Πέτρος Πανταβός

Η ομολογία André-Quillen για μεταθετικές άλγεβρες

Μεταπτυχιακή Εργασία

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, 22 Σεπτεμβρίου 2017

Επιβλέπων: Αριστείδης Κοντογεώργης
Συνεπιβλέπων: Ιωάννης Σακελλαρίδης (ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ)

Επιτροπή

Αριστείδης Κοντογεώργης

Ιωάννης Εμμανουήλ

Ολυμπία Ταλέλλη

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες καθηγητές μου, Αριστείδη Κοντογεώργη και Γιάννη Σακελλαρίδη, για το ενδιαφέρον που μου έδειξαν, τη συνεχή τους στήριξη, την υπομονή τους και τις πολύτιμες ώρες μαθηματικών συζητήσεων. Χωρίς αυτούς δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Θέλω ακόμα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για όλα όσα μου έχουν προσφέρει καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την καλή μου φίλη Ελένη Μπακάλη και τη δασκάλα του πιάνου μου Ρουμπίνα Σχοινά για την ψυχολογική υποστήριξη που μου προσέφεραν.

Σύμβολα και Συμβάσεις

Συμβάσεις

Όλοι οι δακτύλιοι είναι μεταθετικοί και με μονάδα. Οι ομομορφισμοί δακτυλίων διατηρούν τη μονάδα. Δεν απαιτούμε $0 \neq 1$, δηλαδή υπάρχει δακτύλιος με ένα στοιχείο.

Σε όλα τα R-πρότυπα ο πολλαπλασιασμός με 1_R είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Όλες οι άλγεβρες είναι προσεταιριστικές, μεταθετικές και με μονάδα.

Όλες οι κατηγορίες είναι τοπικά μικρές (βλ. Ορισμό A.1), εκτός αν αναφέρεται ρητά το αντίθετο.

Συμβολισμοί

Για τα παρακάτω, έστω R ένας δακτύλιος και $\mathcal{C}$ μία κατηγορία.

$\emptyset$: αρχικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$

$*$: τελικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}(X, Y)$ ή $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$: η συλλογή όλων των μορφισμών $X \to Y$ στη $\mathcal{C}$

$X \in \mathcal{C}$: $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, δηλαδή το X είναι αντικείμενο της $\mathcal{C}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

Ab: η κατηγορία των αβελιανών ομάδων

Alg$_R$: η κατηγορία των προσεταιριστικών μεταθετικών R-αλγεβρών με μονάδα

Grp: η κατηγορία των ομάδων

Mod$_R$: η κατηγορία των R-προτύπων

Set: η κατηγορία των συνόλων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η ομολογία André-Quillen [Qui68, Qui70, And74] είναι μία θεωρία ομολογίας για μεταθετικές άλγεβρες, η οποία μπορεί να ιδωθεί ως «παραγόμενος συναρτητής»των διαφορικών Kähler. Παρουσιάζουμε τα διαφορικά Kähler στην Ενότητα 1.2. Η έννοια των παραγόμενων συναρτητών προέρχεται από την ομολογική άλγεβρα και σκιαγραφείται στην Ενότητα 1.1. Όμως, ομολογική άλγεβρα μπορούμε να κάνουμε μόνο σε αβελιανές κατηγορίες (μία γενίκευση των κατηγοριών R-προτύπων), ενώ οι κατηγορίες των μεταθετικών R-αλγεβρών που μας ενδιαφέρουν απέχουν πολύ από το να είναι αβελιανές. Για να ορίσουμε λοιπόν την ομολογία André-Quillen θα πρέπει να γενικεύσουμε την έννοια των παραγόμενων συναρτητών. Θα χρειαστούμε δύο εργαλεία, τα simplicial αντικείμενα και τις κατηγορίες μοντέλων (model categories). Ο ρόλος που θα παίξουν αυτά τα εργαλεία στη γενίκευση των παραγόμενων συναρτητών, περιγράφεται στο τέλος της Ενότητας 1.1. Τα εργαλεία αυτά παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 2 και 3 αντίστοιχα.

Η ομολογία André-Quillen αποτελεί ειδική περίπτωση της ομολογίας Quillen την οποία μπορούμε να σκεφτόμαστε ως τον «παραγόμενο συναρτητή»του συναρτητή αβελιανοποίησης. Στην παρουσίασή μας, στο Κεφάλαιο 4, ξεκινάμε από τη γενική περίπτωση, ορίζοντας πρώτα τον συναρτητή αβελιανοποίησης και την ομολογία Quillen. Στη συνέχεια, δείχνοντας ότι τα διαφορικά Kähler αποτελούν ειδική περίπτωση του συναρτητή αβελιανοποίησης, φτάνουμε στην έννοια της ομολογίας Andé-Quillen.

Σε όλη την εργασία κάνουμε χρήση βασικών εννοιών από τη γλώσσα της θεωρίας κατηγοριών. Μία συνοπτική αναφορά των εννοιών που θα χρειαστούμε γίνεται στο Παράρτημα Α.

1.1 Παραγόμενοι συναρτητές

Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας προσθετικός (additive) συναρτητής ο οποίος είναι δεξιά ακριβής (right exact). Το τελευταίο σημαίνει ότι για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to A \to B \to C \to 0$ αντικειμένων της $\mathcal{A}$, η ακολουθία $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ είναι ακριβής.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω ακολουθία προς τα αριστερά έτσι ώστε να προκύψει μία μακρά ακριβής ακολουθία; Αν η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα (βλ. Ενότητα A.3) τότε μπορούμε, και μάλιστα υπάρχουν *συναρτητές* $L_iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και μορφισμοί $L_{i+1}F(C) \to L_iF(A)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ (όπου $L_0F = F$), ώστε η ακολουθία

$$\begin{gathered} \cdots \to L_{n+1}F(C) \to L_nF(A) \to L_nF(B) \to L_nF(C) \to \dots \\ \to L_1F(A) \to L_1F(B) \to L_1F(C) \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0 \end{gathered}$$

να είναι ακριβής. Οι συναρτητές αυτοί καλούνται **αριστερά παραγόμενοι συναρτητές** (left derived functors) του F και κατασκευάζονται με τον ακόλουθο τρόπο.

Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Αφού η $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα, υπάρχει **προβολική επίλυση** (projective resolution) του X, δηλαδή μία μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_0 \to X \to 0$$

όπου τα P_i είναι προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Εφαρμόζοντας τον F στην παραπάνω ακολουθία και παραλείποντας το $F(X)$, παίρνουμε την ακολουθία

$$\cdots \to F(P_{n+1}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} F(P_n) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to F(P_0) \to 0$$

η οποία μπορεί να μην είναι ακριβής, αλλά αποτελεί αλυσιδωτό σύμπλεγμα (chain complex), δηλαδή $\partial_i \partial_{i+1} = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το $L_iF(X)$ ορίζεται ως η ομολογία αυτού του αλυσιδωτού συμπλέγματος στη θέση i, δηλαδή

$$L_iF(X) := \ker \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}.$$

Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω πηλίκο είναι καλώς ορισμένο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από το ποια προβολική επίλυση του X είχαμε επιλέξει.

Επίσης προκύπτει ότι $L_0F = F$. Αν ο F είναι ακριβής τότε $L_iF = 0$ για $i > 0$. Οπότε, υπό μία έννοια, οι αριστερά παραγόμενοι συναρτητές του F μετράνε πόσο «απέχει»ο F από το να είναι ακριβής.

Δυϊκή ως προς την έννοια των αριστερά παραγόμενων συναρτητών είναι αυτή των δεξιά παραγόμενων συναρτητών. Έστω ότι έχουμε έναν προσθετικό συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ αβελιανών κατηγοριών, ο οποίος είναι αριστερά ακριβής, δηλαδή για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to A \to B \to C \to 0$ στην $\mathcal{A}$, η ακολουθία $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ είναι ακριβής. Έστω ακόμη ότι η $\mathcal{A}$ έχει αρκετά εμφυτευτικά αντικείμενα. Τότε ορίζονται οι **δεξιά παραγόμενοι συναρτητές** R^iF του F για $i \in \mathbb{N}$ ως η συνομολογία του συναλυσιδωτού συμπλέγματος

$$0 \overset{\partial^{-1}}{\to} F(J^0) \overset{\partial^0}{\to} \cdots \to F(J^{n-1}) \overset{\partial^{n-1}}{\to} F(J^n) \overset{\partial^n}{\to} \dots,$$

δηλαδή ως

$$R^iF(X) := \ker \partial^i / \operatorname{Im} \partial^{i-1}, \quad i \in \mathbb{N}$$

όπου η

$$0 \to X \to J^0 \to \dots J^n \to J^{n+1} \to \dots$$

είναι μία **εμφυτευτική επίλυση** (injective resolution) του X στην $\mathcal{A}$, δηλαδή μία μακρά ακριβής ακολουθία όπου τα J^i είναι εμφυτευτικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Και σε αυτή την περίπτωση προκύπτει $R^0F = F$ και υπάρχουν μορφισμοί $R^iF(C) \to R^{i+1}F(A)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ώστε η ακριβής ακολουθία $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ να επεκτείνεται σε μία μακρά ακριβή ακολουθία

$$\begin{aligned} 0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(C) \to \dots \\ \to R^nF(A) \to R^nF(B) \to R^nF(C) \to R^{n+1}F(A) \to \dots \end{aligned}$$

Για αποδείξεις και περισσότερες λεπτομέρειες βλ. κάποιο εγχειρίδιο ομολογικής άλγεβρας, π.χ. [Wei94, Κεφ. 2].

Επιλύσεις υπό άλλο πρίσμα

Ορισμός 1.1. Ένας μορφισμός αλυσιδωτών συμπλεγμάτων $f : A_\bullet \to B_\bullet$ (αντίστοιχα συναλυσιδωτών συμπλεγμάτων $f : A^\bullet \to B^\bullet$) καλείται **ψευδο-ισομορφισμός** (quasi-isomorphism) αν επάγει ισομορφισμούς μεταξύ των ομάδων ομολογίας $H_n(A_\bullet) \to H_n(B_\bullet)$ (αντίστοιχα συνομολογίας $H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet)$) για κάθε n.

Έστω $\mathrm{Ch}_{\bullet \geq 0}(\mathcal{A})$ η κατηγορία των μη αρνητικά βαθμονομημένων αλυσιδωτών συμπλεγμάτων αντικειμένων της $\mathcal{A}$, ώστε δηλαδή ένα αντικείμενο $A_\bullet$ της $\mathrm{Ch}_{\bullet \geq 0}(\mathcal{A})$ να είναι ένα διάγραμμα στην $\mathcal{A}$

$$\cdots \to A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \to A_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \to 0 \to \dots$$

τέτοιο ώστε $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μπορούμε να ταυτίσουμε ένα αντικείμενο X της $\mathcal{A}$ με το αλυσιδωτό σύμπλεγμα $X_\bullet \in \mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathcal{A})$ για το οποίο ισχύει $X_0 = X$ και $X_n = 0$ για κάθε $n \neq 0$. Συγκεκριμένα, εύκολα βλέπουμε ότι ο συναρτητής

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathcal{A}) \\ X & \mapsto & X_\bullet \end{array}$$

ορίζει ισομορφισμό μεταξύ της κατηγορίας $\mathcal{A}$ και της πλήρους υποκατηγορίας της $\mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathcal{A})$ η οποία περιέχει τα συμπλέγματα $X_\bullet$ για $X \in \mathcal{A}$.

Ένας καλύτερος τρόπος να σκεφτόμαστε την έννοια της προβολικής επίλυσης ενός $X \in \mathcal{A}$ είναι ως έναν ψευδο-ισομορφισμό αλυσιδωτών συμπλεγμάτων $p : P_\bullet \to X_\bullet$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "p_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "p_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "p_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

τέτοιον ώστε το P_n να είναι προβολικό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η συνθήκη του ψευδο-ισομορφισμού μεταφράζεται στο ότι η ακολουθία

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \to 0$$

είναι ακριβής.

Δυϊκά, μπορούμε να δούμε μία εμφυτευτική επίλυση του ενός αντικειμένου X της $\mathcal{A}$ ως έναν ψευδο-ισομορφισμό μη αρνητικά βαθμονομημένων συναλυσιδωτών συμπλεγμάτων $j : X^\bullet \to J^\bullet$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "j^0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & J^0 \arrow[r, "\partial^0"] & J^1 \arrow[r, "\partial^1"] & \cdots \arrow[r] & J^n \arrow[r, "\partial^n"] & \cdots \end{tikzcd}$$

τέτοιον ώστε το J^n να είναι εμφυτευτικό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η συνθήκη του ψευδο-ισομορφισμού μεταφράζεται στο ότι η ακολουθία

$$0 \to X \xrightarrow{j^0} J^0 \xrightarrow{\partial^0} J^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots \to J^n \xrightarrow{\partial^n} J^{n+1} \to \ldots$$

είναι ακριβής.

Υπό αυτό το πρίσμα, μπορούμε να δώσουμε την ακόλουθη διαισθητική περιγραφή του υπολογισμού των παραγόμενων συναρτητών ενός δεξιά ή αριστερά ακριβούς προσθετικού συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ αβελιανών κατηγοριών, για τον οποίο μιλήσαμε στην αρχή της παρούσας ενότητας. Ταυτίζουμε το $X \in \mathcal{A}$ με το $X_\bullet$ και εφαρμόζουμε τον συναρτητή F όχι στο ίδιο το $X_\bullet$, αλλά σε μία «καλή προσέγγισή»του, δηλαδή σε ένα «καλό»αντικείμενο (της κατηγορίας $\mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathcal{A})$ πλέον) το οποίο συνδέεται μέσω ψευδο-ισομορφισμού με το $X_\bullet$. Στην περίπτωση που ο F είναι δεξιά (αντίστοιχα αριστερά) ακριβής, «καλό»αντικείμενο της $\mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathcal{A})$ είναι κάποιο που αποτελείται από προβολικά (αντίστοιχα εμφυτευτικά) αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Τέλος, παίρνουμε την ομολογία του συμπλέγματος που προέκυψε.

Αυτή η οπτική γωνία για να βλέπουμε τις προβολικές και εμφυτευτικές επιλύσεις και για να κατασκευάζουμε παραγόμενους συναρτητές θα μας βοηθήσει να γενικεύσουμε αυτές τις έννοιες και σε κατηγορίες που δεν είναι αβελιανές. Για τον σκοπό αυτό έχουμε τις εξής ανάγκες.

Πρώτον, χρειαζόμαστε μία κατάλληλη γενίκευση της έννοιας του αλυσιδωτού συμπλέγματος. Το θεώρημα των Dold-Kan [Dol58] λέει ότι τα αλυσιδωτά συμπλέγματα R-προτύπων συμπεριφέρονται όπως τα simplicial R-πρότυπα, υποδεικνύοντας ότι τα simplicial αντικείμενα ίσως είναι η κατάλληλη γενίκευση που θέλουμε. Προκύπτει ότι πράγματι είναι, και κάνουμε λόγο για αυτά στο Κεφάλαιο 2.

Δεύτερον, για να γενικεύσουμε την έννοια της επίλυσης, χρειαζόμαστε ένα πλαίσιο που θα καθορίζει τι εστί «καλή προσέγγιση», δηλαδή ποια αντικείμενα θα θεωρούνται «καλά»και πότε ένα αντικείμενο θα αποτελεί «προσέγγιση»κάποιου άλλου. Ο Quillen έδωσε αυτό το πλαίσιο εισάγοντας τις κατηγορίες μοντέλων [Qui67]. Με αυτές κατάφερε να ενοποιήσει κατασκευές που συναντά κανείς σε διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών (όπως η ομολογική άλγεβρα και η αλγεβρική τοπολογία), αλλά οι οποίες παρουσιάζουν ομοιότητες. Για τις κατηγορίες μοντέλων μιλάμε στο Κεφάλαιο 3.

1.2 Παραγωγίσεις και διαφορικά Kähler

Η ενότητα αυτή βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο [Iye07].

Έστω $\phi : R \to S$ ομομορφισμός μεταθετικών δακτυλίων (ή ισοδύναμα έστω S μία R-άλγεβρα και ϕ ο μοναδικός ομομορφισμός R-αλγεβρών $R \to S$, δηλαδή η απεικόνιση $(r \mapsto r \cdot 1_S)$), και έστω M, M' δύο S-πρότυπα.

Παρατήρηση 1.2 (Restriction of scalars). Μπορούμε να εφοδιάσουμε το M με δομή R-προτύπου ορίζοντας $rm := \phi(r)m$ για κάθε $r \in R,\ m \in M$.

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιούμε σιωπηρά την παραπάνω παρατήρηση, χωρίς ιδιαίτερη επισήμανση.

Ορισμός 1.3. Μία R-**γραμμική παραγώγιση** (R-linear derivation) του S με συντελεστές στο M είναι ένας ομομορφισμός R-προτύπων $d : S \to M$ που ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz:

$$d(ss') = d(s)s' + sd(s') \text{ για κάθε } s, s' \in S. \tag{1.1}$$

Παρατήρηση 1.4. Ισοδύναμα, μία R-γραμμική παραγώγιση του S με συντελεστές στο M είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $d : S \to M$ που ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz (σχέση (1.1)) και $d \circ \phi = 0$.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{Der}_R(S; M)$ το σύνολο όλων των R-γραμμικών παραγωγίσεων του S με συντελεστές στο M, δηλαδή

$$\mathrm{Der}_R(S; M) := \{d \in \mathbf{Mod}_R(S, M) \mid \text{η } d \text{ ικανοποιεί τη σχέση (1.1)}\}.$$

Πρόταση 1.5. *Το $\mathrm{Der}_R(S; M)$ είναι S-υποπρότυπο του $\mathbf{Mod}_R(S, M)$.*

Απόδειξη. Έστω $d, d' \in \mathrm{Der}_R(S; M)$, $\lambda \in S$. Τότε για κάθε $s, s' \in S$ ισχύει

$$\begin{aligned}(d + d')(ss') &= d(ss') + d'(ss')\\ &= d(s)s' + sd(s') + d'(s)s' + sd'(s')\\ &= (d + d')(s) + s(d + d')(s')\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}&(\lambda d)(ss')\\ &\quad = \lambda \cdot d(ss')\\ &\quad = \lambda \cdot (d(s)s' + sd(s'))\\ &\quad = \lambda d(s)s' + \lambda sd(s')\\ &\quad = (\lambda d)(s) \cdot s' + s \cdot (\lambda d)(s')\end{aligned}$$

οπότε $d + d', \lambda d \in \mathrm{Der}_R(S; M)$. □

Πρόταση 1.6. *Αν $d \in \mathrm{Der}_R(S; M)$ τότε η απεικόνιση*

$$\begin{array}{rccc} - \circ d : & \mathbf{Mod}_S(M, M') & \to & \mathrm{Der}_R(S; M') \\ & f & \mapsto & f \circ d \end{array}$$

είναι ομομορφισμός S-προτύπων.

