την αντίστοιχη υποομάδα $I^S$ της $I_K$ που έχουμε ορίσει.

**Ορισμός 4.3.2** Έστω $G$ μια αβελιανή τοπολογική ομάδα και $\phi : I^S \to G$ ένας ομομορφισμός. Ο $\phi$ θα λέγεται **αποδεκτός** αν για κάθε ανοιχτή περιοχή $N$ του $1 \in G$ ύπαρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $a \in K^*$ για το οποίο ισχύει $|a-1|_u < \delta$ για κάθε $u \in S$, να ισχύει $\phi((a)^S) \in N$.

Η ιδιαίτερη σημασία των ομομορφισμών αυτών έγκειται στο γεγονός ότι υπάρχει μοναδική ανύψωσή τους στην ομάδα των *idele* του σώματός μας. Συγκεκριμένα έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 4.3.3** Έστω $S$ πεπερασμένο σύνολο θέσεων του $K$ τέτοιο ώστε $S_\infty \subset S$, και έστω $G$ συμπαγής αβελιανή ομάδα. Αν $\phi : I^S \to G$ είναι ένας αποδεκτός ομομορφισμός, τότε θα υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\hat{\phi} : J_K \to G$, δηλαδή ανύψωση στην ομάδα των *idele*, ώστε να ισχύουν

1. Ο $\hat{\phi}$ είναι συνεχής
2. Ισχύει $\hat{\phi}(a) = 1$ για κάθε $a \in K^*$, και
3. $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}((x)^S)$ για κάθε $x = (x_u)_u \in J_K$ τέτοιο ώστε $x_u = 1$ για κάθε $u \in S$.

.

**Παρατήρηση 4.3.1** Ως άμεσο πόρισμα της δεύτερης ιδιότητας του παραπάνω Θεωρήματος, έχουμε ότι, η ανύψωση $\hat{\phi}$ του παραπάνω αποδεκτού ομομορφισμού μπορεί να θεωρηθεί σαν ομομορφισμός της ομάδας των κλάσεων *idele* $C_K$ στην ομάδα $G$.

Υπενθυμίζουμε ότι μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει για κάθε αβελιανή επέκταση $E$ του $K$ έναν ομομορφισμό $I^{S_E} \to Gal(E/K)$, το σύμβολο *Artin*, και θέλουμε να τον ανυψώσουμε στην ομάδα των *idele* του σώματος $K$.

Η δεύτερη μορφή της αμοιβαιότητας *Artin* έχει ως άμεσο πόρισμά της ότι ο παραπάνω ομομορφισμός θα είναι αποδεκτός. Η ομάδα $Gal(E/K)$ είναι συμπαγής, αφού είναι πεπερασμένη, και επομένως είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το παραπάνω Θεώρημα για τους αποδεκτούς ομομορφισμούς.

**Πόρισμα 4.3.1** Το σύμβολο *Artin* ανυψώνεται κατά μοναδικό τρόπο σε έναν συνεχή ομομορφισμό της ομάδας κλάσεων *idele*, $C_K$ στην ομάδα $Gal(E/K)$.

Ο παραπάνω ομομορφισμός $C_K \to Gal(E/K)$ θα λέγεται **απεικόνιση *Artin* της επέκτασης $E/K$** και θα συμβολίζεται με $\theta_{E/K}$.

Η απεικόνιση *Artin* μιας αβελιανής επέκτασης συνδέεται με τις απεικονίσεις τοπικής αντιστροφής των πληρώσεων των δύο αυτών σωμάτων, τις οποίες είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η σύνδεση μας δείχνει ότι η απεικόνιση *Artin* αποτελεί για τα σώματα αριθμών το ανάλογο των απεικονίσεων τοπικής αντιστροφής για τα τοπικά σώματα.

**Θεώρημα 4.3.4** Έστω $E/K$ μια αβελιανή επέκταση, $u \in M_K$ και $w \in M_E$, θέσεις των $K$ και $E$ αντίστοιχα, με $w|u$. Θεωρούμε, ακόμα, $i_u : K_u^* \to C_K$ να είναι η σύνθεση της απεικόνισης $K_u^* \hookrightarrow J_K$, που στέλνει το $K_u^*$ στην υποομάδα $\{x \in J_K | x_v = 1 \ \forall v \in M_K, v \neq u\}$ του $J_K$, με τον φυσικό επιμορφισμό $J_K \to C_K$. Τότε η απεικόνιση *Artin* της $E/K$ και η απεικόνιση τοπικής αντιστροφής της επέκτασης $E_w/K_u$ σχετίζονται μέσω της σχέσης $\theta_{E/K} \circ i_u = \theta_{E_w/K_u}$ ως ομομορφισμοί $K_u^* \to Gal(E/K)$.

Θα έχουμε δηλαδή το εξής διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} J_K & \longrightarrow & C_K \\ \Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\theta_{E/K}} \\ K_u^* & \xrightarrow{\theta_{E_w/K_u}} & Gal(E/K) \end{array}$$

.

Τέλος, έχουμε και μια ακόμα ισχυρότερη μορφή της Αμοιβαιότητας $Artin$.

**Θεώρημα 4.3.5** (Αμοιβαιότητα $Artin$, Τρίτη μορφή) Έστω $E/K$ μια πεπερασμένη αβελιανή επέκταση $Galois$ αριθμητικών σωμάτων και $S_E$ το σύνολο των μερών του $K$ που αποτελείται από τα πεπερασμένα μέρη που διακλαδίζονται στο $E$ καθώς και από τα άπειρα μέρη του $K$. Αν το $a \in K^*$ είναι νόρμα κάποιου στοιχείου του $E_w$, για κάθε $w \in M_E$ που είναι πάνω από κάποιο στοιχείο του $S_E$, τότε $((a)^{S_E}, E/K) = 1$.

Απόδειξη: Βρίσκεται στο $[Ta - 2]$, στη σελίδα 176.

Με τη βοήθεια του παραπάνω Θεωρήματος είμαστε σε θέση να περιγράψουμε καλύτερα την απεικόνιση $Artin$ μια αβελιανής επέκτασης.

**Θεώρημα 4.3.6** Έστω $E/K$ μια πεπερασμένη αβελιανή επέκταση $Galois$ σωμάτων αριθμών. Η απεικόνιση $Artin$ $\theta_{E/K}$ επάγει έναν ισομορφισμό

$$C_K/N_K^E C_E = J_K/K^* N_K^E J_E \overset{\approx}{\to} Gal(E/K),$$

ενώ για κάθε $idele$, $a = (a_u)_u \in J_K$ έχουμε $\theta_{E/K}(a) = \prod_{u \in M_K} \theta_{E/K}(a_u)$, όπου $a_u$ είναι το $idele$ με $u-$συντεταγμένη ίση με $a_u$ και κάθε άλλη συντεταγμένη ίση με 1.

Απόδειξη: Βασίζεται στη Θεωρία των **κύκλων**, οι οποίοι είναι γενίκευση των κλασματικών ιδεωδών, και περιέχεται στις σελίδες 206-207 του $[La - 1]$.

## 4.4 Απεικόνιση *Artin* και θεωρία σωμάτων κλάσεων

Η Καθολική Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων, δηλαδή η Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων για αβελιανές επεκτάσεις, και η απεικόνιση $Artin$ ενός σώματος είναι δύο έννοιες της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών που συνδέονται στενά μεταξύ τους, ενώ οι αποδείξεις τους, στην ανάπτυξη της θεωρίας του αντικειμένου, χρησιμοποιούν τα ίδια εργαλεία και γίνονται ταυτόχρονα.

Πριν ασχοληθούμε με την Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων θα ορίσουμε την απεικόνιση $Artin$ ενός σώματος αριθμών $K$.

Στην προηγούμενη παράγραφο είχαμε ορίσει για κάθε πεπερασμένη αβελιανή επέκταση $Galois$ του σώματος $K$ την απεικόνιση $Artin$ της επέκτασης αυτής, την οποία και συμβολίζαμε με $\theta_{E/K}$. Αν $K^{ab}$ είναι η μέγιστη αβελιανή επέκταση του $K$ όπως ορίστηκε στο 3ο Κεφάλαιο, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $E \subset K^{ab}$ για κάθε πεπερασμένη αβελιανή επέκταση $E$ του $K$. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε αβελιανή επέκταση $E/K$ ισχύει $Gal(E/K) \subset G_K^{ab}$.

Από την κατασκευή της $G_K^{ab}$, για να λάβουμε την απεικόνιση $Artin$ του $K$ θέλουμε να αφήσουμε το $E$ να μεγαλώνει μέσα στο $K^{ab}$ και μας είναι απαραίτητη η συμβατότητα των απεικονίσεων $Artin$ όταν παίρνουμε διαδοχικές αβελιανές επεκτάσεις. Η συμβατότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της απεικόνισης $Artin$ μιας επέκτασης και δίνεται στην ακόλουθη:

**Πρόταση 4.4.1** Έστω αβελιανές επεκτάσεις $E, F$ του $K$ ώστε $K \subset E \subset F$. Τότε $\theta_{F/K}(a)|_E = \theta_{E/K}(a)$ για κάθε $a \in C_K$.

Απόδειξη: Έπεται από τον ορισμό της απεικόνισης *Artin* μιας επέκτασης.

Μπορούμε επομένως να πάρουμε το αντίστροφο όριο των απεικονίσεων *Artin* των αβελιανών επεκτάσεων και να καταλήξουμε σε έναν συνεχή ομομορφισμό $\theta_K : C_K \to G_K^{ab}$. Η απεικόνιση αυτή θα λέγεται **απεικόνιση *Artin* του σώματος *K*** και θα ισχύει η εξής:

**Πρόταση 4.4.2** Η απεικόνιση *Artin* ενός σώματος αριθμών $K$ είναι επί της ομάδας $G_K^{ab}$.

Απόδειξη: Δίνουμε ένα σχέδιο απόδειξης.

Από τη γραφή $J_K = N \times J_K^0$ που είδαμε στην Παρατήρηση 4.2.1, θα έχουμε, αφού $K^* \subset J_K^0$, μια γραφή $C_K \cong N \times C_K^0$.

Η υποομάδα $N$ είναι εξ ορισμού συνεκτική, ενώ η $G_K^{ab}$ είναι πλήρως μη-συνεκτική, και άρα $\theta_K(N) = 1$, και θα έχουμε ότι $\theta_K(C_K^0) = \theta_K(C_K)$, το οποίο είναι συμπαγές σύνολο, αφού το $C_K^0$ είναι συμπαγές σύνολο λόγω του Θεωρήματος 4.2.1.

Αποδεικνύεται ότι περνώντας σε κάποιο τυχαίο πεπερασμένο πηλίκο της $G_K^{ab}$ η $\theta_K$ θα απεικονίζει το $C_K$ επί του πεπερασμένου πηλίκου αυτού, και επομένως, λόγω της κατασκευής της $G_K^{ab}$ ως όριο, η εικόνα $\theta_K(C_K)$ θα είναι πυκνή στην $G_K^{ab}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\theta_K(C_K) = G_K^{ab}$.

Η απεικόνιση *Artin* συνδέεται με τις απεικονίσεις τοπικής αντιστροφής των πληρώσεων του σώματός μας, με τις οποίες έχουμε ήδη ασχοληθεί. Η σύνδεση αυτή έπεται άμεσα από τον ορισμό των εννοιών αυτών και το Θεώρημα 4.3.2.

**Πόρισμα 4.4.1** Έστω $i_u$ οι απεικονίσεις του Θεωρήματος 4.3.4, $\theta_{K_u}$ η απεικόνιση τοπικής αντιστροφής του σώματος $K_u$ και $\theta_K$ η απεικόνιση *Artin* του σώματος $K$. Τότε θα ισχύει $\theta_K \circ i_u = \theta_{K_u}$ ως ομομορφισμοί $K_u \to G_K^{ab}$.

### Καθολική Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων

Η καθολική Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων είναι ένα αποτέλεσμα αντίστοιχο της Τοπικής Θεωρίας Σωμάτων Κλάσεων που είδαμε στο Κεφάλαιο 3, αλλά αναφέρεται στην περίπτωση των αβελιανών επεκτάσεων σωμάτων αριθμών. Δηλαδή παρέχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ αβελιανών επεκτάσεων ενός σώματος αριθμών και ανοιχτών υποομάδων πεπερασμένου δείκτη μιας τοπολογικής πολλαπλασιαστικής ομάδας η οποία σχετίζεται με το σώμα μας, και, όπως θα δούμε, είναι η ομάδα των κλάσεων *idele* του σώματος.

Ξεκινάμε δίνοντας απευθείας το βασικό Θεώρημα της Καθολικής Θεωρίας Σωμάτων Κλάσεων:

**Θεώρημα 4.4.1** Η απεικόνιση $E \mapsto N_K^E C_E$ επάγει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των πεπερασμένων αβελιανών επεκτάσεων του σώματος αριθμών $K$ και των ανοιχτών υποομάδων πεπερασμένου δείκτη της ομάδας κλάσεων των *idele* $C_K$ του $K$. Το σώμα που αντιστοιχεί σε μια τέτοια ανοιχτή υποομάδα $H$ θα είναι το σταθερό σύνολο της υποομάδας $\theta_K(H)$ της ομάδας $G_K^{ab}$.

Απόδειξη: $[La - 1]$

**Παρατηρήσεις 4.4.1** 1. Από τον ορισμό των $C_K$ και $J_K$ καθώς και της τοπολογίας τους έχουμε ότι οι υποομάδες της $C_K$ που εμφανίζονται στο παραπάνω Θεώρημα είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τις ανοιχτές υποομάδες πεπερασμένου δείκτη της ομάδας $J_K$ που περιέχουν το διαγώνια εμφυτευμένο $K^*$. Έτσι, θεωρώντας την απεικόνιση νόρμας ανάμεσα στις ομάδες των *idele* η αντιστοιχία του παραπάνω Θεωρήματος είναι ισοδύναμη με την αντιστοιχία $E \mapsto N_K^E J_E$, η οποία θα είναι ανάμεσα στις παραπάνω υποομάδες και τις πεπερασμένες αβελιανές επεκτάσεις του $K$.

2. Το παραπάνω Θεώρημα, σε συνδυασμό με την καθολική ιδιότητα της προπεπερασμένης πλήρωσης μιας ομάδας, μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ισομορφισμού μεταξύ της ομάδας $G_K^{ab}$ και της προπεπερασμένης πλήρωσης της ομάδας $C_K$.

Τέλος, για τον πυρήνα της απεικόνισης $Artin$ έχουμε την ακόλουθη:

**Πρόταση 4.4.3** Ο πυρήνας της απεικόνισης $Artin$, $\theta_K : C_K \to G_K^{ab}$, θα ισούται με την ταυτοτική συνιστώσα $(C_K)_0$, δηλαδή την συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου της ομάδας $C_K$.

Απόδειξη: Αναφορά στο $[Ta-2]$, σελίδα 173.

# Κεφάλαιο 5

# $L-$Συναρτήσεις και η Εικασία του *Artin*

Η εικασία του *Artin* αποτελεί το έναυσμα της θεωρίας που ανέπτυξε ο *Langlands*, καθώς από την προσπάθεια απόδειξής της ο *Langlands* έφτασε να διατυπώσει τη δική του εικασία. Η εικασία αυτή του *Artin* είναι το αποτέλεσμα της μελέτης πάνω στις $L-$ συναρτήσεις του. Οι συναρτήσεις αυτές που θα ορίσουμε σε λίγο έχουν ως στόχο να μελετήσουν τις κλάσεις *Frobenius* που έχουμε δει. Η περιγραφή των κλάσεων *Frobenius* μας δίνει ουσιώδεις πληροφορίες για την παραγοντοποίηση των πρώτων σε επεκτάσεις σωμάτων αριθμών. Η γνώση και πλήρης περιγραφή αυτής της παραγοντοποίησης αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

## 5.1 Οι $L-$συναρτήσεις του *Artin*

Η ιδέα του *Artin*, στην προσπάθειά του να μελετήσει τις κλάσεις των στοιχείων *Frobenius*, ήταν να προσπαθήσει να περιγράψει τη συμπεριφορά των αναπαραστάσεων της ομάδας *Galois* σε αυτές, δεδομένου ότι η γνώση των αναπαραστάσεων μιας ομάδας μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την ίδια την ομάδα. Η μελέτη της συμπεριφοράς των αναπαραστάσεων αυτών στις κλάσεις των στοιχείων *Frobenius* κωδικοποιείται με την χρήση των $L-$συναρτήσεων του *Artin*.

Θεωρούμε $F/K$ μια επέκταση *Galois* αριθμητικών σωμάτων με ομάδα *Galois* $G$ και $\sigma : G \to GL(V)$ μια μιγαδική αναπαράστασή της, πεπερασμένης διάστασης. Θεωρούμε επίσης ένα πρώτο ιδεώδες $p$ του $K$ καθώς και ένα πρώτο ιδεώδες $P$ του $O_F$ με $P|p$ και θέτουμε $q = |O_K/p|$ .

Η $L-$συνάρτηση της αναπαράστασης $\sigma$ ορίζεται ως το γινόμενο *Euler* κάποιων τοπικών $L-$παραγόντων $L_p(s,\sigma)$, δηλαδή $L(s,\sigma,F/K) = \prod_p L_p(s,\sigma)$, όπου το γινόμενο είναι πάνω από τις πεπερασμένες θέσεις του σώματος $K$.

Ξεκινάμε από τον οριμό των τοπικών παραγόντων για τις αδιακλάδιστες θέσεις της επέκτασης, ο οποίος είναι απλούστερος αλλά και προηγήθηκε ιστορικά του ορισμού των παραγόντων των αδιακλάδιστων θέσεων της επέκτασης.

Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση που το $p$ είναι αδιακλάδιστο, θα ορίζεται καλά ένα στοιχείο *Frobenius*, $Fr_P$, στην υποομάδα $G_P$ της $G$.

**Ορισμός 5.1.1** Έστω $p$ ένα πρώτο ιδεώδες του $K$, αδιακλάδιστο στο $F$. Ορίζουμε τον **τοπικό $L-$παράγοντα** της $\sigma$ στο $p$ να είναι η συνάρτηση

$$L_p(s,\sigma) = det(1 - \sigma(Fr_P)q^{-s})^{-1},$$

για $Res > 0$.

**Παρατήρηση 5.1.1** Θα ισχύει $L_p(s,\sigma) = \prod_{i=1}^{dimV}(1-\epsilon_i q^{-s})^{-1}$, όπου τα $\epsilon_i$ είναι οι ιδιοτιμές του $\sigma(Fr_P)$. Οι $\epsilon_i$ είναι ρίζες της μονάδας, αφού ο $Fr_P$, και άρα και ο $\sigma(Fr_P)$, είναι πεπερασμένης τάξης. Η γραφή αυτή δείχνει ότι ο ορισμός του τοπικού $L-$παράγοντα $L_p$ δεν εξαρτάται από το $P$, αλλά μόνο από το $p$, δεδομένου ότι, καθώς αλλάζει το $P$, το $Fr_P$ θα κινείται σε μια κλάση ισοδυναμίας της $G_P$ στην $G$.

Η περίπτωση των διακλαδισμένων πρώτων είναι ελαφρώς πιο πολύπλοκη, καθώς δεν έχουμε κάποιο στοιχείο *Frobenius* στην $G_P$, αλλά μια γενικότερη ανύψωση της μορφής $Fr_P i_P$, όπου $i_P \in I_P$. Σε αυτή την περίπτωση η επιλογή κάποιου στοιχείου *Frobenius* δεν είναι κανονική, δηλαδή με μονοσήμαντο τρόπο, ώστε να εξετάσουμε την συμπεριφορά της αναπαράστασης σε αυτό. Για αυτό το λόγο θεωρούμε τον υπόχωρο $V^{I_P}$ του $V$ στον οποίο η $\sigma(I_P)$ δρα ως ταυτότητα, δηλαδή $V^{I_P} = \{v \in V | \sigma(i_P)v = v, \forall i_P \in I_P\}$. Η $\sigma(G_P)$ θα διατηρεί αυτόν τον υπόχωρο, και η δράση της $\sigma(Fr_P)$ στον χώρο αυτόν είναι καλά ορισμένη ανεξαρτήτως της επιλογής του $Fr_P$.

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε τους $L-$παράγοντες των διακλάδισμένων πρώτων.

**Ορισμός 5.1.2** Έστω $p$ ένας διακλάδισμένος πρώτος της επέκτασης $F/K$. Ο **τοπικός $L-$παράγοντας της θέσης** $p$ του σώματος $K$ ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$L_p(s,\sigma) = det(1-\sigma(Fr_P)|_{V^{I_P}} q^{-s})^{-1},$$

για $Res > 0$.

**Παρατήρηση 5.1.2** Γράφοντας τον $L-$παράγοντα ως γινόμενο με χρήση των ιδιοτιμών, όπως στην παραπάνω παρατήρηση, βλέπουμε ότι και στην περίπτωση των διακλαδισμένων πρώτων ο ορισμός μας είναι ανεξάρτητος της επιλογής του πρώτου $P \in Spec(O_F)$ με $P|p$.

Οι $L-$συναρτήσεις του *Artin* ικανοποιούν καλές ιδιότητες, τις οποίες συνοψίζουμε στο παρακάτω:

**Θεώρημα 5.1.1** Έστω $F/K$ μια επέκταση *Galois* σωμάτων αριθμών, με ομάδα *Galois* $G$. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. Αν $\sigma$ είναι μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της $G$, τότε η $L(s,\sigma,F/K)$ είναι ολόμορφη για $Re(s) > 1$.

2. Αν $\sigma_1$ και $\sigma_2$ είναι δύο αναπαραστάσεις της $G$, τότε
$$L(s,\sigma_1 \oplus \sigma_2, F/K) = L(s,\sigma_1,F/K)L(s,\sigma_2,F/K).$$

3. Έστω $E$ μια ενδιάμεση επέκταση της $F/K$, ώστε η $E/K$ είναι *Galois*. Έστω ακόμα $H = Gal(F/E)$, η οποία θα είναι μια κανονική υποομάδα της $G$, και $\tilde{\sigma}$ μια αναπαράσταση της $G$ η οποία αποτελεί ανύψωση μιας αναπαράστασης $\sigma$ της $G/H = Gal(E/K)$. Τότε $L(s,\sigma,E/K) = L(s,\tilde{\sigma},F/K)$, και επομένως η *Artin* $L-$συνάρτηση θα εξαρτάται μόνο από το $s$ και από μια συνεχή αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της $Gal(\overline{K}/K)$.

4. Έστω $E$ μια ενδιάμεση επέκταση της $F/K$, ώστε η $E/K$ να μην είναι απαραίτητα *Galois*. Έστω $\sigma_0$ μια αναπαράσταση της $G_0 = Gal(F/E)$. Τότε $L(s, ind_{G_0}^G(\sigma_0), F/K) = L(s,\sigma_0,F/E)$.

Απόδειξη: 1. Αποδεικνύεται με χρήση της Θεωρίας των απειρογινομένων της κλασικής Μιγαδικής Ανάλυσης.

2. Απλή συνέπεια του Ορισμού των $L-$συναρτήσεων.

3. Αποδεικνύεται δείχνοντας την ισότητα των τοπικών $L-$παραγόντων της συνάρτησης.
Η $\tilde{\sigma}$ θα δίνεται από τον τύπο $\tilde{\sigma}(g) = \sigma(gH)$.
Αν $p$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες του $O_K$ και $\mathfrak{p}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες του $O_F$ που είναι πάνω από το $p$, τότε γνωρίζουμε ότι θα ισχύει

$$\left[\frac{F/K}{\mathfrak{p}}\right] x = Fr_{\mathfrak{p}} x \equiv x^{N(p)} (mod \mathfrak{p}), \text{ για κάθε } x \in O_F.$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι, από την συμπεριφορά των δεικτών διακλάδωσης σε επεκτάσεις, αν το $p$ είναι αδιακλάδιστο στο $F$ θα είναι αδιακλάδιστο και στο $E$. Υποθέτουμε πρώτα ότι το $p$ είναι αδιακλάδιστο.

Εφόσον $E \subset F$ θα έχουμε ότι η παραπάνω σχέση θα ισχύει και για κάθε $x \in O_E$. Από το γεγονός ότι η επέκταση $E/K$ είναι $Galois$ θα έχουμε ότι $\forall x \in E$ και $\forall g \in G$ θα ισχύει $g(x) \in E$. Αν $P \in Spec(O_E)$ με $P|p$ και $\mathfrak{p}|P$, θα έχουμε ότι

$$\left[\frac{F/K}{\mathfrak{p}}\right] x \equiv x^{N(p)} (mod P), \text{ για κάθε } x \in O_E, \text{ και}$$

$$\left[\frac{F/K}{\mathfrak{p}}\right] Hx \equiv x^{N(p)} (mod P), \text{ για κάθε } x \in O_E.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$det\left(1 - \tilde{\sigma}(Fr_{\mathfrak{p}}) q^{-s}\right) = det\left(1 - \sigma\left(\left[\frac{F/K}{\mathfrak{p}}\right]\right) q^{-s}\right) =$$

$$= det\left(1 - \sigma\left(\left[\frac{E/K}{\mathfrak{p}}\right]\right) q^{-s}\right).$$

Άρα οι τοπικοί παράγοντες είναι ίσοι.
Στην περίπτωση των αδιακλάδιστων θέσεων η απόδειξη προχωράει όμοια.

4. Υπάρχει στο $[He]$, σελίδα 222. $\square$

Έχοντας εισάγει τις $L-$συναρτήσεις του, ο στόχος του $Artin$ ήταν η μετάφραση του προβλήματος της μελέτης των κλάσεων των στοιχείων $Frobenius$ σε ένα πρόβλημα αναλυτικής φύσεως για την αντίστοιχη συνάρτηση, καθώς και η αναγνώριση της $L-$συνάρτησης σε κάποια άλλη μορφή, για την οποία να γνωρίζουμε ότι έχει καλές αναλυτικές ιδιότητες, μέσω των οποίων θα μπορούμε να εξάγουμε πληροφορίες για τους συντελεστές της $L-$συνάρτησης, οι οποίοι κωδικοποιούν την συμπεριφορά της κλάσης $Fr_p$.

Απότερος σκοπός του $Artin$ ήταν η απόδειξη της εξής εικασίας που διατύπωσε:

**Εικασία *Artin*** Έστω $F/K$ μια πεπερασμένη επέκταση $Galois$ αριθμητικών σωμάτων και $\sigma$ μια μη-τετριμμένη ανάγωγη αναπαράσταση της $Gal(F/K)$. Τότε η $L(s, \sigma, F/K)$ επεκτείνεται σε ακέραια στο $\mathbb{C}$ συνάρτηση.

**Παρατήρηση 5.1.3** Θετική ένδειξη για την ισχύ της παραπάνω εικασίας αποτελεί η ύπαρξη μερόμορφων συνεχίσεων για τις πληρώσεις των $L-$ συναρτήσεων που θα ορίσουμε. Όπως θα δούμε στο τέλος αυτού του Κεφαλαίου, με χρήση του Θεωρήματος του $Brauer$, από τη Θεωρία Αναπαραστάσεων, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές έχουν μερόμορφη συνέχιση και ικανοποιούν μία καλή συναρτησιακή εξίσωση.

### 5.1.1 Η πλήρωση της $L-$συνάρτησης του *Artin*

Όπως και στην περίπτωση των $L-$συναρτήσεων του *Dirichlet*, για να καταλήξουμε σε μια καλή συναρτησιακή εξίσωση χρειάζεται να προσθέσουμε στον ορισμό της $L-$συνάρτησης *Artin* μιας αναπαράστασης $\sigma$ κάποιους $\Gamma-$παράγοντες. Οι $\Gamma-$παράγοντες αυτοί μπορούν, όπως θα δούμε σε λίγο, να θεωρηθούν και ως τοπικοί παράγοντες στις αρχιμήδειες θέσεις του σώματός μας.

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θεωρούμε $F/K$ μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* σωμάτων αριθμών με ομάδα *Galois* $G = Gal(F/K)$ και $\sigma$ μια πεπερασμένης διάστασης μιγαδική ανάγωγη και μη-τετριμμένη αναπαράστασή της.

Η πλήρωση της $L-$σύναρτησης *Artin* της $\sigma$, την οποία θα συμβολίζουμε με $\Lambda(s,\sigma,F/K)$, θα είναι της μορφής $\Lambda(s) = A(\sigma)^{s/2}\gamma_\sigma(s)L(s,\sigma,F/K)$, όπου $A(\sigma)$ είναι μια σταθερά και $\gamma_\sigma$ είναι ένα γινόμενο $\Gamma-$παραγόντων.

#### Οι Γ-παράγοντες

Ξεκινάμε με την περιγραφή της $\gamma_\sigma$.

Αρχικά θέτουμε $\gamma(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$. Η $\gamma_\sigma$ θα ορίζεται ως το πεπερασμένο γινόμενο $\gamma_\sigma(s) = \prod_{u\in S_\infty}\gamma_\sigma^u(s)$, όπου $S_\infty$ είναι το σύνολο των αρχιμήδειων θέσεων του $K$.

Οι συναρτήσεις $\gamma_\sigma^u(s)$, μία για κάθε αρχιμήδεια θέση, ορίζονται με τη βοηθεία της $\gamma(s)$. Συγκεκριμένα, αν $u$ είναι μία **μιγαδική θέση**, τότε ορίζουμε την $\gamma_\sigma^u(s)$ να δίνεται από τον τύπο $\gamma_\sigma^u(s) = [\gamma(s)\gamma(s+1)]^{dimV}$.

Ο ορισμός της $\gamma_\sigma^u(s)$ στην περίπτωση που η $u$ είναι **πραγματική θέση** είναι ελαφρώς πιο πολύπλοκος.

Αν $u$ είναι μία πραγματική θέση του $K$ και $w$ μία θέση του $F$, με $w|u$, τότε ορίζεται η ομάδα $G(w) = \{g \in G | gw = w\}$, η οποία θα έχει τάξη 1 ή 2, ίση με το βαθμό της επέκτασης των τοπικών σωμάτων $F_w/K_u$. Ο γεννήτορας της $G(w)$, που θα συμβολίζουμε με $g_w$, θα έχει ρόλο αντίστοιχο με του στοιχείου *Frobenius* στην περίπτωση των πεπερασμένων θέσεων και ορίζεται ως προς συζυγία από την θέση $u$.

Ο διανυσματικός χώρος $V$ της αναπαράστασης $\sigma$, θα μπορεί να γραφεί στη μορφή $V = V_u^+ \oplus V_u^-$, όπου $V_u^\pm$ είναι οι ιδιόχωροι των ιδιοτιμών $\pm1$ του $\sigma(g_w)$, για κάποιο σταθερό $w$.

Ορίζουμε τότε την $\gamma_\sigma^u(s)$ να είναι η συνάρτηση

$$\gamma_\sigma^u(s) = \gamma(s)^{dimV_u^+}\gamma(s+1)^{dimV_u^-}.$$

**Παρατήρηση 5.1.4** Ο παραπάνω ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής της θέσης $w$ του σώματος $F$, λόγω της ανεξαρτησίας της επιλογής της κλάσης συζυγίας του $g_w$ στην ομάδα $G$.

#### Ο Ορισμός της Σταθεράς A(σ)

Ο ορισμός της σταθεράς $\mathrm{A}(\sigma)$ χρησιμοποιεί την έννοια του *conductor*, αλλά και τις ομάδες διακλάδωσης, που εμφανίζεται στην Θεωρία Σωμάτων Κλάσεων.

**Ορισμός 5.1.3** Για κάθε $i \geq -1$ ορίζουμε την $i-$οστή **ομάδα διακλάδωσης** $G_i$ να είναι τα $\sigma \in Gal(k_F/k_K)$ τα οποία δρουν τετριμμένα στο $A_F/p_F^i$, όπου $A_F$ είναι ο δακτύλιος εκτίμησης του σώματος υπολοίπων $k_F$ και $p_F$ το μοναδικό μέγιστο ιδεώδες του.

**Παρατήρηση 5.1.5** Αποδεικνύεται, στο $[Se-2]$ ότι θα ισχύει $G_{-1} = Gal(k_F/k_K)$, $G_0$ θα είναι η ομάδα αδρανείας $I_P$ και θα ισχύει $G_i = 1$ για $i$ αρκούντως μεγάλο.

Αρχικά θεωρούμε ένα $p \in Spec(O_K)$ και ένα $P \in Spec(O_F)$ με $P|p$, καθώς και τις ομάδες διακλάδωσης $G_i, i \geq 0$, όπου $G_0$ θα είναι η ομάδα αδρανείας $I_P$. Ορίζουμε τότε

$$n(\sigma, p) = \sum_{i \geq 0} \frac{g_i}{g_0} codim V^{G_i},$$

όπου $g_i = |G_i|$, και $V^{G_i} = \{v \in V | gv = v, \forall g \in G_i\}$.

Για τον αριθμό αυτό ισχύει το εξής:

**Θεώρημα 5.1.2** (*Artin*) Ισχύει ότι $n(\sigma, p) \in \mathbb{Z}$, όπου $\sigma$ και $p$ είναι όπως παραπάνω.
Απόδειξη: Υπάρχει στο $[Se - 2]$, αποδεικνύεται στις παραγράφους $(VI, \S 2)$ και $(VI, \S 3)$.

Στην περίπτωση που το πρώτο ιδεώδες $p$ είναι αδιακλάδιστο, θα ισχύει ότι $G_i = \{1\}$, $\forall i \geq 0$, και άρα $n(\sigma, p) = 0$.

Επομένως, εφόσον όλα εκτός από πεπερασμένα πρώτα ιδεώδη του $K$ είναι αδιακλάδιστα στο $F$, το ιδεώδες $p^{n(\sigma,p)}$ θα ισούται με το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας των κλασματικών ιδεωδών του $K$, για όλα εκτός από πεπερασμένα από τα πρώτα ιδεώδη.

Άρα το γινόμενο $\prod\limits_p p^{n(\sigma,p)}$, πάνω από όλα τα πρώτα ιδεώδη του $K$, είναι στην πραγματικότητα πεπερασμένο και άρα ορίζει καλά ένα κλασματικό ιδεώδες του σώματος $K$.

**Ορισμός 5.1.4** Το κλασματικό ιδεώδες $\prod\limits_p p^{n(\sigma,p)}$, θα συμβολίζεται με $\vartheta(\sigma, F/K) = \vartheta(\sigma)$ και λέγεται ***Artin conductor*** της $\sigma$.

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε την σταθερά $A(\sigma)$. Συγκεκριμένα ορίζουμε

$$A(\sigma) = |d_K|^{\chi(1)} N_{K/\mathbb{Q}}(\vartheta(\sigma)),$$

όπου $d_K$ είναι η απόλυτη ορίζουσα του σώματος αριθμών $K$, και $\chi$, όπως πριν, ο χαρακτήρας της αναπαράστασης $\sigma$.

Πριν διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα για τις συναρτήσεις $\Lambda$, μας είναι απαραίτητος ο ακόλουθος:

**Ορισμός 5.1.5** Έστω $\sigma : G \to GL(V)$ μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης. Η ***contragradient* αναπαράσταση** της $\sigma$ ορίζεται να είναι η αναπαράσταση $\sigma^* : G \to GL(V^*)$, όπου $V^*$ ο δυϊκός του $V$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\langle \sigma^*(g) f, x \rangle = \langle f, \sigma(g)^{-1} x \rangle$, για κάθε $g \in G$, $x \in V$ και $f \in V^*$.

