Ορέστης Λύγδας

Συνομολογία συναφών δεματιών & Étale συνομολογία

Μεταπτυχιακή Εργασία

Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, 28 Οκτωβρίου 2022

Εισηγητής: Αριστείδης Κοντογεώργης

Επιτροπή

Αριστείδης Κοντογεώργης

Ιωάννης Εμμανουήλ

Ιωάννης Ντόκας

Στους ανθρώπους που βρίσκονται δίπλα μου

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η παρουσίαση δύο εργαλείων που είναι θεμελιώδη για τη σύγχρονη Αλγεβρική Γεωμετρία. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τα σχεδόν-συναφή και τα συναφή δεμάτια, με τη συνομολογία δεματιών που μας δίνουν και με την étale συνομολογία.

Αρχικά διευκρινίζουμε ότι θεωρούμε γνωστές τις έννοιες των δεματιών (στα αγγλικά sheaves), των σχημάτων (schemes), των μορφισμών τους και γενικά όλων των βασικών ιδιοτήτων τους, όπως αυτές παρουσιάζονται για παράδειγμα στο [1].

Σημειώνουμε ότι έγινε προσπάθεια απόδοσης των ξενόγλωσσων όρων στα ελληνικά χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερο εξεζητημένες λέξεις. Παρόλα αυτά, η λέξη étale είναι επίθετο (στα γαλλικά) και αναφέρεται στη θάλασσα όταν αυτή είναι ήρεμη μεταξύ των δύο σταδίων του φαινομένου της παλίρροιας (πλημμυρίδας και άμπωτης). Η ελληνική λέξη γι' αυτό το φαινόμενο είναι παλιρροιοστάσιο, ωστόσο δεν υπάρχει κάποιο επίθετο στα ελληνικά που να χαρακτηρίζει κατά αντίστοιχο τρόπο τη θάλασσα, έτσι χρησιμοποιούμε τη γαλλική λέξη αυτούσια ως επιθετικό προσδιορισμό.

Βασικό εργαλείο για την ανάπτυξη της θεωρίας συνομολογίας δεματιών είναι τα συναφή δεμάτια (στα αγγλικά ο όρος είναι coherent sheaves, η πιο άμεση μετάφραση αυτού είναι η λέξη συνεκτικά δεμάτια, ωστόσο στα ελληνικά ο όρος συνεκτικό χρησιμοποιείται εκεί που στα αγγλικά λέμε connected). Αυτά θα εισαγάγουμε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας. Ο λόγος που μας ενδιαφέρουν τα συναφή και τα σχεδόν-συναφή δεμάτια, είναι γιατί φαίνεται αργότερα ότι αυτά έχουν τις κατάλληλες ιδιότητες για την ανάπτυξη μιας «καλής» συνομολογίας δεματιών. Αυτήν παρουσιάζουμε στο δεύτερο κεφάλαιο. Πρώτα αναφέρουμε μια πιο αφηρημένη θεωρία συνομολογίας, που προκύπτει από αυτό που αποκαλούμε μεστή ανάλυση ενός δεματιού (στα αγγλικά flabby resolution) και στη συνέχεια αναφέρουμε μια θεωρία συνομολογίας που ορίζεται με πιο συνδυαστικό τρόπο, τη συνομολογία Čech, η οποία συνήθως προσφέρεται περισσότερο για υπολογισμούς. Βασική προϋπόθεση για να πάρουμε τις ίδιες ομάδες συνομολογίας από τις δύο αυτές προσεγγίσεις είναι να δουλεύουμε με σχεδόν-συναφή ή συναφή δεμάτια.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας σκοπός μας είναι η ανάπτυξη της étale συνομολογίας και γι' αυτό χρειάζεται αρκετή δουλειά ώστε να εισαχθούν οι διάφορες νέες έννοιες και τεχνικές. Πρώτα μιλάμε για étale μορφισμούς και στη συνέχεια αναφέρουμε την καινοτόμα ιδέα του Grothendieck: Στην αναζήτησή του για μια κατάλληλη θεωρία συνομολογίας που θα του έδινε το κατάλληλο πρίσμα υπό το οποίο οι περίφημες εικασίες του Weil θα προέκυπταν ως απλές ασκήσεις, σκέφτηκε ότι αντί για κάποια καινούργια συνδυαστική ιδέα ή αντί για κάποιο καινούργιο αλγεβρικό αντικείμενο, χρειαζόταν μια καινούργια και βασικά γενικότερη έννοια τοπολογίας. Αυτή η ιδέα προέκυψε κι από το γεγονός ότι η τοπολογία Zariski, που είναι η τοπολογία με την οποία εργάζεται κανείς συνήθως πάνω στις προβολικές πολλαπλότητες και τα σχήματα, υστερεί σε κάποια θεμελιώδη ζητήματα όταν συγκρίνεται με τη συνήθη τοπολογία του μιγαδικού χώρου (για παράδειγμα δεν ισχύει το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης).