Απόδειξη. Έστω $f : M \to M'$ ένας ομομορφισμός S-προτύπων. Η $f \circ d$ είναι ομομορφισμός R-προτύπων ως σύνθεση ομομορφισμών R-προτύπων. Επιπλέον, για κάθε $s, s' \in S$ ισχύει

$$\begin{aligned}(f \circ d)(ss') &= f(d(s)s' + sd(s'))\\ &= s'f(d(s)) + sf(d(s'))\\ &= s' \cdot (f \circ d)(s) + s \cdot (f \circ d)(s').\end{aligned}$$

Άρα $f \circ d \in \mathrm{Der}_R(S;M')$, οπότε η απεικόνιση $- \circ d : \mathbf{Mod}_S(M,M') \to \mathrm{Der}_R(S;M')$ είναι καλά ορισμένη. Το ότι είναι ομομορφισμός S-προτύπων επαληθεύεται εύκολα. Πράγματι, αν $f, f' \in \mathbf{Mod}_S(M,M')$ και $\lambda \in S$ τότε για κάθε $s \in S$ ισχύει

$$\begin{aligned}(f+f')\circ d(s) &= (f+f')(d(s)) = f(d(s)) + f'(d(s))\\ &= f\circ d(s) + f'\circ d(s) = (f\circ d + f'\circ d)(s)\end{aligned}$$

και

$$(\lambda f)\circ d(s) = (\lambda f)(d(s)) = \lambda\cdot f(d(s)) = \lambda\cdot(f\circ d(s)) = (\lambda(f\circ d))(s). \qquad \square$$

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να δούμε τις παραγωγίσεις ως έναν συναρτητή.

Πόρισμα 1.7. *Οι παραγωγίσεις ορίζουν έναν προσθετικό συναρτητή*

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{Der}_R(S;-): & \mathbf{Mod}_S & \to & \mathbf{Mod}_S\\ & M & \mapsto & \mathrm{Der}_R(S;M)\\ & M \xrightarrow{f} M' & \mapsto & \mathrm{Der}_R(S;M) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Der}_R(S;M')\end{array}.$$

Απόδειξη. Έστω $f : M \to M'$ ένας ομομορφισμός S-προτύπων. Από την Πρόταση 1.6 ξέρουμε ότι $f \circ d \in \mathrm{Der}_R(S;M')$, άρα η απεικόνιση

$$f\circ - : \mathrm{Der}_R(S;M) \to \mathrm{Der}_R(S;M')$$

είναι καλώς ορισμένη. Το ότι είναι ομομορφισμός S-προτύπων, επαληθεύεται εύκολα.

Επιπλέον, για κάθε $d \in \mathrm{Der}_R(S;M)$ και $g \in \mathbf{Mod}_S(M', M»)$ ισχύει

$$\mathrm{Id}_M \circ d = d$$

και

$$(g\circ f)\circ d = g\circ(f\circ d) = (g\circ -)\circ(f\circ d)$$

άρα ο $\mathrm{Der}_R(S;-)$ είναι συναρτητής. Μένει να δούμε ότι είναι προσθετικός, δηλαδή ότι αν $f, f' \in \mathbf{Mod}_S(M,M')$ τότε

$$(f+f')\circ - = (f\circ -) + (f'\circ -)$$

το οποίο είναι επίσης γνωστό από την Πρόταση 1.6. $\square$

Θα δούμε τώρα (Πρόταση 1.11) ότι ο συναρτητής των R-γραμμικών παραγωγίσεων του S είναι αναπαραστάσιμος. Δηλαδή υπάρχει η έννοια της «πιο γενικής»R-γραμμικής παραγώγισης του S. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα S-πρότυπο $\Omega_{S|R}$ και μία R-γραμμική παραγώγιση $\delta : S \to \Omega_{S|R}$ που ικανοποιούν την ακόλουθη καθολική ιδιότητα: Κάθε R-γραμμική παραγώγιση $d : S \to M$ παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω της δ

$$\begin{tikzcd} & \Omega_{S|R} \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ S \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "d"'] & M \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

όπου το διακεκομμένο βέλος είναι ομομορφισμός S-προτύπων.

Πριν δείξουμε την ύπαρξη τέτοιου ζεύγους $(\Omega_{S|R}, \delta)$ να σημειώσουμε ότι, με ένα κλασικό επιχείρημα για αντικείμενα που ικανοποιούν κάποια καθολική ιδιότητα, προκύπτει ότι το ζεύγος αυτό θα είναι μοναδικό μέχρι μοναδικού ισομορφισμού (για μία κατάλληλη έννοια ισομορφισμού) όπως περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.8. *Έστω $(\Omega_{S|R}, \delta), (\Omega'_{S|R}, \delta')$ δύο ζεύγη που ικανοποιούν την καθολική ιδιότητα που περιγράφει το διάγραμμα (1.2). Τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός S-προτύπων $f : \Omega_{S|R} \to \Omega'_{S|R}$ τέτοιος ώστε $f \circ \delta = \delta'$.*

Απόδειξη. Αφού το δ' είναι R-γραμμική παραγώγιση του S, από την καθολική ιδιότητα του $(\Omega_{S|R}, \delta)$ έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $f \in \mathbf{Mod}_S(\Omega_{S|R}, \Omega'_{S|R})$ ώστε $f \circ \delta = \delta'$. Όμοια, από την καθολική ιδιότητα του $(\Omega'_{S|R}, \delta')$ υπάρχει μοναδικό $f' \in \mathbf{Mod}_S(\Omega'_{S|R}, \Omega_{S|R})$ ώστε $f' \circ \delta' = \delta$. Δηλαδή έχουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \Omega_{S|R} \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\delta'"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Omega'_{S|R} \arrow[d, "f'"] \\ & \Omega_{S|R} \end{tikzcd} .$$

Παρατηρούμε ότι το εξωτερικό τρίγωνο μετατίθεται. Όμως, από την καθολική ιδιότητα του ζεύγους $(\Omega_{S|R}, \delta)$ εφαρμοσμένη στην ίδια την δ, ξέρουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\Omega_{S|R} \to \Omega_{S|R}$ που κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \Omega_{S|R} \arrow[dd, dashed] \\ S \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\ & \Omega_{S|R} \end{tikzcd} .$$

Και, ένας τέτοιος είναι σίγουρα ο ταυτοτικός. Άρα $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\Omega_{S|R}}$. Όμοια δείχνουμε ότι $f \circ f' = \mathrm{Id}_{\Omega'_{S|R}}$. Άρα οι f, f' είναι ισομορφισμοί S-προτύπων. $\square$

Δίνουμε τώρα μία κατασκευή ενός τέτοιου ζεύγους.

Ορισμός 1.9. Το **πρότυπο των διαφορικών Kähler** του S ορίζεται ως το S-πρότυπο $\Omega_{S|R} := I/I^2$, όπου I ο πυρήνας του πολλαπλασιασμού

$$\begin{array}{rccc} m: & S \otimes_R S & \to & S \\ & \sum_i s_i \otimes s'_i & \mapsto & \sum_i s_i s'_i \end{array}.$$

Η δομή S-προτύπου στο $\Omega_{S|R}$ δίνεται μέσω της m, δηλαδή για $s \in S, \omega \in \Omega_{S|R}$ ορίζουμε

$$s \cdot \omega := a_s \omega \text{ για κάποιο } a_s \in m^{-1}(s).$$

Η απεικόνιση

$$\begin{array}{rccc} \delta: & S & \to & \Omega_{S|R} \\ & s & \mapsto & 1 \otimes s - s \otimes 1 \end{array}$$

ονομάζεται **καθολική R-γραμμική παραγώγιση** του S. Όταν υπάρχει ανάγκη για διάκριση θα συμβολίζεται με δ_ϕ αντί για δ (όπου $\phi : R \to S$ ο μοναδικός ομομορφισμός R-αλγεβρών).

Ελέγχουμε ότι η δομή S-προτύπου στο $\Omega_{S|R}$ είναι καλώς ορισμένη. Πράγματι αν $i \in I$, $s \in S$ και $a_s, a'_s \in m^{-1}(s)$ τότε

$$a_s i + I^2 = a'_s i + I^2 \Leftrightarrow (a_s - a'_s) i \in I^2$$

που ισχύει αφού $m(a_s - a'_s) = m(a_s) - m(a'_s) = s - s = 0$ και άρα $a_s - a'_s \in I$.

Δύο προφανείς επιλογές για το a_s είναι οι $1 \otimes s$ και $s \otimes 1$.

Πρόταση 1.10. *Η δ είναι πράγματι R-γραμμική παραγώγιση του S, δηλαδή*

$$\delta \in \mathrm{Der}_R(S; \Omega_{S|R}).$$

Απόδειξη. Εύκολα επαληθεύεται ότι η δ είναι ομομορφισμός R-προτύπων. Δείχνουμε ότι η δ ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz. Πράγματι για $s, s' \in S$ ισχύει

$$\begin{aligned} \delta(s)s' + s\delta(s') &= (1 \otimes s - s \otimes 1)s' + s(1 \otimes s' - s' \otimes 1) \\ &= 1 \otimes ss' - s \otimes s' + s \otimes s' - ss' \otimes 1 \\ &= 1 \otimes ss' - ss' \otimes 1 \\ &= \delta(ss'). \end{aligned}$$

$\square$

Πρόταση 1.11. *Οι απεικονίσεις $- \circ \delta : \mathbf{Mod}_S(\Omega_{S|R}, M) \to \mathrm{Der}_R(S; M)$ για $M \in \mathbf{Mod}_S$ επάγουν φυσικό ισομορφισμό $\mathbf{Mod}_S(\Omega_{S|R}, -) \cong \mathrm{Der}_R(S; -)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $M \in \mathbf{Mod}_S$ η απεικόνιση

$$\begin{array}{rccc} -\circ\delta: & \mathbf{Mod}_S(\Omega_{S|R}, M) & \to & \mathrm{Der}_R(S;M) \\ & f & \mapsto & f\circ\delta \end{array} \tag{1.3}$$

είναι ισομορφισμός S-προτύπων, αφού η φυσικότητα έπεται άμεσα από την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης συναρτήσεων, δηλαδή από το ότι το ακόλουθο τετράγωνο είναι μεταθετικό για κάθε $g \in \mathbf{Mod}_S(M, M')$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}_S(\Omega_{S|R}, M) \arrow[r, "g\circ-"] \arrow[d, "-\circ\delta"'] & \mathbf{Mod}_S(\Omega_{S|R}, M') \arrow[d, "-\circ\delta"] \\ \mathrm{Der}_R(S;M) \arrow[r, "g\circ-"'] & \mathrm{Der}_R(S;M') \end{tikzcd} .$$

Από τις Προτάσεις 1.6 και 1.10 ξέρουμε ήδη ότι η απεικόνιση (1.3) είναι ομομορφισμός S-προτύπων. Θα δείξουμε ότι είναι 1-1 και επί κατασκευάζοντας αμφίπλευρο αντίστροφο.

Έστω $d \in \mathrm{Der}_R(S;M)$. Εφοδιάζουμε το $S \otimes_R S$ με δομή S-προτύπου με πολλαπλασιασμό

$$s \cdot (s_1 \otimes s_2) := ss_1 \otimes s_2$$

και θεωρούμε τον ομομορφισμό S-προτύπων

$$\begin{array}{rccc} d': & S\otimes_R S & \to & M \\ & s\otimes t & \mapsto & sd(t) \end{array}$$

καθώς και τον περιορισμό του στο I τον οποίον συμβολίζουμε πάλι με d'. Θα δείξουμε ότι $d'(I^2) = 0$, οπότε ο d' επάγει ομομορφισμό S-προτύπων $\widetilde{d} : \Omega_{S|R} \to M$. Πράγματι, έστω $\sum_i s_i \otimes t_i, \sum_j s'_j \otimes t'_j$ δύο στοιχεία του I. Τότε

$$\begin{aligned} & d'\Big(\Big(\sum_i s_i\otimes t_i\Big)\Big(\sum_j s'_j\otimes t'_j\Big)\Big) \\ &= d'\Big(\sum_{i,j} s_i s'_j \otimes t_i t'_j\Big) \\ &= \sum_{i,j} s_i s'_j d(t_i t'_j) \\ &= \sum_{i,j} s_i s'_j \Big(t_i d(t'_j) + t'_j d(t_i)\Big) \\ &= \sum_j \Big(s'_j d(t'_j)\sum_i s_i t_i\Big) + \sum_i \Big(s_i d(t_i)\sum_j s'_j t'_j\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

αφού $\sum_i s_i t_i = \sum_j s'_j t'_j = 0$.

Δείχνουμε τέλος ότι η απεικόνιση

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_R(S;M) & \to & \mathbf{Mod}_S(\Omega_{S|R}, M) \\ d & \mapsto & \widetilde{d} \end{array}$$

είναι αντίστροφη της $- \circ \delta$. Πράγματι, αν $d \in \mathrm{Der}_R(S;M)$ τότε για κάθε $s \in S$ ισχύει

$$\widetilde{d} \circ \delta(s) = \widetilde{d}(1 \otimes s - s \otimes 1) = 1 \cdot d(s) - s \cdot d(1) = d(s)$$

αφού $d(1) = 0$ (βλ. Παρατήρηση 1.4). Άρα

$$\widetilde{d} \circ \delta = d.$$

Αντίστροφα, έστω $f \in \mathbf{Mod}_S(\Omega_{S|R}, M)$. Τότε για κάθε $\sum_i s_i \otimes t_i \in \Omega_{S|R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \widetilde{f \circ \delta}\Big(\sum_i s_i \otimes t_i\Big) &= \sum_i s_i f(\delta(t_i)) \\ &= \sum_i s_i f(1 \otimes t_i - t_i \otimes 1) \\ &= f\Big(\sum_i s_i (1 \otimes t_i - t_i \otimes 1)\Big) \\ &= f\Big(\sum_i (s_i \otimes t_i - s_i t_i \otimes 1)\Big) \\ &= f\Big(\sum_i s_i \otimes t_i - \sum_i (s_i t_i \otimes 1)\Big) \\ &= f\bigg(\sum_i s_i \otimes t_i - \Big(\sum_i s_i t_i\Big) \otimes 1\bigg) \\ &= f\Big(\sum_i s_i \otimes t_i\Big) \end{aligned}$$

αφού $\sum_i s_i t_i = 0$. Άρα

$$\widetilde{f \circ \delta} = f. \qquad \square$$

Δίνουμε και μία άλλη κατασκευή ενός ζεύγους που ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα (1.2).

Ορισμός 1.12. Ορίζουμε το $\Omega'_{S|R}$ ως το πρότυπο με σύνολο γεννητόρων $\{\alpha(s) \mid s \in S\}$ και σχέσεις

$$\begin{aligned} \alpha(ss') &= s\alpha(s') + s'\alpha(s) \\ \alpha(rs + r's') &= r\alpha(s) + r'\alpha(s') \end{aligned}$$

για κάθε $r, r' \in R$ και $s, s' \in S$. Ορίζουμε επίσης την απεικόνιση

$$\begin{array}{cccc} \delta': & S & \to & \Omega'_{S|R} \\ & s & \mapsto & \alpha(s) \end{array}.$$

Από τον ορισμό του $\Omega'_{S|R}$ είναι άμεσο ότι η δ' είναι R-γραμμική παραγώγιση καθώς και ότι ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα (1.2). Άρα, από την Πρόταση 1.8, βλέπουμε ότι τα ζεύγη $(\Omega_{S|R}, \delta), (\Omega'_{S|R}, \delta')$ συνδέονται με μοναδικό ισομορφισμό. Στο εξής θα τα ταυτίζουμε μέσω αυτού, και αναφερόμαστε και στα δύο ως $(\Omega_{S|R}, \delta)$ και ως διαφορικά Kähler και καθολική παραγώγιση αντίστοιχα.

Πρόταση 1.13. *Έστω ομομορφισμοί δακτυλίων $R \xrightarrow{\phi} S \xrightarrow{\psi} Q$ (ή, ισοδύναμα, έστω μορφισμός R-αλγεβρών $S \xrightarrow{\psi} Q$). Τότε επάγεται μία ακριβής ακολουθία Q-προτύπων*

$$\Omega_{S|R} \otimes_S Q \to \Omega_{Q|R} \to \Omega_{Q|S} \to 0$$

η οποία καλείται ακολουθία Jacobi-Zariski.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον Ορισμό 1.12 για τα Kähler διαφορικά. Η δεξιά επαγόμενη απεικόνιση είναι η

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{Q|R} & \to & \Omega_{Q|S} \\ \alpha(q) & \mapsto & \alpha(q) \end{array},$$

η οποία είναι καλώς ορισμένη και επί αφού τα Q-πρότυπα $\Omega_{Q|R}, \Omega_{Q|S}$ έχουν το ίδιο σύνολο γεννητόρων $\{\alpha(q) \mid q \in Q\}$, αλλά το $\Omega_{Q|S}$ έχει περισσότερες σχέσεις. Οι επιπλέον αυτές σχέσεις είναι της μορφής $\alpha(\psi(s)) = 0$ για $s \in S$. Ορίζοντας την αριστερή επαγόμενη απεικόνιση ως

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S|R} \otimes_S Q & \to & \Omega_{Q|R} \\ \alpha(s) \otimes q & \mapsto & q \cdot \alpha(\psi(s)) \end{array},$$

τα στοιχεία $\alpha(\psi(s)) \in \Omega_{Q|R}$ προκύπτουν ως εικόνες των $\alpha(s) \otimes 1 \in \Omega_{S|R} \otimes_S Q$. Άρα η ακολουθία που ορίζεται από τις δύο παραπάνω απεικονίσεις είναι ακριβής. $\square$

Για περισσότερα σχετικά με τα διαφορικά καθώς και συνδέσεις τους με την (αλγεβρική) γεωμετρία, βλ. [Eis95, Κεφ. 16].