**Θεώρημα 5.1.3** Έστω $\Lambda$ η πλήρης $L-$συνάρτηση της αναπαράστασης $\sigma$,

$$\Lambda(s) = A(\sigma)^{s/2} \gamma_\sigma(s) L(s, \sigma, F/K), \text{ για } Re(s) > 1.$$

Τότε η $\Lambda$ έχει μερόμορφη συνέχιση στο $\mathbb{C}$ και ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση $\Lambda(1 - s, \sigma) = W(\sigma)\Lambda(s, \sigma^*)$, για κάποια σταθερά $W(\sigma)$ μέτρου 1 που καλείται *Artin* αριθμός ρίζας.

## 5.2 Χαρακτήρες *Hecke*, η περίπτωση των αβελιανών επεκτάσεων

Το πρώτο θετικό αποτέλεσμα προς την απόδειξη της εικασίας του το έδωσε ο ίδιος ο *Artin*, αποδεικνύοντας την ισχύ της στην περίπτωση των αβελιανών επεκτάσεων σωμάτων αριθμών. Συγκεκριμένα κατάφερε να αποδείξει την ισότητα της $L-$συνάρτησης *Artin* μιας αναπαράστασης με την *Hecke* $L-$σύναρτηση ενός χαρακτήρα *Hecke*. Οι συναρτήσεις αυτές, οι οποίες είχαν εισαχθεί και μελετηθεί από τον *Hecke* στις αρχές του 20ου αιώνα, ικανοποιούν καλές συναρτησιακές εξισώσεις και έχουν καλές αναλυτικές συνεχίσεις.

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θεωρούμε ένα σταθερό σώμα αριθμών $K$.

Με τον όρο **χαρακτήρας** μιας ομάδας θα εννούμε έναν συνεχή ομομορφισμό της ομάδας στην πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{C}^*$. Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε χαρακτήρας μίας πεπερασμένης ομάδας είναι αυτομάτως ορθομοναδιαίος.

**Ορισμός 5.2.1** Κάθε χαρακτήρας της ομάδας κλάσεων *idele*, $C_K$, θα λέγεται **χαρακτήρας *Hecke*** ή ***Grossencharacter*** του $K$.

**Παρατήρηση 5.2.1** Λόγω του φυσικού επιμορφισμού $J_K \to C_K$, μπορούμε να θεωρούμε κάθε χαρακτήρα *Hecke* σαν χαρακτήρα της ομάδας $J_K$ που στέλνει την υποομάδα $K^*$ στο ταυτοτικό στοιχείο του $\mathbb{C}^*$.

Για κάθε χαρακτήρα *Hecke* $\varphi$ του $K$ θέλουμε να ορίσουμε μια $L-$συνάρτηση, την $L-$συνάρτηση *Hecke* του χαρακτήρα $\varphi$. Ο ορισμός αυτός γίνεται, όπως και των $L-$συναρτήσεων *Artin*, μέσω ενός απειρογινομένου *Euler*. Συγκεκριμένα θέτουμε:

$$L(s,\varphi) = \prod_p L_p(s,\varphi), \qquad (2.1)$$

όπου το γινόμενο είναι πάνω από κάποιες, άπειρες το πλήθος, θέσεις του $K$ και οι $L_p$ είναι κατάλληλοι τοπικοί παράγοντες.

Απ΄ την δεύτερη παράγραφο του προηγούμενου Κεφαλαίου, γνωρίζουμε ότι σε κάθε πεπερασμένη θέση $u$ του $K$ αντιστοιχεί ένα πρώτο ιδεώδες $p$ του δακτυλίου $O_K$. Η πολλαπλασιαστική ομάδα $K_u^* = K_p^*$, που αντιστοιχεί σε αυτή της θέση μπορεί να εμφυτευθεί με φυσικό τρόπο στην ομάδα $J_K$ των *idele* του $K$. Συγκεκριμένα, θα εμφυτεύεται στην υποομάδα

$$\{x = (x_w)_w \in J_K | x_w = 1 \ \forall w \neq u\},$$

την οποία θα συμβολίζουμε επίσης με $K_p^*$.

Λόγω της παραπάνω παρατήρησης, μπορούμε να θεωρήσουμε τον περιορισμό του $\varphi$ στην $K_p^*$ και έτσι θα έχουμε έναν χαρακτήρα $\varphi_p : K_p^* \to \mathbb{C}^*$. Οι θέσεις που εμφανίζονται στο απειρογινόμενο που ορίζει την $L-$συνάρτηση είναι αυτές στις οποίες οι παραπάνω χαρακτήρες έχουν κατάλληλη συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, δίνεται ο εξής:

**Ορισμός 5.2.2** Έστω $K$, $p$ και $\varphi$ όπως παραπάνω, και έστω $O_p$ ο δακτύλιος των ακεραιών της πλήρωσης $K_p$. Λέμε ότι το $p$ είναι **διακλαδισμένο για την** $\varphi$ αν ο περιορισμός $\varphi_p|_{O_p^*}$ είναι μη τετριμμένος.

**Παρατήρηση 5.2.2** Ο *Chevalley* απέδειξε ότι για τους χαρακτήρες αυτούς θα ισχύει $\varphi = \prod_u \varphi_u$, όπου $u$ οι θέσεις του $K$, και ότι οι απεικονίσεις $\varphi_u : K_u \to \mathbb{C}$ θα είναι συνεχείς.

Οι θέσεις που θα εμφανίζονται στο απειρογινόμενο (2.1) είναι αυτές που είναι αδιακλάδιστες για τον χαρακτήρα *Hecke*, δηλαδή αυτές στις οποίες $\varphi_p|_{O_p^*} = 1$. Στην περίπτωση αυτή, τους τοπικούς $L-$παράγοντες στις θέσεις αυτές δίνει ο ακόλουθος:

**Ορισμός 5.2.3** Έστω $K$, $p$, $O_p$, και $\varphi$ όπως παραπάνω και $\varpi_p$ ένα πρώτο στοιχείο του $O_p$. Ορίζουμε τον **τοπικό $L-$παράγοντα** στη θέση $p$ να είναι η συνάρτηση

$$L_p(s,\varphi) = \left(1 - \tfrac{\varphi_p(\varpi_p)}{|O_K/p|^s}\right)^{-1}.$$

Έτσι, ο αρχικός μας ορισμός της $L-$συνάρτησης του χαρακτήρα $\varphi$ παίρνει την μορφή

$$L(s,\varphi) = \prod_{p \in S} L_p(s,\varphi) = \prod_{p\in S}(1 - \frac{\varphi_p(\varpi_p)}{|O_K/p|^s})^{-1},$$

όπου $S$ είναι το σύνολο των πεπερασμένων θέσεων του $K$, οι οποίες είναι αδιακλάδιστες για τον χαρακτήρα *Hecke* $\varphi$.

### Οι πληρώσεις των $L$−συναρτήσεων

Όπως και στην περίπτωση των $L$−συναρτήσεων *Artin*, θέλουμε να ορίσουμε κάποιες πληρώσεις για τις $L$−συναρτήσεις του *Hecke* τις οποίες θα συμβολίζουμε πάλι με $\Lambda$.

Οι συναρτήσεις αυτές θα έχουν την μορφή $\Lambda(s,\chi) = B(\chi)s/2L_\infty(s,\chi)L(s,\chi)$, όπου, όπως στην περίπτωση των *Artin* $L$−συναρτήσεων, η $B(\chi)$ είναι μια σταθερά και $L_\infty(s,\chi)$ είναι το γινόμενο κάποιων $\Gamma$−παραγόντων.

Ξεκινάμε με τον ορισμό της $L_\infty(s,\chi)$.

**Ορισμός 5.2.4** Έστω $\chi$ ένας χαρακτήρας *Hecke* του $K$. Ορίζουμε

$$L_\infty(s,\chi) = \prod_{1\le l\le r_1} \pi^{-\frac{s+p_l-iq_l}{2}}\Gamma(\frac{s+p_l-iq_l}{2}) \prod_{1\le j\le r_2} 2(2\pi)^{-(s+p'_j-iq'_j)}\Gamma(s+p'_j-iq'_j),$$

όπου $r_1$ είναι το πλήθος των πραγματικών θέσεων του $K$ και $r_2$ το πλήθος των μιγαδικών θέσεων του $K$. Οι αριθμοι $p_l$ είναι ίσοι με 0 ή 1, οι $p'_j$ ακέραιοι και οι $q$ είναι κάποιοι πραγματικοί αριθμοί.

**Παρατήρηση 5.2.3** Η επιλογή των $p$ και $q$ στον παραπάνω ορισμό έχει να κάνει με την μορφή των χαρακτήρων της ομάδας $(\mathbb{R}^*)^{r_1} \times (\mathbb{C}^*)^{r_2}$.

### Η Σταθερά $\mathbf{B}(\sigma)$

Η σταθερά $B(\sigma)$ ορίζεται όμοια με την αντίστοιχη σταθερά $A(\sigma)$ στην περίπτωση των $L$−συναρτήσεων *Artin*.

Συγκεκριμένα, ορίζουμε $B(\sigma) = |d_K|N_{K/\mathbb{Q}}(f_\chi)$, όπου $d_K$ είναι η απόλυτη διακρίνουσα του $K$, και $f_\chi$ είναι ο *conductor* του χαρακτήρα $\chi$.

Έστω $H_\chi$ ο πυρήνας του $\chi$ στην $C_K$. Ο *conductor* του χαρακτήρα *Hecke* ορίζεται να είναι ο ελάχιστος κύκλος, δηλαδή τυπικό γινόμενο της μορφής $c = \prod_{u\in M_K} u^{m(u)}$ με ακεραίους $m(u) \ge 0$, για το οποίο θα ισχύει $W_c = \prod_{m(u)>0} W_c(u) \prod_{m(u)=0} U_u \subset H_\chi$, όπου:

1. $U_u = O_u^*$, αν $u$ πεπερασμένη θέση και $U_u = K_u^*$ αν $u$ είναι άπειρη θέση,
2. Το $W_c(u)$ είναι η ομάδα $\mathbb{R}^+$, αν $u$ πραγματική θέση, ή η ομάδα $\mathbb{C}^*$, αν $u$ είναι μιγαδική θέση, ή η ομάδα $1 + m_p^m(u)$, αν η θέση $u$ αντιστοιχεί στο πρώτο ιδεώδες $p$, όπου εδώ $m_p$ είναι το μέγιστο ιδεώδες του πλήρους τοπικού δακτυλίου $O_p \subset K_p$.

Οι $L$−συναρτήσεις αυτές έχουν καλές αναλυτικές ιδιότητες, οι οποίες αποδείχτηκαν αρχικά από τον *Hecke* με χρήση της θεωρίας των $\theta$−συναρτήσεων και αργότερα από τον *Tate* στην διδακτορική του διατριβή με χρήση της θεωρίας των *adele* και μεθόδων αρμονικής ανάλυσης. Οι ιδιότητες αυτές συνοψίζονται στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 5.2.1** Έστω $\chi$ ένας χαρακτήρας *Hecke* του $K$. Τότε η συνάρτηση $\Lambda(s,\chi,F/K)$, που ορίζεται για $Re(s) > 1$, έχει μερόμορφη συνέχιση στο $\mathbb{C}$ και ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$\Lambda(s,\chi,F/K)=W(\chi)\Lambda(1-s,\overline{\chi},F/K),$$

όπου $W(\chi)$ είναι μια σταθερά μέτρου 1.

Τέλος, η $\Lambda$ έχει το πολύ δύο πόλους, τάξης το πολύ ένα, ενώ στην περίπτωση που $\chi\neq 1$, δηλαδή όταν ο χαρακτήρας είναι μη-τετριμμένος, η $\Lambda$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Μια απόδειξη με σύγχρονα μέσα του αποτελέσματος αυτού πρωτοεμφανίστηκε στη διατριβή του *J. Tate*, $[Ta-1]$. Η διατριβή του *Tate* χρησιμοποιεί τόσο Αρμονική Ανάλυση, όσο και την θεωρία των *adeles*. Οι συναρτήσεις θήτα που χρησιμοποίησε ο *Hecke* για την απόδειξη του αποτελέσματος αντικαθιστόνται ουσιαστικά από τον τύπο του *Poisson* στην αρμονική ανάλυση.

Η σύνδεση των $L-$συναρτήσεων του *Artin* με αυτές του *Hecke* έγινε από τον *Artin* και δίνει θετική απάντηση στην εικασία του, στην περίπτωση των αβελιανών επεκτάσεων σωμάτων αριθμών. Συγκεκριμένα, ο *Artin* απέδειξε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 5.2.2** Έστω $F/K$ μια πεπερασμένη αβελιανή επέκταση *Galois* σωμάτων αριθμών, με ομάδα *Galois* $G=Gal(F/K)$, και $\omega$ ένας χαρακτήρας της $G$, δηλαδή μια μονοδιάστατη αναπαράσταση της $G$.

Τότε η $L-$συνάρτηση *Artin* της $\omega$, $L(s,\omega,F/K)$, είναι ίση με την *Hecke* $L-$συνάρτηση $L(s,\varphi)$ του χαρακτήρα *Hecke* $\varphi=\omega\circ\theta_{F/K}$, όπου $\theta_{F/K}$ είναι η συνάρτηση αμοιβαιότητας του *Artin*.

Απόδειξη: Έστω $H\leq G=Gal(F/K)$ ο πυρήνας του χαρακτήρα $\omega$ και $E=Fix(H)$, το σταθερό σώμα της $H$. Τότε η επέκταση $E/K$ θα είναι πεπερασμένη αβελιανή επέκταση *Galois* και ο $\omega$ ανάγεται σε χαρακτήρα $\omega_0$ της $Gal(E/K)$ ο οποίος θα είναι ακόμα ένα προς ένα.

Από την ιδιότητα 4 του Θεωρήματος 5.1.1, για τις ιδιότητες της $L-$συνάρτησης *Artin*, θα ισχύει $L(s,\omega,F/K)=L(s,\omega_0,E/K)$. Ακόμα από τον ορισμό της $\omega_0$ και τις ιδιότητες των απεικονίσεων $\theta_{E/K}$ και $\theta_{F/K}$ θα έχουμε ότι ισχύει:

$$\phi=\omega\circ\theta_{F/K}=\omega_0\circ\theta_{E/K}.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμα για τον χαρακτήρα $\omega_0$, δηλαδή να δείξουμε ότι $L(s,\phi)=L(s,\omega_0,E/K)$. Η απόδειξη θα γίνει δείχνοντας την ισότητα των αντίστοιχων τοπικών παραγόντων.

**Ισχυρισμός**: Αν ένα πρώτο ιδεώδες $p\in Spec(O_K)$ είναι μη-τετριμμένο, τότε το $p$ θα είναι αδιακλάδιστο για τον χαρακτήρα *Hecke* $\phi$ αν και μόνο αν είναι αδιακλάδιστο για την επέκταση $E/K$.

**Απόδειξη Ισχυρισμού**: Έστω $S$ το σύνολο των άπειρων θέσεων του $K$ και των θέσεων που διακλαδίζονται στην επέκταση $E$.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $p\notin S$ και έστω $x_p\in O_p^*$. Από το Θεώρημα 4.3.3 έχουμε

$$\begin{aligned}\phi_p(x_p)=\phi((\ldots,1,x_p,1,\ldots))=\phi((\{x_p\})^S)=\omega_0\circ\theta_{E/K}((\{x_p\})^S)=\\=\omega_0\left(\left[\tfrac{E/K}{(1)}\right]\right)=1.\end{aligned}$$

Άρα το πρώτο ιδεώδες $p$ θα είναι αδιακλάδιστο για τον χαρακτήρα *Hecke* $\phi$.

Αντίστροφα, έστω $p$ ένα αδιακλάδιστο πρώτο ιδεώδες$-$θέση για τον χαρακτήρα *Hecke*.

Τότε θα έχουμε ότι $\phi_p|_{O_p^*}=\omega_0\circ\theta_{E/K}\circ i_p|_{O_p^*}=1$ και επομένως, από το Θεώρημα 4.3.4, θα έχουμε ότι

$$\omega_0\circ\theta_{E_P/K_p}|_{O_p^*}=1.$$

Αφού η $\omega_0$ είναι ένα προς ένα θα έχουμε ότι $\theta_{E_P/K_p}|_{O_p^*}=1$.

Σε αυτή την περίπτωση, η οποία είναι ανάλογη με το μεταθετικό διάγραμμα του Κεφαλαίου 3 για την απεικόνιση *Artin* σε τοπικά σώματα, γνωρίζουμε ότι η $\theta_{E_P/K_p}$ επάγει ισομορφισμό ανάμεσα στην ομάδα $O_p^*$ και την αντίστοιχη ομάδα διακλάδωσης $I_P$[1], και άρα ο πρώτος $p$ θα είναι αδιακλάδιστος για την επέκταση $E$.

[1] $[La-1]$ Πρόταση 4, Παράγραφος $(XI,\S 4)$

Έχοντας αποδείξει τον παραπάνω ισχυρισμό, περνάμε στη σύγκριση των τοπικών παραγόντων ξεκινώντας από τους τοπικούς παράγοντες των διακλαδισμένων πρώτων. Σε αυτή την περίπτωση ο τοπικός παράγοντας για τον χαρακτήρα *Hecke* $\phi$ θα είναι εξ ορισμού 1. Ο τοπικός παράγοντας για την $L(s,\omega_0,E/K)$ θα δίνεται από τον τύπο $(1-\omega_0(Fr_P)|_{\mathbb{C}^{I_P}}q^{-s})^{-1}$. Αφού, όμως, η $\omega_0$ είναι ένα προς ένα και η ομάδα $I_P$ είναι μη τετριμμένη θα έχουμε $\mathbb{C}^{I_P}=0$ και άρα πάλι ο παράγοντας στη θέση $p$ θα είναι ίσος με 1.

Τέλος, υποθέτουμε ότι η θέση $p$ είναι αδιακλάδιστη και με τις δύο έννοιες. Το Θεώρημα 4.3.4 μας δίνει τον τύπο

$$\phi_p=\phi\circ i_p=\omega_0\circ\theta_{E/K}\circ i_p=\omega_0\circ\theta_{E_P/K_p}.$$

Για τον $\omega_0$ θα έχουμε, εξ ορισμού, $L_p(s,\omega_0,E/K)=(1-\omega_0(Fr_P)q^{-s})^{-1}$.

Από την άλλη, για την $\phi$ από τον ορισμό και την παραπάνω σχέση θα έχουμε ότι

$$L_p(s\phi)=(1-\phi_p(\varpi_p)q^{-s})^{-1}=(1-\omega_0\theta_{E_P/K_p}(\varpi_p)q^{-s})^{-1}.$$

Από το Θεώρημα 3.3.2 θα έχουμε ότι $\theta_{E_P/K_p}(\varpi_p)=Fr^{u(\varpi_p)}$, όμως $u(\varpi_p)=1$. Άρα καταλήγουμε ότι

$$L_p(s\phi)=(1-\omega_0(Fr_P)q^{-s})^{-1}.$$

Επομένως οι τοπικοί παράγοντες των $L-$συναρτήσεων των $\phi$ και $\omega_0$ θα είναι ίσοι και άρα το ίδιο θα ισχύει και για τις $L-$συναρτήσεις τους. □

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε το εξής:

**Πόρισμα 5.2.1** Αν $F/K$ είναι μια πεπερασμένη αβελιανή επέκταση *Galois* σωμάτων αριθμών και $\omega$ είναι ένας μη-τετριμμένος χαρακτήρας της ομάδας $Gal(F/K)$, τότε η $L-$συνάρτηση *Artin* του $\omega$, $L(s,\omega,F/K)$, επεκτείνεται σε μια ακέραια συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Για τον τετριμμένο χαρακτήρα $\omega=1$, η $L(s,1,F/K)$ επέκτείνεται σε μια μερόμορφη στο $\mathbb{C}$ συνάρτηση με έναν απλό πόλο στο $s=1$.

**Παρατήρηση 5.2.4** Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των $L-$συναρτήσεων *Artin*, του Θεωρήματος 5.1.1, και το προηγούμενο Θεώρημα του *Artin* λαμβάνουμε καταφατική απάντηση για την Εικασία του *Artin* και σε άλλες περιπτώσεις πεπερασμένων επεκτάσεων *Galois* $F/K$.

Πράγματι, από την ιδιότητα 4 του Θεωρήματος, προκύπτει ότι η *Artin* $L-$συνάρτηση οποιασδήποτε αναπαράστασης της ομάδας $Gal(F/K)$ η οποία επάγεται από μια μη-τετριμμένη μονοδιάστατη αναπαράσταση έχει ακέραια επέκταση.

Χάρη στο γεγονός αυτό, όσες επεκτάσεις έχουν ομάδα *Galois* μια *monomial* ομάδα, δηλαδή μια πεπερασμένη ομάδα της οποίας κάθε ανάγωγη αναπαράσταση επάγεται από κάποια μονοδιάστατη αναπαράσταση κάποιας υποομάδας της, θα ικανοποιούν την Εικασία του *Artin*.

Τέλος, χάρη στο Θεώρημα Επαγωγής του *Brauer*, στη θεωρία αναπαραστάσεων, λαμβάνουμε σημαντικές πληροφορίες για την πλήρωση $\Lambda$ της $L-$συνάρτησης *Artin* μιας αναπαράστασης. Συγκεκριμένα οι συναρτήσεις αυτές θα έχουν μερόμορφες συνεχίσεις στο $\mathbb{C}$ και θα ικανοποιούν συναρτησιακές εξισώσεις όμοιες με αυτές που ικανοποιούν οι *Hecke* $L-$συναρτήσεις.

**Θεώρημα 5.2.3** (Επαγωγής του *Brauer*) Έστω $G$ μια πεπερασμένη ομάδα. Τότε, κάθε χαρακτήρας της $G$ είναι γραμμικός συνδιασμός, με ακέραιους συντελεστές, χαρακτήρων που επάγονται από γραμμικούς χαρακτήρες, δηλαδή χαρακτήρες μονοδιάστατων αναπαραστάσεων, υποομάδων της $G$.

**Θεώρημα 5.2.4** Έστω $F/K$ μια πεπερασμένη επέκταση *Galois* αριθμητικών σωμάτων με ομάδα *Galois* $G$ και $\sigma$ μια μη-τετριμμένη ανάγωγη αναπαράσταση της $G$. Τότε, η $L-$συνάρτηση *Artin* της $\sigma$ θα έχει μερόμορφη συνέχιση στο $\mathbb{C}$ και θα ικανοποιεί μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής $\Lambda(s,\sigma,F/K)=\epsilon(s,\sigma,F/K)\Lambda(1-s,\sigma^*,F/K)$, όπου $\sigma^*$ είναι η *contragradient* αναπαράσταση της $\sigma$ και $\epsilon(s,\sigma,F/K)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση που δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Σχέδιο Απόδειξης[2]: Αρχικά αποδεικνύουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες 2, 3 και 4 του Θεωρήματος 5.1.1 για τις συναρτήσεις $\Lambda$.

Οι ιδιότητες 2 και 3 αποδεικνύονται εύκολα τόσο για την $\gamma_\sigma$ όσο και για τη σταθερά $A(\sigma)$, και επομένως αποδεικνύονται και για την $\Lambda$. Η ιδιότητα 4 για την $A(\sigma)$ αποδεικνύεται με χρήση της ιδιότητας της μεταβατικότητας της διακρίνουσας, ενώ θα ισχύει και για την $\gamma_\sigma$ και τελικά θα ισχύει και για την συνάρτηση $\Lambda$.

Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα *Brauer* χρειαζόμαστε να έχουμε χαρακτήρες, δηλαδή μονοδιάστατες αναπαραστάσεις. Οι $L-$συναρτήσεις μπορούν να οριστούν ισοδύναμα και ως συναρτήσεις που θα αντιστοιχούν στον χαρακτήρα της αναπαράστασης $\sigma$ αντί για την αναπαράσταση. Έτσι, μπορούμε να θεωρούμε ότι

$$L(s,\sigma)=L(s,\chi),$$

όπου $\chi$ ο χαρακτήρας της $\sigma$, και οι παραπάνω ιδιότητες των $\Lambda$ (δηλαδή η προσθετικότητα ως προς χαρακτήρες κ.λπ.) θα ισχύουν και στην περίπτωση των χαρακτήρων.

Από το Θεώρημα *Brauer* βρίσκουμε κατάλληλες υποομάδες $H_i$ της $G$ και χαρακτήρες $\chi_i$ αυτών, με $1\le i\le n$, ώστε $\chi=\sum\limits_i n_i\chi_i$. Από τις παραπάνω ιδιότητες καταλήγουμε στη σχέση

$$\Lambda(s,\chi)=\prod_{i=1}^{n}\Lambda(s,\chi_i)^{n_i}.$$

Έστω $H_i'$ ο πυρήνας της $\chi_i$, $F_i=Fix(H_i)$ και $F_i'=Fix(H_i')$. Οι επεκτάσεις $F_i'/F_i$ θα είναι κυκλικές, με ομάδα *Galois* $G_i=H_i/H_i'$. Αν $\chi_i'$ είναι ο χαρακτήρας που επάγει η $\chi_i$ στην $G_i$, τότε θα έχουμε

$$\Lambda(s,\chi_i)=\Lambda(s,\chi_i').$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.2.2 και να πάρουμε χαρακτήρες *Hecke* $\psi_i$ ώστε

$$\Lambda(s,\chi_i)=\Lambda(s,\psi_i).$$

Από το Θεώρημα 5.2.1 για τις συναρτήσεις των χαρακτήρων *Hecke* καταλήγουμε στο συμπέρασμά μας. $\square$

[2]Βασίζεται στην απόδειξη που βρίσκεται στις σελίδες 15 έως 17 του $[Mart]$.

# Κεφάλαιο 6

# Γενικές Γραμμικές Ομάδες

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το βασικότερο, ίσως, έναυσμα του προγράμματος *Langlands* είναι η απόδειξη της εικασίας του *Artin*. Η ιδέα του *Langlands* ήταν να ορίσει $L-$συναρτήσεις κάποιων αντικειμένων οι οποίες να έχουν τον ρόλο των $L-$συναρτήσεων *Hecke* στο Θεώρημα 5.2.2 της προηγούμενης παραγράφου. Τα αντικείμενα αυτά, που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις. Για να ορίσουμε την έννοια αυτή, είναι απαραίτητο να περιγράψουμε τις γενικές γραμμικές ομάδες πάνω από τον δακτύλιο των *adele*.

Στο κεφάλαιο αυτό, πέραν του ορισμού των ομάδων αυτών, θα δούμε και κάποια βασικά αποτελέσματα για τη δομή τους τα οποία θα χρειαστούμε στην συνέχεια.

## 6.1 Γενική γραμμική ομάδα και *adeles*

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, θεωρούμε $K$ ένα σώμα αριθμών, $M_K$ το σύνολο των θέσεων του και $S_\infty$ το σύνολο των αρχιμήδειων θέσεων.

Για τον αντιμεταθετικό δακτύλιο $\mathbb{A}_K$ των αδελε του σώματος K μπορούμε να θεωρήσουμε την γενική γραμμική ομάδα $GL_n(\mathbb{A}_K)$.

**Ορισμός 6.1.1** Ορίζουμε $GL_n(\mathbb{A}_K)$ να είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου $End_{\mathbb{A}_K}(\mathbb{A}_K^n)$.

Η παραπάνω ομάδα μπορεί να περιγραφεί και ως περιορισμένο ευθύ γινόμενο. Η περιγραφή αυτή είναι θεμελιώδης για την ανάπτυξη της θεωρίας των αυτομορφικών αναπαραστάσεων.

Έστω $u$ μια θέση του $K$ και $GL(n, K_u) = GL_n(K_u)$ η $n-$οστή γενική γραμμική ομάδα πινάκων με τιμές στο $K_u$. Μπορούμε να εισάγουμε μια τοπολογία στην ομάδα $GL_n(K_u)$, αν τη θεωρήσουμε σαν ένα ανοιχτό υποσύνολο του διανυσματικού χώρου $K_u^{n^2}$, και το αποτέλεσμα είναι μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Στην περίπτωση που η παραπάνω θέση $u$ είναι πεπερασμένη, μπορούμε να θεωρήσουμε την υποομάδα $GL_n(O_u)$ της $GL_n(K_u)$, η οποία μάλιστα θα είναι συμπαγής ως υποομάδα της $GL_n(K_u)$.

Όπως και στην περιγραφή της κατασκευής των *adele* και *idele* του σώματος $K$ μπορούμε να θεωρήσουμε το περιορισμένο ευθύ γινόμενο των ομάδων $GL_n(K_u)$ ως προς τις ομάδες $GL_n(O_u)$. Το αποτέλεσμα της κατασκευής αυτής είναι μια τοπικά συμπαγής ομάδα η οποία θα συμπίπτει με την ομάδα $GL_n(\mathbb{A}_K)$ όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω.

**Παρατηρήσεις 6.1.1** 1. Όπως και στην περίπτωση των *adele*, τα στοιχεία της ομάδας αυτής θα είναι ακολουθίες πινάκων, με τον πίνακα της $u-$οστής συντεταγμένης να είναι στοιχείο της $GL_n(K_u)$, και όλοι εκτός από πεπερασμένους το πλήθος από αυτούς τους πίνακες θα ανήκουν στις αντίστοιχες υποομάδες $GL_n(O_u)$.

2. Η τοπολογία της ομάδας $GL_n(\mathbb{A}_K)$ είναι η τοπολογία που επάγει η κατασκευή του περιορισμένου ευθέος γινομένου, δηλαδή η τοπολογία του ευθέος ορίου των ομάδων $GL_n(\mathbb{A}_K(S))$, με $S$ πεπερασμένο και $S_\infty \subset S$, όπου $GL_n(\mathbb{A}_K(S)) = \prod_{u \in S} GL_n(K_u) \times \prod_{u \notin S} GL_n(O_u)$. Από τον ορισμό του ευθέος ορίου, οι υποομάδες $GL_n(\mathbb{A}_K(S))$ της ομάδας $GL_n(\mathbb{A}_K)$ θα είναι ανοιχτές.

3. Η τοπολογία μας μπορεί να περιγραφεί εναλλακτικά θεωρώντας τον ενδομορφισμό $GL_n(\mathbb{A}_K) \to M_{n+1}(\mathbb{A}_K)$ που θα δίνεται από τον τύπο $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & (detx)^{-1} \end{pmatrix}$, όπου εδώ ταυτίζουμε τον δακτύλιο των πινάκων $M_{n+1}(\mathbb{A}_K)$ με τον χώρο διάστασης $(n+1)^2$ πάνω από τον δακτύλιο των $adele$. Η τοπολογία μας είναι η ίδια με αυτή που θα επάγεται στο υποσύνολο του $(n+1)^2$-διάστατου χώρου από την τοπολογία του χώρου.

Από αυτήν την περιγραφή της τοπολογίας βλέπουμε ότι η υποομάδα $GL_n(K_{diag})$, όπου $K_{diag}$ είναι η διαγώνια εμφύτευση του $K$ στον δακτύλιο $\mathbb{A}_K$, που θα συμπίπτει με την διαγώνια εμφύτευση της υποομάδας $GL_n(K)$, θα είναι διακριτή υποομάδα της $GL_n(\mathbb{A}_K)$. Η υποομάδα αυτή από εδώ και στο εξής θα συμβολίζεται με $GL_n(K)$.

## 6.2 Διπλά σύμπλοκα

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των γενικών γραμμικών ομάδων του δακτυλίου $\mathbb{A}_K$, τις οποίες θα χρειαστούμε στην συνέχεια, σχετίζονται, όπως θα δούμε, με κάποια σύνολα διπλών συμπλόκων.

Το βασικό αποτέλεσμα από το οποίο έπονται όλες οι ιδιότητες αυτές είναι το ακόλουθο Θεώρημα των $Borel$ και $Harish - Chandra$.

**Θεώρημα 6.2.1** Έστω $GL_n(\mathbb{A}_K)$ όπως παραπάνω. Τότε το σύνολο των διπλών συμπλόκων $GL_n(K)\backslash GL_n(\mathbb{A}_K)/GL_n(\mathbb{A}_K(S_\infty))$ είναι πεπερασμένο και ισούται με τον αριθμό κλάσεων του σώματος $K$.

**Παρατήρηση 6.2.1** Η ομάδα $GL_n(\mathbb{A}_K(S_\infty))$ στο παραπάνω θέωρημα μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε ανοιχτή υποομάδα πεπερασμένου δείκτη της $GL_n(\mathbb{A}_K)$ και το πλήθος των διπλών συμπλόκων θα συνεχίζει να παραμένει πεπερασμένο.

Αρχικά, θα χρειαστούμε κάποιες συγκεκριμένες υποομάδες $GL_n(\mathbb{A}_K)$.

Θεωρούμε πρώτα την υποομάδα $G_\infty = GL_n(K_\infty)$, όπου $K_\infty$ είναι το αρχιμήδειο κομμάτι του $\mathbb{A}_K$. Η ομάδα $G_\infty$ μπορεί να περιγραφεί, αν θεωρήσουμε τα στοιχεία της ομάδας μας όπως στην Παρατήρηση 6.1.1, και ως το σύνολο των ακολουθιών στις οποίες κάθε πεπερασμένη θέση-συντεταγμένη είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Η $G_\infty$ θα λέγεται αρχιμήδειος παράγοντας της $GL_n(\mathbb{A}_K(S_\infty))$.

Η υποομάδα $GL_n(\mathbb{A}_K(S_\infty))$ γράφεται $GL_n(\mathbb{A}_K(S_\infty)) = G_\infty \times H_1$, όπου $H_1 = \prod_{u \notin S_\infty} GL_n(O_u) = GL_n(\prod_{u \notin S_\infty} O_u)$ είναι ο μη-αρχιμήδειος παράγοντας της $GL_n(\mathbb{A}_K)$.

Θεωρούμε τώρα μια ανοιχτή υποομάδα πεπερασμένου δείκτη $H$ της $H_1$. Τότε το παραπάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας γραφής της μορφής

$$GL_n(\mathbb{A}_K) = \coprod_{c \in C} GL_n(K) c G_\infty H, \qquad (6.0)$$

όπου $C$ είναι κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο της $GL_n(\mathbb{A}_K)$, το οποίο θα είναι το σύνολο των αντιπροσώπων των διπλών συμπλόκων. Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα $c$ έχουν 1 στο αρχιμήδειο κομμάτι τους. Ορίζουμε ακόμα, για $c \in C$, τις εξής ομάδες:

1. $G_c = G_\infty cHc^{-1}$

2. $\Gamma_c = c^{-1}G(K)c \cap (G_\infty H)$.

Οι ομάδες $G_c$ θα είναι ανοιχτές στην $GL_n(\mathbb{A}_K)$ και οι ομάδες $\Gamma_c$ θα είναι συζυγείς με διακριτές υποομάδες των αντίστοιχων $G_c$, αφού, όπως έχουμε δει, η $GL_n(K)$ είναι διακριτή υποομάδα της $GL_n(\mathbb{A}_K)$.

Αφού η υποομάδα $H$ είναι συμπαγής, καθώς είναι υποομάδα πεπερασμένου δείκτη της $H_1$, το ίδιο θα ισχύει και για τις $cHc^{-1}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την προβολή στις άπειρες θέσεις, μπορούμε να ταυτίσουμε την $\Gamma_c$ με μια διακριτή υποομάδα της $G_\infty$.