Αυτή η νέα έννοια τοπολογίας, που φαίνεται μέσα από τη γλώσσα των sites, δίνει και μια νέα θεωρία δεματιών η οποία έχει φυσικά πολλές ομοιότητες με τη συνήθη αλλά και κάποιες λεπτές διαφορές. Στην ανάπτυξη αυτής της θεωρίας δεματιών αφιερώνουμε τρεις παραγράφους από το τρίτο κεφάλαιο. Στο τέλος του κεφαλαίου είμαστε σε θέση να επαναλάβουμε τις κατασκευές συνομολογιών δεματιών, αυτή τη φορά όμως πάνω στο étale site μιας πολλαπλότητας, κι όχι στην τοπολογία Zariski, κι αυτό κάνει όλη τη διαφορά.

Το τελευταίο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στη διατύπωση και την αδρή περιγραφή των αποδείξεων των εικασιών του Weil (για την ακρίβεια για τη δυσκολότερη από τις εικασίες δεν δείνουμε κάποια περιγραφή της απόδειξης, αλλά αυτή η παράλειψη δικαιολογείται κι από το ότι η απόδειξη ξεφεύγει αρκετά από το να είναι «απλή εφαρμογή» αποτελεσμάτων σχετικών με την étale συνομολογία). Εκεί ορίζουμε και την ℓ-αδική συνομολογία, μέσω της étale συνομολογίας, και καταγράφουμε κάποιες από τις ιδιότητές της που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη των εικασιών του Weil. Τέλος επιχειρούμε να δείξουμε με ποιον τρόπο συνδυάζονται όλες αυτές οι ιδιότητες και δίνουν εντέλει τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Ορέστης Λύγδας, Αθήνα 2022.

Μέρος I

Συνομολογία συναφών δεματιών

Κεφάλαιο 1

Σχεδόν-συναφή και συναφή δεμάτια

1.1 Ακριβείς ακολουθίες από δεμάτια

Για να αναπτύξουμε την θεωρία συνομολογίας των δεματιών πρέπει να έχουμε έναν τρόπο να ορίσουμε ακριβείς ακολουθίες από δεμάτια, άρα θα πρέπει να μπορούμε να αναφερόμαστε σε πυρήνες, εικόνες και συμπυρήνες μορφισμών μεταξύ δεματιών. Στο τέλος αυτής της ενότητας θα έχουμε δώσει έναν ορισμό για αυτές τις έννοιες και θα έχουμε δει κάποιες βασικές ιδιότητες αυτών. Σημειώνουμε ότι στον ορισμό ενός σχήματος, χρησιμοποιούμε δεμάτια από αντιμεταθετικούς δακτύλιους με μονάδα, ωστόσο για την ανάπτυξη της συνομολογίας των δεματιών θα ασχοληθούμε με δεμάτια από αβελιανές ομάδες (αργότερα και με πιο γενικά δεμάτια από πρότυπα πάνω από τους δακτύλιους του δεματιού δομής - στα αγγλικά structure sheaf - δοθέντος σχήματος).