Ερχόμαστε τώρα σε ένα ερώτημα στο οποίο δίνει απάντηση η ομολογία André-Quillen:

Μπορούμε να επεκτείνουμε την ακολουθία Jacobi-Zariski προς τα αριστερά σε μία μακρά ακριβή ακολουθία;

Στην προηγούμενη ενότητα δώσαμε μία εικόνα για το πώς θα απαντούσαμε σε κάποιο αντίστοιχο ερώτημα αν τεθόταν σε αβελιανές κατηγορίες. Η κατηγορία όμως των μεταθετικών R-αλγεβρών (όπως και των μεταθετικών δακτυλίων) δεν είναι αβελιανή, οπότε για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα χρειαστεί μία κατάλληλη γενίκευση των εννοιών της προηγούμενης ενότητας.

Κεφάλαιο 2

Simplicial Αντικείμενα

2.1 Γενικά

Ορισμός 2.1 (simplex category). Συμβολίζουμε με Δ την κατηγορία των πεπερασμένων, μη κενών, ολικά διατεταγμένων συνόλων. Ένας μορφισμός μεταξύ δύο ολικά διατεταγμένων συνόλων είναι μία απεικόνιση f που σέβεται τη διάταξη, δηλαδή $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ για κάθε a, b στο πεδίο ορισμού της f.

Για $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ γράφουμε

$$[n] := \{0 < 1 < \cdots < n\} \in \Delta.$$

Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \neq m$, τότε τα αντικείμενα $[n], [m]$ της Δ είναι μη ισομορφικά. Επιπλέον, κάθε αντικείμενο της Δ είναι ισομορφικό με κάποιο από τα παραπάνω και μάλιστα υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός μεταξύ τους. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να ταυτίσουμε[1] την Δ με την υποκατηγορία της που περιέχει τα αντικείμενα $[n]$, $n \in \mathbb{N}$ και όλους τους μορφισμούς μεταξύ τους. Στο εξής κάνουμε αυτήν την ταύτιση.

Για $n \geq 1$ και $i \in [n]$ συμβολίζουμε με $\delta_i^n : [n-1] \hookrightarrow [n]$ τον μοναδικό μορφισμό στη Δ ο οποίος είναι 1-1 απεικόνιση με εικόνα που δεν περιέχει το $i \in [n]$. Δηλαδή

$$\delta_i^n(k) := \begin{cases} k, & \text{αν } 0 \leq k < i \\ k+1, & \text{αν } i \leq k \leq n-1 \end{cases}.$$

Για $n \in \mathbb{N}$ και $i \in [n]$ συμβολίζουμε με $\sigma_i^n : [n+1] \twoheadrightarrow [n]$ τον μοναδικό μορφισμό στη Δ ο οποίος είναι απεικόνιση επί με και «παίρνει»δύο φορές την τιμή i. Δηλαδή

$$\sigma_i^n(k) = \begin{cases} k, & \text{αν } 0 \leq k \leq i \\ k-1, & \text{αν } i < k \leq n+1 \end{cases}.$$

[1]Αυτό δεν θα ήταν συνετό αν δεν ήταν εξασφαλισμένη η μοναδικότητα των ισομορφισμών.

Τα δ_i^n, σ_i^n καλούνται απεικονίσεις όψης (face maps) και απεικονίσεις εκφυλισμού (degeneracy maps) αντίστοιχα. Γράφουμε επίσης δ_i και σ_i όταν μιλάμε για οποιοδήποτε n ή όταν το n είναι σαφές από τα συμφραζόμενα. Για $k, m \in \mathbb{N}$, κάθε μορφισμός $[k] \to [m]$ στη Δ μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση απεικονίσεων όψης και εκφυλισμού. Επιπλέον, οι απεικονίσεις όψης και εκφυλισμού ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις οι οποίες επαληθεύονται εύκολα και παράγουν όλες τις υπόλοιπες σχέσεις μεταξύ τους [Wei94, σ. 255–256]:

$$\delta_j^{n+1}\delta_i^n = \delta_i^{n+1}\delta_{j-1}^n, \qquad \text{αν } 0 \leq i < j \leq n+1 \tag{2.1}$$

$$\sigma_j^n\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n\sigma_{j+1}^{n+1}, \qquad \text{αν } 0 \leq i \leq j \leq n \tag{2.2}$$

$$\sigma_j^n\delta_i^{n+1} = \delta_i^n\sigma_{j-1}^{n-1}, \qquad \text{αν } 0 \leq i < j \leq n \tag{2.3}$$

$$\sigma_j^n\delta_i^{n+1} = \mathrm{Id}_n, \qquad \text{αν } 0 \leq j \leq n \text{ και } j \leq i \leq j+1 \tag{2.4}$$

$$\sigma_j^n\delta_i^{n+1} = \delta_{i-1}^n\sigma_j^{n-1}, \qquad \text{αν } 0 \leq j \text{ και } j+1 < i \leq n+1 \tag{2.5}$$

Ορισμός 2.2. Έστω κατηγορία $\mathcal{C}$. Η κατηγορία $\mathbf{s}\mathcal{C}$ των **simplicial αντικειμένων** της $\mathcal{C}$ έχει ως αντικείμενα τους ανταλλοίωτους συναρτητές $\Delta \to \mathcal{C}$, και ως μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ τους.

Θα αναφερόμαστε σε ένα simplicial αντικείμενο της κατηγορίας των συνόλων ως simplicial σύνολο. Το αντίστοιχο θα κάνουμε και για κάθε άλλη κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα έχουν ιδιαίτερο όνομα (ομάδες, R-πρότυπα κλπ.).

Ας ξετυλίξουμε τον παραπάνω ορισμό. Για να περιγράψουμε ένα simplicial αντικείμενο $X \in \mathbf{s}\mathcal{C}$ πρέπει, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αντιστοιχίσουμε το $[n] \in \Delta$ σε κάποιο αντικείμενο $X_n \in \mathcal{C}$. Επιπλέον, κάθε μορφισμός $\phi : [k] \to [m]$ στη Δ πρέπει να αντιστοιχιστεί σε μορφισμό $X_m \to X_k$ στη $\mathcal{C}$. Για τον σκοπό αυτό, αφού ο ϕ γράφεται ως σύνθεση των απεικονίσεων όψης και εκφυλισμού, αρκεί να αντιστοιχίσουμε κάθε δ_i^n σε κάποιο $d_i^n : X_n \to X_{n-1}$ και κάθε σ_i^n σε κάποιο $s_i^n : X_n \to X_{n+1}$. Τα d_i^n, s_i^n καλούνται και αυτά απεικονίσεις όψης και εκφυλισμού αντίστοιχα και πρέπει και αρκεί να ικανοποιούν τις δυικές σχέσεις των (2.1)–(2.5), δηλαδή:

$$d_i^n d_j^{n+1} = d_{j-1}^n d_i^{n+1}, \qquad \text{αν } 0 \leq i < j \leq n+1 \tag{2.6}$$

$$s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n, \qquad \text{αν } 0 \leq i \leq j \leq n \tag{2.7}$$

$$d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n, \qquad \text{αν } 0 \leq i < j \leq n \tag{2.8}$$

$$d_i^{n+1} s_j^n = \mathrm{Id}_n, \qquad \text{αν } 0 \leq j \leq n \text{ και } j \leq i \leq j+1 \tag{2.9}$$

$$d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n, \qquad \text{αν } 0 \leq j \text{ και } j+1 < i \leq n+1 \tag{2.10}$$

Μπορούμε λοιπόν να δούμε ένα simplicial αντικείμενο της $\mathcal{C}$ ως μία συλλογή αντικειμένων $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\mathcal{C}$ μαζί με μορφισμούς

$$\begin{aligned} d_i^n :&X_n \to X_{n-1}, n \geq 1, 0 \leq i \leq n \text{ και} \\ s_i^n :&X_n \to X_{n+1}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

μεταξύ τους που ικανοποιούν τις σχέσεις (2.6)–(2.10).

Ένας μορφισμός $(X_n)_n \to (Y_n)_n$ μεταξύ δύο simplicial αντικειμένων της $\mathcal{C}$ είναι μία συλλογή μορφισμών $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\mathcal{C}$ με $f_n : X_n \to Y_n$, οι οποίοι κάνουν μεταθετικά τα τετράγωνα

(2.11)
$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "d_i^n"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ Y_n \arrow[r, "d_i^n"'] & Y_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "s_i^n"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ Y_n \arrow[r, "s_i^n"'] & Y_{n+1} \end{tikzcd}$$

για κάθε n και i που αυτά ορίζονται.

Παρατήρηση 2.3. Μπορούμε να ταυτίσουμε κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ με το **σταθερό simplicial αντικείμενο** $\mathsf{s}(X) \in \mathsf{s}\mathcal{C}$ το οποίο ορίζεται από τις σχέσεις $\mathsf{s}(X)_n = X$, $d_i^n = \mathrm{Id}_X$ και $s_i^n = \mathrm{Id}_X$ για κάθε n και i που αυτά ορίζονται. Πράγματι, ένας μορφισμός $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μεταξύ δύο σταθερών simplicial αντικειμένων αντιστοιχεί σε έναν μόνο μορφισμό της $\mathcal{C}$ αφού από το δεξί μεταθετικό τετράγωνο της (2.11) και τη σχέση $s_i^n = \mathrm{Id}$ παίρνουμε ότι $f_n = f_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αντίστροφα, κάθε μορφισμός $X \xrightarrow{f} Y$ στην $\mathcal{C}$ αντιστοιχεί στον μορφισμό $(f_n)_n : \mathsf{s}(X) \to \mathsf{s}(Y)$, όπου $f_n = f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή η $\mathcal{C}$ είναι ισόμορφη με την υποκατηγορία της $\mathsf{s}\mathcal{C}$ που περιέχει όλα τα σταθερά simplicial αντικείμενα και όλους τους μορφισμούς μεταξύ τους.

Παρατήρηση 2.4. Κάθε συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ επάγει έναν συναρτητή

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{s}\mathcal{F}: & \mathsf{s}\mathcal{C} & \to & \mathsf{s}\mathcal{D} \\ & (X_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (\mathcal{F}(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ & (f_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (\mathcal{F}(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

με τις απεικονίσεις όψης και εκφυλισμού του $\mathsf{s}\mathcal{F}(X)$ να ορίζονται ως οι εικόνες των απεικονίσεων όψης και εκφυλισμού του $X \in \mathsf{s}\mathcal{C}$ μέσω του $\mathcal{F}$. Το ότι ο $\mathsf{s}\mathcal{F}$ είναι καλώς ορισμένος καθώς και το ότι αποτελεί πράγματι συναρτητή επαληθεύεται άμεσα αφού ο $\mathcal{F}$ διατηρεί τη σύνθεση μορφισμών.

2.2 Simplicial σύνολα

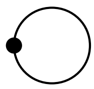
Μία από τις πρώτες κατηγορίες simplicial αντικειμένων που μελετήθηκαν είναι η **sSet**. Ένα simplicial σύνολο γενικεύει την έννοια του αφηρημένου simplicial συμπλέγματος (abstract simplicial complex) που ξέρουμε από την αλγεβρική τοπολογία. Για μία αναλυτική εισαγωγική παρουσίαση του θέματος βλ. [Fri12].

Μπορούμε να σκεφτούμε τα στοιχεία του X_n σαν n-simplices. Αν $f_i : X_n \to X_0$, $i \in [n]$, είναι η απεικόνιση που αντιστοιχεί στον μορφισμό

$$\begin{array}{ccc} [0] & \to & [n] \\ 0 & \mapsto & i \end{array}$$

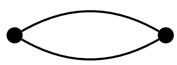
της Δ, τότε μπορούμε να σκεφτούμε τα $f_i(x) \in X_0$ ως «κορυφές»του n-simplex $x \in X_n$.

Όμως ενδέχεται κάποιες από τις κορυφές ενός n-simplex σε ένα simplicial σύνολο X να ταυτίζονται. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Πρώτον μπορεί να έχουν «συγκολληθεί». Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ένα simplicial σύνολο που γεωμετρικά αντιστοιχεί σε μία ακμή με κολλημένα τα άκρα της



κάτι που δεν είναι simplicial σύμπλεγμα. Δεύτερον, μπορεί κάποιες κορυφές ενός simplex πραγματικά να ταυτίζονται, στην οποία περίπτωση το simplex αυτό αντιστοιχεί γεωμετρικά σε simplex μικρότερης διάστασης και ονομάζεται εκφυλισμένο (αυτό συμβαίνει όταν το simplex αυτό ανήκει στην εικόνα κάποιας απεικόνισης εκφυλισμού). Ως αναλογία μπορούμε να φανταστούμε ότι ορίζαμε ένα τρίγωνο ως την κυρτή θήκη τριών σημείων σε έναν Ευκλείδειο χώρο. Τότε θα υπήρχαν εκφυλισμένα τρίγωνα που θα αντιστοιχούσαν σε ευθύγραμμα τμήματα ή και σε σημεία. Κάτι αντίστοιχο είναι επιτρεπτό από τον ορισμό των simplicial συνόλων.

Επιπλέον, σε αντίθεση με το τι συμβαίνει σε ένα αφηρημένο simplicial σύμπλεγμα, ένα simplex σε ένα simplicial σύνολο δεν είναι προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις κορυφές του. Για παράδειγμα υπάρχει simplicial σύνολο που γεωμετρικά αντιστοιχεί στο



το οποίο δεν αντιστοιχεί σε simplicial σύμπλεγμα.

Δίνουμε τώρα ένα παράδειγμα από την αλγεβρική τοπολογία. Έστω **Top** η κατηγορία όλων των τοπολογικών χώρων και των συνεχών απεικονίσεων, έστω $\{e_i\}_{0\leq i\leq n}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{n+1}$ και έστω σ_n το σύνηθες τοπολογικό n-simplex

$$\sigma_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i e_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ και } t_i \geq 0 \text{ για κάθε } i \right\}.$$

Ένας μορφισμός $\phi : [n] \to [m]$ στην Δ ορίζει μία απεικόνιση μεταξύ των κανονικών βάσεων του $\mathbb{R}^{n+1}$ και του $\mathbb{R}^{m+1}$ η οποία επεκτείνεται γραμμικά στη συνεχή απεικόνιση

$$\begin{array}{cccc} \phi_* : & \sigma_n & \to & \sigma_m \\ & \sum_{i=0}^n t_i e_i & \mapsto & \sum_{i=0}^n t_i e_{\phi(i)} \end{array}.$$

Παράδειγμα 2.5. Υπάρχει συναρτητής Sing : **Top** $\to$ **sSet** ο οποίος απεικονίζει κάθε τοπολογικό χώρο Y στο simplicial σύνολο Sing(Y) με Sing$(Y)_n$ το σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων $\sigma_n \to Y$, δηλαδή

$$\mathrm{Sing}(Y)_n = \mathbf{Top}(\sigma_n, Y),$$

και με κάθε μορφισμό $\phi : [n] \to [m]$ της Δ να αντιστοιχεί στην απεικόνιση

$$\begin{array}{cccc} - \circ \phi_* : & \mathbf{Top}(\sigma_m, Y) & \to & \mathbf{Top}(\sigma_n, Y) \\ & f & \mapsto & f \circ \phi_* \end{array}.$$

Ο συναρτητής Sing απεικονίζει μία συνεχή απεικόνιση $Y \xrightarrow{g} Y'$ στον μορφισμό Sing$(Y) \to$ Sing(Y') της **sSet** που ορίζεται από τις συναρτήσεις

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top}(\sigma_n, Y) & \to & \mathbf{Top}(\sigma_n, Y') \\ f & \mapsto & g \circ f \end{array}.$$

Το ότι αυτός είναι πράγματι μορφισμός της **sSet**, δηλαδή ότι οι απεικονίσεις όψεις και εκφυλισμού μετατίθενται με τις παραπάνω συναρτήσεις, είναι άμεσο από την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Top}(\sigma_m, Y) \arrow[r, "-\circ\phi_*"] \arrow[d, "g\circ-"'] & \mathbf{Top}(\sigma_n, Y) \arrow[d, "g\circ-"'] \\ \mathbf{Top}(\sigma_m, Y') \arrow[r, "-\circ\phi_*"'] & \mathbf{Top}(\sigma_n, Y') \end{tikzcd}.$$

Έστω τώρα F : **Set** $\to$ **Ab** ο συναρτητής που στέλνει κάθε σύνολο S στην ελεύθερη αβελιανή ομάδα $F(S)$ η οποία έχει ως σύνολο ελεύθερο γεννητόρων το S. Το $\mathbf{s}F\big(\mathrm{Sing}(Y)\big)$ (βλ. Παρατήρηση 2.4) είναι μία simplicial αβελιανή ομάδα. Θεωρώντας το εναλλασσόμενο άθροισμα των απεικονίσεων όψης αυτής

$$\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n : F\big(\mathrm{Sing}(Y)_n\big) \to F\big(\mathrm{Sing}(Y)_{n-1}\big)$$

ανακτούμε το γνωστό από την αλγεβρική τοπολογία ιδιάζον αλυσιδωτό σύμπλεγμα (singular chain complex) του χώρου Y

$$\cdots \to F\big(\mathrm{Sing}(Y)_n\big) \xrightarrow{\partial_n} F\big(\mathrm{Sing}(Y)_{n-1}\big) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} F\big(\mathrm{Sing}(Y)_0\big).$$

Ο συναρτητής Sing του προηγούμενου παραδείγματος έχει αριστερό συζυγή [May67, Κεφ. III] ο οποίος ονομάζεται συναρτητής της **γεωμετρικής πραγμάτωσης** (geometric realization)

$$\begin{array}{rccc} |-|: & \mathbf{sSet} & \to & \mathbf{Top} \\ & X & \mapsto & |X| \end{array}.$$

2.3 Simplicial πρότυπα

Στην ενότητα αυτή θα μιλήσουμε για τη σχέση των simplicial προτύπων με την έννοια των αλυσιδωτών συμπλεγμάτων (chain complexes) προτύπων που συναντά κανείς στην ομολογική άλγεβρα.

Έστω R ένας δακτύλιος και $X \in \mathbf{sMod}_R$ ένα simplicial R-πρότυπο. Ένας πρώτος τρόπος να φτιάξουμε ένα αλυσιδωτό σύμπλεγμα R-προτύπων από το X είναι αυτός που συναντήσαμε στο Παράδειγμα 2.5. Δηλαδή, να χρησιμοποιήσουμε το X_n ως το R-πρότυπο στη θέση n του συμπλέγματος για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και να χρησιμοποιήσουμε το εναλλασσόμενο άθροισμα των απεικονίσεων όψης ως διαφορικό $\partial_n : X_n \to X_{n-1}$, δηλαδή

$$\partial_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n.$$

Στις αρνητικές θέσεις του συμπλέγματος τοποθετούμε το μηδενικό R-πρότυπο.