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $f$ ορισμένη στην ομάδα $GL_n(\mathbb{A}_K)$ που είναι δεξιά αναλλοίωτη από την υποομάδα $H$ και αριστερά αναλλοίωτη από την $GL_n(K)$. Για κάθε $c \in C$ μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση $f_c$ με πεδίο ορισμού την $G_\infty$ μέσω του τύπου $f_c(x) = f(cx)$.

Τότε η απεικόνιση $f \mapsto \{f_c\}_{c\in C}$ αποτελεί, λόγω της σχέσης (6.0), μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ συναρτήσεων του συνόλου

$$GL_n(K)\backslash GL_n(\mathbb{A}_K)/H,$$

των διπλών συμπλόκων και των συναρτήσεων του συνόλου $\coprod_{c\in C}(\Gamma_c\backslash G_\infty)$.

Η αντιστοιχία αυτή μας επιτρέπει να ταυτίσουμε τα δύο σύνολα. Συγκεκριμένα έχουμε την σχέση:

$$GL_n(K)\backslash GL_n(\mathbb{A}_K)/H = \coprod_{c\in C}(\Gamma_c\backslash G_\infty). \qquad (6.1)$$

**Παρατήρηση 6.2.2** Η παραπάνω σχέση, αν και χρήσιμη αφού το δεξί μέλος της είναι απλούστερο του δεξιού, αποκρύπτει μέρος της δράσης της γενικής γραμμικής ομάδας των *adele* σε αυτές τις συναρτήσεις.

Η χρησιμότητα της παραπάνω σχέσης φαίνεται περισσότερο στην περίπτωση που $H = H_1$, και το σύνολο $C$ των κλάσεων είναι μονοσύνολο, κάτι που ισχύει στα παρακάτω:

**Παραδείγματα** 1. Θεωρούμε την περίπτωση $n = 1$, δηλαδή την περίπτωση της αφινικής ευθείας, και $K$ να είναι ένα τυχαίο σώμα αριθμών. Τότε $|C| = 1$ και η σχέση μας γράφεται $K\backslash\mathbb{A}_K/\prod_p O_{K_p} = O_K\backslash K_\infty$.

2. Ομοίως, στην περίπτωση που $n$ είναι κάποιος φυσικός αριθμός και $K = \mathbb{Q}$ θα ισχύει $C = 1$, αφού ο αριθμός κλάσεων του $\mathbb{Q}$ είναι 1, και η σχέση μας γράφεται

$$GL_n(\mathbb{Q})\backslash GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\prod_p GL_n(\mathbb{Z}_p) = GL_n(\mathbb{Z})\backslash GL_n(\mathbb{R}). \qquad (6.2)$$

**Παρατηρήσεις 6.2.3** 1. Στο πρώτο μας παράδειγμα το γεγονός ότι $|C| = 1$, οφείλεται στο ότι η αφινική ευθεία $GL_1$ ικανοποιεί την ιδιότητα ισχυρής προσέγγισης, δηλαδή η υποομάδα $GL_1(K)G_\infty = K^*K_\infty^*$ είναι πυκνή στην $GL_1(\mathbb{A}_K) = \mathbb{A}_K^* = J_K$.

2. Το δεύτερο παράδειγμα, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, σχετίζεται με τις *Modular* μορφές.

# Κεφάλαιο 7

# Αυτομορφικές Μορφές

Ο *Langlands*, με σκοπό να αποδείξει την εικασία του *Artin*, εντόπισε την κατάλληλη έννοια που στην $n-$διάστατη περίπτωση θα αντιστοιχεί στο Θεώρημα 5.2.2 στους χαρακτήρες *Hecke*. Αυτή είναι η έννοια της αυτομορφικής αναπαράστασης. Οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις και οι αυτομορφικές μορφές αποτελούν υπό μία έννοια γενίκευση των κλασικών *Modular* μορφών.

Σε αυτό το Κεφάλαιο ξεκινάμε κάνοντας μια σύντομη περίληψη της θεωρίας των *modular* μορφών, καθώς και της σύνδεσης αυτών με τις αναπαραστάσεις της $SL_2(\mathbb{R})$, και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον ορισμό της έννοιας των αυτομορφικών μορφών της ομάδας $GL_n(\mathbb{A}_K)$.

## 7.1 *Modular* μορφές

Οι *Modular* μορφές είναι μερόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες στο άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, οι οποίες ικανοποιούν ορισμένες συναρτησιακές εξισώσεις ως προς τη δράση της *modular* ομάδας $SL_2(\mathbb{Z})$. Οι *Modular* μορφές διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο στη σύγχρονη Θεωρία Αριθμών και μελετήθηκαν, με τη σύγχρονη μορφή τους, στις αρχές του 19ου αιώνα από τον *Hecke*.

Έστω $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ το άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου και $\Gamma$ η ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$.

Από την κλασική Θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τα στοιχεία της ομάδας πινάκων $GL_2(\mathbb{R})^+$ σαν σύμμορφους αυτομορφισμούς του $\mathbb{H}$. Συγκεκριμένα, θεωρούμε κάθε $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R)^+$ ως τον αυτομορφισμό $g(z) = az + b/cz + d$ του $\mathbb{H}$. Επομένως, στον χώρο των συναρτήσων $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη δράση από δεξιά της παραπάνω ομάδας μέσω της σχέσης

$$g \cdot f(z) = f(g(z)) = f(gz).$$

Η περιγραφή της συναρτησιακής εξίσωσης των *Modular* μορφών, που θα προέρχεται από την παραπάνω δράση πινάκων, περιγράφεται μέσω του **παράγοντα αυτομορφίας** $j$.

**Ορισμός 7.1.1** Για κάθε $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ ορίζουμε, για $z \in \mathbb{C}$ με $Im(z) \neq 0$, τη συνάρτηση $j(g, z) = (cz + d)(detg)^{1/2}$. Η $j$ θα λέγεται **παράγοντας αυτομορφίας**.

**Παρατήρηση 7.1.1** Ο παραπάνω ορισμός στις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε δεν αντιμετωπίζει προβλήματα, ως προς την επιλογή της ρίζας της ορίζουσας, καθώς οι δυνάμεις του $j$ που θα εμφανίζονται θα είναι άρτιες.

Η δράση που μας ενδιαφέρει είναι η δράση των **υποομάδων ισοδυναμίας** της $\Gamma$, δηλαδή των υποομάδων $\Gamma'$ που θα περιέχουν μια υποομάδα

$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d \equiv 1 (mod N), b \equiv c \equiv 0 (mod N) \right\}$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η $\Gamma'$ είναι μια **υποομάδα ισοδυναμίας επιπέδου** $N$.

**Ορισμός 7.1.2** Έστω $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ μια μερόμορφη συνάρτηση. Έστω $\Gamma'$ μια υποομάδα ισοδυναμίας με $\Gamma(N) \subset \Gamma'$. Ορίζουμε για κάθε $\gamma \in \Gamma'$ και κάθε $k$ φυσικό αριθμό τη συνάρτηση $f(z)|[\gamma]_k = j(\gamma, z)^k f(gz)$.

Η $f$ θα λέγεται ***modular* συνάρτηση** βάρους $k$ για την $\Gamma'$ αν

1. $f(z)|[\gamma]_k = f(z)$ για κάθε $\gamma \in \Gamma'$ και κάθε $z \in \mathbb{H}$, και
2. για κάθε $\gamma_0 \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ η συνάρτηση $f(z)|[\gamma_0]_k$ έχει γραφή της μορφής $\sum a_n q_N^n$, όπου $q_N = e^{2\pi i z/N}$ και $a_n = 0$ για κάθε $n << 0$.

**Παρατήρηση 7.1.2** Η δεύτερη συνθήκη του παραπάνω ορισμού αφορά την συμπεριφορά της συνάρτησης στα *cusps*, δηλαδή τις κλάσεις ισοδυναμίας των σημείων $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ της δράσης της $\Gamma'$ στην πλήρωση του άνω ημιεπιπέδου $\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$.

Η ύπαρξη ενός τέτοιου $q_N-$αναπτύγματος σε δυναμοσειρά μιας $f$ με περίοδο 1 είναι ισοδύναμη με την απαίτηση η $f$ να είναι μερόμορφη στο $\infty$. Επομένως, η δεύτερη συνθήκη του παραπάνω ομομορφισμού είναι στην πραγματικότητα μια απαίτηση η $f$ να είναι μερόμορφη στα *cusps*.

**Ορισμός 7.1.3** 1. Μια *modular* συνάρτηση $f$ θα λέγεται ***modular* μορφή** βάρους $k$ για την υποομάδα $\Gamma'$, αν $a_n = 0$ για κάθε $n < 0$ για το $q_N-$ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(z)|[\gamma_0]_k$ και για κάθε $\gamma_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Ο χώρος των *modular* μορφών βάρους $k$ για την υποομάδα $\Gamma'$ θα συμβολίζεται με $M_k(\Gamma')$.

2. Μια *modular* μορφή $f$ θα λέγεται ***cusp* μορφή** βάρους $k$ για την υποομάδα $\Gamma'$ αν, επιπροσθέτως, ισχύει $a_0 = 0$ για το $q_N-$ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(z)|[\gamma_0]_k$ και για κάθε $\gamma_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$. Ο χώρος των *cusp* μορφών βάρους $k$ για την υποομάδα $\Gamma'$ θα συμβολίζεται με $S_k(\Gamma')$.

**Παρατηρήσεις 7.1.3** 1. Για τους χώρους $M_k(\Gamma')$ και $S_k(\Gamma')$ αποδεικνύεται, με χρήση του Θεωρήματος $Riemann - Roch$, ότι είναι πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{C}-$διανυσματικοί χώροι.

2. Βασιζόμενοι στην παραπάνω παρατήρηση βλέπουμε ότι μια *modular* μορφή θα είναι ολόμορφη στα *cusps*, ενώ μια *cusp* μορφή θα έχει ρίζες στα *cusps*.

3. Η συνθήκη για την συμπεριφορά μιας *modular* συνάρτησης στα *cusp* είναι ισοδύναμη με την εξής συνθήκη αργής αύξησης:
$|f(x+iy)| \leq Cy^N$, για κάποια θετική σταθερά $C$ καθώς $y \to \infty$.

4. Η συνθήκη μηδενισμού στα *cusp* μιας *cusp* μορφής είναι ισοδύναμη με την σχέση:

$$\int_0^1 f(x+iy)dx = 0,$$ για κάποιο ή, ισοδύναμα, για κάθε $y > 0$.

Η σχέση αυτή με τη σειρά της μας δίνει ότι κάθε *cusp* μορφή θα ικανοποιεί μια συνθήκη ταχείας ελάττωσης της μορφής $|f(x+iy)| < Cy^{-N}$, όπου $C$ είναι κάποια θετική σταθερά, καθώς $y \to \infty$.

### Βασικά Παραδείγματα

Θα δώσουμε τώρα κάποια βασικά παραδείγματα *modular* και *cusp* μορφών.

## 1. Σειρές *Eisenstein*

Έστω $k$ ένας άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2. Για $z \in \mathbb{H}$ ορίζουμε $G_k(z) = \sum\limits_{(m,n)} \frac{1}{(mz+n)^k}$, όπου το άθροισμα είναι πάνω από τα ζεύγη $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ με $(m,n) \neq (0,0)$. Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει η ακόλουθη:

**Πρόταση 7.1.1** Ισχύει $G_k \in M_k(\Gamma)$ και το $q-$ανάπτυγμα της $G_k$ δίνεται από την σχέση $G_k(z) = 2\zeta(k)\left(1 - \frac{2k}{B_k}\sum\limits_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n\right)$, όπου $B_k$ είναι οι αριθμοί *Bernoulli*, $q = e^{2\pi iz}$, και $\sigma_{k-1}(n) = \sum\limits_{d|n} d^{k-1}$.

Απόδειξη: Η ομάδα $\Gamma$ παράγεται από τους πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, οι οποίοι αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς $z \mapsto z+1$ και $z \mapsto -1/z$ αντίστοιχα. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε τις σχέσεις μόνο για αυτά τα στοιχεία της $\Gamma$.

Η σχέση $G_k(z) = G_k(z+1)$ είναι προφανής από τον ορισμό της σειράς *Eisenstein*. Για τον δεύτερο μετασχηματισμό έχουμε ότι

$$z^{-k}G_k(-1/z) = \sum_{(m,n)} (-m+nz)^{-k} = G_k(z).$$

Τέλος, η σειρά *Fourier* της $G_k$ δεν έχει αρνητικούς όρους στο $\infty$ αφού το όριό της θα είναι πεπερασμένο. Συγκεκριμένα θα ισχύει

$$\lim_{z\to i\infty} \sum_{(m,n)} (mz+n)^{-k} = \sum_{n\neq 0} n^{-k} = 2\zeta(k).$$

Επομένως θα έχουμε $G_k \in M_k(\Gamma)$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό ξεκινάμε με την λογαριθμική παράγωγο για τον τύπο απειρογινομένου του ημιτόνου

$$\pi cot(\pi a) = 1/a + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right),\ a \in \mathbb{H}.$$

Γράφοντας την δεξιά πλευρά ως $\pi i(e^{\pi ia} + e^{-\pi ia})/(e^{\pi ia} - e^{-\pi ia}) = \pi i + 2\pi i/(e^{2\pi ia} - 1)$, πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές με $a$ και αντικαταστήσουμε το $2\pi ia$ με $x$ παίρνουμε τον γνωστό τύπο για την συνάρτηση $\zeta(k)$:

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2}\frac{B_k}{k!},\ \text{για } k > 0 \text{ και άρτιο.}$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε και τις δύο πλευρές της παραπάνω σχέσης ως προς το $a$ και μετά αντικαθιστούμε το $a$ με $mz$ και έχουμε τη σχέση:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}e^{2\pi inmz} = -\frac{2k}{B_k}\zeta(k)\sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1}q^{dm}.$$

Καταλήγουμε έτσι στη σχέση:

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k} =$$

$$= 2\zeta(k)\left(1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{m,d=1}^{\infty} d^{k-1}q^{dm}\right).$$

Μαζεύοντας μαζί τους συντελεστές κάθε δύναμης $q^n$ καταλήγουμε στον τύπο της Πρότασης.
□

Οι $G_k$ λέγονται σειρές *Eisenstein.*

Χρησιμότερες στην θεωρία των *modular* μορφών είναι οι κανονικοποιημένες σειρές *Eisenstein*, που ορίζονται ώστε ο σταθερός όρος του $q-$αναπτύγματός τους να είναι ίσος με 1, δηλαδή ορίζονται ως εξής: $E_k(z) = \frac{1}{\zeta(k)} G_k(z)$.

Οι $E_k$ είναι *modular* μορφές βάρους $k$ για την ομάδα $\Gamma$, λόγω της προηγούμενης πρότασης και του ορισμού τους.

Η σημασία των συναρτήσεων αυτών φαίνεται από την ακόλουθη:

**Πρόταση 7.1.2** Κάθε $f \in M_k(\Gamma)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή
$f(z) = \sum\limits_{4i+6j=k} c_{(i,j)} E_4(z)^i E_6(z)^j$.

Απόδειξη: $[Ko-1]$ Πρόταση 10, Παράγραφος $(III, \S 2)$, σελίδα 118. Χρησιμοποιεί την δομή των χώρων των *Modular* μορφών της ομάδας $\Gamma$ και γίνεται επαγωγικά.

### 2. Η Συνάρτηση Δ

Το σημαντικότερο παράδειγμα *cusp* μορφής είναι αυτό της συνάρτησης $\Delta$.

Η συνάρτηση $\Delta$ ορίζεται, για $z \in \mathbb{H}$, από τον τύπο $\Delta(z) = \frac{(2\pi)^{12}}{1728}(E_4(z)^3 - E_6(z)^2)$.

Η $\Delta$ θα είναι *modular* μορφή ως γραμμικός συνδυασμός τέτοιων και, υπολογίζοντας τον σταθερό όρο στο $q-$ανάπτυγμά της, είναι εύκολο να δούμε ότι είναι μία *cusp* μορφή βάρους 12.

Για την συνάρτηση αυτή ισχύει επίσης η παρακάτω:

**Πρόταση 7.1.3** Ισχύει $(2\pi)^{-12}\Delta(z) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$, όπου $q = e^{2\pi i z}$.

Απόδειξη: Αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση $S_{12}(\Gamma) = \Delta\mathbb{C}$. Για την απόδειξη της Πρότασης αυτής δείχνουμε ότι το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι *cusp* μορφή βάρους 12 για την $\Gamma$ και στη συνέχεια συγκρίνουμε τον συντελεστή του πρωτοβάθμιου όρου στο $q-$ανάπτυγμα για να καταλήξουμε στον παραπάνω τύπο. □

Το $q-$ανάπτυγμα της συνάρτησης $\Delta$ σχετίζεται με την εικασία του *Ramanujan.*

Συγκεκριμένα, έχουμε ότι $\Delta(z) = \sum\limits_{n\geq 1} \tau(n) q^n$. Η συνάρτηση $\tau$ λέγεται συνάρτηση *Ramanujan.*

Ο *Ramanujan* είχε εικάσει ότι η συνάρτηση αυτή θα ικανοποιεί καλές ιδιότητες, συγκεκριμένα ότι είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή ότι $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$, για κάθε $m$ και $n$ πρώτους μεταξύ τους, και ότι έχει κάποια καλά φράγματα.

Η εικασία του *Ramanujan* αποδείχθηκε από τον *Deligne* ως πόρισμα της απόδειξής του των Εικασιών του *Weil.*

## 7.1.1 Η $L-$συνάρτηση μιας *cusp* μορφής

Όπως στις περιπτώσεις των αναπαραστάσεων και χαρακτήρων *Hecke*, έτσι και στην περίπτωση των *cusp* μορφών, ορίζεται για κάθε *cusp* μορφή μια αντίστοιχη $L-$συνάρτηση. Οι $L-$συναρτήσεις αυτές μελετήθηκαν από τον *Hecke* και έχουν καλές ιδιότητες, ανάλογες των αντίστοιχων $L-$συναρτήσεων για χαρακτήρες *Hecke* του 6ου Κεφαλαίου.

Έστω $f \in S_k(\Gamma')$, μια *cusp* μορφή, όπου $\Gamma'$ είναι μια υποομάδα ισοδυναμίας επιπέδου $N$ της $\Gamma$. Τότε, η $f$ θα έχει ένα ανάπτυγμα της μορφής $f(z) = \sum\limits_{n\geq 1} a_n q^n$.

**Ορισμός 7.1.4** Ορίζουμε την ***L*−συνάρτηση της *cusp* μορφής** $f$ να είναι η συνάρτηση $L_f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, όπου $s \in \mathbb{C}$ με $Re(s) > 1 + c$ και $c$ κατάλληλη θετική σταθερά.

Σε αντίθεση με τις $L-$συναρτήσεις που είδαμε στο 6ο Κεφάλαιο, οι $L-$συναρτήσεις αυτές ορίζονται σαν σειρές.

Όπως και στο 6ο Κεφάλαιο, ορίζουμε επίσης την πλήρωση της $L-$συνάρτησης μέσω της σχέσης:

$$\Lambda(s) = (\sqrt{N}/2\pi)^s \Gamma(s) L_f(s).$$

Για τις συναρτήσεις αυτές έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 7.1.1** Έστω $f$, όπως παραπάνω, μια *cusp* μορφή και $\Lambda$ η πλήρωση της $L-$συνάρτησής της. Τότε η $\Lambda$ έχει συνέχιση σε ακέραια συνάρτηση, ενώ ικανοποιεί μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής $\Lambda(s) = C\Lambda(k-s)$, όπου $C$ ισούται με $\pm 1$.

Απόδειξη: Αποδεικνύεται με χρήση του Μετασχηματισμού *Mellin* κατάλληλων συναρτήσεων, και περιέχεται στις σελίδες 140-141, της Παραγράφου $(III, \S 3)$ του $[Ko-1]$.

Ένα σημαντικό ερώτημα, το οποίο όπως θα δούμε εμφανίζεται και στις αυτομορφικές αναπαραστάσεις, είναι το κατά πόσο μπορούμε να αποφανθούμε ότι μια συνάρτηση, η οποία θα δίνεται ως κάποιο $n^{-s}-$ανάπτυγμα, θα είναι η $L-$συνάρτηση μιας *modular* ή *cusp* μορφής.

Την απάντηση στην ερώτηση αυτή μας δίνει το Θεώρημα του *Weil*.

Για κάθε συνάρτηση που δίνεται από κάποιο $q-$ανάπτυγμα της μορφής $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ ορίζουμε ακόμα τις $L-$συναρτήσεις των στροφών με χαρακτήρα *Dirichlet*.

Συγκεκριμένα, για έναν χαρακτήρα *Dirichlet* $\chi$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$L_f(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a_n n^{-s}, \text{ και } \Lambda(\chi, s) = (m\sqrt{N}/(2\pi))^s \Gamma(s) L_f(\chi, s).$$

**Θεώρημα *Weil*** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$, με $q = e^{2\pi i z}$, ικανοποιεί την σχέση $|a_n| = O(n^c)$, όπου $c \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ακόμη ότι η συνάρτηση $\Lambda$, που ορίζεται όπως ακριβώς και για μια *cusp* μορφή, για $C = \pm 1$ έχει την ιδιότητα η συνάρτηση $\Lambda(s) + a_0(1/s + C/(k-s))$ να επεκτείνεται σε μια ακέραια στο $\mathbb{C}$ συνάρτηση, η οποία είναι φραγμένη σε κάθε κάθετη λωρίδα του μιγαδικού επιπέδου, και ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση $\Lambda(s) = C\Lambda(k-s)$.

Ακόμα υποθέτουμε ότι, για ένα αρκούντως μεγάλο σύνολο[1] από χαρακτήρες *Dirichlet* $\chi$ με οδηγό $m$, η συνάρτηση $\Lambda(\chi, s)$ που ορίσαμε παραπάνω επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση η οποία θα είναι ακόμα φραγμένη σε κάθε κάθετη λωρίδα του μιγαδικού επιπέδου και θα ικανοποιεί μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής $\Lambda(\chi, s) = C_\chi \Lambda(\chi, k-s)$, όπου $C_\chi$ είναι μια κατάλληλη σταθερά.

Αν τέλος η συνάρτηση $L_f(s)$ συγκλίνει απόλυτα για $Re(s) > k - \epsilon$, για κάποιο $\epsilon > 0$, τότε η $f$ θα είναι *cusp* μορφή.

## 7.2 Οι τελεστές *Hecke*

Οι τελεστές *Hecke* δρουν στους χώρους των *modular* μορφών και έχουν καλή συμπεριφορά, ενώ είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στην μελέτη των *modular* μορφών. Στις επόμενες παραγράφους θα

[1]Μεγάλο σύνολο από οδηγούς $m$ θα είναι ένα σύνολο που περιέχει κάποιο στοιχείο κάθε αριθμητικής προόδου $\{a + jb : j \in \mathbb{Z}\}$, όπου $a$ και $b$ είναι σχετικά πρώτοι. Αρκούντως μεγάλο σύνολο από χαρακτήρες θα είναι ένα σύνολο από χαρακτήρες που περιέχει όλους τους μη-τετριμμένους χαρακτήρες *modulo* $m$ για ένα μεγάλο σύνολο από $m$, με την παραπάνω έννοια.

συναντήσουμε κάποιες κατασκευές που αποτελούν γενικεύσεις αυτών των τελεστών, τις άλγεβρες *Hecke*, οι οποίες θα γενικεύουν αυτούς τους τελεστές στην περίπτωση των αυτομορφικών μορφών.

Ξεκινάμε με κάποιους ορισμούς και προτάσεις από τη Θεωρία Ομάδων.

Έστω $\Gamma_1$ και $\Gamma_2$ δύο υποομάδες μιας ομάδας $G$.

**Ορισμός 7.2.1** Οι $\Gamma_1$ και $\Gamma_2$ θα λέγονται **συγκρίσιμες** αν η τομή τους έχει πεπερασμένο δείκτη σε κάθε μία τους, δηλαδή αν οι αριθμοί $[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2]$ και $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2]$ είναι πεπερασμένοι.

Το βασικότερο παράδειγμα αυτής της έννοιας που θα χρειαστούμε στη συνέχεια είναι όταν $\Gamma'$ είναι μια υποομάδα ισοδυναμίας επιπέδου $N$ της $SL_2(\mathbb{Z})$ και για $a \in GL_2(\mathbb{Q})^+$ έχουμε την υποομάδα $a^{-1}\Gamma' a$ της $SL_2(\mathbb{Z})$. Οι υποομάδες αυτές είναι συγκρίσιμες, αφού οι αντίστοιχοι δείκτες θα φράζονται από τον δείκτη $[\Gamma : \Gamma(ND)] < \infty$, για κάποιον $D$ φυσικό αριθμό.

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα για διπλά σύμπλοκα.

**Πρόταση 7.2.1** Έστω $\Gamma' \subset G$ μια οποιαδήποτε υποομάδα και $a \in G$ ώστε οι υποομάδες $\Gamma'$ και $a^{-1}\Gamma' a$ είναι συγκρίσιμες. Έστω $H = \Gamma' \cap a^{-1}\Gamma' a$ και $[\Gamma' : H] = d$, ώστε να έχουμε τη γραφή $\Gamma' = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq d} H\gamma_j$. Τότε θα έχουμε μια γραφή $\Gamma' a \Gamma' = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq d} \Gamma' a \gamma_j$, όπου η ένωση αποτελείται από $d$ το πλήθος ξένα δεξιά σύμπλοκα. Θα ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν $\Gamma' a \Gamma' = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq d} \Gamma' a \gamma_j$ είναι μια ξένη ένωση από $d$ το πλήθος δεξιά σύμπλοκα, τότε $\Gamma' = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq d} H\gamma_j$.

Απόδειξη: Απλή άσκηση στη Θεωρία Ομάδων.[2]

Θεωρούμε τώρα $S^+$ μια προσθετική υποομάδα των ακεραίων , δηλαδή $S^+ = m\mathbb{Z}$, για κάποιον φυσικό $m$, και $S^*$ μια υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, ενώ με $S^*$ θα συμβολίζουμε και το υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ του οποίου η εικόνα *modulo* $N$ είναι ίση με $S^*$, στην περίπτωση $N = 1$ θα παίρνουμε πάντα $S^* = \mathbb{Z}$, καταχρηστικά. Οι έννοιες αυτές είναι απαραίτητες για να δοθεί ο ακόλουθος:

**Ορισμός 7.2.2** Έστω $n \in N$. Ορίζουμε

$$\Delta^n(N, S^*, S^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, N|c, a \in S^*, b \in S^+, det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = n \right\}.$$

**Παρατήρηση 7.2.1** Με απλές πράξεις προκύπτει ότι στην περίπτωση $n = 1$ τα παραπάνω σύνολα είναι ομάδες και μάλιστα υποομάδες ισοδυναμίας επιπέδου $N$ της $SL_2(\mathbb{Z})$. Τα σημαντικότερα παραδείγματα είναι τα εξής:

1. $\Gamma_1(N) = \Delta^1(N, \{1\}, \mathbb{Z})$,
2. $\Gamma_0(N) = \Delta^1(N, (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*, \mathbb{Z})$, και
3. $\Gamma(N) = \Delta^1(N, \{1\}, N\mathbb{Z})$.

Θεωρούμε, όπως πριν, $\Gamma'$ μια υποομάδα ισοδυναμίας επιπέδου $N$ της $SL_2(\mathbb{Z})$, και ένα $a \in GL_2(\mathbb{Q})^+$, $H = \Gamma' \cap a^{-1}\Gamma' a$ και $[\Gamma' : H] = d$ και μια γραφή $\Gamma' = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq d} H\gamma_j$, της $\Gamma'$ σαν ξένη ένωση συμπλόκων. Έστω ακόμα $f$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{H}$, που είναι αναλλοίωτη από τη δράση $[\gamma]_k$ για $\gamma \in \Gamma'$.

**Ορισμός 7.2.3** Ορίζουμε $f(z)|[\Gamma' a \Gamma']_k = \sum\limits_{1 \leq j \leq d} f(z)|[a\gamma_j]_k$.

[2] $[Ko - 1]$ Πρόταση 41, στην Παράγραφο $(III, \S 5)$.

Η δράση των διπλών συμπλόκων που μόλις ορίσαμε απολαμβάνει καλές ιδιότητες, τις οποίες συνοψίζουμε στην ακόλουθη:

**Πρόταση 7.2.2** Η $f(z)|[\Gamma' a\Gamma']_k$ δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε το $a$ με κάποιον $a'$ που είναι αντιπρόσωπος του ίδιου διπλού συμπλόκου, δηλαδή $\Gamma' a\Gamma' = \Gamma' a'\Gamma'$. Ακόμα η συνάρτηση δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων $\gamma_j$ της $\Gamma'$ *modulo* την $H$. Τέλος αν $f \in M_k(\Gamma')$ τότε θα ισχύει $f|[\Gamma' a\Gamma']_k \in M_k(\Gamma')$.
Απόδειξη: $[Ko-1]$ Πρόταση 42, στην Παράγραφο $(III, \S 5)$.

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε τους τελεστές *Hecke*.

**Ορισμός 7.2.4** Έστω $\Gamma' = \Delta^1(N, S^*, S^+)$, $n$ ένας φυσικός αριθμός και $f \in M_k(\Gamma')$. Ορίζουμε τον ***n*−οστό τελεστή *Hecke*** να είναι η απεικόνιση $T_n : M_k(\Gamma') \to M_k(\Gamma')$, που δίνεται από τον τύπο $T_n f = (n)^{(k/2)-1} \sum f|[\Gamma' a\Gamma']_k$, όπου το άθροισμα είναι πάνω από όλα τα διπλά σύμπλοκα της $\Gamma'$ στο σύνολο $\Delta^n(N, S^*, S^+)$.

**Παρατήρηση 7.2.2** Ο ορισμός μας είναι καλός, αφού το πλήθος των διπλών συμπλόκων αυτών είναι πεπερασμένο και, λόγω της προηγούμενης πρότασης, $f|[\Gamma' a\Gamma']_k \in M_k(\Gamma')$ για καθένα από τα διπλά σύμπλοκα.

Συχνά μας ενδιαφέρει να εισάγουμε και ορισμένες στροφές με χαρακτήρες *Dirichlet*. Αν $\chi$ είναι ένας χαρακτήρας *Dirichlet modulo* $N$, ορίζουμε τον χώρο

$$S_k(N,\chi) = \left\{ f \in S_k(\Gamma_1(N)) : f|[\gamma]_k = \chi(d) f, \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}.$$

Στον χώρο αυτό ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο, το εσωτερικό γινόμενο *Petersson*, ως προς το οποίο κάθε τελεστής *Hecke* της μορφής $T_p$ με $(p, N) = 1$ θα είναι κανονικός, δηλαδή μετατίθεται με τον συζυγή του. Επίσης, οι τελεστές αυτοί μετατίθενται μεταξύ τους και επομένως θα διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα.

**Πρόταση 7.2.3** Έστω $f \in S_k(N,\chi)$ και $p$ πρώτος αριθμός με $(p, N) = 1$. Έστω ακόμα $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n q^n$, το $q-$ανάπτυγμα της $f$. Τότε, $T_p f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n q^n$, όπου $b_n = \sum\limits_{d|(p,n)} \chi(d) d^{k-1} a_{pn/d^2}$.
Απόδειξη: Η σχέση αυτή προκύπτει από τους παραπάνω ορισμούς και το ακόλουθο:

**Λήμμα 7.2.1** Έστω $(n, N) = 1$, τότε $\Delta^n = \coprod \Gamma_1(N)\sigma_a \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, όπου η ξένη ένωση είναι πάνω από όλους τους θετικούς $a$ που διαιρούν τον $n$ και είναι πρώτοι με τον $N$, και τους $b = 0, 1, \ldots, d-1$, όπου $d = n/a$. Τέλος, το $\sigma_a$ είναι ένα στοιχείο της $\Gamma$ τέτοιο ώστε $\sigma_a \equiv \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} modN$.
Απόδειξη: Είναι το Λήμμα στο $[Ko-1]$ της σελίδας 167, στην Παράγραφο $(III, \S 5)$.

Οι ταυτόχρονες ιδιοτιμές των τελεστών αυτών καλούνται ιδιομορφές. Οι συντελεστές του $q-$αναπτύγματος αυτών των συναρτήσεων έχουν ιδιαιτέρως καλές ιδιότητες.

**Πρόταση 7.2.4** Έστω ότι η $f \in S_k(N,\chi)$ είναι ιδιομορφή για όλους τους τελεστές *Hecke* $T_m$, με ιδιοτιμές $\lambda_m$. Έστω ακόμα $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n q^n$, το $q-$ανάπτυγμα της $f$. Τότε $a_m = \lambda_m a_1$, για κάθε $m$. Ακόμα $a_1 \neq 0$ εκτός αν $k = 0$ ή η $f$ είναι σταθερή.
Τέλος, οι ιδιοτιμές $\lambda_m$ θα δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_m = \sum_{d|m} \chi(d) d^{k-1}.$$

Απόδειξη: Βρίσκεται στις Προτάσεις 39 και 40 του $[Ko-1]$, στην Παράγραφο $(III, \S 5)$.

## 7.3 Ανύψωση των *modular* μορφών

Οι *modular* μορφές συνδέονται με ορισμένες αναπαραστάσεις της $SL_2(\mathbb{R})$. Για να δούμε τη σύνδεση αυτή πρώτα πρέπει να δούμε την ανύψωση των συναρτήσεων αυτών σε συναρτήσεις ορισμένες σε ομάδες πινάκων.

Ξεκινάμε με την ανύψωση στην ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})$.

Έστω $G$ η ομάδα $SL_2(\mathbb{R})$, και θεωρούμε ακόμα τις υποομάδες της $G$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} | a > 0 \right\},\ N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | u \in \mathbb{R} \right\}, \text{ και}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = r(\theta) | 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ισχύει η σχέση $G = NAK$. Άρα για κάθε $g \in G$ μπορούμε να βρούμε κατάλληλα στοιχεία των παραπάνω υποομάδων ώστε να έχουμε μια γραφή του $g$ στην μορφή $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} r(\theta)$, όπου $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο των *cusp* μορφών $S_k(\Gamma')$ και θα ορίσουμε μια απεικόνιση από το $S_k(\Gamma')$ στο σύνολο των συναρτήσεων της $G$.

Ορίζουμε, για κάθε $f \in M_k(\Gamma')$, $\phi_f$ να είναι η συνάρτηση στην $G$ που δίνεται από τον τύπο $\phi_f(g) = f(g(i))j(g,i)^{-k}$, όπου $j$ ο παράγοντας αυτομορφίας.

Οι συναρτήσεις αυτές $\phi_f$ της $G$ ικανοποιούν καλές ιδότητες. Συγκεκριμένα, έχουμε την ακόλουθη:

**Πρόταση 7.3.1** Έστω $f$ και $\phi_f$ όπως παραπάνω. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$, για κάθε $\gamma \in \Gamma'$ και $g \in G$,

2. $\phi_f(gr(\theta)) = e^{-ik\theta}\phi_f(g)$, για κάθε $r(\theta) \in K$,

3. η $\phi_f$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη αργής αύξησης
$|\phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} r(\theta)\right)| \leq Cy^N$, για κάποια σταθερά $C$ καθώς $y \to \infty$, και

4. ισχύει $\Delta\phi_f = -\frac{1}{4}k(k-2)\phi_f$, όπου $\Delta$ είναι μια κανονικοποίηση του τελεστή *Casimir* της ομάδας *Lie* $SL_2(\mathbb{R})$.