1.1α΄ Δεματιοποίηση ενός προδεματιού

Μια βασική κατασκευή που χρησιμοποιούμε εκτενώς για να ορίσουμε ακόμα και βασικές έννοιες με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι η δεματιοποίηση (στα αγγλικά λέγεται sheafification) ενός προδεματιού, η διαδικασία δηλαδή μέσω της οποίας από ένα δοθέν προδεμάτι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δεμάτι που είναι κατά μία έννοια «η μικρότερη δυνατή επέκταση αυτού του προδεματιού» (θα δούμε τι ακριβώς σημαίνει αυτό στη συνέχεια).

Έστω τοπολογικός χώρος X και προδεμάτι αβελιανών ομάδων (σε αυτήν την ενότητα όλα τα προδεμάτια και τα δεμάτια είναι αβελιανών ομάδων) $\mathcal{G}$ πάνω από τον X. Ορίζουμε το *στάχυ* (μεταφράζουμε τον όρο *stalk*) $\mathcal{G}_x$ του G στο $x \in X$ μέσω του ευθέως ορίου των $G(U)$ για όλα τα ανοιχτά U που είναι τέτοια ώστε $x \in U$, όπου η διάταξη που θεωρούμε είναι $U \leq V$ αν και μόνο αν $V \subseteq U$ (δηλαδή η αντίστροφη από την αναμενόμενη), και γράφουμε:

$$\mathcal{G}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{G}(U).$$

Έστω ${}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$ το σύνολο των απεικονίσεων s από το U στην ξένη ένωση $\sqcup_{x\in U}\mathcal{G}_x$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) $s(x) \in \mathcal{G}_x$ για κάθε $x \in U$.

(ii) Για κάθε $x \in U$, μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $V \subseteq U$ που περιέχει το x και $t \in \mathcal{G}(V)$ ώστε το φύτρο $t_y \in \mathcal{G}_y$ του t σε οποιοδήποτε σημείο $y \in V$ να ταυτίζεται με το $s(y)$.

Με σύμβολα τα παραπάνω γράφονται ως εξής:

$$^{\alpha}\mathcal{G}(U) = \left\{ \{s(x)\} \in \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{υπάρχουν } V, t \text{ όπου } V \text{ είναι} \\ \text{ανοιχτή υποπεριοχή της } U \text{ και} \\ t \in \mathcal{G}(V) \text{ ώστε να ισχύει ότι} \\ t_y = s(y), \text{ για κάθε } y \in V \end{array} \right\}.$$

Για δύο ανοιχτά $V \subseteq U$ ορίζουμε τις απεικονίσεις περιορισμού να είναι οι αναμενόμενες $\rho_{V,U} : {}^{\alpha}\mathcal{G}(U) \to {}^{\alpha}\mathcal{G}(V)$ που στέλνουν το $\{s(x)\}_{x\in U}$ στο $\{s(x)\}_{x\in V}$. Τότε το ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ είναι ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων πάνω από τον X και αναφερόμαστε σε αυτό ως *δεματιοποίηση* του προδεματιού $\mathcal{G}$.

Υπενθυμίζουμε ποιες είναι οι δύο επιπλέον συνθήκες που πρέπει να πληροί ένα προδεμάτι $\mathcal{F}$ για να είναι δεμάτι:

Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του X και $\cup_{i\in I} U_i$ ανοιχτό κάλυμμα του U.

(F1) Αν $s \in \mathcal{F}(U)$ κι αν για κάθε $i \in I$ έχουμε $\rho_{U_i,U}(s) = 0$, τότε $s = 0$.