Το ότι το ∂ που ορίσαμε είναι όντως διαφορικό προκύπτει από την σχέση (2.6), με τον συνήθη υπολογισμό που κάνουμε και στην αντίστοιχη απόδειξη της αλγεβρικής τοπολογίας για το αλυσιδωτό σύμπλεγμα που χρησιμοποιούμε στον ορισμό της (simplicial ή singular) ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\partial_n \partial_{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n \right) \left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j d_j^{n+1} \right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} d_i^n d_j^{n+1} \\
&\overset{(2.6)}{=} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i+j} d_i^n d_j^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j} d_{j-1}^n d_i^{n+1} \\
&\overset{j-1\to k}{=} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i+j} d_i^n d_j^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{i+k-1} d_k^n d_i^{n+1} \\
&= \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^{i+j} d_i^n d_j^{n+1} + \sum_{0 \le i \le k \le n} (-1)^{i+k-1} d_k^n d_i^{n+1} \\
&\overset{i\to j, k\to i}{=} \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^{i+j} d_i^n d_j^{n+1} + \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^{j+i-1} d_i^n d_j^{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Ξεκινώντας πάλι από ένα simplicial R-πρότυπο X, θα φτιάξουμε τώρα ένα άλλο αλυσιδωτό σύμπλεγμα R-προτύπων.

Ορισμός 2.6. Ορίζουμε το **κανονικοποιημένο σύμπλεγμα** (normalized complex) NX του $X \in \mathbf{sMod}_R$ ως το αλυσιδωτό σύμπλεγμα

$$NX_n := \bigcap_{i=1}^{n} \ker d_i^n$$

με διαφορικό το

$$\begin{array}{rccc} \partial_n : & NX_n & \to & NX_{n-1} \\ & x & \mapsto & d_0^n(x) \end{array}.$$

Θυμίζουμε ότι το n-οστό πρότυπο ομολογίας του NX ορίζεται ως

$$H_n(NX) := \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

Οι Dold και Kan έδειξαν ανεξάρτητα [Dol58, Kan58] το ακόλουθο θεώρημα το οποίο γενικεύεται [DP61] και σε κάθε αβελιανή κατηγορία.

Θεώρημα 2.7 (Dold-Kan). *Ο συναρτητής*

$$\begin{array}{rccc} N\colon & \mathbf{sMod}_R & \to & \mathrm{Ch}_{\bullet \geq 0}(\mathbf{Mod}_R) \\ & X & \mapsto & NX \end{array}$$

είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Κεφάλαιο 3

Κατηγορίες Μοντέλων

3.1 Ορισμός κατηγορίας μοντέλων

Ορισμός 3.1. Ένας μορφισμός f σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται **συστολή** (retract) ενός μορφισμού g αν υπάρχει μεταθετικό διάγραμμα στη $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Id}_X"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_Y"'] & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Ορισμός 3.2. Μία **κατηγορία μοντέλων** (model category) είναι μία κατηγορία $\mathcal{C}$ μαζί με τρεις ιδιαίτερες κλάσεις μορφισμών, τις νηματοποιήσεις (fibrations), τις συννηματοποιήσεις (cofibrations) και τις ασθενείς ισοδυναμίες (weak equivalences) έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

(i) Η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένα όρια και συνόρια.

(ii) Οι τρεις ιδιαίτερες κλάσεις μορφισμών είναι κλειστές ως προς συστολές.

(iii) [2 από 3] Αν $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ και τουλάχιστον δύο εκ των μορφισμών f, g, gf είναι ασθενείς ισοδυναμίες, τότε είναι και ο τρίτος.

(iv) [Αξίωμα ανύψωσης] Για κάθε μεταθετικό τετράγωνο από συνεχή βέλη

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & X' \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y' \end{tikzcd}$$

όπου ο j είναι συννηματοποίηση, ο q είναι νηματοποίηση και ένας τουλάχιστον εκ των μορφισμών j, q είναι ασθενής ισοδυναμία, υπάρχει μορφισμός $Y \to X'$ που κάνει και τα δύο τρίγωνα μεταθετικά.

(v) [Αξίωμα παραγοντοποίησης] Κάθε μορφισμός $f : X \to Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί με τους δύο ακόλουθους τρόπους:

- ως $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y$ όπου ο j είναι συννηματοποίηση, ενώ ο q είναι νηματοποίηση και ασθενής ισοδυναμία.
- ως $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y$ όπου ο j είναι συννηματοποίηση και ασθενής ισοδυναμία, ενώ ο q είναι νηματοποίηση.

Ορισμός 3.3. Σε μία κατηγορία μοντέλων, οι νηματοποιήσεις που είναι ταυτόχρονα και ασθενείς ισοδυναμίες ονομάζονται **ακυκλικές** (acyclic) νηματοποιήσεις. Όμοια ορίζονται οι ακυκλικές συννηματοποιήσεις ως οι συννηματοποιήσεις που είναι και ασθενείς ισοδυναμίες.

Παρατήρηση 3.4. Κάθε κατηγορία μοντέλων έχει αρχικό αντικείμενο $\emptyset$ και τελικό αντικείμενο $*$ αφού αυτά αποτελούν το συνόριο και το όριο του κενού διαγράμματος αντίστοιχα.

Ορισμός 3.5. Ένα αντικείμενο X μιας κατηγορίας μοντέλων θα λέγεται **συννηματοποιητικό** (cofibrant) αν ο μοναδικός μορφισμός $\emptyset \to X$ είναι συννηματοποίηση.

Ορισμός 3.6. Μία **συννηματοποιητική προσέγγιση** (cofibrant approximation ή resolution ή replacement) ενός αντικειμένου X είναι μία ασθενής ισοδυναμία $X_c \to X$ όπου το X_c είναι ένα συννηματοποιητικό αντικείμενο. Για συντομία θα αναφερόμαστε και στο X_c ως συννηματοποιητική προσέγγιση του X.

Ορίζουμε και τις δυϊκές έννοιες των δύο παραπάνω ορισμών.

Ορισμός 3.7. Ένα αντικείμενο X μιας κατηγορίας μοντέλων θα λέγεται **νηματοποιητικό** (fibrant) αν ο μοναδικός μορφισμός $X \to *$ είναι νηματοποίηση.

Ορισμός 3.8. Μία **νηματοποιητική προσέγγιση** (fibrant approximation ή resolution ή replacement) ενός αντικειμένου X είναι μία ασθενής ισοδυναμία $X \to X_f$ όπου το X_f είναι ένα νηματοποιητικό αντικείμενο. Για συντομία θα αναφερόμαστε και στο X_f ως συννηματοποιητική προσέγγιση του X.

Παρατήρηση 3.9. Σε μία κατηγορία μοντέλων, κάθε αντικείμενο X έχει συννηματοποιητική καθώς και νηματοποιητική προσέγγιση. Αυτό έπεται από το πρώτο σκέλος του αξιώματος παραγοντοποίησης εφαρμοσμένο στον μορφισμό $\emptyset \to X$, και από το δεύτερο σκέλος του αξιώματος παραγοντοποίησης εφαρμοσμένο στον μορφισμό $X \to *$. Μάλιστα, το αξίωμα παραγοντοποίησης μας εγγυάται κάτι παραπάνω. Κάθε αντικείμενο X έχει συννηματοποιητική προσέγγιση $X_c \to X$ η οποία είναι ακυκλική νηματοποίηση, και, δυϊκά, έχει επίσης νηματοποιητική προσέγγιση $X \to X_f$ η οποία είναι ακυκλική συννηματοποίηση.

Παρατήρηση 3.10. Κάθε ταυτοτικός μορφισμός είναι ασθενής ισοδυναμία. Πράγματι, έστω αντικείμενο X. Από την προηγούμενη παρατήρηση το X έχει συννηματοποιητική προσέγγιση X_c και υπάρχει ασθενής ισοδυναμία $X_c \xrightarrow{q} X$. Τότε έχουμε $\mathrm{Id}_X \circ q = q$, οπότε από το αξίωμα «2 από 3»έπεται ότι ο μορφισμός Id_X είναι ασθενής ισοδυναμία.

Παρατήρηση 3.11. Το σύνολο των αξιωμάτων μιας κατηγορίας μοντέλων είναι συμμετρικό ως προς τις νηματοποιήσεις και τις συννηματοποιήσεις υπό την εξής έννοια. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλων, τότε μπορούμε να εφοδιάσουμε με δομή κατηγορίας την δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ορίζοντας ως νηματοποιήσεις τους μορφισμούς που αντιστοιχούν σε συννηματοποιήσεις της $\mathcal{C}$, ως συννηματοποιήσεις αυτούς που αντιστοιχούν σε νηματοποιήσεις της $\mathcal{C}$, και ως ασθενείς ισοδυναμίες αυτούς που αντιστοιχούν σε ασθενείς ισοδυναμίες της $\mathcal{C}$.

Ορισμός 3.12. Έστω $j : X \to Y$, $q : X' \to Y'$ δύο μορφισμοί σε μία οποιαδήποτε κατηγορία. Λέμε ότι ο μορφισμός j έχει την **ιδιότητα αριστερής ανύψωσης** (left lifting property ή LLP) ως προς τον q και ότι ο μορφισμός q έχει την **ιδιότητα δεξιάς ανύψωσης** (right lifting property ή RLP) ως προς τον j αν για κάθε μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & X' \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

υπάρχει μορφισμός $Y \to X'$ που κάνει και τα δύο τρίγωνα που προκύπτουν μεταθετικά.

Δηλαδή, το αξίωμα ανύψωσης μιας κατηγορίας μοντέλων μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: *Κάθε νηματοποίηση έχει την ιδιότητα δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική συννηματοποίηση, και κάθε συννηματοποίηση έχει την ιδιότητα αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική νηματοποίηση.*

Το σύνολο αξιωμάτων του Ορισμού 3.2 δεν είναι το μικρότερο δυνατό αφού ισχύει το ακόλουθο.

Πρόταση 3.13. *Έστω f ένας μορφισμός σε μία κατηγορία μοντέλων.*

(i) *Ο f είναι νηματοποίηση αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική συννηματοποίηση.*

(ii) *Ο f είναι συννηματοποίηση αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική νηματοποίηση.*

Απόδειξη. Τα (i), (ii) είναι δυϊκά, οπότε αρκεί να δείξουμε το (i). Η μία κατεύθυνση είναι άμεση αφού, από το αξίωμα ανύψωσης, κάθε νηματοποίηση έχει την ιδιότητα δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική συννηματοποίηση.

Έστω τώρα μορφισμός $f : X \to Y$ που έχει την ιδιότητα δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική συννηματοποίηση. Από το αξίωμα παραγοντοποίησης, ο f παραγοντοποιείται ως $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y$ όπου j κάποια ακυκλική συννηματοποίηση και q κάποια νηματοποίηση. Ο f έχει την ιδιότητα δεξιάς ανύψωσης ως προς τον j, άρα υπάρχει μορφισμός $g : Z \to X$ που κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, dashed, "g"] & Y \end{tikzcd} .$$

Όμως τότε, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{Id}_Y"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_Y"'] & Y \arrow[r, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, άρα ο f είναι συστολή του q. Από το δεύτερο αξίωμα της κατηγορίας μοντέλων έπεται ότι ο f είναι νηματοποίηση. □

Παρατήρηση 3.14. Για να προσδιορίσουμε λοιπόν μία δομή κατηγορίας μοντέλων σε μία κατηγορία αρκεί να προσδιορίσουμε τις ασθενείς ισοδυναμίες και είτε τις νηματοποιήσεις είτε τις συννηματοποιήσεις, αφού η τρίτη κλάση προσδιορίζεται αυτόματα μέσω της προηγούμενης πρότασης.

Παρατήρηση 3.15. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλων και S ένα αντικείμενό της τότε μπορούμε να ορίσουμε δομή κατηγορίας μοντέλων στην κατηγορία $\mathcal{C}/S$ των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ πάνω από το S. Τα αντικείμενα της $\mathcal{C}/S$ είναι μορφισμοί $\bullet \to S$ της $\mathcal{C}$, ενώ οι μορφισμοί της $\mathcal{C}/S$ είναι μεταθετικά τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

Ο παραπάνω μορφισμός της $\mathcal{C}/S$ θα λέγεται ασθενής ισοδυναμία (ή νηματοποίηση ή συννηματοποίηση) αν ο f είναι ασθενής ισοδυναμία (ή νηματοποίηση ή συννηματοποίηση αντίστοιχα) στη $\mathcal{C}$.

Περνώντας από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}/S$ παρατηρούμε ότι αλλάζουν τα νηματοποιητικά αντικείμενα αφού το τελικό αντικείμενο είναι τώρα το $S \xrightarrow{\mathrm{Id}} S$. Ένα αντικείμενο $(X \xrightarrow{g} S) \in \mathcal{C}/S$ είναι νηματοποιητικό αν και μόνο αν το g είναι νηματοποίηση στη $\mathcal{C}$, αφού ο μοναδικός μορφισμός προς το τελικό αντικείμενο είναι το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g"'] & & S \arrow[dl, "\mathrm{Id}"] \\ & S & \end{tikzcd}.$$

Αντίθετα, τα συννηματοποιητικά αντικείμενα παραμένουν τα ίδια με αυτά της $\mathcal{C}$, αφού αν $\emptyset$ είναι το αρχικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$ τότε το $\emptyset \to S$ είναι το αρχικό αντικείμενο της $\mathcal{C}/S$.

3.2 Ομοτοπία

Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία μοντέλων. Θέλουμε να φτιάξουμε μία κατηγορία που θα έχει τα ίδια αντικείμενα με την $\mathcal{C}$, αλλά στην οποία οι ασθενείς ισοδυναμίες της $\mathcal{C}$ θα είναι ισομορφισμοί.

Ορισμός 3.16. Η **κατηγορία ομοτοπίας** της $\mathcal{C}$ ορίζεται ως η τοπικοποίηση (βλ. Ενότητα A.5) της $\mathcal{C}$ στις ασθενείς ισοδυναμίες, δηλαδή

$$\mathcal{H}o(\mathcal{C}) := \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$$

όπου $\mathcal{W}$ η κλάση όλων των ασθενών ισοδυναμιών της $\mathcal{C}$.

Εκ προοιμίου δεν ξέρουμε ότι η τοπικοποίηση μιας τοπικά μικρής κατηγορίας είναι τοπικά μικρή. Δηλαδή, στην προκειμένη περίπτωση, δεν ξέρουμε αν για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$ το $\mathcal{H}o(\mathcal{C})(X, Y)$ θα αποτελεί σύνολο. Αποδεικνύεται όμως ότι η $\mathcal{H}o(\mathcal{C})$ είναι τοπικά μικρή για κάθε (τοπικά μικρή) κατηγορία μοντέλων $\mathcal{C}$.

Ένας τρόπος να το επιτύχουμε αυτό είναι να δώσουμε μία πιο συγκεκριμένη περιγραφή της $\mathcal{H}o(\mathcal{C})$. Αυτό θα μας δώσει και μία καλύτερη εποπτεία για τη φύση της $\mathcal{H}o(\mathcal{C})$.

Ξεκινάμε γενικεύοντας την έννοια της ομοτοπίας όπως την ξέρουμε για συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων.

Ορισμός 3.17. Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Ένα **κυλινδρικό αντικείμενο** (cylinder object) του X είναι αντικείμενο $C(X) \in \mathcal{C}$ μαζί με μορφισμούς

$$X \coprod X \xrightarrow{i} C(X) \xrightarrow{q} X$$

τέτοιους ώστε ο i να είναι συννηματοποίηση, ο q να είναι ασθενής ισοδυναμία και $qi = \mathrm{Id}_X \coprod \mathrm{Id}_X$.

Παρατήρηση 3.18. Εφαρμόζοντας το αξίωμα παραγοντοποίησης στον μορφισμό $\mathrm{Id}_X \coprod \mathrm{Id}_X : X \coprod X \to X$ βλέπουμε ότι σε μία κατηγορία μοντέλων κάθε αντικείμενο X έχει κυλινδρικό αντικείμενο $C(X)$, και μάλιστα τέτοιο ώστε ο μορφισμός q του παραπάνω ορισμού να είναι και νηματοποίηση.

Ορισμός 3.19. Έστω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f \coprod g"'] & C(X) \arrow[d, "H"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

όπου $X \coprod X \xrightarrow{i} C(X) \xrightarrow{q} X$ κάποιο κυλινδρικό αντικείμενο του X. Σε αυτήν την περίπτωση, ο μορφισμός H καλείται **αριστερή ομοτοπία** (left homotopy) μεταξύ των f, g. Αν υπάρχει τέτοιο διάγραμμα, οι f, g καλούνται **αριστερά ομοτοπικοί** (left homotopic) και γράφουμε $f \overset{l}{\sim} g$.

Παράδειγμα 3.20. Υπάρχει αριστερή ομοτοπία μεταξύ κάθε μορφισμού και του εαυτού του. Πράγματι, έστω $f : X \to Y$ ένας μορφισμός. Από προηγούμενη παρατήρηση ξέρουμε ότι το X έχει κυλινδρικό αντικείμενο $X \coprod X \xrightarrow{i} C(X) \xrightarrow{q} X$. Μία ομοτοπία λοιπόν μεταξύ του f και του εαυτού του είναι η λεγόμενη **σταθερή ομοτοπία** fq:

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "i"] \arrow[ddr, "f \coprod f"'] & C(X) \arrow[d, "q"] \\ & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα είναι μεταθετικό αφού $f \circ (qi) = f \circ (\mathrm{Id}_X \coprod \mathrm{Id}_X) = f \coprod f$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει ως εξής: Από την καθολική ιδιότητα του συν-γινομένου έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα με τα συνεχή βέλη παρακάτω. Επεκτείνουμε το διάγραμμα προσθέτοντας τα διακεκομμένα βέλη (το διάγραμμα παραμένει μεταθετικό) και παρατηρούμε ότι ο μορφισμός $f \circ (\mathrm{Id}_X \coprod \mathrm{Id}_X)$ ικανοποιεί τον ορισμό του μορφισμού $f \coprod f$ (ξέρουμε ότι υπάρχει μοναδικός τέτοιος μορφισμός από την καθολική ιδιότητα του $X \coprod X$).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[ddr, dashed, "f"'] & X \coprod X \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \coprod \mathrm{Id}_X"'] & X \arrow[l] \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X"'] \arrow[ddl, dashed, "f"] \\ & X \arrow[d, dashed, "f"'] & \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Η επόμενη πρόταση [Hov99, Theorem 1.2.10] δίνει μία περιγραφή της κατηγορίας ομοτοπίας.