5. Αν $f$ είναι *cusp* μορφή τότε η $\phi_f$ θα ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

$\displaystyle\int_{(0,1)} \phi_f\left(\sigma\begin{pmatrix} 1 & xh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = 0$, για κάθε $g \in G$ και $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, όπου $h$ είναι το πλάτος του *cusp* $\sigma(\infty)$ στην $\Gamma'$.

Απόδειξη: Οι παραπάνω ιδιότητες έπονται από τον ορισμό της *modular* μορφής, τη σχέση $G = NAK$ και τον ορισμό της συνάρτησης $\phi_f$.

**Παρατηρήσεις 7.3.1** 1. Ο τελεστής *Casimir* στην περίπτωση μας μπορεί να ταυτιστεί με τον τελεστή *Laplace* που, ως προς την παραμέτρηση $(x, y, \theta)$ της $G$, δίνεται από τον τύπο

$$\Delta = -y^2 \left( \frac{\vartheta^2}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2}{\vartheta y^2} \right) - y \frac{\vartheta^2}{\vartheta x \vartheta \theta}.$$

2. Το πλάτος ενός *cusp* $a$ ως προς μια υποομάδα $\Gamma'$ ορίζεται να είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος $h$ ώστε $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \gamma^{-1}\Gamma'\gamma$, όπου $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Θεωρούμε τώρα μια $f \in S_k(\Gamma')$. Η συνάρτηση $\phi_f$ θα είναι μια συνάρτηση $\Gamma' \backslash SL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Από τον ορισμό της *cusp* μορφής, και με τη βοήθεια του ορισμού του εσωτερικού γινομένου *Petersson* στον χώρο $S_k(\Gamma')$, αποδεικνύεται η ακόλουθη:

**Πρόταση 7.3.2** $\displaystyle\int\limits_{\Gamma' \backslash SL_2(\mathbb{R})} |\phi_f(g)|^2 dg = \int\!\!\int\limits_{F} |f(z)|^2 y^k \frac{dxdy}{y^2} < \infty$, όπου $F$ είναι ένα *fundamental domain* της $\Gamma'$ στο άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H}$.

Επομένως, όταν $f \in S_k(\Gamma')$, η συνάρτηση $\phi_f$ της $\Gamma' \backslash SL_2(\mathbb{R})$ θα είναι στον χώρο $L^2 \left(\Gamma' \backslash SL_2(\mathbb{R})\right) = L^2 \left(\Gamma' \backslash G\right)$.

Συμβολίζουμε με $A_k^2(\Gamma')$ τον υπόχωρο του $L^2 \left(\Gamma' \backslash G\right)$ που αποτελείται από τις συναρτήσεις $\phi$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες της Πρότασης 7.3.1. Ο χώρος αυτός θα καλείται ο χώρος των $\Gamma'-$αυτομορφικών μορφών. Τότε θα έχουμε την ακόλουθη:

**Πρόταση 7.3.3** Μέσω της συνάρτησης $\phi : S_k(\Gamma') \to L^2 \left(\Gamma' \backslash G\right)$, που θα δίνεται από τον τύπο $f(z) \mapsto f(g(i))j(g,i)^{-k} = \phi_f(g)$, έχουμε έναν ισομορφισμό των διανυσματικών χώρων $S_k(\Gamma')$ και $A_k^2(\Gamma')$.

Απόδειξη: Είναι η Πρόταση 2.1 του $[Ge - 1]$ στις σελίδες 27-28.

Οι συναρτήσεις αυτές, του χώρου $A_k^2(\Gamma')$, θα είναι ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\Delta$ και θα είναι και **δεξιά K-πεπερασμένες**, δηλαδή ο διανυσματικός χώρος που θα παράγει η δεξιά δράση της $K$ στην $\phi$ είναι πεπερασμένης διάστασης, και συγκεκριμένα θα είναι μονοδιάστατος. Οι ιδιότητες αυτές των συναρτήσεων του χώρου $A_k^2(\Gamma')$ είναι αυτές που θα γενικεύσουμε αργότερα στην περίπτωση των αυτομορφικών μορφών στις γενικές γραμμικές ομάδες.

Όμοια με την ανύψωση στην ομάδα $\Gamma' \backslash SL_2(\mathbb{R})$, μπορούμε να πάρουμε και μια ανύψωση των *modular* μορφών στην ομάδα $GL_2(\mathbb{Q}) \backslash GL_2(\mathbb{R})$.

Πρώτα επεκτείνουμε κάθε *modular* μορφή $f$ στο σύνολο $\mathbb{C} - \mathbb{R}$, θέτοντας $f(-z) = f(z)$, για κάθε $z$ με $Im(z) < 0$. Στη συνέχεια ορίζουμε $\phi_f(g)$, για $g \in GL_2(\mathbb{R})$ όπως και στην περίπτωση της $SL_2(\mathbb{R})$.

Στην περίπτωση που $\Gamma' = SL_2(\mathbb{Z})$, η συνθήκη 1 της ανύψωσης στην $SL_2(\mathbb{R})$ ισχύει, αλλά αυτή τη φορά για κάθε $\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$. Οι συνθήκες 2 έως 5 ισχύουν όπως είναι, με $GL_2(\mathbb{R})$ στη θέση της $SL_2(\mathbb{R})$, και ισχύει ακόμα η ακόλουθη πρόσθετη ιδιότητα

6. $\phi_f(cg) = \phi_f(g)$, για κάθε $c$ στο κέντρο της $GL_2(\mathbb{R})$, και για κάθε $g \in GL_2(\mathbb{R})$.

### 7.3.1 *Cusp* μορφές και αναπαραστάσεις

Οι *Gelfand* και *Fomin* παρατήρησαν πρώτοι την σύνδεση των *cusp* μορφών με ορισμένες αναπαραστάσεις της $SL_2(\mathbb{R})$.

Ακολουθώντας τον συμβολισμό που είχαμε μέχρι στιγμής, στον χώρο $L^2(\Gamma'\backslash G)$ θα έχουμε μια αναπαράσταση της ομάδας $G$.

**Ορισμός 7.3.1** Ορίζουμε $R$ να είναι η **δεξιά κανονική** αναπαράσταση $R$ της $G = SL_2(\mathbb{R})$ στο χώρο $L^2(\Gamma'\backslash G)$, η οποία θα δίνεται από τον τύπο $R(g)\phi(h) = \phi(hg)$.

**Παρατήρηση 7.3.2** Η αναπαράσταση $R$ είναι ορθομοναδιαία, δηλαδή ο τελεστής $R(g)$ του χώρου $L^2(\Gamma'\backslash G)$ θα είναι ορθομοναδιαίος, για κάθε $g \in G$. Η ιδιότητα αυτή είναι προφανής από τον ορισμό της $R$.

Η αναπαράσταση $R$ και ο τελεστής *Laplace* $\Delta$ μετατίθενται στον χώρο $A_k^2(\Gamma')$, δηλαδή θα ισχύει $R\Delta\phi = \Delta R\phi$ για κάθε $\phi \in A_k^2(\Gamma')$. Η ιδιότητα αυτή, μαζί με το Λήμμα του *Schur* της θεωρίας αναπαραστάσεων μας δίνουν την ακόλουθη:

**Πρόταση 7.3.4** Ο περιορισμός του $\Delta$ σε κάθε $G-$αναλλοίωτο υπόχωρο του $L^2(\Gamma'\backslash G)$ είναι ίσος με τη δράση με πολλαπλασιασμό με κάποια σταθερά στο $\mathbb{C}$.

Ο τελεστής $\Delta$ περιμένουμε να μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την ανάλυση της αναπαράστασης $R$ σε άθροισμα αναγώγων αναπαραστάσεων, και μέσω αυτού, το ίδιο περιμένουμε για τις συναρτήσεις του χώρου $A_k^2(\Gamma')$, αφού αποτελούν ιδιοδιανύσματα αυτού.

Ξεκινάμε περιγράφοντας, σύντομα τις ανάγωγες ορθομοναδιαίες αναπαραστάσεις της $SL_2(\mathbb{R})$.

#### 1) Η τάξης 1 κύρια σειρά $\pi_s^+(g)$

Οι αναπαραστάσεις αυτές επάγονται από τους ορθομοναδιαίους χαρακτήρες $\begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto |a|^s$, όπου $Re(s) = 0$, της υποομάδας $B = NA$ της $SL_2(\mathbb{R})$. Οι αναπαραστάσεις αυτές μπορούν να περιγραφούν και ως τελεστές μέσω της δεξιάς δράση τους στον χώρο *Hilbert* $H^+(s)$, που αποτελείται από τις μετρήσιμες $\phi : G \to \mathbb{C}$, που είναι τέτοιες ώστε $\phi\left(\begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} g\right) = |a|^{s+1}\phi(g)$, και $\int\int_K |\phi(k)|^2 dk = ||\phi||^2 < \infty$.

#### 2) Η μη-τάξης 1 κύρια σειρά $\pi_s^-(g)$

Οι αναπαραστάσεις αυτές θα επάγονται από τους ορθομοναδιαίους χαρακτήρες

$$\begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto sgn(a)|a|^s,$$

όπου $Re(s) = 0$, της υποομάδας $B = NA$. Οι αναπαραστάσεις αυτές είναι ανάγωγες αν και μόνο αν $s \neq 0$, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s \neq 0$.

#### 3) Η συμπληρωματική σειρά $\pi_s^C(g)$

Οι ορθομοναδιαίες αυτές αναπαραστάσεις θα επάγονται από τους μη-ορθομοναδιαίους χαρακτήρες $\begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto sgn(a)|a|^s$, όπου $s \in [-1, 1]$, της υποομάδας $B$. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, το εσωτερικό γινόμενο του χώρου $H(s)$ θα είναι διαφορετικό από ότι στις περιπτώσεις 1 και 2 παραπάνω.

### 4) Η διακριτή Σειρά $\pi_k^{\pm}(g)$

Για κάθε $k > 1$, θεωρούμε τον χώρο *Hilbert*
$H(k) = \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}|\ f$ ολόμορφη και $\iint\limits_{\mathbb{H}} |f(x+iy)|^2 y^k \frac{dxdy}{y^2} < \infty\}$, και ορίζουμε $\pi_k^+(g)f$ να είναι η συνάρτηση $\pi_k^+(g)f(z) = (bz+d)^{-k}\left(\frac{az+c}{bz+d}\right)$, όπου $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Η αναπαράσταση $\pi_k^-(g)$ ορίζεται ομοίως, αντικαθιστώντας το άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H}$ με το κάτω ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C}|Im(z) < 0\}$ και βάζοντας $|y|^k$ στη θέση του $y^k$ στον ορισμό του αντίστοιχου χώρου.

### 5) Η τετριμμένη αναπαράσταση

Για την ανάλυση της $R$ απαραίτητη είναι η χρήση του ακόλουθου αποτελέσματος:

**Θεώρημα 7.3.1** (*Bargmann*) Κάθε ανάγωγη ορθομοναδιαία αναπαράσταση της ομάδας $G = SL_2(\mathbb{R})$ είναι ισοδύναμη με κάποια από τις πέντε παραπάνω αναπαραστάσεις.

Επομένως κάθε ανάγωγη υποαναπαράσταση της $R$ θα είναι της μορφής κάποιοων από τις παραπάνω αναπαραστάσεις. Το ερώτημα είναι ποιες από αυτές θα εμφανίζονται και με ποια πολλαπλότητα.

Θεωρούμε $\Gamma'$ να είναι η ομάδα $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ και θέτουμε $L_0^2(\Gamma\backslash G)$ να είναι ο υπόχωρος των $\phi \in L^2(\Gamma\backslash G)$ που ικανοποιούν την συνθήκη

$$\int\limits_{N \cup \Gamma\backslash N} \phi(ng)dn = 0 \text{ σχεδόν παντού για } g \in G.$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον η συνθήκη αυτή είναι αναλλοίωτη από τη δεξιά δράση της $G$ το ίδιο θα ισχύει και για τον χώρο $L_0^2(\Gamma\backslash G)$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 7.3.2** Έστω $L_d^2(\Gamma\backslash G)$ το ευθύ άθροισμα όλων των υποχώρων του $L^2(\Gamma\backslash G)$ που είναι αναγώγιμα αναλλοίωτοι από τη δράση της $G$. Τότε:

1. $L_d^2(\Gamma\backslash G) = L_0^2(\Gamma\backslash G) \oplus \mathbb{C}$, όπου εδώ $\mathbb{C}$ θα είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

2. Ο περιορισμός της αναπαράστασης $R$ στον χώρο $L_0^2(\Gamma\backslash G)$ είναι τέτοιος ώστε κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της $G$ εμφανίζεται το πολύ πεπερασμένες το πλήθος φορές.

3. Ο περιορισμός της $R$ στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου $L_d^2(\Gamma\backslash G)$ είναι το συνεχές άθροισμα των κύριων σειρών $\pi_s^+(g)$, δηλαδή αν $R_C(g)$ είναι ο περιορισμός αυτός, τότε

$$R_C(g) = \oplus \int_0^{\infty} \pi_s^+(g)ds.$$

Απόδειξη: Η διατύπωση της πρότασης βρίσκεται στο $[Ge-1]$, στη σελίδα 33, ενώ η απόδειξή της βασίζεται στις ιδέες των Κεφαλαίων 8 και 9 του ίδιου τόμου.

Ακόμα και αν αλλάξουμε τη $\Gamma$ με κάποια υποομάδα ισοδυναμίας της το παραπάνω Θεώρημα, με κάποιες μικρές αλλαγές στο 3 που εξαρτώνται από την υποομάδα μας, συνεχίζει να μας δίνει την απάντηση που θέλουμε στο ερώτημά μας στην περίπτωση του συνεχούς φάσματος της $R(g)$, αλλά δεν μας δίνει την πλήρη απάντηση όσον αφορά το διακριτό φάσμα της.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό έρχεται με χρήση κάποιων ακόμα ιδιοτήτων των αναπαραστάσεων της ομάδας $G$ και συνοψίζεται στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 7.3.3** Η αναπαράσταση $\pi_k^+$ της $G$, ή αντιστοίχως η αναπαράσταση $\pi_s^+$ ή η $\pi_S^C$, εμαφανίζονται στην αναπαράσταση $R_0(g)$, τον περιορισμό της $R(g)$ στον υπόχωρο $L_0^2(\Gamma'\backslash G)$, με πολλαπλότητα ίση με την διάσταση του χώρου $S_k(\Gamma')$, ή αντιστοίχως για τις $\pi_s^+$ και $\pi_S^C$ με την διάσταση του χώρου $W_s(\Gamma')$ των κυματομορφών του $Maass$.

Απόδειξη: $[Ge-1]$ Θεώρημα 2.10, σελίδες 35-36.

**Παρατήρηση 7.3.3** Οι κυματομορφές του $Maass$, οι οποίες είναι δεξιά $K$-αναλλοίωτες, είναι φραγμένες και ομαλές συναρτήσεις της $G$ που ικανοποιούν την σχέση $\Delta\phi = \frac{1-s^2}{4}\phi$.

## 7.4 Αυτομορφικές μορφές σε γενικές γραμμικές ομάδες

Οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις αποτελούν την κεντρική ιδέα του προγράμματος $Langlands$. Οι αναπαραστάσεις αυτές θα είναι κατάλληλα υποπρότυπα κάποιων χώρων αυτομορφικών μορφών. Πριν ορίσουμε, όμως, τις αυτομορφικές μορφές θα δούμε την ανύψωση των κλασικών $modular$ και $cusp$ μορφών στην ομάδα $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Η ανύψωση αυτή και οι ιδιότητές της επεξηγούν τις ιδιότητες που θα απαιτήσουμε αργότερα να έχουν οι αυτομορφικές μορφές στις γενικές γραμμικές ομάδες της μορφής $GL_n(\mathbb{A}_F)$.

Μέχρι στιγμής έχουμε δει την ανύψωση των $modular$ και $cusp$ μορφών στις ομάδες $\Gamma'\backslash SL_2(\mathbb{R})$ και, στην περίπτωση $\Gamma' = SL_2(\mathbb{Z})$, την ανύψωση στην ομάδα $GL_2(\mathbb{Z})\backslash GL_2(\mathbb{R})$. Από τη σχέση (6.2) του Κεφαλαίου 6 γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/\prod_p GL_2(\mathbb{Z}_p) = GL_2(\mathbb{Z})\backslash GL_2(\mathbb{R}),$$

επομένως είναι λογικό να περιμένουμε να έχουμε μια κατάλληλη ανύψωση στην $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ των $modular$ και $cusp$ μορφών, τουλάχιστον στην περίπτωση όπου $\Gamma' = SL_2(\mathbb{Z})$.

Ξεκινάμε με την περίπτωση $\Gamma' = SL_2(\mathbb{Z})$.

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφτεί και ως:

$$GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = GL_2(\mathbb{Q})GL_2(\mathbb{R})\prod_p GL_2(\mathbb{Z}_p).$$

Συνδυάζοντας τον παραπάνω τύπο και την ανύψωση που έχουμε δει, βλέπουμε ότι η ανύψωσή μας θα πρέπει να δίνεται από τον τύπο $\phi_f(g) = f(g_\infty(i))j(g_\infty, i)$, όπου για $g \in GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ έχουμε, λόγω του παραπάνω τύπου, την γραφή $g = \gamma g_\infty k_1$, όπου το καθένα από αυτά τα στοιχεία ανήκει στην αντίστοιχη υποομάδα στο δεξιό μέρος του τύπου.

Οι ιδιότητες της ανύψωσης αυτής συνοψίζονται στην ακόλουθη:

**Πρόταση 7.4.1** Έστω $f \in M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$, και $\phi = \phi_f$ η παραπάνω ανύψωσή της. Τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα

1. $\phi(\gamma g) = \phi(g)$, $\forall\ \gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$,

2. $\phi(gk_1) = \phi(g)$, $\forall\ k_1 \in \prod_p GL_2(\mathbb{Z}_p)$,

3. $\phi(gr_\infty(\theta)) = e^{-ik\theta}\phi(g)$, για κάθε $r_\infty(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ στην άπειρη θέση,

4. ως συνάρτηση στην $G_\infty^+ = GL_2(\mathbb{R})^+$, η $\phi$ θα ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\Delta\phi = \tfrac{-k(k-2)}{4}\phi,$$

όπου $\Delta$ ο διαφορικός τελεστής *Laplace* της προηγούμενης παραγράφου,

5. $\phi(zg) = \phi(g)$, για κάθε $z \in Z(GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$, όπου το $z$ ταυτίζται με κάποιον διαγώνιο $z = zI_2$, όπου $z \in J_\mathbb{Q}$,

6. η $\phi(g)$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη αργής αύξησης:

Για κάθε $\delta > 0$ και συμπαγές υποσύνολο $R$ της $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, υπάρχουν σταθερές $C$ και $N$ ώστε

$\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \leq C|a|^N$, για κάθε $g \in R$ και κάθε $a \in J_\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $|a|_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} > \delta$, όπου $|\cdot|_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} = \prod_{u\in M_\mathbb{Q}} |\cdot|_u$,

7. αν η $f$ είναι *cusp* μορφή, τότε η $\phi$ θα ικανοποιεί την ακόλουθη *cuspidal* συνθήκη

$$\int\limits_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0, \text{ για κάθε } g \in GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}).$$

**Παρατήρηση 7.4.1** Η ομάδα $\Gamma'$ ως προς την οποία η $f$ θα είναι αναλλοίωτη, που στην περίπτωσή μας είναι η $SL_2(\mathbb{Z})$, εμφανίζεται στην συμπαγή ομάδα $\prod\limits_p GL_2(\mathbb{Z}_p)$.

Στην γενική περίπτωση η ομάδα $\Gamma'$ θα καθορίζει μια συμπαγή υποομάδα της $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, από την ακόλουθη σχέση:

$$\Gamma' = GL_2(\mathbb{Q}) \bigcap \left(G_\infty^+ \prod_p K_p(\Gamma')\right),$$

όπου, για κάθε πεπερασμένη θέση $p$, $K_p(\Gamma')$ θα είναι κάποια κατάλληλη υποομάδα της $GL_2(\mathbb{Z}_p)$, που θα εξαρτάται από την ομάδα μας $\Gamma'$.

**Παράδειγμα** Στην περίπτωση που $\Gamma' = \Gamma_0(N)$ οι υποομάδες $K_p$ θα δίνονται από τη σχέση

$$K_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_p) : c/N \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Η ομάδα αυτή θα συμπίπτει με την $GL_2(\mathbb{Z}_p)$, για κάθε $p$ με $(p, N) = 1$.

### Αυτομορφικές Μορφές σε Γενικές Γραμμικές Ομάδες

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε τις αυτομορφικές μορφές σε γενικές γραμμικές ομάδες του δακτυλίου των *adele* κάποιου σώματος αριθμών.

Θεωρούμε ένα σώμα αριθμών $F$, τον δακτύλιο των *adele* $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$, και με $G(\cdot)$ θα συμβολίζουμε την γενική γραμμική ομάδα $GL_n(\cdot)$.

Έστω $G_\infty = G(F_\infty)$ ο αρχιμήδειος παράγοντας και $G(\mathbb{A}_f)$ ο μη-αρχιμήδειος παράγοντας της ομάδας $G(\mathbb{A})$, ώστε $G(\mathbb{A}) = G_\infty \times G(\mathbb{A}_f)$. (7.1)

Υπενθυμίζουμε ότι $F_\infty = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{r_1} \oplus \mathbb{C}^{r_2}$, όπου $r_1 + 2r_2 = [F : \mathbb{Q}]$.

Θέτουμε, ακόμα, $K = \prod\limits_u K_u$, όπου

$$K_u = \begin{cases} O(n) & , F_u = \mathbb{R} \\ U(n) & , F_u = \mathbb{C} \\ GL_n(O_u) & , u \; \pi\epsilon\pi\epsilon\rho\alpha\sigma\mu\epsilon\nu\eta \; \theta\epsilon\sigma\eta \end{cases}.$$

Από το Θεώρημα $Tychonoff$, η υποομάδα αυτή θα είναι συμπαγής υποομάδα της $GL_n(\mathbb{A})$ και αποδεικνύεται ότι θα είναι και μέγιστη.

Έστω ακόμα $\omega$ ένας ορθομοναδιαίος χαρακτήρας $Hecke$ του $F$, δηλαδή ένας ομομορφισμός ο-μάδων $\omega : C_F \to S^1 \subset \mathbb{C}$.

**Ορισμός 7.4.1** Μια $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ θα λέγεται **ομαλή** αν είναι συνεχής και αν, όταν την θεωρούμε ως συνάρτηση δυο μεταβλητών $(x, y)$ όπως στην (7.1), ισχύουν

1. Για κάθε $y$ η συνάρτηση $x \mapsto f(xy)$ είναι ομαλή, δηλαδή $C^\infty$, ως συνάρτηση του $x$, δηλαδή ως συνάρτηση των ομάδων $Lie$,
2. Για κάθε $x$ η συνάρτηση $y \mapsto f(xy)$ είναι τοπικά σταθερή με συμπαγή φορέα ως συνάρτηση του $y$.

.

**Ορισμός 7.4.2** Μια ομαλή $f : G(A) \to \mathbb{C}$ θα λέγεται **αυτομορφική μορφή** με κεντρικό χαρακτήρα $\omega$ αν

1. $f(\gamma g) = f(g)$ για κάθε $\gamma \in G(F)$,
2. $f((zI_n)g) = \omega(z)f(g)$ για κάθε $z \in J_F$,
3. ο χώρος που παράγεται από την δεξιά δράση στην $f$ της ομάδας $K$ είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή η $f$ είναι $K-$πεπερασμένη,
4. η $f$ είναι $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})-$πεπερασμένη,
5. για κάθε $y \in G(\mathbb{A}_f)$, η συνάρτηση $y \mapsto f(xy)$ στην $G_\infty$ ικανοποιεί μια συνθήκη ήπιας αύξησης.

.

Θα δώσουμε κάποιες εξηγήσεις για την τέταρτη συνθήκη του παραπάνω ορισμού.

Επειδή η $f$ είναι ομαλή θα ορίζεται για κάθε αρχιμήδειο μέρος μια δράση της αντίστοιχης άλγεβρας $gl(n, F_u)$ στον χώρο που παράγει η δράση της $K_u$ στην $f$ χάρη στην ακόλουθη:

**Πρόταση 7.4.2** Έστω $G = GL_n(\mathbb{R})^+$ και $gl(n, \mathbb{R})$ η άλγεβρα $Lie$ της. Υποθέτουμε ακόμα ότι έχουμε $(\pi, V)$ μια πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση της $G$, τέτοια ώστε $\forall v \in V$ η απεικόνιση $g \mapsto \pi(g)v$ να είναι ομαλή. Τότε, η απεικόνιση $d\pi : gl(n, \mathbb{R}) \to End(V)$ είναι αναπαράσταση της άλγεβρας $Lie$ $gl(n, \mathbb{R})$.

Απόδειξη: $[Bu - 1]$ Πρόταση 2.2.1, σελίδα 148.

Τα στοιχεία της τροχιάς της $f$, $Xf$, για $X \in gl(n, F_u)$ αποδεικνύεται ότι θα είναι επίσης $K-$πεπερασμένα.

Η δράση αυτή, της $gl(n, F_u)$, θα επεκτείνεται σε μια δράση της *universal enveloping* άλγεβρας $U(gl(n, F_u))$, λόγω της ακόλουθης:

**Πρόταση 7.4.3** Έστω $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα *Lie* και $U(\mathfrak{g})$ η *universal enveloping* άλγεβρά της. Έστω, ακόμη, $\pi : \mathfrak{g} \to End(V)$ μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$. Τότε η $\pi$ επεκτείνεται σε μια αναπαράσταση της $U(\mathfrak{g})$.

Απόδειξη: Η απόδειξη χρησιμοποιεί την **Καθολική Ιδιότητα της Τανυστικής Άλγεβρας** και περιέχεται στο $[Bu-1]$, Πρόταση 2.2.3, σελίδες 150-151.

Η συνθήκη μας απαιτεί ο περιορισμός της δράσης αυτής, της $U(\mathfrak{g}_u)$, στο κέντρο $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_u)$ της άλγεβρας $U(gl(n, F_u))$ να είναι τέτοιος ώστε η $f$ να βρίσκεται σε έναν διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, αναλλοίωτο από αυτήν την δράση, και αυτό να συμβαίνει για κάθε $u$ αρχιμήδειο.

Η πέμπτη συνθήκη του παραπάνω ορισμού απαιτεί την ύπαρξη κάποιας θετικής σταθεράς $c$ και ενός φυσικού αριθμού $N$ ώστε $\forall g \in GL_n(\mathbb{A})$ να ισχύει $|f(g)| < c||g||^N$, όπου $|| \cdot ||$ είναι μια συνάρτηση ύψους στην $GL_n(\mathbb{A})$.

Για να ορίσουμε την συνάρτηση ύψους στην $GL_n(\mathbb{A})$ θεωρούμε πρώτα την εμφύτευση $GL_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}_F^{n^2+1}$, που δίνεται από τον τύπο $g \mapsto (g, (detg)^{-1})$.

**Ορισμός 7.4.3** Έστω $u$ μια θέση του $F$. Ορίζουμε την **τοπική συνάρτηση ύψους**, $||g_u||_u$ στην $GL_n(F_u)$ θεωρώντας τον περιορισμό της συνάρτησης $(x_1, \ldots, x_{n^2+1}) \mapsto max_i|x_i|_u$, στο υποσύνολο $F_u^{n^2+1}$ του $\mathbb{A}_F^{n^2+1}$.

**Παρατήρηση 7.4.2** Σε κάθε περίπτωση θα ισχύει $||g_u||_u \geq 1$, ενώ στην περίπτωση που $g_u \in GL_n(O_u)$, θα ισχύει $||g_u||_u = 1$.

**Ορισμός 7.4.4** Ορίζουμε για $g = (g_u)_u \in GL_n(\mathbb{A}_F)$, την **συνάρτηση ύψους του** $g$ να δίνεται από την σχέση $||g|| = \prod\limits_u ||g_u||_u$.

Λόγω της παραπάνω παρατήρησης και της γραφής της $GL_n(\mathbb{A}_F)$ ως περιορισμένο ευθύ γινόμενο, που είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, η παραπάνω συνάρτηση είναι καλά ορισμένη.

Μια σημαντική υποκατηγορία των αυτομορφικών μορφών είναι οι ***cuspidal* μορφές**. Οι συναρτήσεις αυτές είναι αυτομορφικές μορφές που ικανοποιούν την επιπλέον συνθήκη:

Για κάθε $r$, $s$ τέτοια ώστε $r + s = n$ ισχύει

$$\int\limits_{Mat_{r\times s}(F)\backslash Mat_{r\times s}(\mathbb{A})} f\left(\begin{pmatrix} I_r & X \\ 0 & I_s \end{pmatrix} g\right) dX = 0$$

σχεδόν παντού, ως προς κατάλληλο μέτρο *Haar* της $GL_n(\mathbb{A})$), και όπου $Mat_{r\times s}$ η προσθετική ομάδα των $r \times s$ πινάκων.

Οι χώροι των αυτομορφικών συναρτήσεων και *cuspidal* συναρτήσεων με κεντρικό χαρακτήρα ω συμβολίζονται με $\mathcal{A}(GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}), \omega)$ και $\mathcal{A}_0(GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}), \omega)$ αντίστοιχα.

Οι *cuspidal* αυτομορφικές μορφές, αντίστοιχα με τις κλασσικές *cusp* μορφές, έχουν καλύτερες ιδιότητες από τις γενικές αυτομορφικές μορφές, ή αντίστοιχα τις κλασσικές *modular* μορφές.

Αρχικά έχουμε τον εξής χαρακτήρισμο:

**Πρόταση 7.4.4** Έστω $f$ μια ομαλή συνάρτηση στην ομάδα $GL_n(\mathbb{A})$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 1 έως 4 του ορισμού 7.4.2, καθώς και την *cuspidal* συνθήκη.
Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η $f$ ικανοποιεί και την ιδιότητα 5 του ορισμού και άρα είναι *cuspidal* μορφή,

2. Η $f$ είναι φραγμένη,

3. Η $|f|$ είναι στον χώρο $L^2((J_F GL_n(F))\backslash GL_n(\mathbb{A}_F))$.

Από την παραπάνω Πρόταση έχουμε ότι οι *cuspidal* μορφές είναι στην πραγματικότητα στο χώρο $L^2$ κάποιας ομάδας. Η παρατήρηση αυτή είναι ιδιαίτερης σημασίας στην μελέτη των *cuspidal* αυτομορφικών αναπαραστάσεων που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

# Κεφάλαιο 8

# Αυτομορφικές Αναπαραστάσεις

Οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις είναι η κεντρική ιδέα του προγράμματος *Langlands*. Οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις ορίζονται να είναι κατάλληλοι υπόχωροι του χώρου των αυτομορφικών μορφών. Στο Κεφάλαιο αυτό, πέραν του ορισμού τους, θα δούμε και κάποια από τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών των αναπαραστάσεων.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με κάποιες απαραίτητες έννοιες από τη θεωρία αναπαραστάσεων, όπως τα $(\mathfrak{g}, K)-$πρότυπα, μέσω των οποίων θα έχουμε την πρώτη περιγραφή των αυτομορφικών αναπαραστάσεων. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την έννοια της άλγεβρας *Hecke*, μέσω της οποίας λαμβάνουμε μια ισοδύναμη εναλλακτική περιγραφή των αυτομορφικών αναπαραστάσεων.

Για το υπόλοιπο του Κεφαλαίου θεωρούμε $F$ ένα σώμα αριθμών, και $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ τον δακτύλιο των *adele* του.

## 8.1 Στοιχεία θεωρίας αναπαραστάσεων

Ένας από τους κύριους στόχους μας είναι να περιγράψουμε τις ορθομοναδιαίες ανάγωγες αναπαραστάσεις μιας ομάδας *Lie* σε κάποιον χώρο *Hilbert*. Παρά ταύτα είναι χρησιμότερο να θεωρούμε την γενικότερη κατηγορία των αποδεκτών αναπαραστάσεων. Οι αναπαραστάσεις αυτές είχαν κατηγοριοποιηθεί από τον *Langlands* και αποτελούν κατηγορία αναπαραστάσεων μεγαλύτερη των ορθομοναδιαίων αναπαραστάσεων.

Για το υπόλοιπο της παραγράφου θέτουμε $G$ να είναι μια ομάδα *Lie*. Στην περίπτωση μας θα είναι μια εκ των $GL_n(\mathbb{R})$ και $GL_n(\mathbb{C})$. Θέτουμε ακόμα $\mathfrak{g}$ να είναι η άλγεβρα *Lie* της ομάδας μας. Θεωρούμε επίσης $K$ να είναι μια μέγιστη συμπαγής υποομάδα της $G$ και $\mathfrak{k}$ να είναι η άλγεβρα *Lie* της. Στην περίπτωση που $G = GL_n(\mathbb{R})$ θα έχουμε $K = O(n)$, ενώ στην περίπτωση $G = GL_n(\mathbb{C})$, $K = U(n)$. Οι αναπαραστάσεις της $G$ με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι της μορφής $(\pi, \mathfrak{H})$, όπου $\mathfrak{H}$ είναι ένας χώρος *Hilbert*.

Σε αντίθεση με την περίπτωση των αναπαραστάσεων πεπερασμένης διάστασης, υπάρχει η περίπτωση $dim(\mathfrak{H}) = \infty$, οπότε δεν ορίζεται απαραίτητα δράση της $\mathfrak{g}$ σε όλο τον χώρο μας. Η δράση όμως θα ορίζεται σε ένα πυκνό υποσύνολό του, αυτό των ομαλών στοιχείων, το οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{H}^{\infty}$.

**Ορισμός 8.1.1** Ένα $f \in \mathfrak{H}$ λέγεται $C^1$ αν για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ ορίζεται το όριο

$$Xf = \pi(X)f = \tfrac{d}{dt}\pi(exp(tX))f|_{t=o}.$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε συνεχή δράση της $\mathfrak{g}$ στο $f$. Επαγωγικά ορίζουμε το $f$ να είναι $C^k$ για $k > 1$ αν το $f$ είναι $C^1$ και το $Xf$ είναι $C^{k-1}$ για κάθε $X \in \mathfrak{g}$.

Τέλος, το $f$ θα λέμε ότι είναι $C^{\infty}$, ή **ομαλό**, αν είναι $C^k$ για κάθε $k$.

Ο χώρος $\mathfrak{H}^\infty$ θα είναι ο χώρος που παράγουν τα ομαλά διανύσματα του $\mathfrak{H}$.

Για τον χώρο αυτό ισχύει η ιδιότητα που θέλαμε. Συγκεκριμένα, ισχύει η εξής:

**Πρόταση 8.1.1** Έστω $(\pi, \mathfrak{H})$ μια αναπαράσταση σε χώρο *Hilbert* της $G$, όπου $G$ είναι η $GL_n(\mathbb{R})$ ή η $GL_n(\mathbb{R})^+$. Τότε η δράση της $\mathfrak{g}$ στον $\mathfrak{H}^\infty$ που ορίζεται από τον παραπάνω ορισμό είναι αναπαράσταση της άλγεβρας *Lie*.
Απόδειξη: $[Bu-1]$ Πρόταση 2.4.1, σελίδα 189.