(F2) Αν έχουμε μια συλλογή $\{s_i\}_{i\in I}$ τέτοια ώστε για κάθε $i \in I$ να ισχύει ότι $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ και για κάθε $i, j \in I$ με $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ να ισχύει ότι $\rho_{U_{ij},U_i}(s_i) = \rho_{U_{ij},U_j}(s_j)$, τότε υπάρχει $s \in \mathcal{F}(U)$ τέτοιο ώστε για κάθε $i \in I$ να ισχύει $\rho_{U_i,U}(s) = s_i$.

Συνεπώς είναι σχετικά άμεσο να ελεγχθεί ότι πράγματι το ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ είναι δεμάτι.

Παρατήρηση 1.1.1. *Αν $\mathcal{G}$ είναι ένα προδεμάτι και ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ είναι το δεμάτι που προκύπτει από τη δεματιοποίηση του $\mathcal{G}$, τότε τα στάχυα τους $\mathcal{G}_x$ και ${}^{\alpha}\mathcal{G}_x$ είναι ισόμορφα (ως αβελιανές ομάδες) για κάθε $x \in X$.*

Πράγματι, έστω $x \in X$, ανοιχτό $U \subseteq X$ ώστε $x \in U$ και $s \in {}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$. Τότε μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $V \subseteq U$ ώστε $x \in V$ και $t \in \mathcal{G}(V)$, ώστε για κάθε $y \in V$ να ισχύει ότι $s(y) = t_y$. Άρα έχουμε ότι $\rho_{V,U}(s) = \{t_y\}_{y\in V} \in {}^{\alpha}\mathcal{G}(V)$, οπότε ορίζεται καλά ένας ομομορφισμός

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}\mathcal{G}_x &\to \mathcal{G}_x \\ s_x &\mapsto t_x, \end{aligned}$$

κι εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι είναι ισομορφισμός.

Έστω ότι έχουμε δύο δεμάτια $\mathcal{G}, \mathcal{H}$. Αν συμβολίζουμε με $\mathrm{Hom}_{\text{sheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ το σύνολο των μορφισμών δεματιών μεταξύ τους και με $\mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ το σύνολο των μορφισμών προδεματιών μεταξύ τους, τότε είναι σαφές ότι

$$\mathrm{Hom}_{\text{sheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$$

(οι μορφισμοί δεματιών και προδεματιών ορίζονται με τον ίδιο τρόπο). Επίσης στα σύνολα $\mathrm{Hom}_{\text{sheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, $\mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ μπορούμε να δώσουμε δομή αβελιανής ομάδας (αφού μιλάμε για μορφισμούς δεματιών αβελιανών ομάδων) ορίζοντας την πρόσθεση μορφισμών σημειακά: Αν $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ και $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ είναι μορφισμοί (προ)δεματιών, τότε για κάθε ανοιχτό υποσύνολο U του X ορίζουμε μορφισμό $\phi + \psi$ έτσι ώστε για κάθε $s \in \mathcal{G}(U)$, $(\phi + \psi)_U(s) := \phi_U(s) + \psi_U(s)$. Η προσεταιριστικότητα και η αντιμεταθετικότητα της πράξης αυτής προκύπτει από το ότι εργαζόμαστε με δεμάτια αβελιανών ομάδων. Η μηδενική απεικόνιση (δηλαδή η απεικόνιση $O : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, με $O_U(s) = 0$ για κάθε ανοιχτό υποσύνολο U του X και κάθε $s \in \mathcal{G}(U)$) είναι το ουδέτερο στοιχείο αυτής της πράξης. Τέλος αν $\phi \in \mathrm{Hom}_{\text{sheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, ο αντίθετός του είναι αυτός που σε οποιοδήποτε ανοιχτό U στέλνει οποιοδήποτε $s \in \mathcal{G}(U)$ στο $-\phi_U(s)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας μορφισμός (προ)δεματιών λέγεται *ισομορφισμός* αν έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο. Ειδικότερα, για μορφισμούς δεματιών ισχύει ένας χαρακτηρισμός, ο οποίος δεν είναι σωστός εν γένει για μορφισμούς προδεματιών αναδεικνύοντας έτσι την «τοπική φύση» των δεματιών:

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ένας μορφισμός από δεμάτια πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X. Τότε ο ϕ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν η επαγόμενη απεικόνιση στα στάχυα $\phi_P : \mathcal{G}_P \to \mathcal{H}_P$ είναι ισομορφισμός για κάθε $P \in X$.*

Απόδειξη. Προφανώς αν ο ϕ είναι ισομορφισμός, τότε και η επαγόμενη απεικόνιση στα στάχυα στο P είναι ισομορφισμός για κάθε $P \in X$. Για το αντίστροφο αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ ο $\phi_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ είναι ισομορφισμός. Η απόδειξη είναι μια χαρακτηριστική ως προς την τεχνική (και άμεση ως προς την βασική της ιδέα) άσκηση για να εξοικειωθεί κανείς με τη χρήση των δεματιών και την τοπική φύση τους. Παραπέμπουμε στο [2], στη σελίδα 63 (της πρώτης έκδοσης). □

Παρατήρηση 1.1.3. *Αν και ένας μορφισμός δεματιών ϕ λέγεται 1-1 αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ ο επαγόμενος ομομορφισμός ϕ_U είναι 1-1, για το επί δεν ισχύει το ίδιο. Ο ϕ λέγεται επί αν και μόνο αν για κάθε $P \in X$ ο επαγόμενος ομομορφισμός στα στάχυα ϕ_P είναι επί. Αυτό συμβαίνει γιατί αυτός ο ορισμός παραμένει συμβατός με την κατηγορική έννοια του επιμορφισμού κι επιπλέον χαρακτηρίζει «περισσότερους» μορφισμούς επί (σε σύγκριση με έναν αντίστοιχο ορισμό με αυτόν για το 1-1) κάτι που μας είναι γενικά χρήσιμο. Στην απόδειξη παραπάνω γίνεται σαφές ότι για ισομορφισμούς το να είναι ισομορφισμοί όλοι οι ϕ_U είναι ισοδύναμο με το να είναι ισομορφισμοί όλοι οι ϕ_P.*

Δεν έχουμε ακόμα εξηγήσει τι σημαίνει ότι το δεμάτι ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ που παίρνουμε μέσω της δεματιοποίησης του προδεματιού $\mathcal{G}$ είναι η μικρότερη δυνατή επέκταση αυτού του προδεματιού. Κατ' αρχάς σημειώνουμε ότι υπάρχει ένας αναμενόμενος μορφισμός προδεματιών $\theta : \mathcal{G} \to {}^{\alpha}\mathcal{G}$ που για τυχαίο ανοιχτό $U \subseteq X$ στέλνει το τυχαίο $t \in \mathcal{G}(U)$ στο $\{t_x\}_{x \in U} \in {}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$. Η ακόλουθη πρόταση χαρακτηρίζει μέχρι ισομορφισμού (εκφράζει μια *καθολική ιδιότητα* της δεματιοποίησης) το δεμάτι ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ και τον μορφισμό θ.

Πρόταση 1.1.4. (i) *Για ένα προδεμάτι $\mathcal{G}$ κι ένα δεμάτι $\mathcal{H}$ από αβελιανές ομάδες πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X, η απεικόνιση (που προσδιορίζεται από το δεμάτι ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ και τον μορφισμό θ που ορίσαμε παραπάνω)*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathit{Hom}_{\mathit{sheaf}}({}^{\alpha}\mathcal{G}, \mathcal{H}) &\to \mathit{Hom}_{\mathit{presheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \\ \phi &\mapsto \phi \circ \theta, \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων. Μάλιστα, αν $\mathcal{F}$ είναι ένα δεμάτι και $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ είναι ένας μορφισμός προδεματιών ώστε ο ομομορφισμός

$$\begin{aligned} \Psi : \mathit{Hom}_{\mathit{sheaf}}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) &\to \mathit{Hom}_{\mathit{presheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \\ \phi &\mapsto \phi \circ \eta, \end{aligned}$$

να είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων, τότε το δεμάτι ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ είναι ισόμορφο με το $\mathcal{F}$ μέσω ισομορφισμού ${}^{\alpha}\psi$ για τον οποίο ισχύει ότι $\eta = {}^{\alpha}\psi \circ \theta$ (δηλαδή το ζευγάρι $({}^{\alpha}\mathcal{G}, \theta)$ καθορίζεται μονοσήμαντα έως ισομορφισμού).

(ii) *Αν το $\mathcal{G}$ είναι δεμάτι, τότε έχουμε ${}^{\alpha}\mathcal{G} \cong \mathcal{G}$ (δηλαδή είναι ισόμορφα ως δεμάτια).*

Απόδειξη. (i) Είναι άμεσο ότι η απεικόνιση Φ που ορίσαμε είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι αυτός ο ομομορφισμός έχει αντίστροφο. Θα κατασκευάσουμε έναν ομομορφισμό αβελιανών ομάδων:

$$^{\alpha}\Phi : \mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathrm{Hom}_{\text{sheaf}}(^{\alpha}\mathcal{G}, \mathcal{H}).$$

Έστω $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ κι έστω ανοιχτό $U \subseteq X$. Θα κατασκευάσουμε έναν ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $^{\alpha}\psi_U : {}^{\alpha}\mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ που να κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[rr, "\psi_U"] \arrow[dr, "\theta_U"'] & & \mathcal{H}(U) \\ & {}^{\alpha}\mathcal{G}(U) \arrow[ur, "{}^{\alpha}\psi_U"'] & \end{tikzcd}$$

Από τον ορισμό του $^{\alpha}\mathcal{G}$ μέσω της δεματιοποίησης, για $s = \{s(x)\} \in {}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$, μπορούμε να βρούμε ανοιχτό κάλυμμα $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ του U και $t_\lambda \in \mathcal{G}(V_\lambda)$ τέτοια ώστε $s(y) = t_{\lambda_y}$, για κάθε $y \in V_\lambda$. Έστω $\widetilde{t_\lambda} := \phi_{V_\lambda}(t_\lambda)$, οπότε $\widetilde{t_\lambda} \in \mathcal{H}(V_\lambda)$. Για $V_{\lambda\mu} := V_\lambda \cap V_\mu \neq \emptyset$, έχουμε $\rho_{V_{\lambda\mu},V_\lambda}(\widetilde{t_\lambda}) = \rho_{V_{\lambda\mu},V_\mu}(\widetilde{t_\mu})$, αφού $\rho_{V_{\lambda\mu},V_\lambda}(t_\lambda) = \rho_{V_{\lambda\mu},V_\mu}(t_\mu)$ και οι ομομορφισμοί ομάδων του ϕ μετατίθενται με τους ομομορφισμούς περιορισμού ρ στα αντίστοιχα ανοιχτά. Αφού το $\mathcal{H}$ είναι δεμάτι, η ιδιότητα **(F2)** συνεπάγεται ότι υπάρχει $\widetilde{t} \in \mathcal{H}(U)$ τέτοιο ώστε $\rho_{V_\lambda,U}(\widetilde{t}) = t_\lambda$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Επιπλέον από την ιδιότητα **(F1)** αυτό το $\widetilde{t}$ είναι μοναδικό. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε μονοσήμαντα $^{\alpha}\psi_U(s) := \widetilde{t}$.