Πρόταση 3.21. *Έστω $X, Y \in \mathcal{C}$, $X_c \to X$ μία συννηματοποιητική προσέγγιση του X, και $Y \to Y_f$ μία νηματοποιητική προσέγγιση του Y. Τότε η σχέση $\overset{l}{\sim}$ ορίζει σχέση* *ισοδυναμίας στο $\mathcal{C}(X_c, Y_f)$ και υπάρχει φυσικός ισομορφισμός*

$$\mathcal{H}o(\mathcal{C})(X,Y) \cong \mathcal{C}(X_c, Y_f)/\stackrel{l}{\sim}.$$

3.3 Παραδείγματα κατηγοριών μοντέλων

Σε αυτή την ενότητα αναφέρουμε κάποια παραδείγματα κατηγοριών μοντέλων.

3.3.1 Τοπολογικοί χώροι

Θυμίζουμε δύο ορισμούς από την αλγεβρική τοπολογία, ενώ θεωρούμε γνωστές τις έννοιες των CW-συμπλεγμάτων (CW-complexes) και των ομάδων ομοτοπίας ενός τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 3.22. Μία συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων λέγεται **ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία** αν

(i) η επαγόμενη απεικόνιση

$$f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

μεταξύ των συνόλων των κατά-τόξα-συνεκτικών συνιστωσών είναι ισομορφισμός συνόλων (δηλαδή είναι 1-1 και επί), και

(ii) για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n \geq 1$, ο επαγόμενος ομομορφισμός

$$f_* : \pi_n(X,x) \to \pi_0(Y, f(x))$$

μεταξύ των n-οστών ομάδων ομοτοπίας είναι ισομορφισμός.

Ορισμός 3.23. Μία συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων καλείται **νηματοποίηση Serre** (Serre fibration) αν για κάθε CW-σύμπλεγμα C, η απεικόνιση f έχει την δεξιά ιδιότητα ανύψωσης ως προς τον εγκλεισμό

$$\begin{array}{ccc} C & \to & C \times [0,1] \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array}.$$

Θεώρημα 3.24. *Η κατηγορία* **Top** *των τοπολογικών χώρων μπορεί να εφοδιαστεί με δομή κατηγορίας μοντέλων όπου μία συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$ θα λέγεται:*

- ασθενής ισοδυναμία *αν είναι ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία,*
- νηματοποίηση *αν είναι νηματοποίηση Serre,*

- συννηματοποίηση *αν η f έχει την ιδιότητα αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική νηματοποίηση.*

Αυτή η δομή κατηγορίας μοντέλων της **Top** αντιστοιχεί στην κλασική θεωρία ομοτοπίας, η οποία μελετά τοπολογικούς χώρους μέχρι ασθενούς ομοτοπικής ισοδυναμίας, δηλαδή μελετά την $\mathcal{H}o(\mathbf{Top})$.

3.3.2 Αλυσιδωτά συμπλέγματα R-προτύπων

Ένα παράδειγμα είναι αυτό που θέλαμε να γενικεύσουμε στην Ενότητα 1.1. Η ακόλουθη δομή κατηγορίας μοντέλων στην $\mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathbf{Mod}_R)$ αντιστοιχεί στην ομολογική άλγεβρα. Για την απόδειξη του θεωρήματος βλ. [DS95, Ενότητα 7].

Θεώρημα 3.25. *Έστω R ένας δακτύλιος. Η κατηγορία $\mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathbf{Mod}_R)$, των μη αρνητικά βαθμονομημένων αλυσιδωτών συμπλεγμάτων R-προτύπων, μπορεί να εφοδιαστεί με δομή κατηγορίας μοντέλων, όπου ένας μορφισμός $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ θα λέγεται:*

- ασθενής ισοδυναμία *αν είναι ψευδο-ισομορφισμός (βλ. Ορισμό 1.1),*
- νηματοποίηση *αν για κάθε $n \geq 1$ ο ομομορφισμός $f_n : X_n \to Y_n$ είναι επιμορφισμός,*
- συννηματοποίηση *αν για κάθε $n \geq 0$ ο ομομορφισμός $f_n : X_n \to Y_n$ είναι μονομορφισμός και ο συμπυρήνας της $Y_n/f_n(X_n)$ είναι προβολικό πρότυπο.*

3.3.3 Simplicial σύνολα

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που έδειξε ο Quillen [Qui67] όταν εισήγαγε τις κατηγορίες μοντέλων είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.26. *Η κατηγορία* **sSet** *των simplicial συνόλων μπορεί να εφοδιαστεί με δομή κατηγορίας μοντέλων, όπου ένας μορφισμός $f : X \to Y$ στην* **sSet** *θα λέγεται:*

- ασθενής ισοδυναμία *αν ο συναρτητής γεωμετρικής πραγμάτωσης τον απεικονίζει σε μία ασθενή ομοτοπική ισοδυναμία, δηλαδή αν η $|f| : |X| \to |Y|$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 3.22,*
- συννηματοποίηση *αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $f_n : X_n \to Y_n$ είναι 1-1,*
- νηματοποίηση *αν ο f έχει την ιδιότητα δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική συννηματοποίηση.*

Στην μακροσκελή απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, ο Quillen αποδεικνύει επιπλέον ότι το ζεύγος συζυγών συναρτητών

$$|-| : \mathbf{sSet} \leftrightarrows \mathbf{Top} : \mathrm{Sing}$$

επάγει ισοδυναμία μεταξύ των αντίστοιχων κατηγοριών ομοτοπίας $\mathcal{H}o(\mathbf{sSet})$ και $\mathcal{H}o(\mathbf{Top})$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κατηγορία των simplicial συνόλων για να μελετήσουμε τη συνήθη θεωρία ομοτοπίας των τοπολογικών χώρων (και το αντίστροφο).

Επιπλέον, στο ίδιο πρωτοποριακό άρθρο [Qui67, Κεφ. II, Ενότητα 4], ο Quillen δείχνει ότι η δομή κατηγορίας μοντέλων της **sSet** μπορεί να μεταφερθεί και σε άλλες κατηγορίες «αλγεβρικών»αντικειμένων όπως ομάδες, R-πρότυπα, μεταθετικούς δακτυλίους, R-άλγεβρες, άλγεβρες Lie ως εξής:

Έστω $U : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ο ξεχασιάρης συναρτητής Ένας μορφισμός f στη $\mathbf{s}\mathcal{C}$ θα λέγεται

- *ασθενής ισοδυναμία* αν ο $U(f)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην **sSet**,
- *νηματοποίηση* αν ο $U(f)$ είναι νηματοποίηση στην **sSet**,
- *συννηματοποίηση* αν ο f έχει την ιδιότητα αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε ακυκλική νηματοποίηση.

Στο εξής θεωρούμε ότι οι κατηγορίες $\mathbf{sMod}_R$ και $\mathbf{sAlg}_R$ είναι εφοδιασμένες με την παραπάνω δομή κατηγορίας μοντέλων.

Ο συναρτητής $N : \mathbf{sMod}_R \to \mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathbf{Mod}_R)$ που ορίζεται από το κανονικοποιημένο σύμπλεγμα (Ορισμός 2.6) και ο οποίος αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών (Θεώρημα Dold-Kan), έχει την επιπλέον ιδιότητα να σέβεται τη δομή της κατηγορίας μοντέλων [SS03, Ενότητα 4.1]. Ειδικότερα, διατηρεί τις ασθενείς ισοδυναμίες, τις νηματοποιήσεις και τις συννηματοποιήσεις, και επάγει ισοδυναμία μεταξύ των αντίστοιχων κατηγοριών ομοτοπίας. Δηλαδή η θεωρία ομοτοπίας στην $\mathbf{sMod}_R$ αντιστοιχεί σε ομολογική άλγεβρα R-προτύπων. Εν γένει, δεν υπάρχει αντίστοιχος «συναρτητής κανονικοποίησης»για κάθε κατηγορία μοντέλων $\mathcal{C}$, οπότε μπορούμε να σκεφτόμαστε τη μελέτη της ομοτοπίας στην $\mathbf{s}\mathcal{C}$ ως γενικευμένη ομολογική άλγεβρα στη $\mathcal{C}$.

Κεφάλαιο 4

Ομολογία Quillen

4.1 Αβελιανά αντικείμενα

Ορισμός 4.1. Ένα **αβελιανό αντικείμενο** (abelian object ή abelian group object) μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο $A \in \mathcal{C}$ μαζί με έναν ανταλλοίωτο συναρτητή $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ έτσι ώστε το ακόλουθο τρίγωνο να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Ab} \arrow[d, "\text{Forgetful}"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}(-,A)"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Δηλαδή ένα αβελιανό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο $A \in \mathcal{C}$ μαζί με μία φυσική δομή αβελιανής ομάδας σε κάθε σύνολο μορφισμών $\mathcal{C}(X, A)$ για κάθε $X \in \mathcal{C}$. «Φυσική»σημαίνει αυτό που περιγράφει ο παραπάνω ορισμός, δηλαδή ότι η δομή αυτή επάγεται από κάποιον συναρτητή. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι κάθε μορφισμός $X \xrightarrow{\rho} Y$ στην $\mathcal{C}$ επάγει ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $\mathcal{C}(Y, A) \xrightarrow{-\circ\rho} \mathcal{C}(X, A)$, δηλαδή για κάθε $f, g \in \mathcal{C}(Y, A)$ ισχύει

$$(f + g) \circ \rho = (f \circ \rho) + (g \circ \rho). \tag{4.1}$$

Τα υπόλοιπα αξιώματα της έννοιας του συναρτητή, δηλαδή το να διατηρεί τους ταυτοτικούς μορφισμούς και το να σέβεται τη σύνθεση μορφισμών, ικανοποιούνται τετριμμένα αφού οι ταυτοτικοί μορφισμοί είναι τα ουδέτερα στοιχεία της σύνθεσης, και η σύνθεση είναι προσεταιριστική αντίστοιχα.

Αν η $\mathcal{C}$ έχει πεπερασμένα γινόμενα τότε μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε ένα αβελιανό αντικείμενο της $\mathcal{C}$ ως ένα $A \in \mathcal{C}$ μαζί με μορφισμούς $\mu : A \times A \to A$, $\eta : * \to A$ (όπου $*$ ένα τελικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$, ή αλλιώς το γινόμενο μηδέν αντικειμένων) και $i : A \to A$ οι οποίοι κάνουν μεταθετικά τα ακόλουθα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} A \times (A \times A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\mu"'] & (A \times A) \times A \arrow[r, "\mu\times\mathrm{Id}"] & A \times A \arrow[d, "\mu"] \\ A \times A \arrow[rr, "\mu"'] & & A \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

$$\begin{tikzcd} * \times A \arrow[r, "\eta\times\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & A \times A \arrow[d, "\mu"] & A \times * \arrow[l, "\mathrm{Id}\times\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "(\mathrm{Id},i)"] \arrow[d] & A \times A \arrow[d, "\mu"] \\ * \arrow[r, "\eta"'] & A \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "(\mathrm{pr}_2,\mathrm{pr}_1)"] \arrow[dr, "\mu"'] & A \times A \arrow[d, "\mu"] \\ & A \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

όπου α, λ, ρ οι κανονικοί ισομορφισμοί $A\times(A\times A) \overset{\cong}{\to} (A\times A)\times A$, $*\times A \overset{\cong}{\to} A$, $A\times * \overset{\cong}{\to} A$ αντίστοιχα και $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ οι προβολές του γινομένου $A \overset{\mathrm{pr}_1}{\leftarrow} A\times A \overset{\mathrm{pr}_2}{\to} A$.

Παρατήρηση 4.2. Η ισοδυναμία των δύο προηγούμενων ορισμών δίνεται από την εξής αντιστοιχία, όπως είναι εύκολο να επαληθεύσουμε. Αν $A \in \mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο που ικανοποιεί τον πρώτο ορισμό, τότε ορίζουμε

- $\mu := \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 : A \times A \to A$, όπου $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : A \times A \to A$ οι δύο προβολές του γινομένου
- $\eta : * \to A$ ως το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $\mathcal{C}(*, A)$
- $i := -\mathrm{Id}_A : A \to A$.

Αντίστροφα, αν $A \in \mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο που ικανοποιεί τον δεύτερο ορισμό και $X \in \mathcal{C}$ τότε το $\mathcal{C}(X, A)$ εφοδιάζεται με δομή αβελιανής ομάδας με την πράξη

$$f + g := \mu \circ (f, g).$$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το $\eta \circ (X \to *)$, ενώ η αντιστροφή δίνεται από τον τύπο $-f = i \circ f$.

Ορισμός 4.3. Ορίζουμε ως $\mathcal{C}_{\text{ab}}$ την κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τα αβελιανά αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Ένας μορφισμός $\phi : A \to A'$ στην $\mathcal{C}_{\text{ab}}$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $X \in \mathcal{C}$, ο ϕ να επάγει ομομορφισμό των αβελιανών ομάδων $\mathcal{C}(X, A) \xrightarrow{\phi\circ -} \mathcal{C}(X, A')$. Δηλαδή, για κάθε $f, g : X \to A$ στη $\mathcal{C}$ να ισχύει

$$\phi \circ (f + g) = (\phi \circ f) + (\phi \circ g). \tag{4.6}$$

Παραδείγματα

- Αν $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, τα διαγράμματα (4.2)-(4.5) περιγράφουν τα αξιώματα μιας αβελιανής ομάδας: το μ αντιστοιχεί στην πράξη της ομάδας, το $*$ είναι ένα μονοσύνολο $* = \{t\}$, το $\eta(t)$ αντιστοιχεί στο ουδέτερο στοιχείο της ομάδας, ενώ το i αντιστοιχεί στην απεικόνιση που επιστρέφει το αντίστροφο κάθε στοιχείου. Τα διαγράμματα περιγράφουν την προσεταιριστικότητα του μ, το ότι το $\eta(t)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη της ομάδας, το ότι το $i(a)$ είναι το αντίστροφο ενός στοιχείου a της ομάδας, και τη μεταθετικότητα του μ αντίστοιχα. Οπότε ένα αβελιανό αντικείμενο της κατηγορίας των συνόλων είναι ακριβώς μία αβελιανή ομάδα. Οι μορφισμοί στην $\mathbf{Set}_{\text{ab}}$ είναι οι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων. Δηλαδή

$$\mathbf{Set}_{\text{ab}} = \mathbf{Ab}.$$

- Ας μελετήσουμε τώρα την περίπτωση των μεταθετικών αλγεβρών που μας ενδιαφέρει. Έστω λοιπόν R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $\mathcal{C} = \mathbf{Alg}_R$ η κατηγορία των μεταθετικών R-αλγεβρών. Τότε το τελικό αντικείμενο στην $\mathcal{C}$ είναι η τετριμμένη R-άλγεβρα με ένα στοιχείο. Όμως, για κάθε μη τετριμμένη R-άλγεβρα S, δεν υπάρχει μορφισμός $\eta : 0 \to S$. Αυτό σημαίνει ότι μόνο η τετριμμένη άλγεβρα επιδέχεται αβελιανή δομή (και μάλιστα με τετριμμένο τρόπο). Δηλαδή

$$(\mathbf{Alg}_R)_{\text{ab}} \simeq \{0\}.$$

Για να διορθώσουμε το πρόβλημα του τελευταίου παραδείγματος θα δουλέψουμε με τις άλγεβρες πάνω από μία δεδομένη άλγεβρα. Έστω πάλι R ένας μεταθετικός δακτύλιος και έστω S μία μεταθετική R-άλγεβρα (ισοδύναμα επιλέγουμε έναν ομομορφισμό μεταθετικών δακτυλίων $\phi : R \to S$). Θεωρούμε την κατηγορία $\mathbf{Alg}_R/S$ των R-αλγεβρών πάνω από το S, η οποία έχει ως αντικείμενα τους μορφισμούς προς το S στην $\mathbf{Alg}_R$, και ως μορφισμούς από το $Q \xrightarrow{f} S$

προς το $Q' \xrightarrow{f'} S$ τα μεταθετικά τρίγωνα στην $\mathbf{Alg}_R$ της ακόλουθης μορφής:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & Q' \arrow[dl, "f'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, μερικές φορές θα αναφερόμαστε σε ένα αντικείμενο της $\mathbf{Alg}_R/S$ γράφοντας Q, όπου Q ένα αντικείμενο της $\mathbf{Alg}_R$ για το οποίο εννοείται ότι έχει επιλεχθεί κάποιος μορφισμός $Q \to S$ της $\mathbf{Alg}_R$ ο οποίος είναι το πραγματικό αντικείμενο της $\mathbf{Alg}_R/S$ για το οποίο κάνουμε λόγο. Αν χρειαστεί να αναφερθούμε ρητά σε αυτόν τον μορφισμό θα γράφουμε $s_Q : Q \to S$. Όμοια, μπορεί να γράψουμε $g : Q \to Q'$ για έναν μορφισμό της $\mathbf{Alg}_R/S$ εννοώντας το μεταθετικό τρίγωνο στην $\mathbf{Alg}_R$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "s_Q"'] & & Q' \arrow[dl, "s_{Q'}"] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

Παρατήρηση 4.4. Το τελικό αντικείμενο της $\mathbf{Alg}_R/S$ είναι το $S \xrightarrow{\mathrm{Id}} S$ αφού, για κάθε άλλο αντικείμενο $Q \xrightarrow{f} S$, υπάρχει μοναδική επιλογή για το διακεκομμένο βέλος στο παρακάτω διάγραμμα ώστε να γίνει το διάγραμμα μεταθετικό, συγκεκριμένα η f:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "f"'] & & S \arrow[dl, "\mathrm{Id}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 4.5. Το αρχικό αντικείμενο της $\mathbf{Alg}_R/S$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός R-αλγεβρών $R \to S$, δηλαδή ο $(r \mapsto r \cdot 1_S)$. Πράγματι, για κάθε άλλο αντικείμενο $Q \xrightarrow{f} S$, υπάρχει μοναδική επιλογή για το παρακάτω διακεκομμένο βέλος ώστε να γίνει μεταθετικό το διάγραμμα, συγκεκριμένα ο μοναδικός μορφισμός R-αλγεβρών $R \to Q$, δηλαδή ο $(r \mapsto r \cdot 1_Q)$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "(r\mapsto r\cdot 1_S)"'] & & Q \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 4.6. Το γινόμενο δύο αντικειμένων $Q \times Q'$ στην $\mathbf{Alg}_R/S$ είναι το νηματικό γινόμενο (fiber product ή αλλιώς pullback) $Q \times_S Q'$ πάνω από το S στην $\mathbf{Alg}_R$. Είναι δηλαδή το σύνολο

$$Q \times_S Q' = \{(q, q') \mid q \in Q, q \in Q', s_Q(q) = s_{Q'}(q')\}$$

με πράξεις τους περιορισμούς των πράξεων που ορίζονται στο ευθύ γινόμενο των R-αλγεβρών Q, Q', εφοδιασμένο με τον μορφισμό

$$\begin{array}{rccc} s_{Q\times Q'}: & Q\times_S Q' & \to & S \\ & (q,q') & \mapsto & s_Q(q)=s_{Q'}(q') \end{array}.$$

Ο στόχος μας είναι να βρούμε τα αβελιανά αντικείμενα της $\mathbf{Alg}_R/S$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι η κατηγορία $(\mathbf{Alg}_R/S)_{\text{ab}}$ είναι ισοδύναμη με την $\mathbf{Mod}_S$. Ξεκινάμε με μία κατασκευή. Αν $M\in\mathbf{Mod}_S$ ορίζουμε το $S\ltimes M\in\mathbf{Alg}_R/S$ ως εξής:

- Ως S-πρότυπο είναι ισόμορφο με το $S\oplus M$. Δηλαδή

  $$S\ltimes M := \{(s,m)\mid s\in S, m\in M\}$$

  και για κάθε $s,s'\in S$, $m\in M$ ορίζουμε

  $$\begin{aligned}(s,m)+(s',m') &:= (s+s',m+m')\\ s'(s,m) &:= (s's,s'm).\end{aligned}$$

  Θυμίζουμε ότι, αφού το S είναι R-άλγεβρα, κάθε S-πρότυπο μπορούμε να το δούμε και ως R πρότυπο ταυτίζοντας το $r\in R$ με το $r\cdot 1_S\in S$.