Για τον χώρο των ομαλών στοιχείων του $\mathfrak{H}$ θέλουμε επίσης να ξέρουμε ότι είναι αρκούντως μεγάλος, κάτι που μας επιβεβαιώνει η ακόλουθη:

**Πρόταση 8.1.2** Έστω $(\pi, \mathfrak{H})$ και $G$ όπως στην προηγούμενη πρόταση. Τότε ο χώρος $\mathfrak{H}^\infty$ είναι πυκνός υπόχωρος του χώρου $\mathfrak{H}$.
Απόδειξη: $[Bu-1]$ Πρόταση 2.4.2, σελίδα 190.

Ιδιάζουσας σημασίας είναι η συμπεριφορά του περιορισμού της αναπαράστασης στη μέγιστη συμπαγή υποομάδα $K$ της ομάδας $G$. Οι αναπαραστάσεις αυτές των συμπαγών ομάδων έχουν καλές ιδιότητες οι οποίες είναι ανάλογες των πεπερασμένων ομάδων.
Ξεκινάμε με την ακόλουθη:

**Πρόταση 8.1.3** Έστω $(\pi, \mathfrak{H})$ μια αναπαράσταση σε χώρο *Hilbert* μιας συμπαγούς ομάδας *Lie* $K$. Τότε υπάρχει Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον $\mathfrak{H}$ που επάγει την ίδια τοπολογία με το αρχικό ώστε $\langle \pi(k)v, \pi(k)w \rangle = \langle v, w \rangle$, για κάθε $k \in K$.
Απόδειξη: $[Bu-1]$ Λήμμα 2.4.3, σελίδα 191.

Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι για κάθε αναπαράσταση της $K$ σε ένα χώρο *Hilbert* υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathfrak{H}$ ως προς το οποίο η αναπαράσταση να είναι ορθομοναδιαία.

Επομένως, στην περίπτωση των συμπαγών ομάδων $K$ αρκεί να εξετάζουμε ορθομοναδιαίες αναπαραστάσεις σε χώρους *Hilbert*.
Το σημαντικότερο αποτέλεσμα για τις αναπαραστάσεις αυτές είναι το Θεώρημα $Peter-Weyl$. Για να διατυπώσουμε το θεώρημα αυτό χρειαζόμαστε ακόμα την έννοια του συντελεστή πίνακα.

**Ορισμός 8.1.2** Έστω $\pi$ μία αναπαράσταση μιας ομάδας $G$ σε ένα χώρο *Hilbert*. **Συντελεστής πίνακας** της αναπαράστασης θα ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $g \mapsto \langle \pi(g)v, w \rangle$ όπου $v$, $w$ είναι στοιχεία του χώρου *Hilbert* της αναπαράστασης.

Το Θεώρημα $Peter-Weyl$ μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την δομή των αναπαραστάσεων των συμπαγών ομάδων. Συγκεκριμένα θα έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 8.1.1** ($Peter-Weyl$) Έστω $G$ μία συμπαγής τοπολογική ομάδα. Τότε το σύνολο των συντελεστών πινάκων της ομάδας είναι πυκνό υποσύνολο του χώρου των συνεχών συναρτήσεων $f : G \to \mathbb{C}$.
Απόδειξη: Βρίσκεται στο $[Bu-2]$ στη σελίδα 25.

Το παραπάνω γενικό θεώρημα, στην περίπτωσή μας, μας δίνει το ακόλουθο:

**Πόρισμα 8.1.1** Έστω $K$ μια συμπαγής υποομάδα της ομάδας $GL_n(\mathbb{C})$. Τότε θα ισχύει:

1. Κάθε ορθομοναδιαία ανάγωγη αναπαράσταση της $K$ είναι πεπερασμένης διάστασης, και

2. αν $(\pi, \mathfrak{H})$ είναι μια ορθομοναδιαία αναπαράσταση της $K$, τότε ο $\mathfrak{H}$ γράφεται σαν το ευθύ άθροισμα, χώρων $Hilbert$, των ανάγωγων ορθομοναδιαίων υπο−αναπαραστάσεων της αναπαράστασης αυτής.

Απόδειξη: $[Bu-1]$ Θεώρημα 2.4.1, σελίδα 192.

**Παρατήρηση 8.1.1** Χάρη στο γεγονός ότι η ομάδα $GL_n(\mathbb{R})$ εμφυτεύεται στην $GL_n(\mathbb{C})$, το παραπάνω Θεώρημα εφαρμόζεται άμεσα στις ομάδες που μας ενδιαφέρουν.

Έστω $(\pi, \mathfrak{H})$ μια αναπαράσταση της ομάδας μας $G$, και $K$ η μέγιστη συμπαγής υποομάδα της. Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο περιορισμός της $\pi$ στην $K$ είναι ορθομοναδιαία αναπαράσταση, αν και σαν αναπαράσταση της $G$ δεν είναι απαραίτητα ορθομοναδιαία.

Από το θεώρημα $Peter-Weyl$ ο χώρος $\mathfrak{H}$ θα γράφεται ως ευθύ άθροισμα των ανάγωγων υποαναπαραστάσεων της $K$. Οι αναπαραστάσεις που μας ενδιαφέρουν θέλουμε να ικανοποιούν κάποια επιπλέον συνθήκη. Συγκεκριμένα, δίνεται ο ακόλουθος:

**Ορισμός 8.1.3** Μια αναπαράσταση $(\pi, \mathfrak{H})$ της $G$ σε ένα χώρο $Hilbert$ θα λέγεται **αποδεκτή** αν κάθε υποαναπαράσταση της $K$ που εμφανίζεται στο παραπάνω άθροισμα που προκύπτει από το Θεώρημα $Peter-Weyl$ εμφανίζεται με πεπερασμένη πολλαπλότητα. Δηλαδή αν $\mathfrak{H} = \oplus_i \mathfrak{H}_i^{n_i}$, όπου $(\pi_i, \mathfrak{H}_i)$ είναι ορθομοναδιαίες ανάγωγες αναπαραστάσεις, μη-ισοδύναμες μεταξύ τους, της υποομάδας $K$, η $(\pi, \mathfrak{H})$ θα λέγεται αποδεκτή αν $n_i < \infty$.

Έστω, $G$, $K$ και $\mathfrak{g}$ όπως παραπάνω. Ιδιαίτερης σημασίας είναι ο ακόλουθος:

**Ορισμός 8.1.4** Ένα $(\mathfrak{g}, K)-$πρότυπο είναι ένας διανυσματικός χώρος $V$ εφοδιασμένος με αναπαραστάσεις $\pi$ των $K$ και $\mathfrak{g}$ στον $V$, συμβολίζουμε με το ίδιο $\pi$ και τις δύο αναπαραστάσεις, που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

1. ο $V$ γράφεται σαν αλγεβρικό ευθύ άθροισμα από πεπερασμένης διάστασης αναλλοίωτους υποχώρους από την δράση της $K$,

2. οι αναπαραστάσεις των $\mathfrak{g}$ και $K$ είναι συμβατές, δηλαδή για τα στοιχεία της άλγεβρας $Lie$ της ομάδας $K$, $X \in \mathfrak{k}$, η αναπαράσταση που θα επάγει η αναπαράσταση της $K$,

$$\pi(X)f = \tfrac{d}{dt}\pi(exp(tX))f|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}((\pi(exp(tX))f) - f),$$

   σε κάθε $f \in V$, θα ισούται με την δράση του $X$ στο $f$ όταν το βλέπουμε ως $X \in \mathfrak{g}$, και

3. για κάθε $g \in K$,για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ και για κάθε $f \in V$ ισχύει $\pi(g)\pi(X)\pi(g)^{-1}f = \pi(Ad(g)(X))f$, όπου $Ad(g)(X) = gXg^{-1}$, και θεωρούμε τα $g$ και $X$ σαν $n \times n$ στο δεξί κομμάτι.

.

## 8.2 Αυτομορφικές αναπαραστάσεις

Όπως έχουμε προϊδεάσει, οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις είναι κατάλληλοι υπόχωροι του χώρου των αυτομορφικών μορφών.

Στους χώρους αυτούς, των αυτομορφικών μορφών, δεν έχουμε δράση όλης της ομάδας $GL_n(\mathbb{A})$, καθώς η δράση της $GL_n(F_\infty)$ χαλάει την έννοια του $K-$πεπερασμένου. Έχουμε όμως μια αναπαράσταση της υποομάδας $GL_n(\mathbb{A}_f)$ καθώς και μια δομή $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)-$προτύπου, όπου

$$\mathfrak{g}_\infty = \textstyle\prod_{u\in S_\infty} gl(n, F_u) \text{ και } K_\infty = \prod_{u\in S_\infty} K_u.$$

Οι δύο αυτές δομές, ως δράσεις, μετατίθενται, ενώ θα συμβολίζονται και οι δύο με $\pi$. Οι χώροι με αυτές τις ιδιότητες θα λέγονται, καταχρηστικά, αναπαραστάσεις της $GL_n(\mathbb{A})$.

**Ορισμός 8.2.1** Μια αυτομορφική αναπαράσταση $\pi$ της $GL_n(\mathbb{A})$ είναι μια ανάγωγη αναπαράσταση, με την παραπάνω έννοια, της ομάδας $GL_n(\mathbb{A})$ η οποία μπορεί να εκφρασθεί σαν υποπηλίκο του χώρου $\mathcal{A}(GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}), \omega)$, δηλαδή είναι ένα πηλίκο κάποιου υποπροτύπου.

Όμοια ορίζεται η έννοια της *cuspidal* αυτομορφικής αναπαράστασης αν αντικαταστήσουμε τον χώρο των αυτομορφικών με αυτών των *cuspidal* μορφών στον παραπάνω ορισμό.

Οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις ανήκουν στην κατηγορία των αποδεκτών αναπαραστάσεων της $GL_n(\mathbb{A})$. Οι αναπαραστάσεις αυτές έχουν καλές ιδιότητες που μας επιτρέπουν να ορίσουμε $L-$συναρτήσεις για αυτές.

### Αποδεκτές Αναπαραστάσεις της $GL_n(\mathbb{A})$

**Ορισμός 8.2.2** Έστω $(\pi, V)$ μια αναπαράσταση της K, και μια ανάγωγη αναπαράσταση $(\rho, V_\rho)$ της K. Θέτουμε $V(\rho)$ να είναι το άθροισμα των υποπροτύπων του $V$ που είναι ισόμορφα του $V_\rho$, το οποίο θα καλείται **$\rho-$ισοτυπικό** κομμάτι της $V$.

Θεωρούμε τώρα, έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$ που είναι ταυτόχρονα $GL_n(\mathbb{A}_f)$ και $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)-$πρότυπο, ώστε οι δύο δομές μετατίθενται. Μπορούμε να τις συνδυάσουμε και να ορίσουμε μια αναπαράσταση π της $K$, αφού $K = K_\infty K_f$.

**Ορισμός 8.2.3** 1. Η αναπαράσταση $(\pi, V)$ θα λέγεται **αποδεκτή** αν κάθε στοιχείο του $V$ είναι $K-$ πεπερασμένο και για κάθε ανάγωγη αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης της K, $(\rho, V_\rho)$, το $\rho-$ισοτυπικό κομμάτι της π είναι πεπερασμένης διάστασης.

2. Μια αναπαράσταση $(\pi, V)$ της $GL_n(F_u)$ όταν το $u$ είναι μη-αρχιμήδειο θα λέγεται **ομαλή** αν κάθε στοιχείο του $V$ έχει ως σταθεροποιούσα του μια ανοιχτή υποομάδα της $GL_n(F_u)$, αν ακόμα για κάθε ανάγωγη ανάπαραστηση, $(\rho, V_\rho)$, της συμπαγούς $K_u = GL_n(O_u)$ το $\rho-$ισοτυπικό κομμάτι $V(\rho)$ στην $V$ είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε η π θα λέγεται αποδεκτή.

Ομοίως στην Αρχιμήδεια περίπτωση, ένα $(\mathfrak{g}_\infty, K_u)$-πρότυπο θα λέγεται **αποδεκτό** αν τα $\rho-$ισοτυπικά κομμάτια είναι πεπερασμένης διάστασης, για κάθε ανάγωγη αναπαράσταση $\rho$.

### Περιορισμένο Τανυστικό Γινόμενο

Όπως θα δούμε αργότερα, οι αποδεκτές αναπαραστάσεις της $GL_n(\mathbb{A})$ μπορούν να γραφούν σαν το περιορισμένο τανυστικό γινόμενο αναπαραστάσεων των $GL_n(F_u)$. Η έννοια αυτή μας βοηθάει στην ανάλυση αυτών των αναπαραστάσεων και ανάγει την περιγραφή τους στην περιγραφή των αντίστοιχων αναπαραστάσεων για τις $GL_n(F_u)$.

Έστω ότι δίνονονται διανυσματικοί χώροι $V_u$ για $u$ σε κάποιο άπειρο σύνολο δεικτών $S$. Θεωρούμε ακόμα ότι για όλα εκτός από πεπερασμένα $u \in S$ δίνεται ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $x_u^0 \in V_u$.
Θέτουμε, $\Omega = \{S' \subset S||S'| < \infty$, αν $u \in S'$ορίζεται το $x_u^0 \in V_u\}$. Το $\Omega$ γίνεται διατεταγμένο σύνολο, θέτοντας $S_1 < S_2$ όταν $S_1 \subset S_2$, και θα είναι μάλιστα κατευθυνόμενο σύνολο.

Έστω $S_1$, $S_2 \in \Omega$, με $S_1 \leq S_2$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό $\lambda_{S_1,S_2} : \otimes_{u\in S_1} V_u \to \otimes_{u\in S_2} V_u$, με $x \mapsto x \otimes_{u\in S_2 - S_1} x_u^0$. Οι απεικονίσεις αυτές δημιουργούν μια κατευθυνόμενη οικογένεια, και έτσι μπρούμε να κατασκευάσουμε το ευθύ όριό τους, $\underset{\to}{lim} \otimes_{u\in S'} V_u$.

**Ορισμός 8.2.4** Το παραπάνω ευθύ όριο θα συμβολίζεται με $\otimes_{u\in S}V_u$ ή $\otimes_u V_u$ και καλείται το **περιορισμένο τανυστικό γινόμενο** των $V_u$ ως προς τα $x_u^0$.

**Παρατήρηση 8.2.1** Τα στοιχεία του $\otimes_u V_u$ μπορούμε να τα θεωρήσουμε σαν στοιχεία της μορφής $\otimes_{u\in S}x_u$ με $x_u \in V_u$ και σχεδόν για κάθε $u$, δηλαδή για όλα εκτός από πεπερασμένα, $x_u = x_u^0$.

Η έννοια αυτή θα μας χρησιμεύσει στην εξής κατάσταση:

Θεωρούμε ότι για κάθε $u \in S$ δίνεται ακόμα μια ομάδα $G_u$ και, για κάθε $u \in S - S_\infty$, όπου $S_\infty$ πεπερασμένο, δίνεται και μια υποομάδα $K_u$ της $G_u$, ώστε ο χώρος $V_u$ να είναι μια αναπαράσταση $(\rho_u, V_u)$ της ομάδας $G_u$. Θεωρούμε ακόμα ότι για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος $u$ υπάρχει μη-μηδενικό $\xi_u^0 \in V_u$ με $\rho_u(k_u)\xi_u^0 = \xi_u^0$, για κάθε $k_u \in K_u$.

Αν $G$ είναι το περιορισμένο ευθύ γινόμενο των $G_u$ ως προς τις $K_u$, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια αναπαράσταση $(\otimes_u\rho_u, \otimes_u V_u)$ από τον τύπο

$$(\otimes_u\rho_u)\left((g_u)_u\right)\xi_u = \otimes_u(\rho_u(g_u)\xi_u).$$

Η εφαρμογή της παραπάνω έννοιας στην περίπτωση μας γίνεται όταν $S = M_F$ και οι ομάδες $G_u$ και $K_u$ είναι η $GL_n(F_u)$ και η μέγιστη συμπαγής υποομάδα της αντίστοιχα.

Ισχύει ότι κάθε ανάγωγη ομαλή και αποδεκτή αναπαράσταση $\pi$ της $GL_n(\mathbb{A})$ είναι το περιορισμένο τανυστικό γινόμενο αντίστοιχων, δηλαδή ομαλών αποδεκτών και ανάγωγων, αναπαραστάσεων για τις $GL_n(F_u)$.

Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 8.2.1** Έστω $(\pi, V)$ μια ανάγωγη αποδεκτή αναπαράσταση της ομάδας $GL_n(\mathbb{A})$. Τότε για κάθε αρχιμήδεια θέση του σώματος $F$ υπάρχει ένα ανάγωγο αποδεκτό $(\mathfrak{g}_\infty, K_u)$-πρότυπο $(\pi_u, V_u)$ και για κάθε μη-αρχιμήδεια θέση υπάρχει μια ανάγωγη αποδεκτή αναπαράσταση $(\pi_u, V_u)$ της $GL_n(F_u)$, ώστε για όλες εκτός από πεπερασμένες θέσεις $u$ θα υπάρχει $\xi_u \in V_u$ που να είναι $K_u-$αναλλοίωτο. Τέλος, η αναπαράσταση $\pi$ θα είναι το περιορισμένο τανυστικό γινόμενο των $\pi_u$.

Απόδειξη: Το Θεώρημα αυτό βασίζεται στη δουλειά του $Flath$[1], η διατύπωσή του γίνεται στο $[Bu-1]$ Θεώρημα 3.3.3, σελίδα 302, ενώ στην απόδειξή του είναι αφιερωμένη η Παράγραφος 3.4 του ίδιου τόμου.

**Παρατήρηση 8.2.2** Αποδεικνύεται ότι οι αυτομορφικές αναπαραστάσεις είναι ομαλές, αποδεκτές και ανάγωγες, εξ ορισμού, και άρα θα επιδέχονται μια γραφή της μορφής $\pi = \otimes_u\pi_u$. Η γραφή αυτή θα μας χρειαστεί αργότερα στον ορισμό της $L-$συνάρτησής τους.

## 8.3 Η καθολική άλγεβρα *Hecke*

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εναλλακτική περιγραφή των αυτομορφικών αναπαραστάσεων ως κατάλληλα πρότυπα της Καθολικής Άλγεβρας *Hecke* της ομάδας μας, η οποία είναι η άλγεβρα ορισμένων κατανομών της ομάδας $GL_n(\mathbb{A})$, και η δράση της στους χώρους των αυτομορφικών και *cuspidal* αυτομορφικών μορφών κωδικοποιεί την δράση τόσο του πεπερασμένου μέρους $GL_n(\mathbb{A}_f)$ όσο και την δομή που θα έχουν ως $(g_\infty, K_\infty)-$πρότυπα.

Η Καθολική Άλγεβρα *Hecke* είναι ένα παράδειγμα Άλγεβρας Ταυτοδύναμων Στοιχείων. Ξεκινάμε πρώτα με την περιγραφή αυτής της έννοιας και στη συνέχεια θα δούμε την κατασκευή της Καθολικής Άλγεβρας *Hecke*, καθώς και την ισοδυναμία κατάλληλων προτύπων της με τις αποδεκτές

[1] Συγκεκριμένα στο *Flath, D. : Decomposition of representations into tensor products.*

αναπαραστάσεις της $GL_n(\mathbb{A})$.

**Ορισμός 8.3.1** (Άλγεβρα Ταυτοδύναμων Στοιχείων) Έστω $k$ ένα τυχαίο σώμα και $\mathcal{H}$ μια $k-$άλγεβρα, η οποία δεν έχει απαραίτητα μονάδα. Θεωρούμε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathcal{E}$ της $\mathcal{H}$ που αποτελείται από ταυτοδύναμα στοιχεία της $\mathcal{H}$, ώστε να ισχύουν:

1. Αν $e_1$, $e_2 \in \mathcal{E}$, τότε υπάρχει $e_0 \in \mathcal{E}$ , τέτοιο ώστε $e_0e_1 = e_1e_0 = e_1$ και $e_0e_2 = e_2e_0 = e_2$.

2. Για κάθε $h \in \mathcal{H}$, υπάρχει $e \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $eh = he = h$.

Τότε το διατεταγμένο ζεύγος $(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ θα λέγεται **άλγεβρα ταυτοδύναμων στοιχείων**.

**Παρατηρήσεις 8.3.1** 1. Όταν έχουμε προσδιορίσει το σύνολο $\mathcal{E}$, θα συμβολίζουμε απλώς με $\mathcal{H}$ την άλγεβρα ταυτοδύναμων στοιχείων.

2. Το σύνολο $\mathcal{E}$ μπορεί να εφοδιαστεί με μια μερική διάταξη ως προς την οποία είναι μάλιστα κατευθυνόμενο σύνολο, συγκεκριμένα ορίζουμε, για $e$, $f \in \mathcal{E}$ $e \geq f$, όταν ισχύει $ef = fe = f$.

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστούμε κάποιες έννοιες από τη θεωρία Προτύπων.

Θεωρούμε $R$ έναν μεταθετικό δακτύλιο, ο οποίος δεν έχει απαραίτητα μονάδα, $e \in R$ ένα ταυτοδύναμο στοιχείο του και $M$ ένα $R-$πρότυπο.

Ορίζουμε $R[e]$ να είναι ο δακτύλιος με μονάδα $eRe$, με μονάδα το $e$, και $M[e]$ να είναι το $R[e]-$πρότυπο $e \cdot M$.

Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει, δηλαδή μιας άλγεβρας ταυτοδύναμων στοιχείων $R = \mathcal{H}$, ο δακτύλιος $\mathcal{H}[e]$ θα είναι επίσης μια $k-$άλγεβρα, και αν $M$ είναι ένα $\mathcal{H}-$πρότυπο, τότε το $M[e]$ θα είναι ένα $\mathcal{H}[e]-$πρότυπο.

Η κρίσιμη κατηγορία $\mathcal{H}-$προτύπων είναι αυτή των αποδεκτών $\mathcal{H}-$προτύπων.

**Ορισμός 8.3.2** Έστω $M$ ένα $\mathcal{H}-$πρότυπο. Τότε, το $M$ θα λέγεται **ομαλό** αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή $M = \bigcup_{e\in\mathcal{E}} M[e]$. Το πρότυπο $M$ θα λέγεται **αποδεκτό** αν είναι ομαλό και επιπλέον ισχύει ότι για κάθε $e \in \mathcal{E}$ το $M[e]$ ως $k-$πρότυπο είναι πεπερασμένης διάστασης.

Τώρα είμαστε σε θέση να περιγράψουμε την Καθολική Άλγεβρα $Hecke$ της $GL_n(\mathbb{A})$. Αρχικά, θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε $GL_n(F_u)$ μια άλγεβρα ταυτοδύναμων στοιχείων. Οι άλγεβρες αυτές έχουν διαφορετική περιγραφή στην περίπτωση των αρχιμήδειων και μη-αρχιμήδειων θέσεων του σώματος $F$.

1. **Η Περίπτωση των Μη-Αρχιμήδειων Θέσεων**

Θεωρούμε κάποια μη-αρχιμήδεια θέση $u$ του σώματος $F$ και την ομάδα $G_u = GL_n(F_u)$.

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $\mathcal{H}_u$ να είναι η άλγεβρα με συνέλιξη των τοπικά σταθερών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στην $G_u$ και τιμές στο $\mathbb{C}$. Οι συναρτήσεις οι οποίες είναι τοπικά σταθερές σε αυτές τις ομάδες ονομάζονται και ομαλές.

Στην άλγεβρα αυτή, που συμβολίζεται και με $C_c^\infty(G_u)$, ορίζεται μια συνέλιξη από τον εξής τύπο:

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(gh^{-1})f_2(h)dh,$$

όπου $g \in G_u$, $f_1$, $f_2 \in \mathcal{H}_u$ και $dh$ είναι ένα μέτρο $Haar$ στην ομάδα $G_u$.

Τα ταυτοδύναμα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{E}$ του ορισμού στην περίπτωσή μας θα ορίζονται με τη βοήθεια ανοιχτών και συμπαγών υποομάδων της $G_u$.

Συγκεκριμένα, για κάθε ανοιχτή και συμπαγή υποομάδα $K_0$ της $G_u$ ορίζουμε $e_0$ να είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $K_0$ διαιρεμένη με τον όγκο $vol(K_0)$ του $K_0$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι εύκολο να δούμε ότι ανήκουν στην $\mathcal{H}_u$ και είναι μάλιστα ταυτοδύναμες ως προς την συνέλιξη.

Ακόμα θα ισχύει $e_0e_1 = e_1$, όταν $K_1 \subset K_0$, όπου $K_0$ και $K_1$ είναι όπως παραπάνω.

Το γεγονός ότι το ζεύγος $(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ αποτελεί άλγεβρα ταυτοδύναμων στοιχείων οφείλεται στην παρακάτω:

**Πρόταση 8.3.1** Η $G_u$ περιέχει μια βάση ανοιχτών και συμπαγών περιοχών του ταυτοτικού στοιχείου $I_n$.

Απόδειξη: Θέτουμε $K(\varpi^n)$, όπου $n \geq 0$ να είναι η υποομάδα της $K = GL_n(O_u)$, τα στοιχεία της οποίας ικανοποιούν τη σχέση $A \equiv I_n(mod \varpi^n)$, όπου $\varpi$ είναι ένα πρώτο στοιχείο του δακτυλίου $O_u$. Οι υποομάδες αυτές θα ικανοποιούν τις συνθήκες που χρειαζόμαστε.

Η άλγεβρα του πεπερασμένου παράγοντα $GL_n(\mathbb{A}_f)$, η οποία θα συμβολίζεται με $\mathcal{H}_f$, θα είναι το περιορισμένο τανυστικό γινόμενο των $\mathcal{H}_u$ ως προς τα ταυτοδύναμα στοιχεία $e_u^0$, που θα αντιστοιχούν στην μέγιστη συμπαγή υποομάδα $K_u = GL_n(O_u)$ από την παραπάνω περιγραφή.

Τα ταυτοδύναμα στοιχεία αυτής της άλγεβρας θα είναι της μορφής $\otimes_u x_u$, όπου $u$ είναι οι πεπερασμένες θέσεις και τα $x_u$ θα είναι ταυτοδύναμα στοιχεία των αντίστοιχων $\mathcal{H}_u$, τέτοια ώστε για όλες εκτός από πεπερασμένες το πλήθος θέσεις $u$, το $x_u$ να είναι τέτοιο ώστε $x_u = e_u^0$.

2. **Η Περίπτωση των Αρχιμήδειων Θέσεων**

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό της άλγεβρας $Hecke$ σε αυτή την περίπτωση θα μας χρειαστεί ο ακόλουθος:

**Ορισμός 8.3.3** Έστω $G_\infty = GL_n(F_\infty)$, ως ομάδα $Lie$, και $C^\infty(G_\infty)$ ο χώρος των $C^\infty$ συναρτήσεών της. Κάθε γραμμικό συναρτησοειδές του χώρου αυτού θα λέγεται **κατανομή με συμπαγή φορέα** της $G_\infty$.

Ο χώρος των κατανομών αυτών συμβολίζεται με $\mathcal{E}'(G_\infty)$. Η δράση μιας $T \in \mathcal{E}'(G_\infty)$ σε μια $f \in C^\infty(G_\infty)$ θα συμβολίζεται με $\langle T, f \rangle = \int\limits_{G_\infty} f(x)dT(x)$.

Ο λόγος που οι κατανομές αυτές ονομάζονται κατανομές συμπαγούς φορέα οφείλεται στην ακόλουθη:

**Πρόταση 8.3.2** Κάθε στοιχείο του χώρου $\mathcal{E}'(G)$ είναι συνάρτηση συμπαγούς φορέα στο χώρο $C^\infty(G_\infty)$.

Απόδειξη: $[Kn - Vo]$ Πρόταση Β.15, σελίδα 825, του Παραρτήματος Β.

Θεωρούμε $K_\infty$ τη μέγιστη συμπαγή υποομάδα της $G_\infty = GL_n(F_\infty)$, η οποία θα ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων $K_u$, όπου $u$ είναι μια αρχιμήδεια θέση. Η $K_\infty$ θα είναι μια συμπαγής ομάδα $Lie$. Η ομάδα αυτή θα δρα στο χώρο των κατανομών μας τόσο από δεξιά όσο και από αριστερά.

Συγκεκριμένα, στο χώρο $C^\infty(G_\infty)$ θα έχουμε δύο δράσεις της ομάδας $G_\infty$, δεξιά και αριστερή, οι οποίες θα δίνονται από τους τύπους

$$[r(g)f](x) = f(xg) \text{ και } [l(g)f](x) = f(g^{-1}x).$$

Οι αναπαραστάσεις αυτές θα επάγουν αναπαραστάσεις της $G_\infty$ στο χώρο $\mathcal{E}'(G_\infty)$ αφού θα διατηρούν τις συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, οι οποίες θα δίνονται από τους τύπους

$$\langle r(g)T, f\rangle = \left\langle T, r(g^{-1})f\right\rangle \text{ και } \langle l(g)T, f\rangle = \left\langle T, l(g^{-1})f\right\rangle \text{ αντίστοιχα.}$$

**Ορισμός 8.3.4** Ορίζουμε $\mathcal{H}_\infty$ να είναι η άλγεβρα των κατανομών συμπαγούς φορέα της $G_\infty$ των οποίων ο φορέας περιέχεται στην υποομάδα $K_\infty$ και οι οποίες είναι $K_\infty-$πεπερασμένες τόσο από τη δεξιά όσο και από την αριστερή δράση της $K_\infty$.

Η συνέλιξη σε αυτή την περίπτωση θα δίνεται με τη βοήθεια του $push-forward$ του πολλαπλασιασμού $m : G \times G \to G$. Συγκεκριμένα το $push - forward$ θα είναι μια συνάρτηση $m_* : \mathcal{E}'(G \times G) \to \mathcal{E}'(G)$. Τελικά θα έχουμε ότι η συνέλιξη θα δίνεται από τον τύπο:

$$\langle S * T, f\rangle = \int\limits_{G_\infty \times G_\infty} f(xy)dS(x)dT(y) = \langle S, \langle T, f(xy)\rangle\rangle.$$

Αποδεικνύεται ότι η ιδιότητα του $K_\infty-$πεπερασμένου για τη δεξιά δράση συνεπάγεται την ίδια ιδιότητα της αριστερής δράσης και αντίστροφα.

Μας μένει πλέον να βρούμε τα κατάλληλα ταυτοδύναμα στοιχεία της άλγεβρας αυτής.

Έστω $(\pi_i, V_i)$, $i \in \mathbb{N}$, μια αρίθμηση των ανάγωγων αναπαραστάσεων της ομάδας $K_\infty$ ως προς ισοδυναμία. Για κάθε αναπαράσταση θέτουμε $d_i$ το βαθμό της και $\tau_i$ τον χαρακτήρα της. Για κάθε $i$ θέτουμε επίσης $f_i = d_i\tau_i$, ως συνάρτηση στην $K_\infty$ η $f_i$ θα είναι $C^\infty$. Θεωρώντας $dk$ μια κατάλληλη κανονικοποίηση του μέτρου $Haar$ ορίζουμε

$$e_i = \tfrac{f_i}{vol(K_\infty)}dk.$$

Τότε θα έχουμε ότι τα $e_i$ θα είναι στοιχεία της $\mathcal{H}$ και αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $A$ του $\mathbb{N}$ ορίσουμε $e_A = \sum_{i\in A} e_i$ τότε αποδεικνύεται ότι τα $e_A$ είναι ταυτοδύναμα στοιχεία της άλγεβράς μας. Το σύνολο των στοιχείων αυτών θα συμβολίζεται με $\mathcal{E}_\infty$.

Από τους παραπάνω ορισμούς, με τη βοήθεια κάποιων βασικών πράξεων, καταλήγουμε ότι το ζεύγος $(\mathcal{H}_\infty, \mathcal{E}_\infty)$, το οποίο θα συμβολίζουμε απλά με $\mathcal{H}_\infty$, θα είναι μια άλγεβρα ταυτοδύναμων στοιχείων.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον τελικό ορισμό μας.

**Ορισμός 8.3.5** (Καθολική Άλγεβρα $Hecke$) Ορίζουμε την **Καθολική Άλγεβρα $Hecke$** της $GL_n(\mathbb{A})$ να είναι το περιορισμένο τανυστικό γινόμενο των $\mathcal{H}_f$ και $\mathcal{H}_\infty$ ως προς κατάλληλα ταυτοδύναμα στοιχεία. Η άλγεβρα αυτή θα συμβολίζεται με $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})} = \mathcal{H}_f \otimes \mathcal{H}_\infty$.

**Παρατήρηση 8.3.2** Εναλλακτικά μπορούμε στη θέση της $K_\infty$ και της $G_\infty$ να βάλουμε τις $G_u$ και $K_u$ στην περίπτωση των αρχιμήδειων θέσεων. Το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο αφού θεωρήσουμε κατάλληλο γινόμενο των αντίστοιχων $\mathcal{H}_u$, για να πάρουμε είτε την $\mathcal{H}_\infty$ είτε την $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$.

## 8.4 Πρότυπα της $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$

Η Άλγεβρα $Hecke$, μέσω των προτύπων της, μας παρέχει μια εναλλακτική περιγραφή των αυτομορφικών αναπαραστάσεων. Η δομή $(\mathfrak{g}, K)-$προτύπου των αυτομορφικών αναπαραστάσεων θα μεταφράζεται σε μια δομή $\mathcal{H}_\infty-$προτύπου ενώ η δομή ως αναπαράσταση της $GL_n(\mathbb{A}_f)$ θα αποτυπώνεται σε μια δομή $\mathcal{H}_f-$προτύπου.

Ξεκινάμε με την περιγραφή της δράσης του πεπερασμένου παράγοντα της άλγεβράς μας.

Έστω $u$ μια πεπερασμένη θέση του σώματος $F$, $\mathcal{H}_u$ η άλγεβρα που αντιστοιχεί σε αυτό και $\mathcal{H}_f$ η άλγεβρα που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Έχουμε ήδη δει τις έννοιες του ομαλού και αποδεκτού προτύπου μια Άλγεβρας Ταυτοδύναμων Στοιχείων. Οι ορισμοί αυτοί έχουν μια ισοδύναμη περιγραφή, που δίνεται από την ακόλουθη:

**Πρόταση 8.4.1** Έστω $\mathcal{H}$ μια Άλγεβρα Ταυτοδύναμων Στοιχείων και $\mathcal{E}$ το αντίστοιχο μερικώς διατεταγμένο σύνολο των ταυτοδύναμων στοιχείων της. Ένα $\mathcal{H}-$πρότυπο $M$ είναι ομαλό αν για κάθε στοιχείο του $m$ υπάρχει κάποιο $e_m \in \mathcal{E}$ ώστε για κάθε $e \in \mathcal{E}$ με $e \geq e_m$ να ισχύει $e \cdot m = m$. Ένα τέτοιο πρότυπο θα είναι αποδεκτό αν για κάθε $e \in \mathcal{E}$ το σύνολο των διανυσμάτων του $M$ που παραμένει σταθερό από τη δράση του $e$ είναι πεπερασμένης διάστασης ως $k-$διανυσματικός χώρος. Τέλος, και στις δύο περιπτώσεις ισχύει και η αντίστροφη κατεύθυνση των ισχυρισμών.

Απόδειξη: Η απόδειξη της παραπάνω Πρότασης είναι μια απλή εφαρμογή των ορισμών που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Όπως θα δούμε, οι αποδεκτές αναπαραστάσεις της ομάδας $GL_n(\mathbb{A}_f)$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τα αποδεκτά πρότυπα της άλγεβρας $\mathcal{H}_f$, ενώ το ίδιο ισχύει και για τις ομάδες $GL_n(F_u)$ και τις άλγεβρες $\mathcal{H}_u$ που αντιστοιχίσαμε σε αυτές.

Αρχικά, θέτουμε $G$ να είναι μια εκ των παραπάνω ομάδων και $\mathcal{H}$ να είναι η αντίστοιχη άλγεβρά της. Θεωρούμε μια αναπαράσταση $(\pi, V)$ της $G$. Αν η αναπαράσταση αυτή της $G$ είναι ομαλή, τότε ο χώρος $V$ θα επιδέχεται δομή $\mathcal{H}-$προτύπου, και μάλιστα ομαλού, μέσω της εξής διαδικασίας:

Για $\phi \in \mathcal{H}$ και $v \in V$ θέτουμε $\pi(\phi)v = \displaystyle\int_G \phi(g)\pi(g)v dg$.

Η πλήρης σύνδεση των εννοιών που μας ενδιαφέρουν οφείλεται στην ακόλουθη:

**Πρόταση 8.4.2** Έστω $G$ και $\mathcal{H}$ όπως παραπάνω και $V$ ένα ομαλό πρότυπο της $\mathcal{H}$. Τότε θα υπάρχει μια ομαλή αναπαράσταση $\pi : G \to End_{\mathbb{C}}(V)$ της $G$ τέτοια ώστε $\phi \cdot x = \pi(\phi)x$, για κάθε $\phi \in \mathcal{H}$ και $x \in V$.

Απόδειξη: $[Bu - 1]$ Πρόταση 3.4.8, σελίδα 316.

Χάρη στην παραπάνω Πρόταση και τους αντίστοιχους ορισμούς, έχουμε το ακόλουθο:

**Πόρισμα 8.4.1** Έστω $G$ και $\mathcal{H}$ όπως παραπάνω. Τότε, οι αποδεκτές αναπαραστάσεις της $G$ θα είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τα αποδεκτά $\mathcal{H}-$πρότυπα.

**Παρατήρηση 8.4.1** Με μια διαδικασία αντίστοιχη του Περιορισμένου Τανυστικού Γινομένου, μπορούμε να ορίσουμε τανυστικά γινόμενα προτύπων, ένα για κάθε άλγεβρα που θα περιέχεται στο τανυστικό γινόμενο. Οι ορισμοί μας, για τα αποδεκτά πρότυπα, συνεχίζουν να ισχύουν, αφού το τανυστικό γινόμενο αποδεκτών προτύπων αποδεικνύεται ότι θα είναι αποδεκτό πρότυπο του τανυστικού γινομένου των αλγεβρών.

Έχοντας καλύψει την μη-αρχιμήδεια περίπτωση, μένει να εξετάσουμε την περίπτωση του αρχιμήδειου παράγοντα της $GL_n(\mathbb{A})$. Η δράση του παράγοντα αυτού, που συμβολίζουμε με $G_\infty$, στα αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν περιγράφεται όπως έχουμε δει από την έννοια του $(\mathfrak{g}, K)-$προτύπου.

**Πρόταση 8.4.3** Έστω $G_\infty = GL_n(F_\infty)$, $K_\infty$ η μέγιστη συμπαγής υποομάδα της και $\mathfrak{g}_\infty$ η άλγεβρα *Lie* της $G_\infty$. Έστω $V$ ένα $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)-$πρότυπο. Τότε το $V$ δέχεται μια φυσική δομή ομαλού $\mathcal{H}_\infty-$προτύπου, και αντίστροφα κάθε ομαλό $\mathcal{H}_\infty-$πρότυπο προκύπτει με αυτόν τον τρόπο. Επίσης, ένα $\mathcal{H}_\infty-$πρότυπο είναι αποδεκτό αν και μόνο αν το αντίστοιχο $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)-$πρότυπο είναι αποδεκτό.

Απόδειξη: Η Πρόταση, και συγκεκριμένα το κομμάτι της για τα ομαλά πρότυπα, διατυπώνεται με διαφορετικό λεξιλόγιο στο τέλος της παραγράφου 1.4 του $[Kn - Vo]$ και αποδεικνύεται στην παράγραφο 1.6 του ίδιου βιβλίου. Η περίπτωση των αποδεκτών προτύπων προκύπτει με εφαρμογή των ορισμών.

Τέλος, είμαστε σε θέση να εξετάσουμε την περίπτωση της Καθολικής Άλγεβρας *Hecke* της ομάδας $GL_n(\mathbb{A})$. Υπενθυμίζουμε ότι εξ ορισμού θα ισχύει $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})} = \mathcal{H}_f \otimes \mathcal{H}_\infty$. Η γραφή αυτή μας επιτρέπει να ορίσουμε τις έννοιες των ομαλών και αποδεκτών προτύπων της άλγεβρας $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$, θεωρώντας ως σύνολο ταυτοδύναμων στοιχείων τους γνήσιους τανυστές ταυτοδύναμων στοιχείων των $\mathcal{H}_f$ και $\mathcal{H}_\infty$, δηλαδή των στοιχείων της μορφής $e \otimes f \in \mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$, όπου $e \in \mathcal{E}(\mathcal{H}_f)$ και $f \in \mathcal{E}(\mathcal{H}_\infty)$.

Για τη δομή των προτύπων αυτών θα ισχύει ακόμα το ακόλουθο:

**Θεώρημα 8.4.1** Έστω $M_1$ και $M_2$ ανάγωγα και αποδεκτά πρότυπα των $\mathcal{H}_f$ και $\mathcal{H}_\infty$ αντίστοιχα. Τότε το $M = M_1 \otimes M_2$ θα είναι ανάγωγο και αποδεκτό πρότυπο της $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$, και αντιστρόφως, κάθε τέτοιο πρότυπο της $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$ θα γράφεται σαν τανυστικό γινόμενο αντίστοιχων προτύπων για τις άλγεβρες $\mathcal{H}_f$ και $\mathcal{H}_\infty$.

Απόδειξη: $[Bu - 1]$ Θεώρημα 3.4.2, σελίδα 313.

Χάρη στο Πόρισμα 8.4.2 και την Πρόταση 8.4.3, καθώς και τον ορισμό του χώρου των αυτομορφικών μορφών $\mathcal{A}$, έχουμε το ακόλουθο:

**Πόρισμα 8.4.2** Ο χώρος των αυτομορφικών μορφών της $GL_n(\mathbb{A})$, $\mathcal{A}$, θα είναι ένα ομαλό $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}-$πρότυπο, ενώ η δράση της $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$ θα δίνεται από τις συνελίξεις των $\mathcal{H}_f$ και $\mathcal{H}_\infty$.

Χάρη σε όσα έχουμε δει, για τις αυτομορφικές αναπαραστάσεις της $GL_n(\mathbb{A})$ μπορεί να δωθεί και ο ακόλουθος ισοδύναμος:

**Ορισμός 8.4.1** Κάθε ανάγωγο $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}-$υποπηλίκο του χώρου των αυτομορφικών μορφών $\mathcal{A}$ θα λέγεται **αυτομορφική αναπαράσταση της $GL_n(\mathbb{A})$**, ενώ κάθε ανάγωγο $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}-$υποπηλίκο του χώρου $\mathcal{A}_0$ των *cuspidal* αυτομορφικών μορφών θα λέγεται ***cuspidal* αυτομορφική αναπαράσταση της $GL_n(\mathbb{A})$**.

**Παρατήρηση 8.4.2** Η Καθολική Άλγεβρα *Hecke*, στην περίπτωση $n = 2$, είναι η άμεση γενίκευση των τελεστών *Hecke*. Πράγματι, έστω $f$ μια *modular* μορφή, για κάποια $\Gamma'$, και $T$ κάποιος τελεστής *Hecke*. Τότε η ανύψωση $\widetilde{T \cdot f}$ της $T \cdot f$ θα ισούται με $\tilde{T} * \tilde{f}$, όπου $\tilde{f}$ είναι η ανύψωση της $f$ στην $GL_2(\mathbb{A})$ και $\tilde{T}$ είναι κάποιο στοιχείο της Καθολικής Άλγεβρας *Hecke* $\mathcal{H}_{GL_2(\mathbb{A})}$.

Η απόδειξη της παρατήρησης αυτής υπάρχει στο Λήμμα 3.7 της σελίδας 48 του $[Ge - 1]$.

### 8.4.1 *Cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις

Οι *cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις έχουν καλύτερη συμπεριφορά από τις γενικές αυτομορφικές αναπαραστάσεις. Μέσω της περιγραφής των αναπαραστάσεων αυτών ως πρότυπα της Καθολικής Άλγεβρας *Hecke* μπορούμε να πάρουμε κάποια αποτελέσματα για τη δομή τους.

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$ την Καθολική Άλγεβρα *Hecke* της $GL_n(\mathbb{A}_F)$.

Όπως είδαμε στο τέλος του προηγούμενου Κεφαλαίου, και συγκεκριμένα στην Πρόταση 7.4.4, οι *cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις ανήκουν σε κάποιον χώρο $L^2$, επομένως ο χώρος τους, $\mathcal{A}_0(GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}), \omega)$, θα είναι υπόχωρος του χώρου αυτού. Ο χώρος αυτός, που συμβολίζεται με $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))_\omega$, όπου $G(\cdot) = GL_n(\cdot)$, θα είναι ο χώρος των συναρτήσεων

$$\{f : |f| \in L^2(J_F G(F)\backslash G(\mathbb{A})), \text{ και } f(zx) = \omega(z)f(x), \text{ για } z \in C_F,\ x \in G(\mathbb{A})\}.$$

Επομένως, αφού ο χώρος $L^2$ είναι χώρος *Hilbert*, και θα έχουμε κάποιο εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να αναρωτηθούμε κατα πόσο οι *cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις θα είναι *unitarizable* αναπαραστάσεις της $GL_n(\mathbb{A})$, δηλαδή αν θα υπάρχει κάποιο εσωτερικό γινόμενο ως προς το οποίο θα είναι ορθομοναδιαίες.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι θετική και βασίζεται στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 8.4.2** Ο υπόχωρος των *cuspidal* μορφών στον $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))_\omega$ έχει διακριτή ανάλυση με πεπερασμένες πολλαπλότητες, σε άθροισμα αναγώγων υποαναπαραστάσεων. Επομένως, για κάθε $f \in \mathcal{A}_0(GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}), \omega)$, το $\mathcal{H}-$πρότυπο $f * \mathcal{H}$ θα γράφεται ως πεπερασμένο ευθύ άθροισμα από *cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις.

**Παρατήρηση 8.4.3** Η απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος οφείλεται στους *Gelfand* και *Piatetski − Shapiro*.

# Κεφάλαιο 9

# Πρόγραμμα *Langlands* για την $GL_n$

Το Πρόγραμμα $Langlands$ στην περίπτωση της ομάδας $GL_n$ προτείνει τον ορισμό μιας $L-$συνάρτησης για κάθε αυτομορφική αναπαράσταση. Ο ορισμός της $L-$συνάρτησης αυτής βασίζεται στην Τοπική Εικασία του $Langlands$, η οποία αποδείχθηκε από τους $R.Taylor$ και $M.Harris$ στην περίπτωση των ομάδων που μας ενδιαφέρουν το 2001. Ο $Langlands$ είχε ως στόχο του να αντιστοιχήσει σε κάθε αναπαράσταση της $G_F$ μια $cuspidal$ αυτομορφική αναπαράσταση της $GL_n(\mathbb{A}_F)$ ώστε οι αντίστοιχες $L-$συναρτήσεις του να είναι ίσες.

## 9.1 Η τοπική αντιστοιχία

Η ιδέα πίσω από τον ορισμό της $L-$συνάρτησης $Langlands$ βρίσκεται αρχικά στην ιδιότητα των αυτομορφικών αναπαραστάσεων να γράφονται ως περιορισμένα τανυστικά γινόμενα αποδεκτών και αναγώγων αναπαραστάσεων των τοπικών παραγόντων $GL_n(F_u)$. Επομένως, μπορούμε, όπως και στην περίπτωση των $L-$συναρτήσεων $Hecke$ και $Artin$, να ορίσουμε πρώτα τους τοπικούς $L-$παράγοντες και στην συνέχεια να ορίσουμε την $L-$συνάρτησή μας σαν ένα απειρογινόμενο $Euler$. Η ιδέα του $Langlands$ ήταν να αντιστοιχίσει σε κάθε αποδεκτή και ανάγωγη αναπαράσταση της $GL_n(F_u)$ έναν κατάλληλο ομομορφισμό της ομάδας $Weil$ του $F_u$ και να ορίσει τον $L-$παράγοντα με τη βοήθεια αυτού.

Στο υπόλοιπο της παραγράφου αυτής με $k$ θα συμβολίζουμε ένα τοπικό σώμα χαρακτηριστικής μηδέν, το οποίο στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει θα είναι το σώμα $F_u$ για κάποια θέση του σώματος αριθμών $F$.

Η ομάδα $Weil$ στην διαδικασία που μόλις περιγράψαμε δουλεύει μόνο στην περίπτωση που το τοπικό σώμα μας $k$ είναι αρχιμήδειο. Στην περίπτωση των μη-αρχιμήδειων σωμάτων χρειαζόμαστε μια παραλλαγή της ομάδας $Weil$, την ομάδα $Weil - Deligne$.

Θεωρούμε αρχικά τον ισομορφισμό που, σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.2, θα μας δίνει η απεικόνιση τοπικής αντιστροφής $\theta_k : k^* \to W_k^{ab}$. Θεωρούμε επίσης την απεικόνιση $|| \cdot || : W_k \to \mathbb{R}_+^*$, που θα δίνεται από την σύνθεση των απεικονίσεων της παρακάτω ακολουθίας

$$W_k \to W_k^{ab} \xrightarrow{\theta_k^{-1}} k^* \xrightarrow{|\cdot|_k} \mathbb{R}_+^*.$$

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον ακόλουθο:

**Ορισμός 9.1.1** Έστω $k$ ένα τοπικό μη-αρχιμήδειο σώμα και $W_k$ η ομάδα $Weil$ του. Η **ομάδα** $\boldsymbol{Weil - Deligne}$ του $k$, που θα συμβολίζεται με $W_k'$ ορίζεται να είναι το ημιευθύ γινόμενο των $W_k$ και $\mathbb{C}$, όπου η $W_k$ δρα στο $\mathbb{C}$ μέσω της σχέσης

$$wxw^{-1} = ||w||x, \text{ όπου } w \in W_k \text{ και } x \in \mathbb{C}.$$

**Παρατηρήσεις 9.1.1** 1. Ο πολλαπλασιασμός στην ομάδα $W_k'$ θα δίνεται από τον τύπο

$$(a_1, w_1)(a_2, w_2) = (a_1 + ||w_1||a_2, w_1 w_2).$$

2. Ο λόγος που χρειαζόμαστε την ομάδα $Weil-Deligne$ αντί της ομάδας $Weil$ στην περίπτωση των μη-αρχιμήδειων τοπικών σωμάτων είναι ότι οι ομάδες $GL_n(k)$, όταν το $k$ είναι μη-αρχιμήδειο, έχουν διαφορετικού είδους ανάγωγες αναπαραστάσεις από αυτές που έχουν όταν το $k$ είναι αρχιμήδειο.

### Αποδεκτοί Ομομορφισμοί

Οι ομομορφισμοί των ομάδων $Weil$ και $Weil - Deligne$ που μας ενδιαφέρουν είναι οι λεγόμενοι αποδεκτοί ομομορφισμοί και ορίζονται διαφορετικά ανάλογα με το αν το $k$ είναι αρχιμήδειο ή όχι.

#### 1. Η μη-αρχιμήδεια περίπτωση

Ξεκινάμε απευθείας με τον ορισμό των ομομορφισμών που μας ενδιαφέρουν.

**Ορισμός 9.1.2** Έστω ένας συνεχής ομομορφισμός $\phi : W'_k \to GL_n(\mathbb{C})$. Ο $\phi$ θα λέγεται **αποδεκτός** αν είναι ολόμορφη συνάρτηση της μεταβλητής στο $\mathbb{C}$, η ομάδα $\phi(\mathbb{C})$ αποτελείται από μονοδύναμους πίνακες, δηλαδή πίνακες $A$ τέτοιους ώστε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $(I_n - A)^m = 0$, και η υποομάδα $\phi(W_k)$ αποτελείται από ημιαπλούς πίνακες[1].

**Παρατήρηση 9.1.2** Για να κατασκευάσουμε έναν αποδεκτό ομομορφισμό στην πράξη προσδιορίζουμε ένα ζεύγος $(\rho, X)$, όπου $\rho : W_k \to GL_n(\mathbb{C})$ είναι ένας συνεχής ομομορφισμός ώστε η υποομάδα $\rho(W_k)$ αποτελείται από ημιαπλούς πίνακες και $X$ είναι ένας μηδενοδύναμος ενδομορφισμός του $\mathbb{C}^n$ τέτοιος ώστε $\rho(w)X\rho(w)^{-1} = ||w||X$ για κάθε $w \in W_K$.

Με τη βοήθεια της παραπάνω παρατήρησης μπορούμε να ορίσουμε τον $L-$παράγοντα για τον αποδεκτό ομομορφισμό $\phi$.
Έστω $Fr \in W_k$ να είναι τέτοιο ώστε $||Fr|| = q^{-1}$, όπου $q$ είναι η τάξη του σώματος υπολοίπων του $k$. Η επιλογή του στοιχείου αυτού είναι μοναδική *modulo* την ομάδα αδρανείας $I_k$ της ακριβούς ακολουθίας (3.4) του κεφαλαίου 3.
Όπως και στον ορισμό των $L-$παραγόντων των αδιακλάδιστων θέσεων θεωρούμε έναν κατάλληλο υπόχωρο της δράσης. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τον υπόχωρο $V_X^{I_k}$ του $kerX$ που αποτελείται από το σταθερά στοιχεία από τη δράση της $\rho(I_k)$. Αν $\phi = (\rho, X)$ είναι ένας αποδεκτός ομομορφισμός για το μη-αρχιμήδειο σώμα $k$.

**Ορισμός 9.1.3** Ορίζουμε τον ***L*−παράγοντα** του $\phi = (\rho, X)$ να είναι η συνάρτηση

$$L(s, \phi) = det(1 - \rho(Fr)|_{V_X^{I_k}} q^{-s})^{-1}.$$

#### 2. Η αρχιμήδεια περίπτωση

Στην περίπτωση των αρχιμήδειων τοπικών σωμάτων ο ορισμός των αποδεκτών ομομορφισμών είναι απλούστερος. Συγκεκριμένα θα έχουμε τον:

**Ορισμός 9.1.4** Έστω $k$ ένα αρχιμήδειο τοπικό σώμα και $W_k$ η ομάδα $Weil$ του. Ένας συνεχής ομομορφισμός $\phi : W_k \to GL_n(\mathbb{C})$ θα λέγεται **αποδεκτός** αν η εικόνα της $W_k$, $\phi(W_k)$, αποτελείται από ημιαπλούς πίνακες.

Όπως και στην περίπτωση των $L-$συναρτήσεων των $Hecke$ και $Artin$, οι $L-$παράγοντες θα είναι κάποια κατάλληλα γινόμενα από $\Gamma$ συναρτήσεις. Τα γινόμενα αυτά θα εξαρτώνται από τον τύπο

[1] Ένας πίνακας $A$ θα λέγεται ημιαπλός αν κάθε $A-$αναλλοίωτος υπόχωρος έχει έναν συμπληρωματικό επίσης $A-$αναλλοίωτο υπόχωρο. Στην περίπτωση των αλγεβρικά κλειστών σωμάτων η συνθήκη ημιαπλότητας είναι ισοδύναμη της συνθήκης ο πίνακας να είναι διαγωνιοποιήσιμος.

της αναπαράστασης $\phi$ της $W_k$.

### Η Περίπτωση $k = \mathbb{R}$

Όταν $k = \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^* \cup j \cdot \mathbb{C}^*$, όπου το $j$ δρα στο $\mathbb{C}$ μέσω της $jzj^{-1} = \bar{z}$ και $j^2 = -1 \in \mathbb{C}^*$. Σε αυτή την περίπτωση μας ενδιαφέρει να ταξινομήσουμε τις επιλύσιμες $n-$διάστατες αναπαραστάσεις της $W_{\mathbb{R}}$.

Απαραίτητο σε αυτή τη διαδικασία είναι το ακόλουθο:

**Λήμμα** Κάθε ημιαπλή πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση $\phi$ της $W_{\mathbb{R}}$ είναι πλήρως αναγώγιμη και κάθε ανάγωγη αναπαράστασή της είναι διάστασης 1 ή 2.

Απόδειξη: Είναι το Λήμμα της σελίδας 413 του $[Kn-2]$.

Ξεκινάμε με την ταξινόμηση των μονοδιάστατων ημιαπλών αναπαραστάσεων της $W_{\mathbb{R}}$. Οι μονοδιάστατες αναπαραστάσεις της $\mathbb{C}^*$ είναι όλες της μορφής $z \mapsto z^{\nu}\bar{z}^{\mu}$, όπου $\nu$, $\mu \in \mathbb{C}$ με $\mu - \nu \in \mathbb{Z}$. Το μόνο που μας μένει επομένως είναι να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της αναπαράστασης στο στοιχείο $j$.

Αν έχουμε $\phi(j) = w$, τότε θα έχουμε για $z \in \mathbb{C}^*$

$$\phi(\bar{z}) = \phi(jzj^{-1}) = w\phi(z)w^{-1} = \phi(z).$$

Επομένως, στον περιορισμό της $\phi$ στο $\mathbb{C}^*$ θα έχουμε $\phi(z) = z^{\nu}\bar{z}^{\mu}$ με $\nu = \mu$. Ακόμα θα έχουμε ότι

$$1 = \phi(-1) = \phi(j^2) = w^2$$

και άρα θα έχουμε ότι $w = \pm 1$.

Αν θέσουμε $t = 2\mu \in \mathbb{C}$ καταλήγουμε ότι μονοδιάστατες αναπαραστάσεις της $W_k$ θα ταξινομούνται από ένα ζέυγος $(t, \pm)$ με $t \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε το ζεύγος αυτό να αντιστοιχεί στην αναπαράσταση

$$\phi(z) = |z|^t \text{ και } \phi(j) = \pm 1.$$

Μας μένει να ταξινομήσουμε τις διάστασης 2 ανάγωγες αναπαραστάσεις της $W_{\mathbb{R}}$.

Από το γεγονός ότι η υποομάδα $\phi(\mathbb{C}^*)$ αποτελείται από διαγωνιοποιήσιμους πίνακες που αντιμετατίθενται μπορούμε να βρούμε μια βάση $u$, $v$ του $\mathbb{C}^2$ ως προς την οποία όλοι οι πίνακες είναι διαγώνιοι. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε $\phi(z)u = z^{\mu}\bar{z}^{\nu}u$ και $\phi(z)v = z^{\mu'}\bar{z}^{\nu'}v$. Αν $\mu = \mu'$ και $\nu = \nu'$ τότε η αναπαράσταση δεν θα είναι ανάγωγη, αφού κάθε ιδιόχωρος του $\phi(j)$ θα είναι ανάγωγος. Επομένως, υποθέτουμε ότι $\mu \neq \mu'$ ή $\nu \neq \nu'$ και θέτουμε $u' = \phi(j)u$.

Τότε θα έχουμε ότι $\phi(z)u' = z^{\nu}\bar{z}^{\mu}u'$. Από το γεγονός ότι η αναπαράσταση μας είναι εξ υποθέσεως ανάγωγη θα έχουμε ότι το $u'$ θα είναι στο $\mathbb{C}v$ και θα ισχύει $\mu \neq \nu$. Άρα $\mu = \nu'$ και $\nu = \mu'$.

Τέλος, θέτουμε $t = \mu + \nu$, $l = \mu - \nu$ και, αν αντικαταστήσουμε την αρχική μας βάση $u$, $v$ με τη βάση $u'$, $(-1)^{\mu-\nu}u$, καταλήγουμε στην ακόλουθη:

**Πρόταση 9.1.1** Έστω $\phi$ μια ημιαπλή ανάγωγη αναπαράσταση διάστασης 2 της ομάδας $W_{\mathbb{R}}$. Τότε, ως προς ισοδυναμία, η $\phi$ θα είναι της μορφής

$$\phi(re^{i\theta})u = r^{2t}e^{it\theta}u,\ \phi(j)u = u'$$

$$\phi(re^{i\theta})u' = r^{2t}e^{-it\theta}u',\ \phi(j)u' = (-1)^l u,$$

για $z = re^{i\theta}$, όπου $t \in \mathbb{C}$ και $l \in \mathbb{N}$.

Καταλήγουμε έτσι σε μια ταξινόμηση, από τα παραπάνω ζεύγη $(l, t)$, των ανάγωγων ημιαπλών αναπαραστάσεων διάστασης 2 της $W_{\mathbb{R}}$ και λόγω του λήμματος έχουμε την πλήρη ταξινόμηση των ημιαπλών αναπαραστάσεων της ομάδας μας.

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε τους τοπικούς $L-$παράγοντες που μας ενδιαφέρουν. Στην περίπτωση των αναγώγων αναπαραστάσεων θα δίνονται από τον ακόλουθο:

**Ορισμός 9.1.5** Έστω $\phi$ μια ανάγωγη ημιαπλή αναπαράσταση της $W_{\mathbb{R}}$. Τότε ορίζουμε

$$L(s,\phi) = \begin{cases} \pi^{-(s+t)/2}\Gamma(\frac{s+t}{2}) & ,\phi \equiv (t,+) \\ \pi^{-(s+t+1)/2}\Gamma(\frac{s+t+1}{2}) & ,\phi \equiv (t,-) \\ 2(2\pi)^{-(s+t+\frac{l}{2})}\Gamma(s+t+\frac{l}{2}) & ,\phi \equiv (l,t). \end{cases}$$

Στην περίπτωση που η αναπαράστασή μας δεν είναι ανάγωγη, λόγω του Λήμματος θα γράφεται ως ευθύ άθροισμα τέτοιων, και σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε τον $L-$παράγοντα της $\phi$ να είναι το γινόμενο των $L-$παραγόντων των ανάγωγων υποαναπαραστάσεών της.

### Η Περίπτωση $k = \mathbb{C}$

Από το Κεφάλαιο 3 γνωρίζουμε ότι $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$. Μας ενδιαφέρει αρχικά να ταξινομήσουμε τους αποδεκτούς ομομορφισμούς, δηλαδή τις επιλύσιμες αναπαραστάσεις της $W_{\mathbb{C}}$, σε αυτή την περίπτωση ως προς ισοδυναμία. Αφού η ομάδα $W_{\mathbb{C}}$ είναι αβελιανή θα ισχύει ότι κάθε ανάγωγη αναπαράστασή της είναι μονοδιάστατη. Επειδή κάθε τέτοια επιλύσιμη αναπαράσταση είναι διαγωνιοποιήσιμη θα έχουμε ότι κάθε αποδεκτός ομομορφισμός της $W_{\mathbb{C}}$ θα είναι το ευθύ γινόμενο μονοδιάστατων αναπαραστάσεων της $\mathbb{C}^*$.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, οι αναπαραστάσεις αυτές παραμετροποιούνται από ζεύγη $(\nu, \mu) \in \mathbb{C}^2$ με $\nu - \mu \in \mathbb{Z}$. Ισοδύναμα θεωρούμε την παραμέτρηση:

$$(l,t) : z \mapsto z^l|z|^t, \text{ όπου } l \in \mathbb{Z} \text{ και } t \in \mathbb{C},$$

όπου $l = \nu - \mu$ και $t = 2\mu$.

Έτσι, αντίστοιχα με την περίπτωση $k = \mathbb{R}$ σε κάθε ανάγωγο αποδεκτό ομομορφισμό της $W_{\mathbb{C}}$ αντιστοιχούμε έναν $L-$παράγοντα σύμφωνα με τον ακόλουθο:

**Ορισμός 9.1.6** Ο τοπικός $L-$παράγοντας που θα αντιστοιχεί σε μια ανάγωγη μονοδιάστατη αναπαράσταση $\phi$ της $W_{\mathbb{C}}$, η οποία παραμετροποιείται από το ζεύγος $(l, t)$, θα δίνεται από τον τύπο

$$L(s,\phi) = 2(2\pi)^{-(s+t+\frac{|l|}{2})}\Gamma(s+t+\tfrac{|l|}{2}).$$

Έχοντας ορίσει τους $L-$παράγοντες για τους αποδεκτούς ομομορφισμούς μας μένει πλέον να δούμε την αντιστοιχία που μας παρέχει η Τοπική Εικασία του *Langlands*.

Πριν δούμε την αντιστοιχία αυτή είναι απαραίτητοι μερικοί ορισμοί.

**Ορισμός 9.1.7** Δύο αποδεκτοί ομομορφισμοί $\phi_1$ και $\phi_2$ του τοπικού σώματος $k$, στην $GL_n(\mathbb{C})$, θα λέγονται ισοδύναμοι αν είναι συζυγείς ως προς την $GL_n(\mathbb{C})$, δηλαδή αν υπάρχει $g \in GL_n(\mathbb{C})$ ώστε $g\phi_1(x)g^{-1} = \phi_2(x)$, για κάθε $x$ στην ομάδα *Weil* ή *Weil − Deligne* αντίστοιχα.

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των αποδεκτών ομομορφισμών του $k$ θα συμβολίζεται με $\Phi(GL_n(k))$.

Το άλλο σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας που μας ενδιαφέρει είναι αυτό των ανάγωγων αποδεκτών αναπαραστάσεων της $GL_n(k)$. Η ισοδυναμία εδώ θα είναι ισοδυναμία ως αναπαραστάσεις της άλγεβρας *Hecke* $\mathcal{H}_{GL_n(k)}$, ενώ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτών θα συμβολίζεται με $\Pi(GL_n(k))$.

Η τοπική αντιστοιχία *Langlands* θα είναι μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των παραπάνω συνόλων, η οποία θέλουμε να ικανοποιεί διάφορες συνθήκες. Συγκεκριμένα θα έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 9.1.1** Υπάρχει μια φυσική ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $\Pi(GL_n(k))$ και $\Phi(GL_n(k))$, η οποία είναι συμβατή με τις στροφές με χαρακτήρες *Hecke*, και σέβεται τους $L$ και $\epsilon-$παράγοντες.

Ξεκινάμε με κάποιες παρατηρήσεις για τους $\epsilon-$παράγοντες, τους οποίους θα συμβολίζουμε με $\epsilon(s, \phi)$.

Σταθεροποιώντας έναν αποδεκτό ομομορφισμό, η συνάρτηση $\epsilon(s, \phi)$ θα ορίζεται ως το γινόμενο των $\epsilon(s, \phi_i)$ των ανάγωγων υποαναπαραστάσεων του $\phi$.

Το γινόμενο των $\epsilon-$παραγόντων, για όλες τις θέσεις, θα είναι μια συνάρτηση η οποία θέλουμε να έχει τον ίδιο ρόλο με την $\epsilon-$συνάρτηση που εμφανίζεται στο Θεώρημα 5.2.4, δηλαδή να εμφανίζεται στην συναρτησιακή εξίσωση των $L-$συναρτήσεων.

**Παρατηρήσεις 9.1.3** 1. Οι συναρτήσεις $\epsilon$ θέλουμε να εμφανίζουν καλές ιδιότητες ως προς επεκτάσεις και αυτές οι ιδιότητες να είναι έμφυτες στον ορισμό τους. Η ύπαρξη τέτοιων συναρτήσεων είναι μη-προφανής.

2. Στην περίπτωση των αρχιμήδειων θέσεων και των αποδεκτών ομομορφισμών οι $\epsilon-$παράγοντες θα είναι κατάλληλες δυνάμεις του $i \in \mathbb{C}$ που θα εξαρτώνται από τον τύπο του ομομορφισμού. Για περισσότερα παραπέμπουμε στο $[Kn-2]$.

3. Στην περίπτωση των μη-αρχιμήδειων σωμάτων , και για έναν ακριβή ορισμό των συναρτήσεων $\epsilon$, παραπέμπουμε στο $[Ta-3]$.

4. Στη συνθήκη για τους χαρακτήρες *Hecke* θα επανέλθουμε στην παράγραφο 3.

Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε τον ορισμό των $L-$παραγόντων και $\epsilon-$παραγόντων, που οφείλεται στους *Godement* και *Jacquet*, για τις ανάγωγες αποδεκτές αναπαραστάσεις $\pi$ της ομάδας $GL_n(k)$. Λόγω της Τοπικής Αντιστοιχίας σε κάθε τέτοια $\pi$ θα αντιστοιχεί ένας αποδεκτός ομομορφισμός $\phi$. Αν η αντιστοιχία αυτή δίνεται από την $\pi \leftrightarrow \phi$, θέλουμε τόσο οι αντίστοιχοι $L-$παράγοντες όσο και οι αντίστοιχοι $\epsilon-$παράγοντες, των $Godement - Jacquet$ για την $\pi$ από τη μία και του αποδεκτού ομομορφισμού από την άλλη, τους οποίους ορίσαμε σε αυτή την παράγραφο, να είναι ίσοι.

## 9.2 $L-$συναρτήσεις των $Godement - Jacquet$

Ο *Tate* στην διδακτορική του διατριβή για να ορίσει τους τοπικούς παράγοντες των $L-$συναρτήσεων των χαρακτήρων *Hecke* και να μελετήσει την συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών, όρισε κάποιου είδους $\zeta$ συναρτήσεων, οι οποίες είναι κατάλληλα ολοκληρώματα ως προς μέτρο *Haar* σε κάποιες τοπολογικές ομάδες. Σε αυτή την κατεύθυνση, οι *Godement* και *Jacquet* γενίκευσαν τα παραπάνω ολοκληρώματα στην περίπτωση $n \geq 2$, δεδομένου ότι οι χαρακτήρες *Hecke* αντιστοιχούν στην περίπτωση $n = 1$ των αυτομορφικών αναπαραστάσεων.

Θεωρούμε αρχικά μια αποδεκτή αναπαράσταση $\pi$ της $GL_n(k)$, όπου $k$ είναι ένα μη-αρχιμήδειο τοπικό σώμα. Ο ορισμός των αποδεκτών αναπαραστάσεων που θα χρησιμοποιήσουμε έδω είναι ισοδύναμος όσων έχουμε δώσει και απαιτεί:

1. Για κάθε $v \in V$ η σταθεροποιούσα του $v$ στην $GL_n(k)$ είναι μια ανοιχτή υποομάδα της,

2. Για κάθε ανοιχτή και συμπαγή υποομάδα $G'$ της $GL_n(k)$ ο χώρος των σταθερών $v \in V$ από τη δράση της $G'$ είναι πεπερασμένης διάστασης ως $\mathbb{C}-$ διανυσματικός χώρος.