- Το $S\ltimes M$ γίνεται R-άλγεβρα με τον πολλαπλασιασμό

  $$(s,m)(s',m') := (ss',sm'+s'm).$$

  Εύκολα ελέγχουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι συμβατός με τις υπόλοιπες πράξεις και έχει ως ουδέτερο στοιχείο το $(1,0)$. Σημειώνουμε εδώ ότι αν ταυτίσουμε κάθε $m\in M$ με το $(0,m)\in S\ltimes M$ τότε $M^2=0$.

- Τέλος, για να γίνει το $S\ltimes M$ R-άλγεβρα πάνω από το S πρέπει να επιλέξουμε έναν μορφισμό R-αλγεβρών $f: S\ltimes M\to S$, δηλαδή έναν μορφισμό δακτυλίων τέτοιον ώστε $f(r\cdot 1_{S\ltimes M}) = r\cdot f(1_{S\ltimes M})$, ή ισοδύναμα $f((r\cdot 1_S,0)) = r\cdot 1_S$ για κάθε $r\in R$. Επιλέγουμε λοιπόν την προβολή στην πρώτη συντεταγμένη

  $$\begin{array}{rccc} \mathrm{pr}_1: & S\ltimes M & \to & S \\ & (s,m) & \mapsto & s \end{array}.$$

Πρόταση 4.7. *Το $S\ltimes M$ μπορεί να εφοδιαστεί με δομή αβελιανού αντικειμένου της $\mathbf{Alg}_R/S$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι το $(\mathbf{Alg}_R/S)(Q, S \ltimes M)$ επιδέχεται φυσική δομή αβελιανής ομάδας για $Q \in \mathbf{Alg}_R/S$. Ας μελετήσουμε λοιπόν τους μορφισμούς από το Q προς το $S \ltimes M$. Ένας τέτοιος μορφισμός f είναι ένα μεταθετικό τρίγωνο στην $\mathbf{Alg}_R$:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s_Q"'] & & S \ltimes M \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

Αφού το τρίγωνο είναι μεταθετικό, η f θα είναι της μορφής (s_Q, ϕ) για κάποια απεικόνιση $\phi : Q \to M$, και άρα η f περιγράφεται πλήρως από την ϕ. Αφού η f είναι (μεταξύ άλλων) ομομορφισμός R-προτύπων, θα πρέπει και η $\phi = \mathrm{pr}_2 \circ f$ να είναι ομομορφισμός R-προτύπων, όπου $\mathrm{pr}_2 : S \ltimes M \to M$ η προβολή στη δεύτερη συντεταγμένη. Επιπλέον, για $q, q' \in Q$ ισχύει $f(qq') = f(q)f(q')$, το οποίο σημαίνει ότι η ϕ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\phi(qq') = s_Q(q)\phi(q') + s_Q(q')\phi(q) \ \ \forall q, q' \in Q.$$

Αν εφοδιάσουμε το M με δομή Q-προτύπου μέσω του ομομορφισμού δακτυλίων s_Q (ορίζοντας δηλαδή $q \cdot m := s_Q(q) \cdot m$ για $q \in Q, m \in M$) τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\phi(qq') = q\phi(q') + q'\phi(q) \ \ \forall q, q' \in Q,$$

δηλαδή είναι ακριβώς ο κανόνας του Leibniz. Καταλήγουμε λοιπόν (βλ. Ορισμό 1.3) στο ότι πρέπει $\phi \in \mathrm{Der}_R(Q; M)$. Το αντίστροφο είναι άμεσο. Δηλαδή κάθε $\phi \in \mathrm{Der}_R(Q; M)$ ορίζει έναν μορφισμό $(s_Q, \phi) \in (\mathbf{Alg}_R/S)(Q, S \ltimes M)$.

Έχουμε δείξει ότι η απεικόνιση

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Alg}_R/S)(Q, S \ltimes M) & \to & \mathrm{Der}_R(Q; M) \\ f & \mapsto & \mathrm{pr}_2 \circ f \end{array} \tag{4.7}$$

είναι καλώς ορισμένη, 1-1 και επί. Αυτό μας επιτρέπει να μεταφέρουμε τη δομή αβελιανής ομάδας του $\mathrm{Der}_R(Q; M)$ (βλ. Πρόταση 1.5) στο $(\mathbf{Alg}_R/S)(Q, S \ltimes M)$ ορίζοντας δηλαδή

$$f_1 + f_2 := (s_Q, \mathrm{pr}_2 \circ f_1 + \mathrm{pr}_2 \circ f_2) \text{ για } f_1, f_2 \in (\mathbf{Alg}_R/S)(Q, S \ltimes M). \tag{4.8}$$

Μένει να δείξουμε ότι η δομή αυτή είναι φυσική, δηλαδή ότι για κάθε τριάδα μορφισμών στην $\mathbf{Alg}_R/S$ της μορφής

$$\begin{tikzcd} Q' \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] & S \ltimes M \end{tikzcd}$$

ισχύει

$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2) \circ g &= (s_Q, \mathrm{pr}_2 \circ f_1 + \mathrm{pr}_2 \circ f_2) \circ g \\ &= (s_Q \circ g, (\mathrm{pr}_2 \circ f_1 + \mathrm{pr}_2 \circ f_2) \circ g) \\ &= (s_{Q'}, (\mathrm{pr}_2 \circ f_1) \circ g + (\mathrm{pr}_2 \circ f_2) \circ g) \\ &= (s_{Q'}, \mathrm{pr}_2 \circ (f_1 \circ g) + \mathrm{pr}_2 \circ (f_2 \circ g)) \\ &= f_1 \circ g + f_2 \circ g\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από την καθολική ιδιότητα του γινομένου ενώ η τρίτη ισότητα έπεται από το ότι $g \in (\mathbf{Alg}_R/S)(Q', Q)$ και το ότι η απεικόνιση $(- \circ g) : \mathrm{Der}_R(Q; M) \to \mathrm{Der}_R(Q'; M)$ είναι μορφισμός αβελιανών ομάδων: Αν $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_R(Q; M)$ τότε για κάθε $x \in Q'$ ισχύει

$$\begin{aligned}((d_1 + d_2) \circ g)(x) &= ((d_1 + d_2)(g(x)) = d_1(g(x)) + d_2(g(x)) \\ &= (d_1 \circ g)(x) + (d_2 \circ g)(x) = ((d_1 \circ g) + (d_2 \circ g))(x)\end{aligned}$$

και άρα

$$(d_1 + d_2) \circ g = (d_1 \circ g) + (d_2 \circ g).$$ □

Στη εξής θα αναφερόμαστε στο $S \ltimes M$ ως αβελιανό αντικείμενο εννοώντας ότι το έχουμε εφοδιάσει με την αβελιανή δομή που περιγράψαμε στην προηγούμενη απόδειξη.

Πρόταση 4.8. *Ο συναρτητής*

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{F} : & \mathbf{Mod}_S & \to & (\mathbf{Alg}_R/S)_{\mathrm{ab}} \\ & M & \mapsto & S \ltimes M \\ & M \xrightarrow{f} M' & \mapsto & (\mathrm{Id}_S, f)\end{array}$$

είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. (i) Δείχνουμε πρώτα ότι ο $\mathcal{F}$ είναι πιστός και πλήρης, δηλαδή αν $M, M' \in \mathbf{Mod}_S$ τότε η απεικόνιση

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Mod}_S(M, M') & \to & (\mathbf{Alg}_R/S)_{\mathrm{ab}}(S \ltimes M, S \ltimes M') \\ f & \mapsto & (\mathrm{Id}_S, f)\end{array}$$

είναι 1-1 και επί. Το ότι είναι 1-1 είναι προφανές. Για το επί, έστω μορφισμός $S \ltimes M \xrightarrow{g} S \ltimes M'$ στην $(\mathbf{Alg}_R/S)_{\mathrm{ab}}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathbf{Mod}_S(M, M')$ τέτοια ώστε $g = (\mathrm{Id}_S, f)$.

Έστω η το ουδέτερο στοιχείο της αβελιανής ομάδας $(\mathbf{Alg}_R/S)(S, S \ltimes M)$, δηλαδή

$$\begin{array}{rccc} \eta: & S & \to & S \ltimes M \\ & s & \mapsto & (s,0) \end{array}.$$

Αφού ο g είναι μορφισμός μεταξύ αβελιανών αντικειμένων (βλ. Ορισμό 4.3), ο $g\eta$ θα είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $(\mathbf{Alg}_R/S)(S, S \ltimes M')$, δηλαδή $g\eta(s) = (s,0)$ για κάθε $s \in S$. Ισοδύναμα,

(4.9) $$g(s,0) = (s,0) \text{ για κάθε } s \in S.$$

Από το μεταθετικό τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} S \ltimes M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & S \ltimes M' \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

έπεται ότι

(4.10) $$g(s,m) = (s, \widetilde{g}(s,m))$$

για κάθε $s \in S$, $m \in M$, όπου

$$\widetilde{g} := \mathrm{pr}_2 \circ g \in \mathbf{Mod}_R(S \ltimes M, M').$$

Από τη σχέση (4.9) έπεται ότι $\widetilde{g}(s,0) = 0$ και άρα

(4.11) $$\widetilde{g}(s,m) = \widetilde{g}((s,0) + (0,m)) = \widetilde{g}(s,0) + \widetilde{g}(0,m) = \widetilde{g}(0,m)$$

για κάθε $s \in S$, $m \in M$.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & M' \\ & m & \mapsto & \widetilde{g}(0,m) \end{array}$$

οπότε η (4.11) γράφεται $\widetilde{g}(s,m) = f(m)$ και η (4.10) μας δίνει ότι

$$g = (\mathrm{Id}_S, f).$$

Μένει να δείξουμε ότι η f είναι ομομορφισμός S-προτύπων. Είναι άμεσο ότι η f είναι ομομορφισμός R-προτύπων αφού γράφεται ως σύνθεση ομομορφισμών R-προτύπων ως $f = \mathrm{pr}_2 \circ g \circ j$, όπου j η ένθεση

$$\begin{array}{ccc} M & \to & S \ltimes M \\ m & \mapsto & (0,m) \end{array}.$$

Το ότι

$$f(sm) = sf(m) \text{ για κάθε } s \in S, m \in M$$

προκύπτει εφαρμόζοντας τη g στην ισότητα $(s, sm) = (1, m) \cdot (s, 0)$ οπότε παίρνουμε

$$\begin{array}{rrcl} & g(s, sm) & = & g(1, m) \cdot g(s, 0) \\ \Rightarrow & (s, f(sm)) & = & (1, f(m)) \cdot (s, 0) \\ \Rightarrow & (s, f(sm)) & = & (s, sf(m)). \end{array}$$

(ii) Θα δείξουμε τώρα ότι ο $\mathcal{F}$ είναι κατ' ουσίαν επί, δηλαδή ότι κάθε αντικείμενο $(Q \overset{s_Q}{\to} S) \in (\mathbf{Alg}_R/S)_{\mathrm{ab}}$ είναι ισομορφικό με το $S \ltimes M$ για κάποιο $M \in \mathbf{Mod}_S$.

Θεωρούμε το Q-πρότυπο $M := \ker s_Q$ και τους μορφισμούς $\eta : S \to Q$ και $\mu : Q \times_S Q \to Q$ της $\mathbf{Alg}_R/S$ που δίνοναι από την αβελιανή δομή του Q. Το M εφοδιάζεται με δομή S-προτύπου μέσω του ομομορφισμού η ορίζοντας

$$sm := \eta(s)m \text{ για } s \in S, m \in M. \tag{4.12}$$

Το S είναι το τελικό αντικείμενο στην $\mathbf{Alg}_R/S$, οπότε έχουμε ότι $s_Q = (Q \to *)$. Από το διάγραμμα (4.3) έπεται ότι

$$\mu \circ (\eta \circ s_Q, \mathrm{Id}_Q) = \mu \circ (\mathrm{Id}_Q, \eta \circ s_Q) = \mathrm{Id}_Q \tag{4.13}$$

και άρα

$$\mu(0, m) = \mu(m, 0) = m \text{ για κάθε } m \in M. \tag{4.14}$$

Επομένως, αν $m, m' \in M$ έχουμε

$$m \cdot m' = \mu(0, m) \cdot \mu(m', 0) = \mu((0, m) \cdot (m', 0)) = \mu(0, 0) = 0$$

αφού το μ είναι ομομορφισμός αλγεβρών. Δηλαδή

$$M^2 = 0. \tag{4.15}$$

Δείχνουμε τώρα ότι η απεικόνιση

$$\begin{array}{rccc} f: & S \ltimes M & \to & Q \\ & (s, m) & \mapsto & \eta(s) + m \end{array}$$

είναι ισομορφισμός στην $\mathbf{Alg}_R/S$. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η f είναι ομομορφισμός R-προτύπων. Επιπλέον, αν $s, s' \in S$ και $m, m' \in M$ τότε ισχύει

$$\begin{aligned} f((s,m)(s',m')) &= f(ss', sm' + s'm) \\ &= \eta(ss') + sm' + s'm \\ &\overset{(4.12)}{=} \eta(s)\eta(s') + \eta(s)m' + \eta(s')m \\ &\overset{(4.15)}{=} (\eta(s) + m)(\eta(s') + m') \\ &= f(s,m)f(s',m') \end{aligned}$$

οπότε η f είναι ομομορφισμός R-αλγεβρών. Το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} S \ltimes M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & Q \arrow[dl, "s_Q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό αφού για $s \in S$ και $m \in M$ ισχύει

$$s_Q f(s,m) = s_Q(\eta(s) + m) = s_Q\eta(s) + 0 = s \tag{4.16}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το ότι ο η είναι μορφισμός στην $\mathbf{Alg}_R/S$, δηλαδή το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & & Q \arrow[dl, "s_Q"] \\ & S & \end{tikzcd} \tag{4.17}$$

είναι μεταθετικό. Άρα η f είναι μορφισμός στην $\mathbf{Alg}_R/S$.

Η f έχει αντίστροφο την

$$\begin{array}{rccc} g: & Q & \to & S \ltimes M \\ & q & \mapsto & (s_Q(q), q - \eta s_Q(q)) \end{array}.$$

Πράγματι, η g είναι καλώς ορισμένη αφού

$$s_Q(q - \eta s_Q(q)) = s_Q(q) - s_Q\eta(s_Q(q)) \overset{(4.17)}{=} 0,$$

δηλαδή $q - \eta s_Q(q) \in M$. Επιπλέον:

- για κάθε $q \in Q$ ισχύει

$$fg(q) = f(s_Q(q), q - \eta s_Q(q)) = \eta(s_Q(q)) + q - \eta s_Q(q) = q.$$

- για κάθε $s \in S$ και $m \in M$ ισχύει

$$\begin{aligned} gf(s,m) &= g(\eta(s)+m) = (s_Q(\eta(s)+m), \eta(s)+m-\eta s_Q(\eta(s)+m)) \\ &= (s_Q\eta(s)+0, \eta(s)+m-\eta(s_Q\eta(s)+0)) \overset{(4.17)}{=} (s,m). \end{aligned}$$

Άρα τα Q, $S \ltimes M$ είναι ισόμορφα στην $\mathbf{Alg}_R/S$. Μένει να ελέγξουμε ότι έχουν και την ίδια αβελιανή δομή, δηλαδή ότι, μέσω του παραπάνω ισομορφισμού, η πράξη $\mu : Q \times_S Q \to Q$ συμφωνεί με την

$$\begin{array}{rccc} \mu' : & (S \ltimes M) \times_S (S \ltimes M) & \to & S \ltimes M \\ & ((s,m),(s,m')) & \mapsto & (s, m+m') \end{array}$$

που ορίζεται από την αβελιανή δομή του $S \ltimes M$ (βλ. Παρατήρηση 4.2 και σχέση (4.8)). Πράγματι, έστω $s \in S$ και $m, m' \in M$. Από την (4.17) έπεται ότι η $s_Q : Q \to S$ είναι επί και άρα υπάρχει $q \in Q$ τέτοιο ώστε $s_Q(q) = s$. Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \mu\left(f(s,m), f(s,m')\right) &= \mu\left(\eta(s)+m, \eta(s)+m'\right) \\ &= \mu\left((\eta(s),q)+(0,\eta(s)-q)+(m,0)+(0,m')\right) \\ &= \mu(\eta(s),q)+\mu(0,\eta(s)-q)+\mu(m,0)+\mu(0,m') \\ &\overset{(4.13),(4.14)}{=} q+(\eta(s)-q)+m+m' \\ &= f(s,m+m') \\ &= f\left(\mu'\left((s,m),(s,m')\right)\right) \end{aligned}$$

όπου στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιούμε ότι $\eta(s)-q \in M$ αφού

$$s_Q(\eta(s)-q) = s_Q\eta(s) - s_Q(q) = s - s = 0.$$

□

Πόρισμα 4.9. *Η κατηγορία* $(\mathbf{Alg}_R/S)_{\mathrm{ab}}$ *είναι αβελιανή.*

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται από την προηγούμενη πρόταση και το γεγονός ότι η $\mathbf{Mod}_S$ είναι αβελιανή κατηγορία. □

4.2 Αβελιανοποίηση και ομολογία Quillen

Γενικεύοντας το Παράδειγμα A.28 δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό, ο οποίος κάνει χρήση της έννοιας των συζυγών συναρτητών (βλ. Ενότητα A.4).