Οι *cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις της $GL_n(\mathbb{A})$, όπως έχουμε δει, θα γράφονται στη μορφή $\pi = \otimes_u \pi_u$. Όπου οι $\pi_u$ είναι όπως στο Θεώρημα 8.2.1.

Από την Πρόταση 2.12 και το Θεώρημα 2.14 του $[Go - Ja]$ κάθε τέτοια αναπαράσταση επάγεται από μια απολύτως *cuspidal*[2] αναπαράσταση της ομάδας $GL_n(k)$.

Οι *Godement* και *Jacquet* κατάφεραν να αναγάγουν τον ορισμό των $L-$παραγόντων στην κατηγορία των απολύτως *cuspidal* αναπαραστάσεων.

**Ορισμός 9.2.1** Έστω $(\pi, V)$ μια ανάγωγη αποδεκτή αναπαράσταση τη $GL_n(k)$. Ένας **συντελεστής** της αναπαράστασης θα είναι κάθε απεικόνιση $M : GL_n(k) \to \mathbb{C}$, τέτοια ώστε

$$M(g) = \langle \pi(g)v, v^* \rangle,$$

όπου $v \in V$ και $v^* \in V^*$, τον δυϊκό του $V$.

**Παρατήρηση 9.2.1** Για κάθε $M$ όπως παραπάνω ορίζουμε την συνάρτηση $M$ με $\tilde{M}(g) = M(g^{-1})$. Η συνάρτηση $\tilde{M}$ θα αποτελεί συντελεστή για την *contragradient* αναπαράσταση $\tilde{\pi}$ της $\pi$.

Τα ολοκληρώματα που μας ενδιαφέρουν θα είναι της μορφής:

$$Z(f, M, s) = \int_{GL_n(k)} f(x)M(x)|detx|^s d^{\times}x,$$

όπου $f \in \mathcal{H}_k$, και $d^{\times}x$ είναι ένα κατάλληλο μέτρο *Haar* στην $GL_n(k)$.

Το βασικό αποτέλεσμα, στην τοπική περίπτωση, των *Godement* και *Jacquet* μας ορίζει τις συναρτήσεις $L$ και $\epsilon$ ώστε να ικανοποιούν τις ιδιότητες που θέλουμε. Συγκεκριμένα θα έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 9.2.1** Έστω $\pi$ μια ανάγωγη και αποδεκτή αναπαράσταση της ομάδας $GL_n(k)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Θα υπάρχει $s_0 \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $Re(s) > s_0$, για κάθε $f \in \mathcal{H}_k$ και για κάθε συντελεστή $M$ της αναπαράστασης $\pi$ τα ολοκληρώματα

$$Z(f, M, s) = \int_{GL_n(k)} f(x)M(x)|detx|^s d^{\times}x \text{ και}$$

$$Z(f, \tilde{M}, s) = \int_{GL_n(k)} f(x)\tilde{M}(x)|detx|^s d^{\times}x$$

να συγκλίνουν απόλυτα.

2. Υπάρχουν παράγοντες *Euler*[3], τους οποίους θα συμβολίζουμε με $L(s, \pi)$ και $L(s, \tilde{\pi})$, οι οποίοι θα ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

Για κάθε $f \in \mathcal{H}_k$ και $M$ συντελεστή της αναπαράστασης $\pi$ θέτουμε

[2] Ο ορισμός του είδους των αναπαραστάσεων αυτών βρίσκεται στη σελίδα 26 του $[Go - Ja]$.

[3] Με τον όρο παράγοντας *Euler* θα εννούμε μια συνάρτηση της μορφής $P(q^{-s})^{-1}$, όπου $P$ είναι κάποιο πολυώνυμο με $P(0) = 1$.

$$Z(M, f, s + \tfrac{1}{2}(n-1)) = \Xi(M, f, s)L(s, \pi), \text{ και}$$

$$Z(\tilde{M}, f, s + \tfrac{1}{2}(n-1)) = \Xi(\tilde{M}, f, s)L(s, \tilde{\pi}).$$

Τότε οι συναρτήσεις $\Xi(M, f, s)$ και $\Xi(\tilde{M}, f, s)$ θα είναι πολυώνυμα στα $q^{-s}$ και $q^s$, όπου

$$q = |O_k/m_k|,$$

$O_k$ είναι ο δακτύλιος των ακεραίων του $k$ και $m_k$ το μέγιστο ιδεώδες του.

3. Μπορούμε να επιλέξουμε συντελεστές $M_i$ της $\pi$, ή αντιστοίχως συντελεστές $\tilde{M}_i$ της $\tilde{\pi}$, και $f_i \in \mathcal{H}_k$ ώστε το άθροισμα $\sum \Xi(M_i, f_i, s)$, ή αντίστοιχα το $\sum \Xi(\tilde{M}_i, f_i, s)$, να είναι μια μη-μηδενική σταθερά.

4. Υπάρχει συνάρτηση του $s$, την οποία θα συμβολίζουμε με $\epsilon(s, \pi, \psi)$, που θα ισούται με μια σταθερά επί το $q^{-s}$, τέτοια ώστε για όλους τους συντελεστές $M$ της $\pi$, για όλες τις $f \in \mathcal{H}_k$ και για κάθε $s \in \mathbb{C}$, να ισχύει

$$\Xi(\tilde{M}, \hat{f}, 1-s) = (-1)^r \epsilon(s, \pi, \psi)\Xi(M, f, s),$$

όπου $r \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}$ είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της $f$ και $\psi$ είναι ένας μη-τετριμμένος προσθετικός χαρακτήρας του σώματος $k$.

**Παρατηρήσεις 9.2.2** 1. Αποδεικνύεται στο $[Go - Ja]$ ότι αν τα παραπάνω ισχύουν για κάποιες αναπαραστάσεις καταλλήλων υποομάδων της $GL_n(k)$ τότε θα ισχύουν και για τις επαγόμενες αναπαραστάσεις τους στην $GL_n(k)$. Έτσι η απόδειξη ανάγεται στην απόδειξη του Θεωρήματος στην περίπτωση των απολύτως *cuspidal* αναπαραστάσεων.

2. Όμοια με την περίπτωση των μη-αρχιμήδεων σωμάτων, ορίζονται οι $L$ και $\epsilon$ παράγοντες των *Godement – Jacquet* και στην περίπτωση των αρχιμήδειων σωμάτων. Το Θεώρημα[4] που αποδεικνύει την ύπαρξη και τις βασικές ιδιότητές τους είναι ανάλογο του παραπάνω Θεωρήματος.

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει για κάθε αποδεκτή ανάγωγη αναπαράσταση της $GL_n(k)$, στην περίπτωση των τοπικών σωμάτων, έναν $L-$παράγοντα. Θεωρούμε $\pi$ να είναι μια *cuspidal* αυτομορφική αναπαράσταση της $GL_n(\mathbb{A}_F)$, όπου $F$ είναι ένα σώμα αριθμών. Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό της $L-$συνάρτησης των *Godement – Jacquet* για την $\pi$.

**Ορισμός 9.2.2** Έστω $F$ ένα σώμα αριθμών, $M_F$ το σύνολο όλων των θέσεων του και $S_f$ το σύνολο των μη-αρχιμήδειων θέσεων του. Έστω ακόμη $\pi$ μια *cuspidal* αυτομορφική αναπαράσταση της $GL_n(\mathbb{A}_F)$ και $\pi = \otimes_u \pi_u$ η γραφή της ως περιορισμένο τανυστικό γινόμενο ανάγωγων και αποδεκτών αναπαραστάσεων των αντίστοιχων τοπικών ομάδων $GL_n(F_u)$. Τότε ορίζουμε την $L-$συνάρτηση της $\pi$ να είναι η συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο

$$L^{GJ}(s, \pi) = \prod_{u \in S_f} L(s, \pi_u), \text{ και}$$

την $\epsilon-$συνάρτηση της $\pi$ να είναι η συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο

$$\epsilon^{GJ}(s, \pi) = \prod_{u \in M_F} \epsilon(s, \pi_u, \psi_u).$$

Τέλος, σε αντιστοιχία με τις $L-$συναρτήσεις των *Artin* και *Hecke*, ορίζεται και η πλήρωση της $L^{GJ}$ από τον τύπο

[4] Θεώρημα 8.7, στο $[Go - Ja]$.

$$\Lambda^{GJ}(s,\pi) = \prod_{u \in M_F} L(s,\pi_u).$$

Οι $L-$συναρτήσεις των $Godememnt - Jacquet$ έχουν ιδιαιτέρως καλές ιδιότητες, οι οποίες πρακτικά είναι αυτές που θέλουμε να ικανοποιούν όλες οι $L-$συναρτήσεις που ορίζουμε. Οι καλές ιδιότητες αυτές είναι αναλυτικές και αποτυπώνονται τόσο σε καλά αποτελέσματα αναλυτικής συνέχισης και συμπεριφοράς, όσο και στην ύπαρξη καλών συναρτησιακών εξισώσεων. Συγκεκριμένα θα έχουμε το εξής:

**Θεώρημα 9.2.2** Αν $\pi$ είναι μια *cuspidal* αυτομορφική απεικόνιση της $GL_n(\mathbb{A})$ τότε η πλήρωση της $L^{GJ}(s,\pi)$, που συμβολίζεται με $\Lambda^{GJ}(s,\pi)$ επεκτείνεται σε μερόμορφη στο $\mathbb{C}$ συνάρτηση. Ιδιαιτέρως, στην περίπτωση $n \geq 2$ η $\Lambda^{GJ}(s,\pi)$ είναι ακέραια, ενώ στην περίπτωση $n = 1$, η $\Lambda^{GJ}(s,\pi)$ θα εμφανίζει (το πολύ 2) πόλους αν και μόνο αν τόσο η $\pi$ όσο και η $\omega$ είναι κάποια δύναμη της απόλυτης τιμής της $J_F$, δηλαδή αν $\pi = |\cdot|^s$ και $\omega = |\cdot|^t$ όπου $s,t \in C$ και οι πόλοι καθορίζονται από τα $s$ και $t$.

Ακόμα η $\Lambda^{GJ}(s,\pi)$ ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$\Lambda^{GJ}(s,\pi) = \epsilon^{GJ}(s,\pi)\Lambda^{GJ}(1-s,\check{\pi}).$$

**Παρατήρηση 9.2.3** Η απόλυτη τιμή ενός *idele* $r$ είναι ίση με $\prod_u |r_u|_u$.

Μια ακόμη καλή ιδιότητα των συναρτήσεων αυτών είναι αυτή που δίνεται στην ακόλουθη:

**Πρόταση 9.2.1** Με τον συμβολισμό του προηγούμενου Θεωρήματος, θα έχουμε ότι η συνάρτηση $L^{GJ}(s,\pi)$ είναι φραγμένη σε κάθε κάθετη λωρίδα πεπερασμένου μήκους στο $\mathbb{C}$, δηλαδή σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{C}$ της μορφής $\{z \in \mathbb{C} : a < Re(z) < b\}$, όπου $a$, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

Στην περίπτωση που δεν έχουμε *cuspidal* αναπαραστάσεις αλλά απλά αυτομορφικές αναπαραστάσεις δεν έχουμε εξίσου καλά αποτελέσματα. Παρ΄ όλα αυτά ισχύει το ακόλουθο:

**Θεώρημα 9.2.3 (*Langlands*)** Αν π είναι μια αυτομορφική αναπαράσταση της ομάδα $GL_n(\mathbb{A})$ τότε η $L(s,\pi)$ συγκλίνει απόλυτα για $Re(s)$ αρκούντως μεγάλο.

## 9.3 Μια δεύτερη ματιά στην αντιστοιχία

Έχοντας δει τις $L-$συναρτήσεις με τις οποίες θα δουλεύουμε, σε αυτο το σημείο θα δούμε κάποιες λεπτομέρειες για την αντιστοιχία ανάμεσα στις αναπαραστάσεις και τους αποδεκτούς ομομορφισμούς. Στην περίπτωση των αρχιμήδειων τοπικών σωμάτων η αντιστοιχία αυτή αποτελούσε Θεώρημα του $Langlands$. Θεμελιώδης ήταν και συνεισφορά του έργου του $Harish - Chandra$ καθώς και των $Knapp$ και $Zuckerman$ οι οποίοι ταξινόμησαν πλήρως τις ανάγωγες αναπαραστάσεις αυτών των ομάδων. Έχοντας ταξινομήσει τους αποδεκτούς ομομορφισμούς και τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις της $GL_n(k)$, όταν το σώμα $k$ είναι κάποιο από τα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, η αντιστοιχία ήταν φυσικό επακόλουθο μετά από κατάλληλους υπολογισμούς των $L-$παραγόντων.

Η περίπτωση των μη-αρχιμήδειων τοπικών σωμάτων, η οποία είναι αύτη με την οποία θα ασχοληθούμε στο υπόλοιπο της παραγράφου, παρέμενε ανοιχτό πρόβλημα μέχρι το 2001, όταν και αποδείχθηκε από τους $Taylor$ και $Harris$. Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θεωρούμε $k$ να είναι ένα μη-αρχιμήδειο τοπικό σώμα και με $\phi = (\rho, X)$ θα συμβολίζουμε τους αποδεκτούς ομομορφισμούς της ομάδας $Weil - Deligne$ του.

Η βασική ιδέα είναι να δούμε το πρόβλημα επαγωγικά, δηλαδή να υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την αντιστοιχία για $m \leq n$ και να καταλήξουμε σε μια αντιστοιχία στην περίπτωση του $n$. Για να γίνει αυτό θεωρούμε υποομάδες της $GL_n$ που είναι $block-$διαγώνιες, δηλαδή υποομάδες της μορφής

$$P = \begin{pmatrix} GL_{m_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & GL_{m_r} \end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι ο ομομορφισμός $\rho : W_k \to GL_n(\mathbb{C})$ είναι της μορφής $\rho = \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_r$, όπου $\rho_i : W_k \to GL_{m_i}(\mathbb{C})$. Υποθέτοντας ότι έχουμε την αντιστοιχία για μικρά $n$ θα έχουμε ότι η $r-$άδα από αποδεκτούς ομομορφισμούς θα αντιστοιχεί σε μια $r-$άδα από αποδεκτές ανάγωγες αναπαραστάσεις $(\pi_1, \ldots, \pi_r)$ των αντίστοιχων $GL_{m_i}(k)$. Στόχος μας είναι να εντοπίσουμε κατάλληλη αποδεκτή αναπαράσταση της $GL_n(k)$ στην οποία να αντιστοιχίσουμε τον $\rho$.

Θεωρούμε $P(k)$ την παραπάνω διαγώνια υποομάδα πάνω από το $k$. Τότε το τανυστικό γινόμενο $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_r$ θα ορίζει μια αναπαράσταση της $P(k)$. Η πρώτη σκέψη είναι να θεωρήσουμε την επαγόμενη αναπαράσταση της $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_r$ στην $GL_n(k)$, δηλαδή την αναπαράσταση

$$ind_P^G(\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_r),$$

όπου $G = GL_n(k)$.

Η αναπαράσταση αυτή, αν και συγκεντρώνει καλές πιθανότητες, δεν είναι απαραίτητα ανάγωγη, οπότε χρειάζεται να θεωρήσουμε κάποιο κατάλληλο υποπηλίκο της.

Το κέντρο της υποομάδας $P(\mathbb{C})$ θα είναι ίσο με $\mathbb{C}^{*r}$. Κάθε αποδεκτός ομομορφισμός $\rho$, όπως ο παραπάνω, θα ζει σε μια $r-$διάστατη οικογένεια της μορφής

$$\{\rho\eta | \eta : W_k \to \mathbb{C}^{*r}\},$$

όπου οι συναρτήσεις $\eta$ θα είναι της μορφής

$$w \mapsto \begin{pmatrix} ||w||^{s_1} I_{m_1} & 0 & 0 \\ & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & ||w||^{s_r} I_{m_r} \end{pmatrix},$$

με $s_i \in \mathbb{C}$.

Η επιλογή μας για την ανάγωγη αποδεκτή αναπαράσταση που θα αντιστοιχεί στον $\rho$ θέλουμε να είναι ανεξάρτητη του στοιχείου της παραπάνω οικογένειας καθώς και της διάταξης των $\pi_i$.

### Το Παράδειγμα της Διαγωνίου Ομάδας

Το απλούστερο παράδειγμα αυτής της κατασκευής είναι όταν πάρουμε $P$ να είναι η διαγώνια υποομάδα της $GL_n$, δηλαδή όταν $r = n$ και $m_i = 1$ για κάθε $i$. Σε αυτή την περίπτωση οι $\rho_i$ θα είναι χαρακτήρες της ομάδας $W_k$ και θα τους συμβολίζουμε με $\chi_i$.

Από το Θεώρημα 8.2.1, σχεδόν όλες οι αναπαραστάσεις που μας ενδιαφέρουν θα έχουν ένα $K-$αναλλοίωτο διάνυσμα, όπου $K = GL_n(O_k)$ είναι η μέγιστη συμπαγής υποομάδα της $GL_n(k)$. Αυτές οι αναπαραστάσεις λέγονται **σφαιρικές** ή **αδιακλάδιστες**. Οι αναπαραστάσεις αυτές θα αντιστοιχούν με τη σειρά τους σε κατάλληλους αποδεκτούς ομομορφισμούς. Οι ομομορφισμοί αυτοί θα λέγονται πάλι αδιακλάδιστοι και δίνονται από τον ακόλουθο:

**Ορισμός 9.3.1** Ένας αποδεκτός ομομορφισμός $\phi$ της ομάδας $Weil$ ή $Weil - Deligne$ του τοπικού σώματος $k$ θα λέγεται **διακλαδισμένος** αν ο περιορισμός του στην ομάδα αδρανείας $I_k$ είναι μη-τετριμμένος. Σε διαφορετική περίπτωση ο $\phi$ θα λέγεται **αδιακλάδιστος**.

Στην περίπτωση που έχουμε έναν αδιακλάδιστο αποδεκτό ομομορφισμό $\phi$, οι $\chi_i$ θα είναι όλες της μορφής $|\cdot|_k^{s_i}$, με $s_i \in \mathbb{C}$. Στην περίπτωση αυτή η αναπαράσταση που θα πάρουμε από την αντιστοιχία θα είναι το μοναδικό ανάγωγο υποπηλίκο της $ind_P^G(\chi_1 \otimes \ldots \otimes \chi_n)$ το οποίο θα περιέχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα το οποίο παραμένει σταθερό από την δράση της $GL_n(O_k)$ και θα είναι ανεξάρτητο της διάταξης των $\chi_i$.

**Παρατηρήσεις 9.3.1** 1. Η ταξινόμηση των αποδεκτών ανάγωγων αναπαραστάσεων της $GL_n(k)$ είναι γνωστή.

2. Σημαντικές πληροφορίες για την αντιστοιχία δίνει ο ισομορφισμός του *Satake*, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε ανάγωγη αποδεκτή αναπαράσταση της $GL_n(k)$ ένα στοχείο του $\mathbb{C}^n/S_n$, όπου $S_n$ είναι η ομάδα μεταθέσεων. Η $n-$άδα αυτή θα αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές του πίνακα που εμφανίζεται στο ορισμό του τοπικού $L-$παράγοντα.

### Στροφές με Χαρακτήρες *Hecke*

Ένα ακόμη σημείο της αντιστοιχίας που μένει να εξετάσουμε είναι η συνθήκη που αφορά τους χαρακτήρες *Hecke*. Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου θεωρούμε ένα σώμα αριθμών $F$.

Μέχρι στιγμής, και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 3, έχουμε δει την έννοια της ομάδας *Weil* για ένα τοπικό σώμα. Στο $[Ta-3]$ ορίζεται η ομάδα *Weil* για περισσότερα είδη σωμάτων, συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης των σωμάτων αριθμών. Ο ακριβής ορισμός της $W_F$ δεν θα μας χρειαστεί, όποτε τον παραλείπουμε. Το μόνο κομμάτι που θα χρειαστούμε από τη θεωρία αυτή είναι κάποιες από τις ιδιότητες αυτής της ομάδας, με κυριώτερες αυτές που περιγράφουν την αλληλεπίδρασή της με τις ομάδες *Weil* των τοπικών σωμάτων. Τις ιδιότητες αυτές παραθέτουμε συνοπτικά στην ακόλουθη:

**Πρόταση 9.3.1** 1. Υπάρχει ένας φυσικός συνεχής επιμορφισμός $W_F \to Gal(\overline{F}/F)$, ο οποίος επάγει και έναν ομομορφισμό $W_F^{ab} \to G_F^{ab}$.

2. Η απεκόνιση *Artin* $C_F \to G_F^{ab}$ παραγοντοποιείται ως εξής:

$$C_F \xrightarrow{\cong} W_F^{ab} \longrightarrow G_F^{ab}.$$

3. Για κάθε θέση του $F$ υπάρχει κανονικός συνεχής ομομορφισμός $j_u : W_{F_u} \to W_F$, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} W_{F_u} \arrow[r, "j_u"] \arrow[d] & W_F \arrow[d] \\ G_{F_u} \arrow[r] & G_F \end{tikzcd}.$$

4. Οι ισομορφισμοί της ιδιότητας 2 και οι ισομορφισμοί $F_u^* \xrightarrow{\cong} W_{F_u}^{ab}$ του Πορίσματος 3.3.2 είναι τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} F_u^* \arrow[r, "j_u"] \arrow[d] & C_F \arrow[d] \\ W_{F_u}^{ab} \arrow[r] & W_F^{ab} \end{tikzcd}.$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω μπορούμε να δούμε την έννοια των στροφών με χαρακτήρες *Hecke*, καθώς και τη σχετική συνθήκη στο Θεώρημα της τοπικής αντιστοιχίας. Γνωρίζουμε ότι κάθε χαρακτήρας *Hecke* $\chi$ του σώματος $F$ θα γράγεται στη μορφή $\chi = \prod_u \chi_u$ όπου $\chi_u$ είναι κατάλληλοι χαρακτήρες των τοπικών σωμάτων. Λόγω των παραπάνω ιδιοτήτων μπορούμε να δούμε τον $\chi$ σαν μονοδιάστατη αναπαράσταση της ομάδας $W_F$ και τους $\chi_u$ σαν μονοδιάστατες αναπαραστάσεις της ομάδας $W_{F_u}$.

Αν $\sigma$ είναι ένας $n-$διάστατος αποδεκτός ομομορφισμός[5] της ομάδας $Weil$ του σώματος αριθμών $F$, τότε η στροφή του ομομορφισμού αυτού με τον χαρακτήρα $\chi$ δίνεται από τον ακόλουθο:

**Ορισμός 9.3.2** Αν $\sigma$ και $\chi$ είναι όπως παραπάνω, ορίζουμε την **στροφή** του $\sigma$ με τον $\chi$ να είναι η $n-$διάστατη αναπαράσταση της $W_F$ που δίνεται από τον τύπο

$$\sigma \otimes \chi.$$

**Παρατηρήσεις 9.3.2** 1. Ο ομομορφισμός που προκύπτει από την στροφή θα είναι και πάλι αποδεκτός.

2. Όμοια ορίζεται και η στροφή με έναν χαρακτήρα *Hecke* για τις αυτομορφικές αναπαραστάσεις $\pi$ της $GL_n(\mathbb{A})$ και κατ' επέκταση και για τις αποδεκτές αναπαραστάσεις της $GL_n(k)$, όπου $k$ είναι όπως πριν κάποιο τοπικό σώμα.

3. Στην τοπική περίπτωση οι στροφές με κάποιον χαρακτήρα *Hecke* θα είναι, με τον παραπάνω συμβολισμό, της μορφής $\phi \otimes \chi_u$, όπου $\phi$ είναι ένας αποδεκτός ομομορφισμός της ομάδας $W_{F_u}$. Σύμφωνα με το θεώρημα της τοπικής αντιστοιχίας, στον τοπικό ομομορφισμό $\phi$ θα αντιστοιχεί μια αποδεκτή αναπαράσταση $\pi$ της $GL_n(k)$ και ακόμα θα ισχύει

$$L(s, \phi) = L(s, \pi) \text{ και } \epsilon(s, \phi) = \epsilon(s, \pi),$$

όπου στο αριστερό μέλος έχουμε τους τοπικούς $L$ και $\epsilon$ παράγοντες για αποδεκτούς ομομορφισμούς που ορίσαμε και στο δεξί τους $L$ και $\epsilon$ παράγοντες των $Godement - Jacquet$.

Η συνθήκη της τοπικής αντιστοιχίας μας επιβεβαιώνει ότι αν $\phi \leftrightarrow \pi$, τότε $\phi \otimes \chi_u \leftrightarrow \pi \otimes \chi_u$, και οι αντίστοιχοι $L$ και $\epsilon-$παράγοντες θα είναι ίσοι.

### 9.3.1 Πολλαπλότητα ένα και $Jacquet - Langlands$

Από την τοπική αντιστοιχία θα έχουμε $\pi_u$ ανάγωγες αποδεκτές αναπαραστάσεις για κάθε θέση $u$ του σώματος $F$. Υποθέτοντας ότι το τανυστικό γινόμενο $\pi = \otimes_u \pi_u$ ορίζεται καλά, θέλουμε κάποια κριτήρια ώστε να γνωρίζουμε πότε η αναπαράσταση αυτή είναι αυτομορφική ή *cuspidal*. Το Θεώρημα 8.2.1 μας παρέχει μια αναγκαία συνθήκη. Συγκεκριμένα όλες εκτός από πεπερασμένες από τις $\pi_u$ πρέπει να είναι αδιακλάδιστες. Η περίπτωση με την οποία θα ασχοληθούμε είναι αυτή των *cuspidal* αναπαραστάσεων.

Ξεκινάμε τη συζητησή μας με το Θεώρημα Πολλαπλότητας Ένα, που δίνει κάποιες αρχικές πληροφορίες προς αυτή την κατεύθυνση, και στην συνέχεια θα δούμε το Θεώρημα Αντιστροφής των $Jacquet - Langlands$, που είναι στην περίπτωση των *cuspidal* αναπαραστάσεων το ανάλογο αποτέλεσμα του Θεωρήματος του $Weil$ που είδαμε στη θεωρία των κλασικών *modular* και *cusp* μορφών.

Από το Θεώρημα 8.4.2 οι *cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις θα εμφανίζονται με πεπερασμένες πολλαπλότητες σε έναν χώρο $L^2$. Το Θεώρημα Πολλαπλότητας Ένα ισχυροποιεί αυτό το αποτέλεσμα σημαντικά. Συγκεκριμένα έχουμε το εξής:

**Θέωρημα 9.3.1** (Πολλαπλότητας Ένα) Αν $\pi$ είναι μια ανάγωγη αποδεκτή αναπαράσταση της $GL_n(\mathbb{A}_F)$ που εμφανίζεται στον υπόχωρο των *cuspidal* μορφών του $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))_\omega$, για κάποιο

[5] Ο τοπικός ορισμός θα ισχύει και σε αυτή την περίπτωση και η συμβατότητά του φαίνεται από τις παραπάνω ιδιότητες της $W_F$.

ορθομοναδιαίο χαρακτήρα $\omega$, τότε η $\pi$ θα εμφανίζεται με πολλαπλότητα ένα.

Πριν δούμε τη δεύτερη μορφή του Θεωρήματος Πολλαπλότητας Ένα θα δούμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα στην περίπτωση των χαρακτήρων $Hecke$. Απαραίτητο για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος είναι το Θεώρημα Ασθενούς Προσέγγισης[6] που είδαμε, στο 2ο Κεφάλαιο. Το Θεώρημα Ασθενούς Προσέγγισης μας επιβεβαιώνει για την μοναδικότητα της γραφής των χαρακτήρων $Hecke$ ως προς τη γραφή τους ως τανυστικό γινόμενο κατάλληλων χαρακτήρων των τοπικών σωμάτων του σώματος αριθμών μας. Από το Θεώρημα αυτό θα έχουμε το ακόλουθο:

**Πόρισμα 9.3.1** Έστω $\chi = \otimes_u \chi_u$ και $\chi' = \otimes \chi'_u$ δύο χαρακτήρες $Hecke$ του σώματος αριθμών $F$ ώστε $\chi_u = \chi'_u$ σχεδόν για κάθε θέση $u$. Τότε θα ισχύει $\chi = \chi'$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\chi_u = 1$ για όλες εκτός από πεπερασμένες τις θέσεις $u$. Από τη συνέχεια της $\chi$, το γεγονός ότι είναι ίση με 1 στο $F^*$ και το παραπάνω Θεώρημα καταλήγουμε ότι η $\chi$ θα είναι ταυτοτικά ίση με 1. □

Η γενίκευση του παραπάνω Πορίσματος για $n > 1$ δίνεται στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 9.3.3** (Ισχυρό Πολλαπλότητας Ένα) Έστω $\pi = \otimes \pi'_u$ και $\pi = \otimes \pi'_u$ δύο ανάγωγες αποδεκτές αναπαραστάσεις της ομάδας $GL_n(\mathbb{A}_F)$ που εμφανίζονται στον υπόχωρο των $cuspidal$ μορφών του χώρου $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))_\omega$, για κάποιο ορθομοναδιαίο χαρακτήρα $\omega$. Αν η αναπαράσταση $\pi_u$ είναι ισοδύναμη της αναπαράστασης $\pi'_u$ για όλες εκτός από πεπρασμένες από τις θέσεις $u$, τότε $\pi = \pi'$.

Από όσα έχουμε δει, συμπεραίνουμε ότι οι $cuspidal$ αυτομορφικές αναπαραστάσεις είναι σχετικά δύσκαμπτα αντικείμενα που εξαρτώνται από πλήθος παραγόντων. Επομένως είναι ιδιαίτερης σημασίας να μπορούμε να αναγνωρίζουμε πότε έχουμε μια τέτοια αναπαράσταση. Σημαντικό ρόλο προς αυτή την κατεύθυνση παίζει το Θεώρημα Αντιστροφής των $Jacquet - Langlands$, το οποίο μέσω ιδιοτήτων κάποιων $L-$συναρτήσεων, σε αναλογία με το Θεώρημα $Weil$ στις $modular$ μορφές, απαντάει στο ερώτημά μας στην περίπτωση $n = 2$.

Το Θεώρημα αυτό χρησιμοποιεί την έννοια των $L-$συναρτήσεων $Weil$, οι οποίες γενικεύουν τις αντίστοιχες συναρτήσεις του $Artin$. Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται για αποδεκτούς ομομορφισμούς της ομάδας $Weil$ του σώματος αριθμών $W_F$, δηλαδή κατάλληλους ομομορφισμούς $W_F \to GL_n(\mathbb{C})$, τοπικά θα ορίζονται από τους $L-$παράγοντες που ορίσαμε για τους αποδεκτούς ομομορφισμούς των ομάδων $Weil$ των τοπικών σωμάτων και η σύνδεση τους με τις $L-$συναρτήσεις του $Artin$ φαίνεται από την ιδιότητα 3 της Πρότασης 9.3.1 για την ομάδα $Weil$ $W_F$.

**Θεώρημα 9.3.4** (Αντιστροφής $Jacquet - Langlands$) Έστω $\sigma$ μια αναπαράσταση της ομάδας $W_F$ διάστασης 2 και υποθέτουμε ότι $\pi(\sigma_u)$ είναι η ανάγωγη αποδεκτή αναπαράσταση της $GL_2(F_u)$ που αντιστοιχεί στον αποδεκτό ομομορφισμό $\sigma \circ j_u$, όπου $j_u$ οι συναρτήσεις της ιδιότητας 3 της Πρότασης 9.3.1. Αν για κάθε ορθομοναδιαίο χαρακτήρα $Hecke$ $\chi$, οι $L-$συναρτήσεις $Weil$ $\Lambda(s, \sigma \otimes \chi)$, και $\Lambda(s, \tilde{\sigma} \otimes \chi^{-1})$ είναι ακέραιες συναρτήσεις, οι οποίες είναι φραγμένες σε κάθετες στην ευθεία των πραγματικών αριθμών λωρίδες του $\mathbb{C}$, τότε η $\pi = \otimes_u \pi_u$ είναι μια $cuspidal$ αυτομορφική αναπαράσταση της $GL_2(\mathbb{A}_F)$.

**Παρατήρηση 9.3.3** Στις περιπτώσεις $n \geq 3$ ισχύουν παρόμοια θεωρήματα με το παραπάνω, τα οποία όμως έχουν επιπλέον υποθέσεις τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν οι $L-$συναρτήσεις.

[6] Θεώρημα 2.2.1

## 9.4 Η εικασία του *Langlands*

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η δουλειά του *Langlands* βασίζεται κυρίως στην επιθυμία του να αποδείξει την Εικασία του *Artin*. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε την Εικασία του *Langlands* η οποία, σε περίπτωση που αποδειχθεί, θα συνεπάγεται την εικασία του *Artin* που είδαμε στο Κεφάλαιο 5.

Για το υπόλοιπο της παραγράφου αυτής θέτουμε $F$ να είναι ένα σώμα αριθμών και με $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ θα συμβολίζουμε τον δακτύλιο των *adele* του.

Ξεκινάμε με την πρώτη μορφή της εικασίας του *Langlands*.

**Εικασία Αμοιβαιότητας του *Langlands*** (Πρώτη Μορφή) Για κάθε ανάγωγη αναπαράσταση $\sigma : Gal(\overline{F}/F) \to GL_n(\mathbb{C})$ υπάρχει μια *cuspidal* αυτομορφική αναπαράσταση $\pi$ της $GL_n(\mathbb{A})$ τέτοια ώστε οι τοπικοί παράγοντες της $L-$συνάρτησης *Artin* $L(s,\sigma)$ της $\sigma$ είναι ίσοι με τους αντίστοιχους της $Godement - Jacquet$ $L-$συνάρτησης $L^{GJ}(s,\pi)$ της $\pi$, για όλες εκτός από πεπερασμένες τις θέσεις $u$ στις οποίες η $\pi$ είναι αδιακλάδιστη.

**Παρατήρηση 9.4.1** Εφόσον γνωρίζουμε ότι για όλες εκτός από πεπερασμένες από τις θέσεις του $F$ η $\pi$ είναι αδιακλάδιστη, και με τη βοήθεια του Θεωρήματος 9.3.3 της προηγούμενης παραγράφου, αν υπάρχει μια τέτοια αναπαράσταση $\pi$ τότε αυτή θα είναι μοναδική.

Πέραν της παραπάνω μορφής η Εικασία του *Langlands* έχει μια ακόμα ισοδύναμη μορφή.

**Εικασία Αμοιβαιότητας του *Langlands*** (Δεύτερη μορφή) Για κάθε ανάγωγη αναπαράσταση $\sigma : Gal(\overline{F}/F) \to GL_n(\mathbb{C})$ υπάρχει μια *cuspidal* αυτομορφική αναπαράσταση $\pi$ της $GL_n(\mathbb{A})$ τέτοια ώστε η πλήρης $L-$συνάρτηση *Artin* $\Lambda(s,\sigma)$ της $\sigma$ είναι ίση με την πλήρη $L-$συνάρτηση των $Godement - Jacquet$ $\Lambda^{GJ}(s,\pi)$. Ιδιαιτέρως $L_u(s,\sigma) = L_u^{GJ}(s,\pi)$ για κάθε πεπερασμένη θέση $u$ και $L_\infty(s,\sigma) = L_\infty^{GJ}(s,\pi)$ αν $L_\infty$ και $L_\infty^{GJ}$ συμβολίζουν το γινόμενο των $L-$παραγόντων για όλες τις άπειρες θέσεις.