Ορισμός 4.10. Ο **συναρτητής αβελιανοποίησης** (abelianization functor) Ab : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ ορίζεται ως ο αριστερός συζυγής (αν υπάρχει) του ξεχασιάρη συναρτητή $U : \mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \to \mathcal{C}$ ο οποίος ξεχνά την αβελιανή δομή ενός αβελιανού αντικειμένου της $\mathcal{C}$.

Για παράδειγμα, στην κατηγορία των συνόλων ο συναρτητής της αβελιανοποίησης είναι ο συναρτητής που απεικονίζει ένα σύνολο στην ελεύθερη αβελιανή ομάδα που το έχει ως σύνολο γεννητόρων:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ab}: & \mathbf{Set} & \to & \mathbf{Ab} \\ & X & \mapsto & \mathbb{Z}[X] \end{array}.$$

Ας μελετήσουμε τώρα την περίπτωση $\mathcal{C} = \mathbf{Alg}_R/S$ που μας ενδιαφέρει. Στο εξής ταυτίζουμε την κατηγορία $(\mathbf{Alg}_R/S)_{\mathrm{ab}}$ με την $\mathbf{Mod}_S$ σύμφωνα με την ισοδυναμία κατηγοριών που περιγράψαμε στην Πρόταση 4.8. Οπότε ο ξεχασιάρης συναρτητής που ξεχνά την αβελιανή δομή γράφεται

$$\begin{array}{rccc} U: & \mathbf{Mod}_S & \to & \mathbf{Alg}_R/S \\ & M & \mapsto & S \ltimes M \end{array}.$$

Πρόταση 4.11. *Ο συναρτητής της αβελιανοποίησης της* $\mathbf{Alg}_R/S$ *είναι ο*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ab}: & \mathbf{Alg}_R/S & \to & \mathbf{Mod}_S \\ & Q & \mapsto & S \otimes_Q \Omega_{Q|R} \end{array}.$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι ο παραπάνω συναρτητής είναι αριστερός συζυγής του U. Πράγματι, για κάθε $Q \in \mathbf{Alg}_R/S$ και $M \in \mathbf{Mod}_S$ ισχύει

$$\begin{aligned} \mathbf{Mod}_S(S \otimes_Q \Omega_{Q|R}, M) &\cong \mathbf{Mod}_Q(\Omega_{Q|R}, M) \\ &\cong \mathrm{Der}_R(Q, M) \\ &\cong (\mathbf{Alg}_R/S)(Q, S \ltimes M) \end{aligned}$$

όπου ο δεύτερος ισομορφισμός έπεται από την Πρόταση 1.11 και ο τρίτος από τον ορισμό της αβελιανής δομής του $S \ltimes M$ (Πρόταση 4.7). □

Ορισμός 4.12. Αν οι κατηγορίες $\mathcal{C}, \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ επιδέχονται δομές κατηγοριών μοντέλων τέτοιες ώστε ο συναρτητής $\mathrm{Ab} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ να διατηρεί

(i) τις συνινηματοποιήσεις και

(ii) τις ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συννηματοποιητικών αντικειμένων

τότε ορίζουμε την **ομολογία Quillen** ως τον ολικό αριστερά παραγόμενο συναρτητή του Ab, δηλαδή

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{L}\,\mathrm{Ab}: & \mathcal{H}o(\mathcal{C}) & \to & \mathcal{H}o(\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}) \\ & X & \mapsto & \mathrm{Ab}(X_c) \end{array}$$

όπου $X_{\mathrm{c}} \to X$ είναι μία συννηματοποιητική προσέγγιση του X.

4.3 Συνεφαπτόμενο σύμπλεγμα και ομολογία André-Quillen

Έστω S μία R-άλγεβρα. Αυτή αντιστοιχεί στο σταθερό simplicial αντικείμενο $\mathbf{s}(S \xrightarrow{\mathrm{Id}} S) \in \mathbf{s}(\mathbf{Alg}_R/S)$ (βλ. Παρατήρηση 2.3).

Ορισμός 4.13. Ορίζουμε ως **συνεφαπτόμενο σύμπλεγμα** (cotangent complex) $L_{S|R}$ της R-άλγεβρας S την ομολογία Quillen

$$L_{S|R} := \mathbb{L}\,\mathrm{Ab}(\mathbf{s}(S \xrightarrow{id} S)).$$

Πιο συγκεκριμένα, με βάση την Πρόταση 4.11, βλέπουμε ότι το συνεφαπτόμενο σύμπλεγμα είναι το simplicial S-πρότυπο

$$L_{S|R} = S \otimes_X \Omega_{X|R}$$

όπου X είναι μία συννηματοποιητική προσέγγιση του $\mathbf{s}(S \xrightarrow{\mathrm{Id}} S)$ στην κατηγορία $\mathbf{s}(\mathbf{Alg}_R/S)$.

Το συνεφαπτόμενο σύμπλεγμα $L_{S|R}$ είναι καλώς ορισμένο (ανεξάρτητο από το ποια συννηματοποιητική προσέγγιση X επιλέγουμε) μέχρι ισομορφισμού στην κατηγορία ομοτοπίας $\mathcal{Ho}(\mathbf{sMod}_S)$. Αυτό συνεπάγεται (βλ. τέλος Ενότητας 3.3.3) ότι το κανονικοποιημένο σύμπλεγμα $NL_{S|R}$ του συνεφαπτόμενου συμπλέγματος είναι καλώς ορισμένο μέχρι ισομορφισμού στην κατηγορία $\mathcal{Ho}(\mathrm{Ch}_{\bullet\geq 0}(\mathbf{Mod}_S))$. Αυτό μας επιτρέπει να κάνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.14. Η **ομολογία André-Quillen** μίας R-άλγεβρας S είναι τα S-πρότυπα

$$D_n(S|R) := H_n(NL_{S|R}),$$

όπου $NL_{S|R}$ το κανονικοποιημένο σύμπλεγμα του $L_{S|R}$. Γενικότερα, αν $M \in \mathbf{Mod}_S$, ορίζεται η ομολογία André-Quillen με συντελεστές στο M ως τα S-πρότυπα

$$D_n(S|R; M) := H_n(M \otimes_S NL_{S|R}).$$

Στο [Qui70, Theorem 5.1] ο Quillen απαντά στο ερώτημα της επέκτασης της ακολουθίας Jacobi-Zariski (βλ. και [GS07, Proposition 4.32]).

Πρόταση 4.15. *Έστω ομομορφισμοί δακτυλίων $R \to S \to Q$. Τότε για κάθε $N \in \mathbf{Mod}_Q$ επάγεται μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\begin{aligned} \ldots \to D_2(Q|S; N) \to D_1(S|R; N) \to D_1(Q|R; N) \to D_1(Q|S; N) \to \\ \to N \otimes_S \Omega_{S|R} \to N \otimes_Q \Omega_{Q|R} \to N \otimes_Q \Omega_{Q|S} \to 0. \end{aligned}$$

Για $N = Q$ παίρνουμε μια επέκταση της ακολουθίας της Πρότασης 1.13.

Παράρτημα A

Θεωρία Κατηγοριών

Σε αυτό το παράρτημα δίνουμε τους ορισμούς κάποιων βασικών εννοιών της θεωρίας κατηγοριών που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτή την εργασία. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε κάποιο βιβλίο θεωρίας κατηγοριών όπως τα [Lei14, ML98].

A.1 Κατηγορίες και συναρτητές

Θεωρούμε γνωστές τις έννοιες της κατηγορίες, του συναρτητή, του φυσικού μετασχηματισμού, του φυσικού ισομορφισμού, του γινομένου κατηγοριών και της δυϊκής κατηγορίας. Συμβολίζουμε τη συλλογή όλων των μορφισμών $X \to Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ με $\mathcal{C}(X, Y)$ ή $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (ή $\mathrm{Hom}(X, Y)$ αν είναι σαφές σε ποια κατηγορία αναφερόμαστε). Υιοθετούμε κυρίως τον πρώτο συμβολισμό.

Ορισμός A.1. Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ λέγεται:

- **τοπικά μικρή** (locally small) αν για κάθε δύο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{C}$ η συλλογή μορφισμών $\mathcal{C}(X, Y)$ αποτελεί σύνολο.
- **μικρή** (small) αν η συλλογή όλων των αντικειμένων της, καθώς και η συλλογή όλων των μορφισμών της είναι σύνολα.
- **πεπερασμένη** (finite) αν η συλλογή όλων των αντικειμένων της, καθώς και η συλλογή όλων των μορφισμών της είναι πεπερασμένα σύνολα.

Σε ολόκληρη την παρούσα εργασία, όταν γράφουμε *κατηγορία* εννοούμε *τοπικά μικρή κατηγορία*, εκτός από τα σημεία που αναφέρουμε ρητά το αντίθετο.

Ορισμός A.2. Μία **υποκατηγορία** (subcategory) $\mathcal{D}$ μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία τέτοια ώστε:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

- Για κάθε $X, Y \in \mathcal{D}$ ισχύει $\mathcal{D}(X,Y) \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$.
- Για κάθε $X \in \mathcal{D}$ ισχύει $\mathrm{Id}_X \in \mathcal{D}(X,X)$.
- Η σύνθεση δύο μορφισμών στην $\mathcal{D}$ ταυτίζεται με την σύνθεσή τους στην $\mathcal{C}$.

Μία υποκατηγορία $\mathcal{D}$ της $\mathcal{C}$ καλείται **πλήρης** (full) αν για κάθε $X, Y \in \mathcal{D}$ ισχύει $\mathcal{D}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$.

Δηλαδή, σε κάθε συλλογή από αντικείμενα της $\mathcal{C}$ αντιστοιχεί μία μοναδική πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία περιέχει ακριβώς αυτά τα αντικείμενα και όλους τους μορφισμούς μεταξύ τους.

Ορισμός Α.3. Ένας μορφισμός $f : A \to B$ λέγεται **ισομορφισμός** αν έχει αμφίπλευρο αντίστροφο, δηλαδή αν υπάρχει $g : B \to A$ τέτοιος ώστε $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ και $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Δύο αντικείμενα A, B μιας κατηγορίας καλούνται **ισομορφικά** ή **ισόμορφα** αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ τους, οπότε και γράφουμε $A \cong B$.

Είναι άμεσο ότι η σχέση $\cong$ αποτελεί σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των αντικειμένων μιας κατηγορίας.

Φανταζόμενοι τη συλλογή όλων των κατηγοριών και των συναρτητών μεταξύ τους σαν μία κατηγορία,[1] οδηγούμαστε στον ορισμό της ακόλουθης σχέσης ισοδυναμίας μεταξύ κατηγοριών.

Ορισμός Α.4. Δύο κατηγορίες $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ λέγονται **ισόμορφες** αν υπάρχει συναρτητής μεταξύ τους ο οποίος να έχει αμφίπλευρο αντίστροφο, οπότε και γράφουμε $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

Στην πράξη, το να είναι δύο δύο κατηγορίες ισόμορφες είναι πολύ ισχυρή απαίτηση, οπότε χρειάζεται να ορίσουμε μία ασθενέστερη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ κατηγοριών.

Ορισμός Α.5. Ένας συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ καλείται **ισοδυναμία κατηγοριών** $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

(i) Ο $\mathcal{F}$ είναι **πιστός** και **πλήρης** (faithful and full), δηλαδή για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$ η απεικόνιση
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X,Y) & \to & \mathcal{D}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \\ f & \mapsto & \mathcal{F}(f) \end{array}$$
είναι 1-1 και επί αντίστοιχα.

[1] Αυτό δεν ευσταθεί μιας και οδηγεί σε συνολοθεωρητικό παράδοξο αντίστοιχο με αυτό του Russel. Διαισθητικά δηλαδή, η συλλογή όλων των κατηγοριών είναι «πολύ μεγάλη»για να αποτελέσει κλάση, όπως η συλλογή όλων των συνόλων είναι «πολύ μεγάλη»για να αποτελέσει σύνολο. Θα μπορούσαμε όμως να μιλήσουμε για την «πολύ μεγάλη κατηγορία»όλων των κατηγοριών (η οποία δεν δε θα ήταν κατηγορία) ή να κάνουμε λόγο για την κατηγορία όλων των μικρών κατηγοριών.

(ii) Ο $\mathcal{F}$ είναι **κατ' ουσίαν επί** (essentially surjective), δηλαδή για κάθε αντικείμενο $D \in \mathcal{D}$ υπάρχει $C \in \mathcal{C}$ ώστε τα $D, \mathcal{F}(C)$ να είναι ισομορφικά.

Δύο κατηγορίες $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ καλούνται **ισοδύναμες** αν υπάρχει ισοδυναμία κατηγοριών μεταξύ τους, οπότε και γράφουμε $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Η ισοδυναμία κατηγοριών είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας. Αυτό είναι άμεσο από τον ακόλουθο χαρακτηρισμό.

Πρόταση A.6. *Ένας συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών αν και μόνο αν υπάρχει συναρτητής $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ τέτοιος ώστε οι συναρτητές $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ να είναι φυσικά ισομορφικοί με τους $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ αντίστοιχα.*

Ένας άλλος τρόπος να σκεφτόμαστε την ισοδυναμία κατηγοριών είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός A.7. Ένας **σκελετός** (skeleton) μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία περιέχει ακριβώς ένα αντικείμενο από κάθε κλάση ισομορφικών αντικειμένων της $\mathcal{C}$.

Παρατήρηση A.8. Είναι άμεσο ότι ο εγκλεισμός ενός σκελετού της $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}$ είναι πιστός, πλήρης και κατ' ουσίαν επί. Επομένως κάθε σκελετός της $\mathcal{C}$ είναι ισοδύναμος με την $\mathcal{C}$.

Πρόταση A.9. *Δύο κατηγορίες είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν ισομορφικούς σκελετούς.*

A.2 Γινόμενα και συν-γινόμενα

A.2.1 Αρχικά και τελικά αντικείμενα

Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία.

Ορισμός A.10. Ένα αντικείμενο $* \in \mathcal{C}$ λέγεται **τελικό** (terminal object) αν για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $C \to *$.

Δηλαδή το $* \in \mathcal{C}$ είναι τελικό αντικείμενο αν το $\mathcal{C}(C, *)$ είναι μονοσύνολο για κάθε $C \in \mathcal{C}$.

Πρόταση A.11. *Αν $*, *'$ είναι τελικά αντικείμενα της $\mathcal{C}$ τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $* \to *'$. Αντίστροφα, αν το $* \in \mathcal{C}$ είναι τελικό και ισομορφικό με το $*' \in \mathcal{C}$, τότε και το $*'$ είναι τελικό.*

Απόδειξη. Υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f : * \to *'$ και μοναδικός μορφισμός $g : *' \to *$ επειδή τα $*', *$ αντίστοιχα είναι τελικά αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Η σύνθεση $g \circ f : * \to *$ θα ανήκει στο μονοσύνολο $\mathcal{C}(*, *)$ το οποίο όμως πρέπει υποχρεωτικά να περιέχει το Id_*. Δηλαδή $g \circ f = \mathrm{Id}_*$. Όμοια, $f \circ g = \mathrm{Id}_{*'}$. Άρα τα f, g είναι ισομορφισμοί.

Για το αντίστροφο, έστω $C \in \mathcal{C}$ και $f : * \to *'$ ένας ισομορφισμός. Παρατηρούμε αρχικά ότι ένα στοιχείο του $\mathcal{C}(C, *')$ είναι η σύνθεση $f \circ *_C$, όπου $*_C$ ο μοναδικός μορφισμός $C \to *$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλο. Πράγματι, έστω τυχαίος μορφισμός $g : C \to *'$. Τότε

$$g = f \circ f^{-1} \circ g = f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ *_C$$

αφού $f^{-1} \circ g \in \mathcal{C}(C, *)$. □

Συμπεραίνουμε ότι αν η $\mathcal{C}$ έχει τελικό αντικείμενο, αυτό είναι στην ουσία μοναδικό (δηλαδή μοναδικό μέχρι μοναδικού ισομορφισμού). Οπότε μπορούμε να κάνουμε λόγο για «το τελικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$»(αν υπάρχει).

Η δυϊκή έννοια του τελικού αντικειμένου είναι το αρχικό αντικείμενο.

Ορισμός A.12. Ένα αντικείμενο $\emptyset \in \mathcal{C}$ λέγεται **αρχικό** (initial object) αν το $\mathcal{C}(\emptyset, C)$ είναι μονοσύνολο για κάθε $C \in \mathcal{C}$.

Η δυϊκή της προηγούμενης πρότασης μας λέει ότι αν υπάρχει αρχικό αντικείμενο τότε αυτό είναι μοναδικό μέχρι μοναδικού ισομορφισμού, και κάθε ισομορφικό του είναι επίσης αρχικό.

Ορισμός A.13. Ένα αντικείμενο $0 \in \mathcal{C}$ λέγεται **μηδενικό** (zero object) αν είναι ταυτόχρονα αρχικό και τελικό.

Παραδείγματα

- Στην κατηγορία των συνόλων, αρχικό αντικείμενο είναι το κενό σύνολο, ενώ τελικό αντικείμενο είναι κάθε μονοσύνολο. Επομένως δεν υπάρχει μηδενικό αντικείμενο. (Δύο σύνολα είναι ισομορφικά αν και μόνο αν είναι ισοπληθικά.)

- Στην κατηγορία των ομάδων τα μηδενικά αντικείμενα είναι οι τετριμμένες ομάδες.

- Στην κατηγορία των δακτυλίων, αρχικό αντικείμενο είναι το $\mathbb{Z}$, ενώ τελικό είναι ο τετριμμένος δακτύλιος με ένα στοιχείο.

- Στην κατηγορία των R-προτύπων (όπου R κάποιος δακτύλιος), τα μηδενικά αντικείμενα είναι τα μηδενικά πρότυπα.

- Στην κατηγορία των μεταθετικών R-αλγεβρών (όπου R ένας μεταθετικός δακτύλιος), ο R είναι αρχικό αντικείμενο, ενώ η τετριμμένη άλγεβρα με ένα στοιχείο είναι τελικό αντικείμενο.

Α.2.2 Γινόμενα και συν-γινόμενα

Ορισμός Α.14. Ένα **γινόμενο** δύο αντικειμένων $X, Y \in \mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο $X \times Y \in \mathcal{C}$ μαζί με ένα διάγραμμα $X \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} X \times Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y$ ώστε για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ και για κάθε ζεύγος μορφισμών $f : C \to X$, $g : C \to Y$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $(f, g) : C \to X \times Y$ που κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "(f,g)"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & Y \end{tikzcd}.$$

Οι μορφισμοί $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ καλούνται **(κανονικές) προβολές** του γινομένου.

Για συντομία, πολλές φορές θα αναφερόμαστε απλά στο αντικείμενο $X \times Y$ ως το γινόμενο των X και Y. Το γινόμενο δύο αντικειμένων, αν υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρι μοναδικού ισομορφισμού.

Αν $X \xrightarrow{f} X'$, $Y \xrightarrow{g} Y'$ δύο μορφισμοί στη $\mathcal{C}$ και αν υπάρχουν γινόμενα $X \times X'$ και $Y \times Y'$ τότε ορίζεται ο μορφισμός $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ ως

$$f \times g := (f \circ \mathrm{pr}_1, g \circ \mathrm{pr}_2),$$

δηλαδή ως ο μοναδικός μορφισμός που κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X \times Y \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, dashed, "f\times g"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' & X' \times Y' \arrow[l, "\mathrm{pr}_1'"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2'"'] & Y' \end{tikzcd}.$$

Γενικεύουμε τώρα τον προηγούμενο ορισμό του γινομένου.

Ορισμός Α.15. Αν $\{X_j\}_{j \in J}$ είναι μία συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{C}$ ορίζουμε ως **γινόμενό** τους ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$

$$\prod_{j \in J} X_j$$

μαζί με μορφισμούς

$$\mathrm{pr}_k : \prod_{j \in J} X_j \to X_i,\ k \in J$$

που ονομάζονται **(κανονικές) προβολές**, ώστε για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ και κάθε συλλογή μορφισμών $\{f_j : C \to X_j\}_{j\in J}$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\prod_{j\in J} f_j$ που να κάνει μεταθετικά όλα τα τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[ld, "f_k"'] \arrow[d, dashed, "\prod_{j\in J} f_j"] \\ X_k & \prod_{j\in J} X_j \arrow[l, "\mathrm{pr}_k"] \end{tikzcd} .$$

Όπως και πριν, το γινόμενο μιας συλλογής αντικειμένων δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει. Αν όμως υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρι μοναδικού ισομορφισμού.

Λέμε ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ **έχει (πεπερασμένα) γινόμενα** αν κάθε (πεπερασμένη) συλλογή αντικειμένων της έχει γινόμενο στη $\mathcal{C}$.

Παρατήρηση Α.16. Η έννοια του γινομένου μιας κενής συλλογής αντικειμένων ταυτίζεται με την έννοια του τελικού αντικειμένου.

Παρατήρηση Α.17. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι, αν υπάρχει το γινόμενο κάθε ζεύγους αντικειμένων στη $\mathcal{C}$, τότε υπάρχει και το γινόμενο κάθε πεπερασμένης συλλογής που περιέχει τουλάχιστον δύο αντικείμενα. Ένα γινόμενο μίας συλλογής που αποτελείται μόνο από ένα αντικείμενο X είναι το $X \xrightarrow{id_X} X$. Άρα, μία κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει πεπερασμένα γινόμενα αν και μόνο αν έχει τελικό αντικείμενο και, για κάθε δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}$ υπάρχει γινόμενό τους.

Η δυϊκή έννοια του γινομένου είναι αυτή του συν-γινομένου. Παραθέτουμε κατευθείαν τον γενικό ορισμό.

Ορισμός Α.18. Αν $\{X_j\}_{j\in J}$ είναι μία συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{C}$ ορίζουμε ως συν-γινόμενό τους ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$

$$\coprod_{j\in J} X_j$$

μαζί με μορφισμούς

$$i_k : X_k \to \coprod_{j\in J} X_j,\ k \in J$$

ώστε για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ και κάθε συλλογή μορφισμών $\{f_j : X_j \to C\}_{j\in J}$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\coprod_{j\in J} f_j$ που να κάνει μεταθετικά όλα τα τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[rd, "f_k"'] & \coprod_{j\in J} X_j \arrow[d, dashed, "\coprod_{j\in J} f_j"] \\ & C \end{tikzcd} .$$

Όμοια με το γινόμενο, το συν-γινόμενο μιας συλλογής αντικειμένων δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει. Αν όμως υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρι μοναδικού ισομορφισμού.

Παρατήρηση A.19. Η έννοια του συν-γινομένου μιας κενής συλλογής αντικειμένων ταυτίζεται με την έννοια του αρχικού αντικειμένου.

A.3 Προβολικά και εμφυτευτικά αντικείμενα

Ορισμός A.20. Ένας μορφισμός f θα λέγεται **επιμορφισμός** (epimorphism) αν είναι δεξιά διαγράψιμος, δηλαδή αν αληθεύει η συνεπαγωγή

$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'$$

για όλα τα g, g' που ορίζονται οι παραπάνω συνθέσεις. Ένας επιμορφισμός από το A στο B συχνά θα συμβολίζεται με $A \twoheadrightarrow B$.

Οι επιμορφισμοί της κατηγορίας των συνόλων έχουν δύο επιπλέον ισοδύναμους χαρακτηρισμούς:

(i) είναι οι μορφισμοί f που έχουν δεξιό αντίστροφο (δηλαδή υπάρχει h ώστε $f \circ h = \mathrm{Id}$).

(ii) είναι οι συναρτήσεις επί.

Εν γένει όμως, οι τρεις παραπάνω συνθήκες περιγράφουν τρεις διαφορετικές κλάσεις μορφισμών. Φυσικά, η τελευταία συνθήκη έχει νόημα μόνο όταν τα αντικείμενα της εν λόγω κατηγορίας είναι σύνολα (ενδεχομένως με κάποια δομή), και κάθε μορφισμός είναι συνάρτηση.

Η δυϊκή έννοια είναι αυτή του μονομορφισμού.

Ορισμός A.21. Ένας μορφισμός f θα λέγεται **μονομορφισμός** (monomorphism) αν είναι αριστερά διαγράψιμος, δηλαδή αν αληθεύει η συνεπαγωγή

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$$

για όλα τα g, g' που ορίζονται οι παραπάνω συνθέσεις. Ένας μονομορφισμός από το A στο B συχνά θα συμβολίζεται με $A \hookrightarrow B$.

Στην κατηγορία των συνόλων οι μονομορφισμοί ταυτίζονται με αυτούς που έχουν αριστερό αντίστροφο καθώς και με τις συναρτήσεις 1-1.

Ορισμός Α.22. Ένα αντικείμενο $P \in \mathcal{C}$ λέγεται **προβολικό** (projective object) αν για κάθε μορφισμό $f : P \to A$ και κάθε επιμορφισμό $s : B \twoheadrightarrow A$ υπάρχει μεταθετικό τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \\ B \arrow[r, two heads, "s"'] & A \end{tikzcd}$$

Ισοδύναμα, το $P \in \mathcal{C}$ λέγεται προβολικό αν ο συναρτητής $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ στέλνει επιμορφισμούς σε επιμορφισμούς. Αν η $\mathcal{C}$ είναι αβελιανή, αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι ο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ ακριβής.

Ορισμός Α.23. Λέμε ότι μια κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει **αρκετά προβολικά αντικείμενα** αν για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$ υπάρχει επιμορφισμός $P \twoheadrightarrow X$ όπου το P είναι προβολικό.

Η δυϊκή έννοια των προβολικών αντικειμένων είναι τα εμφυτευτικά αντικείμενα.

Ορισμός Α.24. Ένα αντικείμενο $I \in \mathcal{C}$ λέγεται **εμφυτευτικό** (injective object) αν για κάθε μορφισμό $f : A \to I$ και κάθε μονομορφισμό $i : A \hookrightarrow B$ υπάρχει μεταθετικό τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Ισοδύναμα, το $I \in \mathcal{C}$ λέγεται εμφυτευτικό αν ο συναρτητής $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ στέλνει μονομορφισμούς σε επιμορφισμούς. Αν η $\mathcal{C}$ είναι αβελιανή, αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι ο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I)$ ακριβής.

Ορισμός Α.25. Λέμε ότι μια κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει **αρκετά εμφυτευτικά αντικείμενα** αν για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$ υπάρχει μονομορφισμός $X \hookrightarrow I$ όπου το I είναι εμφυτευτικό.

Α.4 Συζυγείς συναρτητές

Ορισμός Α.26. Έστω συναρτητές $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε τα σύνολα $\mathcal{D}(\mathcal{F}(C), D)$ και $\mathcal{C}(C, \mathcal{G}(D))$ να είναι ισομορφικά με φυσικό τρόπο για $C \in \mathcal{C}$ και $D \in \mathcal{D}$. Δηλαδή να υπάρχει φυσικός ισομορφισμός η μεταξύ των συναρτητών $\mathcal{D}(\mathcal{F}(-), -), \mathcal{C}(-, \mathcal{G}(-)) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$. Τότε ο $\mathcal{F}$ θα λέγεται **αριστερός συζυγής** (left adjoint) του $\mathcal{G}$, ενώ ο $\mathcal{G}$ θα λέγεται **δεξιός συζυγής** (right adjoint) του $\mathcal{F}$.

Αν ο $\mathcal{F}$ είναι αριστερός συζυγής του $\mathcal{G}$, τότε οι συναρτητές που είναι αριστεροί συζυγείς του $\mathcal{G}$ είναι ακριβώς αυτοί που είναι φυσικά ισομορφικοί με τον $\mathcal{F}$. Οπότε, αν υπάρχει αριστερός συζυγής ενός συναρτητή, τότε είναι μοναδικός μέχρι φυσικού ισομορφισμού. Τα ίδια ισχύουν και για τον δεξιό συζυγή.

Παράδειγμα Α.27. Ο ξεχασιάρης συναρτητής $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ έχει ως αριστερό συζυγή τον συναρτητή $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ που στέλνει κάθε σύνολο X στην ελεύθερη ομάδα $F(X)$ η οποία έχει το X ως σύνολο ελεύθερων γεννητόρων. Η συνθήκη της συζυγίας λέει ότι, με φυσικό τρόπο στα $X \in \mathbf{Set}$ και $G \in \mathbf{Grp}$, ισχύει

$$\mathbf{Grp}(F(X), G) \cong \mathbf{Set}(X, G)$$

όπου στο δεξί μέλος γράφουμε G εννοώντας το σύνολο $U(G)$ των στοιχείων της ομάδας. Πράγματι, ξέρουμε ότι κάθε απεικόνιση από το σύνολο γεννητόρων X στην G μπορεί να επεκταθεί με μοναδικό τρόπο σε ομομορφισμό ομάδων $F(X) \to G$.

Το προηγούμενο παράδειγμα είναι κάθε άλλο παρά μεμονωμένο. Στις περισσότερες κατηγορίες «αλγεβρικών αντικειμένων», ο ξεχασιάρης συναρτητής προς την κατηγορία των συνόλων έχει ως αριστερό συζυγή τον συναρτητή που σε κάθε σύνολο X αντιστοιχίζει το ελεύθερο αντικείμενο με σύνολο γεννητόρων X. Για παράδειγμα αυτό συμβαίνει για τον ξεχασιάρη συναρτητή $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, και γενικότερα για τον ξεχασιάρη συναρτητή $U : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Set}$.

Ο ξεχασιάρης συναρτητής μεταξύ «αλγεβρικών κατηγοριών»έχει συνήθως αριστερό συζυγή, ακόμα και όταν ξεχνά μέρος της αλγεβρικής δομής.

Παράδειγμα Α.28. Ο ξεχασιάρης συναρτητής

$$U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$$

που ξεχνά ότι μία αβελιανή ομάδα είναι αβελιανή (δηλαδή ο εγκλεισμός της **Ab** στην **Grp**) έχει ως αριστερό συζυγή τον συναρτητή της αβελιανοποίησης

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ab}: & \mathbf{Grp} & \to & \mathbf{Ab} \\ & G & \mapsto & G/[G,G] \end{array}$$

όπου $[G, G]$ η υποομάδα της G που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής $ghg^{-1}h^{-1}$ με $g, h \in G$. Η συνθήκη της συζυγίας εδώ λέει ότι, με φυσικό τρόπο στα $G \in \mathbf{G}$ και $A \in \mathbf{Ab}$, ισχύει

$$\mathbf{Ab}(\mathrm{Ab}(G), A) \cong \mathbf{Grp}(G, A),$$

δηλαδή ότι οι ομομορφισμοί ομάδων $G \to A$ αντιστοιχούν σε ομομορφισμούς αβελιανών ομάδων $G/[G, G] \to A$. Πράγματι, η καθολική ιδιότητα της αβελιανοποίησης μας λέει ότι κάθε ομομορφισμός $G \to A$ παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο ως $G \xrightarrow{p} G/[G, G] \to A$, όπου p ο φυσικός επιμορφισμός.

Ο χαρακτηρισμός της αβελιανοποίησης μίας ομάδας ως αριστερού συζυγή του ξεχασιάρη συναρτητή θα μας είναι χρήσιμος ώστε να γενικεύσουμε την έννοια της αβελιανοποίησης και σε άλλες κατηγορίες στην Ενότητα 4.2.

A.5 Τοπικοποίηση

Ορίζουμε τώρα μία έννοια ανάλογη με αυτή της τοπικοποίησης ενός δακτυλίου R σε ένα υποσύνολό του S, η οποία περιγράφει τον πιο γενικό τρόπο για να κάνουμε τα στοιχεία του S αντιστρέψιμα.

Αντίστοιχα, έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $\mathcal{S}$ μία συλλογή μορφισμών στη $\mathcal{C}$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε την γενικότερη κατηγορία στην οποία κάθε μορφισμός της $\mathcal{S}$ έχει γίνει ισομορφισμός. Για να είμαστε ακριβείς, θέλουμε μία κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ μαζί με έναν συναρτητή $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ έτσι ώστε:

(i) για κάθε $s \in \mathcal{S}$, ο μορφισμός $\gamma(s)$ να είναι ισομορφισμός, και

(ii) κάθε άλλος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ που ικανοποιεί το (i) να παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο μέσω του γ, δηλαδή να υπάρχει μοναδικός συναρτητής που να κάνει μεταθετικό το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd} .$$

Η δεύτερη από τις παραπάνω απαιτήσεις εξασφαλίζει ότι αν υπάρχει μία τέτοια κατηγορία, τότε αυτή θα είναι μοναδική μέχρι μοναδικού ισομορφισμού. Με άλλα λόγια, αν υπάρχουν δύο κατηγορίες που ικανοποιούν τις παραπάνω απαιτήσεις, τότε θα υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός μεταξύ τους.

Ορισμός A.29. Η **τοπικοποίηση** (localization) της $\mathcal{C}$ στο $\mathcal{S}$ είναι η (εν γένει όχι τοπικά μικρή) κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ που προκύπτει από τη $\mathcal{C}$ αν για κάθε μορφισμό $(X \overset{s}{\to} Y) \in \mathcal{S}$ προσθέσουμε έναν «τυπικό αντίστροφο»$Y \overset{s'}{\to} X$ και όλους τους μορφισμούς που απαιτούνται ώστε να ορίζεται η σύνθεση μορφισμών υπό τις σχέσεις $s's = \mathrm{Id}_X$, $ss' = \mathrm{Id}_Y$, $(ts)' = s't'$ για κάθε $(Y \overset{t}{\to} Z) \in \mathcal{S}$.

Δηλαδή, η $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ είναι μία κατηγορία που έχει τα ίδια αντικείμενα με την $\mathcal{C}$, και μπορούμε να σκεφτόμαστε έναν μορφισμό από το A προς το B ως μία πεπερασμένη ακολουθία

$$A \xrightarrow{f_1} \bullet \xleftarrow{s_1} \bullet \xrightarrow{f_2} \bullet \xleftarrow{s_2} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{f_n} \bullet \xleftarrow{s_n} \bullet \xrightarrow{f_{n+1}} B, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπου τα f_i, s_i είναι μορφισμοί της $\mathcal{C}$ και $s_i \in \mathcal{S}$.

Εν γένει η τοπικοποίηση μιας τοπικά μικρής κατηγορίας δεν είναι τοπικά μικρή κατηγορία. Στις περιπτώσεις όμως που μας ενδιαφέρουν σε αυτή την εργασία, δηλαδή για να ορίσουμε την κατηγορία ομοτοπίας αντιστρέφοντας τις ασθενείς ισοδυναμίες σε μία κατηγορία μοντέλων (Ενότητα 3.2)

Βιβλιογραφία

[And74] Michel André. *Homologie des algèbres commutatives.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 206.

[Dol58] Albrecht Dold. Homology of symmetric products and other functors of complexes. *Ann. of Math. (2)*, 68:54–80, 1958.

[DP61] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11:201–312, 1961.

[DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[Fri12] Greg Friedman. Survey article: An elementary illustrated introduction to simplicial sets. *Rocky Mountain J. Math.*, 42(2):353–423, 2012.

[GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, volume 174 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[GS07] Paul Goerss and Kristen Schemmerhorn. Model categories and simplicial methods. In *Interactions between homotopy theory and algebra*, volume 436 of *Contemp. Math.*, pages 3–49. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Iye07] Srikanth Iyengar. André-Quillen homology of commutative algebras. In *Interactions between homotopy theory and algebra*, volume 436 of *Contemp. Math.*, pages 203–234. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[Kan58] Daniel M. Kan. Functors involving c.s.s. complexes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87:330–346, 1958.

[Lei14] Tom Leinster. *Basic category theory*, volume 143 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[May67] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 11. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1967.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[Qui68] Daniel Quillen. Homology of commutative rings. Mimeographed notes, MIT, 1968.

[Qui70] Daniel Quillen. On the (co-) homology of commutative rings. In *Applications of Categorical Algebra (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968)*, pages 65–87. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[SS03] Stefan Schwede and Brooke Shipley. Equivalences of monoidal model categories. *Algebr. Geom. Topol.*, 3:287–334, 2003.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.