**Παρατήρηση 9.4.2** Οι παραπάνω μορφές της εικασίας είναι ισοδύναμες. Το γεγονός ότι η δεύτερη μορφή συνεπάγεται την πρώτη είναι προφανές. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι μη-προφανής και θα μας απασχολήσει στο τέλος της παραγράφου.

Στην περίπτωση $n = 1$ η Εικασία του *Langlands* είναι στην πραγματικότητα το Θεώρημα 5.2.2. Σε μεγαλύτερες διαστάσεις η Εικασία παραμένει ανοιχτή.

Σε ειδικές περιπτώσεις αναπαραστάσεων $\sigma$ γνωρίζουμε ότι η Εικασία πράγματι ισχύει. Για παράδειγμα ισχύει το ακόλουθο:

**Θεώρημα 9.4.1 (*Langlands*)** Αν $\sigma$ είναι μια διάστασης 2 μιγαδική αναπαράσταση της $Gal(\overline{F}/F)$ με επιλύσιμη εικόνα τότε η Εικασία Αμοιβαιότητας του *Langlands* ισχύει για την $\sigma$.

Για το υπόλοιπο της παραγράφου θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση ενός σχεδίου απόδειξης για το ακόλουθο:

**Θεώρημα 9.4.2** Οι δύο μορφές της εικασίας είναι ισοδύναμες για μια αναπαράσταση $\sigma$ της $Gal(\overline{F}/F)$.

Όπως έχουμε παρατηρήσει η δεύτερη μορφή είναι ισχυρότερη της πρώτης, επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η ισχύς της πρώτης μορφής συνεπάγεται αυτή της δεύτερης.

Η βασική ιδέα είναι να μελετήσουμε τις στροφές των αναπαραστάσεων ως προς κατάλληλους ορθομοναδιαίους χαρακτήρες *Hecke*. Έχουμε ήδη δει την έννοια της στροφής $\sigma \otimes \chi$, μας μένει επομένως να δώσουμε κάποιες επεξηγήσεις για την στροφή της αυτομορφικής αναπαράστασης $\pi \otimes \chi$.

Η αναπαράσταση $\pi$ θα είναι κάποιο ανάγωγο υποπρότυπο, από τη δράση που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, του υποχώρου των *cuspidal* αυτομορφικών μορφών του χώρου $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))_\omega$. Αν $\chi$ είναι ένας χαρακτήρας *Hecke*, τότε μπορούμε να δούμε τον $\chi$ ως μια αναπαράσταση του κέντρου της ομάδας $GL_n(\mathbb{A})$, ο οποίος είναι τετριμμένος στο κέντρο της ομάδας $GL_n(F)$, που είναι διαγώνια εμφυτευμένη σε αυτή. Τότε η αναπαράσταση $\pi \otimes \chi$ θα είναι ένα ανάγωγο υποπρότυπο του $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))_{\omega\chi}$ που θα παράγεται από *cuspidal* μορφές.

Χρήσιμη ακόμα είναι σε όσα θα δούμε η έννοια του οδηγού ενός χαρακτήρα κάποιου τοπικού σώματος. Συγκεκριμένα δίνεται ο ακόλουθος:

**Ορισμός 9.4.1** Έστω $u$ μια πεπερασμένη θέση, $m_{F_u}$ το μέγιστο ιδεώδες του $O_{F_u}$ και $\psi$ ένας χαρακτήρας της $F_u^*$. Ο **οδηγός** του χαρακτήρα $\psi$ ορίζεται να είναι ο ακέραιος $m \geq 0$ που είναι τέτοιος ώστε ο $\chi$ να είναι τετριμμένος στο $1 + m_{F_u}^m$, αλλά όχι στο $1 + m_{F_u}^{m-1}$.

**Παρατήρηση 9.4.3** Η περίπτωση $m = 0$ θα είναι όταν ο $\chi$ είναι τετριμμένος στην ομάδα $O_{F_u}^*$, ενώ στην περίπτωση $m = 1$ θα εννούμε ότι ο $\chi$ είναι τετριμμένος στο $1 + m_{F_u}$ αλλά όχι στο $O_{F_u}^*$.

Λόγω του Πορίσματος 3.3.2, κάθε τέτοιος χαρακτήρας $\chi$ θα είναι μονοδιάστατη αναπαράσταση της $W_{F_u}^{ab}$ και άρα και της $W_{F_u}$. Από τη άλλη η συνθήκη ώστε ο $\chi$ να είναι αδιακλάδιστος, δηλαδή τετριμμένος στην ομάδα αδρανείας, είναι ισοδύναμη της συνθήκης ο οδηγός του να είναι ίσος με 0.

Μια έννοια που θα χρειαστούμε ακόμα είναι αυτή των γενικών αναπαραστάσεων.

Θεωρούμε $N$ να είναι η ομάδα των πινάκων $x = x_{ij}$ με $x_{ij} = 0$ όταν $i > j$ και $x_{ii} = 1$ για κάθε $i$. Έστω τώρα $u$ μια θέση του σώματος $F$ και $N(F_u)$ η αντίστοιχη ομάδα με συντελεστές στο $F_u$. Θεωρούμε ακόμα έναν ορθομοναδιαίο χαρακτήρα $\psi_u$ της προσθετικής ομάδας $F_u$ και έναν ορθομοναδιαίο χαρακτήρα $\theta_u$ της ομάδας $N(F_u)$, ο οποίος θα είναι της μορφής

$$\theta_u(x) = \psi_u(c_1 x_{12} + \cdots + c_{n-1} x_{n-1,n}).$$

**Ορισμός 9.4.2** Ο χαρακτήρας $\theta_u$ θα λέγεται **ομαλός** αν $c_1 \ldots c_{n-1} \neq 0$.

Έστω $\pi_u$ να είναι μια ανάγωγη ορθομοναδιαία και αποδεκτή αναπαράσταση της $GL_n(F_u)$ και $V_u^\infty$ ο χώρος των ομαλών διανυσμάτων[7] της. Σε αυτή την περίπτωση δίνεται ο ακόλουθος:

**Ορισμός 9.4.3** Η αναπαράσταση $\pi_u$ θα λέγεται **γενική**, αν υπάρχει κάποιο μη-μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $\lambda$ του $V_u^\infty$ και κάποιος ομαλός χαρακτήρας $\theta_u$, όπως παραπάνω, έτσι ώστε

$$\lambda(\pi_u(ng)x) = \theta_u(n)\lambda(\pi_u(g)x),$$

για κάθε $n \in N(F_u)$, $g \in GL_n(F_u)$ και $x \in V_u^\infty$.

Το σημαντικότερο αποτελέσμα που σχετίζεται με αυτή την έννοια, το οποίο και χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.4.2, είναι η ακόλουθη:

**Πρόταση 9.4.1** Αν $\pi = \otimes_u \pi_u$ είναι *cuspidal* αυτομοφική αναπαράσταση της $GL_n(\mathbb{A}_F)$, τότε κάθε $\pi_u$ είναι ορθομοναδιαία και γενική αναπαράσταση της $GL_n(F_u)$.

[7]Στην περίπτωση που η $u$ είναι αρχιμήδεια ο χώρος αυτός θα είναι ο χώρος των ομαλών διανυσμάτων όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 7, ενώ στην περίπτωση που η θέση $u$ είναι μη-αρχιμήδεια θα είναι ο χώρος των σταθερών διανυσμάτων από τη δράση κάποιου ταυτοδύναμου στοιχείου της $\mathcal{H}_u$.

Χάρη στις παραπάνω έννοιες μπορούμε να δούμε, περιληπτικά, όπως εμφανίζεται στο $[Kn-1]$, στο οποίο αυτή η εργασία έχει βασιστεί, το ακόλουθο:

### Σχέδιο Απόδειξης του Θεωρήματος 9.4.2

Θεωρούμε ότι ισχύει η πρώτη μορφή της Εικασίας του *Langlands* για την αναπαράσταση $\sigma$ της $Gal(\overline{F}/F)$. Γράφουμε $\sigma_u$ για τον περιορισμό της $\sigma$ στην $Gal(\overline{F_u}/F_u)$. Γνωρίζουμε ότι η $\sigma_u$ θα επάγει μια αναπαράσταση της $W_{F_u}$.

Θέτουμε $S$ να είναι το, πεπερασμένο, σύνολο των θέσεων που αποτελείται από τις θέσεις του $F$ στις οποίες δεν γνωρίζουμε αν οι $L-$παράγοντες των $\sigma$ και $\pi$ συμφωνούν, τις θέσεις που οι $\pi$ και $\sigma$ θα είναι διακλαδισμένες καθώς και τις αρχιμήδειες θέσεις.

Θα έχουμε τότε ότι:

$$L_u(s,\sigma) = L(s,\sigma_u) = L_u^{GJ}(s,\pi),\ \forall u \notin S.$$

Αρχικά χρειαζόμαστε δύο Λήμματα για τις στροφές με τους χαρακτήρες *Hecke*.

**Λήμμα 1** Υποθέτουμε ότι $L_u(s,\sigma) = L(s,\sigma_u) = L_u^{GJ}(s,\pi),\ \forall u \notin S$. Τότε θα ισχύει

$$L_u(s,\sigma\otimes\chi) = L_u^{GJ}(s,\pi\otimes\chi),\ \forall u \notin S,$$

και για κάθε χαρακτήρα *Hecke* $\chi$.

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι ο χαρακτήρας $\chi$ είναι αδιακλάδιστος στη θέση $u$. Αφού η $\sigma$ είναι αδιακλάδιστη στη θέση αυτή γνωρίζουμε ότι, εξ ορισμού, θα ισχύουν οι τύποι:

$$L_u(s,\sigma) = det(1-\sigma_u(Fr)q^{-s})^{-1}, \text{ και}$$

$$L_u(s,\sigma\otimes\chi) = det(1-\sigma_u(Fr)\chi_u(\varpi_u)q^{-s})^{-1},$$

όπου $\varpi_u \in O_{F_u}$ είναι ένα στοιχείο με απόλυτη τιμή $q^{-1}$ και $\sigma_u(Fr)$ είναι ένας ορθομοναδιαίος πίνακας.

Εφόσον η αναπαράσταση $\pi$ είναι αδιακλάδιστη στη θέση $u$, αποδεικνύεται ότι θα είναι κάποιο ανάγωγο υποπηλίκο κάποιας αναπαράστασης

$$ind_P^G(\chi_1\otimes\ldots\otimes\chi_n).$$

Ο τοπικός παράγοντας της $\pi$ στη θέση $u$ θα είναι τότε ο παράγοντας του αποδεκτού ομομορφισμού $(\chi_1,\ldots,\chi_n)$. Δηλαδή θα έχουμε:

$$L_u^{GJ}(s,\pi) = \prod_{j=1}^{n}(1-b_jq^{-s}),$$

όπου $b_j = \chi_j(\varpi_u)$.

Η στροφή της παραπάνω αναπαράστασης με τον $\chi_u$ θα είναι η αδιακλάδιστη αναπαράσταση

$$ind_P^{GL_n(F_u)}(\chi_1\chi_u\otimes\ldots\otimes\chi_n\chi_u).$$

Για αυτή την αναπαράσταση ο τοπικός $L-$παράγοντας ..θα είναι $L_u^{GJ}(s,\pi\otimes\chi) = \prod_{j=1}^{n}(1-b_j\chi_u(\varpi_u)q^{-s})$.

Η ισότητα των $L_u(s,\sigma)$ και $L_u^{GJ}(s,\pi)$ επάγει ισότητα για κάθε συμμετρικό πολυώνυμο βαθμού $n$ των $\{a_1,\ldots,a_n\}$ και $\{b_1,\ldots,b_n\}$, επομένως τα δύο σύνολα θα είναι ίσα και το ίδιο θα ισχύει, επομένως, και για τις $L_u^{GJ}(s,\pi\otimes\chi)$ και $L_u(s,\sigma\otimes\chi)$.

Στην περίπτωση που ο $\chi$ είναι διακλαδισμένος στη θέση $u$, τόσο η $L_u^{GJ}(s,\pi\otimes\chi)$ όσο και η $L_u(s,\sigma\otimes\chi)$ θα είναι ίσες με 1. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις οι ανάγωγες αναπαραστάσεις που θα εμφανίζονται στον υπολογισμό των $L-$παραγόντων θα δρούν τελικά σε χώρους των οποίων τα αναλλοίωτα από την ομάδα αδρανείας στοιχεία θα είναι υπόχωροι μηδενικής διάστασης. $\square$

**Λήμμα 2** Έστω $T$ και $T'$ δύο πεπερασμένα σύνολα θέσεων του $F$, ξένα μεταξύ τους, όπου το $T$ περιέχει μόνο πεπερασμένες θέσεις. Σταθεροποιούμε ακόμα ακεραίους $m_u \geq 0$ για $u \in T$. Τότε θα υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος χαρακτήρας *Hecke* $\chi$ τέτοιος ώστε:

1. $\chi_u = 1$ για κάθε $u \in T'$, και

2. για κάθε $u \in T$ ο οδηγός του $\chi_u$ είναι $\geq m_u$.

Απόδειξη: Είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 5 της σελίδας 103 στο $[Ar - Ta]$.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε περιληπτικά τα βήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 9.4.2.

**Βήμα 1ο:** Αν $u$ είναι μια πεπερασμένη θέση, τότε υπάρχει ένας ακέραιος $m = m(u, \sigma) \geq 0)$ τέτοιος ώστε $L_u(s, \sigma \otimes \chi) = 1$ για κάθε μοναδιαίο χαρακτήρα $\chi$ του $F_u^*$ με οδηγό $\geq m$.

Απόδειξη: Εξ ορισμού τους οι $L-$παράγοντες μιας αναπαράστασης είναι το γινόμενο των αντίστοιχων παραγόντων των ανάγωγων υποαναπαραστάσεών της. Επομένως, αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό για μια ανάγωγη αναπαράσταση $\tau$.

Αν υπάρχει χαρακτήρας $\chi_0$ ώστε η αναπαράσταση $\tau \otimes \chi_0$ να είναι αδιακλάδιστη, τότε η αναπαράσταση αυτή θα παραγοντοποιείται μέσω της ομάδας $\mathbb{Z}$ στην ακριβή ακολουθία (3.4) και επομένως η $\tau$ θα είναι μονοδιάστατη αναπαράσταση. Επομένως, η $\tau$ θα είναι ένας χαρακτήρας της $F_u$ με οδηγό $m_0$. Αν ο οδηγός της $\chi_0$ είναι $> m_0$, τότε η $\tau \otimes \chi_0$ θα είναι διακλαδισμένη και θα έχουμε ότι

$$L_u(s, \tau \otimes \chi_0) = 1.$$

Διαφορετικά, η $\tau \otimes \chi$ θα είναι διακλαδισμένη για κάθε μοναδιαίο χαρακτήρα $\chi$ της $F_u^*$. Σε αυτή την περίπτωση, ο υπόχωρος των αναλλοίωτων από τη δράση της ομάδας αδρανείας στοιχείων θα είναι μηδενικής διάστασης και άρα ο τοπικός παράγοντας θα ισούται με 1.

**Βήμα 2ο:** Αν $u$ είναι μια πεπερασμένη θέση, τότε θα υπάρχει ένας ακέραιος $m' = m'(u, \pi) \geq 0$, τέτοιος ώστε $L_u^{GJ}(s, \pi_u \otimes \chi) = 1$, για κάθε μοναδιαίο χαρακτήρα $\chi$ του $F_u^*$ με οδηγό $\geq m'$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού βασίζεται στην ταξινόμηση των αναπαραστάσεων που μας ενδιαφέρουν. Καταλήγουμε σε μια απλούστερη μορφή, μέσω επαγόμενων αναπαραστάσεων υποομάδων, για την οποία η απόδειξη του ισχυρισμού είναι ευκολότερη.

**Βήμα 3ο:** Ισχύει

$$L_\infty(s, \sigma) L_\infty^{GJ}(1 - s, \tilde{\pi}) = \epsilon(s) L_\infty^{GK}(s, \pi) L_\infty(1 - s, \tilde{\sigma}),$$

όπου $\epsilon$ είναι μια ακέραια συνάρτηση χωρίς ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε $T$ να είναι το υποσύνολο των μη-αρχιμήδειων θέσεων του συνόλου $S$ και $T'$ το υποσύνολο των αρχιμήδειων θέσεων του $S$. Για κάθε $u \in T$ ορίζουμε $m_u$ να είναι ο μέγιστος από τους αριθμούς $m(u, \sigma)$, $m(u, \tilde{\sigma})$, $m'(u, \pi)$ και $m'(u, \tilde{\pi})$ των βημάτων 1 και 2 αντίστοιχα, για τις $\sigma$, $\pi$ και τις *contragradient* αναπαραστάσεις αυτών.

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2 για τα $T$, $T'$ και το σύνολο $\{m_u : u \in T\}$ και λαμβάνουμε έναν ορθομοναδιαίο χαρακτήρα *Hecke* $\chi$ και τις σχέσεις

$$\begin{array}{c} L_u(s, \sigma \otimes \chi) = L_u^{GJ}(s, \pi \otimes \chi) = 1, \text{ για } u \in T, \\ L_u(s, \sigma) = L_u(s, \sigma \otimes \chi), \text{ για } u \in T', \text{ και} \qquad (*) \\ L_u^{GJ}(s, \pi) = L_u^{GJ}(s, \pi), \text{ για } u \in T'. \end{array}$$

Οι σχέσεις αυτές θα ισχύουν και για τις $\tilde{\sigma}$ και $\tilde{\pi}$.

Από τους ορισμούς των πληρώσεων των παραπάνω $L-$συναρτήσεων, $\Lambda(s,\sigma\otimes\chi)$ και $\Lambda^{GJ}(s,\pi\otimes\chi)$, και τα αντίστοιχα θεωρήματα για τις συναρτησιακές τους εξισώσεις θα έχουμε τη σχέση

$$\Lambda(s,\sigma\otimes\chi)\Lambda^{GJ}(1-s,\tilde{\pi}\otimes\tilde{\chi})=\epsilon(s)\Lambda^{GJ}(s,\pi\otimes\chi)\Lambda(1-s,\tilde{\sigma}\otimes\tilde{\chi}),$$

όπου $\epsilon$ είναι μία ακέραια συνάρτηση χωρίς ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Θεωρούμε $L^S$ να είναι $L^{GJS}$ τα γινόμενα των αντίστοιχων τοπικών παραγόντων στις θέσεις που δεν ανήκουν στο $S$. Από τις σχέσεις που έχουμε δει μέχρι στιγμής, το Λήμμα 1 και με τη βοήθεια αυτού του συμβολισμού καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned}&L_\infty(s,\sigma)L^S(s,\sigma\otimes\chi)L_\infty^{GJ}(1-s,\tilde{\pi})L^{GJS}(1-s,\tilde{\pi}\otimes\tilde{\chi})=\\&=\epsilon(s)L_\infty^{GJ}(s,\pi)L^{GJS}(s,\pi\otimes\chi)L_\infty(1-s,\tilde{\sigma})L^S(1-s,\tilde{\sigma}\otimes\tilde{\chi}).\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων $(*)$, που απλοποιούν την παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στην επιθυμητή σχέση.

**Βήμα 4ο:** $L_\infty(s,\sigma)=L_\infty^{GJ}(s,\pi)$, και $L_\infty(1-s,\tilde{\sigma})=L_\infty^{GJ}(1-s,\tilde{\pi})$.

Απόδειξη: Η ιδέα είναι να ξαναγράψουμε τον τύπο του προηγούμενου βήματος στη μορφή:

$$L_\infty(s,\sigma)/L_\infty^{GK}(s,\pi)=\epsilon(s)L_\infty(1-s,\tilde{\sigma})/L_\infty^{GJ}(1-s,\tilde{\pi})$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι και τα δύο μέλη της ισότητας είναι ακέραιες συναρτήσεις που δεν μηδενίζονται στο $\mathbb{C}$. Η ιδιότητα αυτή βασίζεται στη γνώση των πόλων των τοπικών παραγότων $L_u$ και $L_u^{GJ}$ στις αρχιμήδειες θέσεις. Στην περίπτωση της $L_u(s,\sigma_u)$ το αποτέλεσμα είναι απλό, αλλά στην περίπτωση των $Godement-Jacquet$ τοπικών παραγόντων το αποτέλεσμα είναι μη-τετριμμένο. Τελικά, αποδεικνύεται ότι η αριστερή πλευρά της ισότητας δεν έχει πόλους ή ρίζες για $Res\geq 1/2$, ενώ η δεξιά δεν έχει πόλους ή ρίζες για $Res\leq 1/2$. Επομένως, οι συναρτήσεις αυτές θα είναι ακέραιες και δεν θα έχουν ρίζες.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι τα γινόμενα των τοπικών παραγόντων αρχιμήδειων θέσεων καθορίζονται από τους πόλους τους. Η απόδειξη αυτή βασίζεται σε ιδιότητες της $\Gamma$ συνάρτησης. Καταλήγουμε έτσι ότι τα πηλίκα είναι σταθερές, αφού τόσο ο αριθμητής τους όσο και ο παρονομαστής τους θα περιέχουν τους ίδιους παράγοντες $\Gamma$.

**Βήμα 5ο:** Αν $u\in S$ είναι μια πεπερασμένη θέση , τότε $L_u(s,\sigma)=L_u^{GJ}(s,\pi)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε μια σταθερή πεπερασμένη θέση $u\in S$, $T$ να είναι το σύνολο των υπόλοιπων πεπερασμένων θέσεων του $S$ και $T'$ να είναι το σύνολο $S\backslash T$. Έστω, όπως στο 3ο βήμα, $m_w$ να είναι ο μέγιστος από τους αριθμούς $m(w,\sigma)$, $m(w,\tilde{\sigma})$, $m'(w,\pi)$ και $m'(w,\tilde{\pi})$, των βημάτων 1 και 2 αντίστοιχα, για τις $\sigma$, $\pi$. Θεωρούμε $\psi$ έναν ορθομοναδιαίο χαρακτήρα $Hecke$ ο οποίος θα δίνεται από το Λήμμα 2 για τα $T$, $T'$ και το σύνολο $\{m_u : u\in T\}$.

Από τον ορισμό της η $L_u(s,\sigma)$ θα είναι το γινόμενο κάποιων παραγόντων της μορφής $(1-cq_u^{-s})$, με $|c|=1$. Επομένως δεν θα έχει πόλους στο $\mathbb{C}$ και δεν θα έχει ρίζες για $Res>0$. Όμοια η $L_u(1-s,\tilde{\sigma})$ δεν θα έχει ρίζες στο $\mathbb{C}$ και δεν θα έχει πόλους για $Res<1$.

Στην περίπτωση των $Godement-Jacquet$ τοπικών παραγόντων της $\pi$ το αντίστοιχο αποτέλεσμα είναι μη-τετριμμένο, βασίζεται στην ταξινόμηση των γενικών αναπαραστάσεων και χρησιμοποιεί την Πρόταση 9.4.1. Αποδεικνύεται ότι η $L_u^{GJ}(s,\pi)$ δεν θα έχει πόλους για $Res\geq 1/2$ ενώ η $L_u^{GJ}(1-s,\tilde{\pi})$ δεν θα έχει πόλους για $Res\leq 1/2$.

Χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα της απόδειξης του τρίτου βήματος καθώς και τη σχέση και τα επιχειρήματα του τέταρτου βήματος καταλήγουμε στη σχέση:

$$L_u(s,\sigma)/L_u^{GK}(s,\pi)=\epsilon_1(s)L_u(1-s,\tilde{\sigma})/L_u^{GJ}(1-s,\tilde{\pi}),$$

όπου $\epsilon_1$ είναι μια ακέραια συνάρτηση χωρίς ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις για τους πόλους των διαφόρων συναρτήσεων συνεπάγονται ότι και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας θα είναι ακέραιες συναρτήσεις χωρίς ρίζες και πόλους στο $\mathbb{C}$. Η αριστερή πλευρά, από τον ορισμό των συναρτήσεων που εμφανίζονται σε αυτή, θα είναι της μορφής $(1 + P(q_u^{-s}))/(1 + Q(q_u^{-s}))$, όπου $P$ και $Q$ είναι πολυώνυμα χωρίς σταθερούς όρους. Αναγκαία συνθήκη ώστε μία τέτοια συνάρτηση να μην έχει ρίζες και πόλους είναι να ισχύει $P = Q$. Επομένως θα ισχύει $L_u(s, \sigma) = L_u^{GJ}(s, \pi)$. $\square$

# Παράρτημα Α′

# Πρόγραμμα *Langlands* σε γενικότερες ομάδες

Έχοντας δώσει μια περιγραφή του προγράμματος *Langlands* στις γενικές γραμμικές ομάδες, ολοκληρώνεται ο στόχος της παρούσας εργασίας. Παρ′ όλα αυτά, προσθέτουμε εδώ κάποιες περιπληπτικές παρατηρήσεις για τη γενίκευση του προγράμματος *Langlands* σε γενικότερες ομάδες από τις γενικές γραμμικές ομάδες που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι παρατηρήσεις αυτές είναι μια περίληψη των παραγράφων 9 και 10 του $[Kn-1]$.

## Α′.1 *Reductive* γραμμικές ομάδες

Η ουσιαστικότερη ιδιότητα των γενικών γραμμικών ομάδων που χρησιμοποιήσαμε ήταν η ιδιότητα (6.1), που είδαμε στο 6ο κεφάλαιο. Η ιδιότητα αυτή ικανοποιείται από μια γενικότερη κατηγορία ομάδων οι οποίες καλούνται *reductive*.

Οι ομάδες αυτές είναι κατάλληλες ομάδες πινάκων που συνδιάζουν τις δομές ομάδας και αλγεβρικής πολλαπλότητας, και μπορούν να οριστούν πάνω από το δακτύλιο των *adele* ενός σώματος αριθμών. Στην περίπτωση των ομάδων αυτών ορίζεται, ανάλογα με την περίπτωση των γενικών γραμμικών ομάδων, μια καθολική άλγεβρα *Hecke*. Μέσω αυτής της άλγεβρας ορίζονται οι αυτομορφικές και *cuspidal* αυτομορφικές αναπαραστάσεις της ομάδας, ακριβώς όπως ορίσαμε στο 8ο κεφάλαιο τις αυτομορφικές αναπαραστάσεις ως κατάλληλα πρότυπα της $\mathcal{H}_{GL_n(\mathbb{A})}$. Αν $G$ είναι μια τέτοια ομάδα με $G(R)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των στοιχείων της με συντελεστές στο δακτύλιο $R$, όπου $R$ στην περίπτωσή μας θα είναι είτε κάποιο σώμα αριθμών $F$, είτε κάποια πλήρωσή του.

Το πρόγραμμα *Langlands* στην περίπτωση αυτή ορίζει κάποιες $L-$ομάδες. Αν $G$ είναι η *reductive* ομάδα μας, η $L-$ομάδα της, η οποία συμβολίζεται με ${}^LG$, ορίζεται να είναι το ημιευθύ γινόμενο μιας άλλης *reductive* ομάδας $\hat{G}$, που καθορίζεται από την $G$, και της απόλυτης ομάδας *Galois* $G_F$ του σώματος αριθμών με το οποίο δουλέουμε, έτσι ώστε η $\hat{G}$ να είναι κανονική στην ${}^LG$.

Η κατασκευή αυτή θα μας δίνει μια $L-$ομάδα και για κάθε θέση $u$ του σώματος $F$, την οποία θα συμβολίζουμε με ${}^LG(F_u)$. Στην περίπτωση αυτή οι αποδεκτοί ομομορφισμοί θα είναι κατάλληλοι ομομορφισμοί της ομάδας $Weil$ ή $Weil-Deligne$, ανάλογα με το είδος της θέσης, στην $L-$ομάδα της θέσης $u$. Στη συνέχεια, αν $\phi$ είναι ένας τέτοιος ομομορφισμός και $r$ είναι μια $n-$διάστατη μιγαδική αναπαράσταση της ${}^LG$, η οποία είναι ολόμορφη ως απεικόνιση στη $\mathbb{C}-$συντεταγμένη, ορίζουμε έναν τοπικό $L-$παράγοντα $L(s,\phi,r)$. Ο ορισμός αυτός γίνεται μέσω του αντίστοιχου ορισμού για την $GL_n$ και θα δίνεται από τον τύπο:

$$L(s,\phi,r)=L(s,r\circ\phi).$$

Έστω τώρα $\Pi(G(F_u))$ να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των ανάγωγων αποδεκτών αναπαραστάσεων της ομάδας $G(F_u)$ και $\Phi(G(F_u))$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των αποδεκτών ομομορφισμών της αντίστοιχης ομάδας, ως πρός καταλλληλη σχέση ισοδυναμίας. Το αντίστοιχο αποτελέσμα της τοπικής αντιστοιχίας *Langlands* στην περίπτωση αυτή παραμένει ανοιχτό πρόβλημα και διατυπώνεται ως εξής:

**Τοπική Εικασία *Langlands*** Το $\Pi(G(F_u))$ διαμερίζεται με φυσικό τρόπο σε μη κενά πεπερασμένα σύνολα $\Pi_\phi$ τα οποία παραμετροποιούνται από τα στοιχεία $\phi$ του $\Phi(G(F_u))$.

Η παραμέτρηση της παραπάνω εικασίας θέλουμε να ικανοποιεί διάφορες συνθήκες, και οι αδιακλάδιστες αναπαραστάσεις να παραμετροποιούνται από κατάλληλους $\phi$.

Η εικασία είναι γνωστή σε ορισμένες περιπτώσεις, για παράδειγμα όταν η θέση $u$ είναι αρχιμήδεια, ή όταν η ομάδα $G$ είναι τόρος.

Η παραπάνω εικασία μας επιτρέπει να ορίσουμε τοπικούς παράγοντες για τις ανάγωγες και αποδεκτές αναπαραστάσεις $\pi_u$ των τοπικών σωμάτων, με έναν πρόσθετο συντελεστή για τις αναπαραστάσεις $r$ που περιγράψαμε παραπάνω, μέσω του τύπου

$$L(s, \pi_u, r) = L(s, \phi, r), \text{ αν } \pi_u \leftrightarrow \phi.$$

Στη συνέχεια, υποθέτοντας την ισχύ της εικασίας, μπορούμε να ορίσουμε μέσω του γινομένου *Euler* πάνω από τις μη-αρχιμήδειες θέσεις, ανάλογα με την κατασκευή των $Godement - Jacquet$ του προηγούμενου κεφαλαίου, μια $L-$συνάρτηση για την αυτομορφική αναπαράσταση $\pi$, συγκεκριμένα μπορούμε να ορίσουμε

$$L(s, \pi, r) = \prod_{u \in S_f} L(s, \pi_u, r), \text{ και}$$

$$\Lambda(s, \pi, r) = \prod_{u \in M_F} L(s, \pi_u, r),$$

όπου $S_f$ το σύνολο των πεπερασμένων θέσεων και $M_F$ το σύνολο όλων των θέσεων του $F$.

Για τις συναρτήσεις αυτές είναι γνωστό το ακόλουθο:

**Θεώρημα** (*Langlands*) Αν $\pi$ είναι μια αυτομορφική αναπαράσταση της $G(\mathbb{A}_F)$ και $r$ μια ολόμορφη αναπαράσταση της ${}^LG$, τότε η $L(s, \pi, r)$ συγκλίνει απόλυτα για $Res$ αρκούντως μεγάλο.

Τέλος, στην περίπτωση των *reductive* γραμμικών ομάδων η εικασία αμοιβαιότητας του *Langlands*, που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, γενικεύεται περαιτέρω και είναι γνωστή ως *Global Functoriality*.

# Βιβλιογραφία


**1. Γενική Βιβλιογραφία**

[1] L. V. Ahlfors, Complex Analysis (3rd ed.), McGraw-Hill, 1979.

[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Itroduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[3] T. N. Bailey and A. W. Knapp, Representation Theory and Automorphic Forms, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, 1997.

[4] A. Borel and W. Casselman, Automorphic Forms, Representations, and L-functions, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 33, Part I-II, American Mathematical Society, Providence, 1979.

[5] J. W. Cassels and A. Fröhlich, Algebraic Number Theory, Academic Press, London, 1967.

[6] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory, A First Course, Springer, New York, 2004.

[7] U. Janssen, S. Kleiman and J.-P. Serre, Motives, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 55, Part II, American Mathematical Society, Providence, 1994.

[9] P. Morandi, Fields and Galois Theory, Springer-Verlag, New York, 1996.

[10] J. Neukirch, Class Field Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

**2. Βιβλιογραφικές Αναφορές**

[Ar-Ta] Artin, E, and J. Tate, Class Field Theory, W. A. Benjamin Inc., New York, 1967.

[At-Wa] M. F. Atiyah and C. T. C. Wall, Cohomology of groups, Algebraic Number Theory (J. W. Cassels and A. Fröhlich, eds.), Academic Press, London, 1967, pp. 94-127.

[Bu-1] D. Bump, Automorphic Forms and Representations, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Bu-2] D. Bump, Lie Groups (2nd ed.), Springer-Verlag, New York, 2013.

[Ge-1] S. S. Gelbart, Automorphic Forms on Adele Groups, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1975.

[Ge-2] S. S. Gelbart, An elementary introduction to the Langlands program, Bull. Amer. Math. 10 (1984), pp. 174-199.

[Go-Ja] R. Godement and H. Jacquet, Zeta-functions of simple algebras, Lecture Notes in Mathematics, vol. 260, Springer-Verlag, New York, 1972.

[He] H. Heilbronn, Zeta-functions and L-functions, Algebraic Number Theory (J. W. Cassels and A. Fröhlich, eds.), Academic Press, London, 1967, pp. 204-230.

[Kn-1] A. W. Knapp, Introduction to the Langlands Program, Representation Theory and Automorphic Forms, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, 1997, pp. 245-302.

[Kn-2] A. W. Knapp, Local Langlands correspondence: the archimedean case, Motives, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 55, Part II, American Mathematical Society, Providence, 1994, pp. 393-410.

[Kn-Vo] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Cohomological Induction and Unitary Representations, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[Ko-1] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms (2nd ed.), Springer-Verlag, New York, 1993.

[Ko-2] N. Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions (2nd ed.), Springer-Verlag, New York, 1984.

[La-1] S. Lang, Algebraic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1986.

[La-2] S. Lang, Algebra, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Mart] J. Martinet, Character theory and Artin L-functions, Algebraic Number Fields: L-Functions and Galois Properties (A.Fröhlich, ed.), Academic Press, London, 1977, pp. 1-87.

[Se-1] J.-P. Serre, Local class field theory, Algebraic Number Theory (J. W. Cassels and A. Fröhlich, eds.), Academic Press, London, 1967, pp. 129-161.

[Se-2] J.-P. Serre, Local Fields, Springer-Verlag, New York, 1979.

[Ta-1] J. T. Tate, Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions, Ph.D. Thesis, Princeton University, 1950, Algebraic Number Theory (J. W. Cassels and A. Fröhlich, eds.), Academic Press, London, 1967, pp. 305-347.

[Ta-2] J. T. Tate, Global class field, Algebraic Number Theory (J. W. Cassels and A. Fröhlich, eds.), Academic Press, London, 1967, pp. 162-203.

[Ta-3] J. T. Tate, Number Theoretic Background, Automorphic Forms, Representations, and L-functions, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 33, Part II, American Mathematical Society, Providence, 1979, pp. 3-26.