Για τυχαίο $t \in \mathcal{G}(U)$, έστω $s = \{t_x\} \in {}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$. Έχουμε $\theta_U(t) = s$ και $\widetilde{t} = \psi_U(t)$, άρα $^{\alpha}\psi_U \circ \theta_U = \psi_U$, όπως θέλαμε. Συνεπώς, αφού οι $^{\alpha}\psi_U$ όπως ορίστηκαν είναι συμβατοί ομομορφισμοί με τους ομομορφισμούς περιορισμού, συμπεραίνουμε ότι ο $^{\alpha}\psi$ είναι ένας μορφισμός δεματιών με $^{\alpha}\psi \circ \theta = \psi$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο ομομορφισμός Φ είναι επί.

Απ' την άλλη, αν έχουμε $\phi \in \mathrm{Hom}_{\text{sheaf}}(^{\alpha}\mathcal{G}, \mathcal{H})$ ώστε $\psi = \phi \circ \theta$, τότε από την κατασκευή του $^{\alpha}\psi$ παραπάνω, παίρνουμε $^{\alpha}\psi = \phi$. Επομένως ο Φ είναι 1-1, άρα τελικά είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

Έστω $\mathcal{F}$ ένα δεμάτι κι έστω $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ένας μορφισμός προδεματιών ώστε ο ομομορφισμός

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Hom}_{\text{sheaf}}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) &\to \mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \\ \phi &\mapsto \phi \circ \eta, \end{aligned}$$

να είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων, όπου $\mathcal{H}$ είναι ένα οποιοδήποτε δεμάτι. Εστιάζουμε στην περίπτωση $\mathcal{H} = {}^{\alpha}\mathcal{G}$. Για τον μορφισμό θ, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\phi : \mathcal{F} \to {}^{\alpha}\mathcal{G}$ τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $\theta = \phi \circ \eta$.

Στον ομομορφισμό Φ, αν θεωρήσουμε $\mathcal{H} = \mathcal{F}$, τότε βρίσκουμε μοναδικό μορφισμό δεματιών $^{\alpha}\psi : {}^{\alpha}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ τέτοιον ώστε να ισχύει ότι $\eta = {}^{\alpha}\psi \circ \theta$.

Έχουμε $\theta = \phi \circ \eta = \phi \circ (^{\alpha}\psi \circ \theta) = (\phi \circ {}^{\alpha}\psi) \circ \theta$. Αν τώρα στον ισομορφισμό Φ θεωρήσουμε $\mathcal{H} = {}^{\alpha}\mathcal{G}$, τότε στο $\theta \in \mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ αντιστοιχεί (με βάση αυτό που μόλις γράψαμε) ο μορφισμός $\phi \circ {}^{\alpha}\psi : {}^{\alpha}\mathcal{G} \to {}^{\alpha}\mathcal{G}$. Όμως στον θ αντιστοιχεί και η $id_{^{\alpha}\mathcal{G}}$. Αφού ο Φ είναι 1-1 ως ισομορφισμός, συμπεραίνουμε ότι $\phi \circ {}^{\alpha}\psi = id_{^{\alpha}\mathcal{G}}$.

Με εντελώς παρόμοιο τρόπο παίρνουμε κι ότι $^{\alpha}\psi \circ \phi = id_{\mathcal{F}}$. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι ο $^{\alpha}\psi : {}^{\alpha}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ είναι ισομορφισμός δεματιών τέτοιος ώστε $\eta = {}^{\alpha}\psi \circ \theta$, όπως θέλαμε.

(ii) Αν το $\mathcal{G}$ είναι δεμάτι, τότε από τις ιδιότητες **(F1)** και **(F2)**, ο ορισμός του ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ συνεπάγεται ότι ${}^{\alpha}\mathcal{G}(U) \cong \mathcal{G}(U)$ για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$.

□

1.1β΄ Πυρήνας, εικόνα και συμπυρήνας ενός μορφισμού μεταξύ δεματιών

Είμαστε πλέον σε θέση να δώσουμε τους ορισμούς για τον πυρήνα, την εικόνα και τον συμπυρήνα ενός μορφισμού δεματιών. Δοθέντος ενός μορφισμού δεματιών αβελιανών ομάδων $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X, ο πιο άμεσος τρόπος να ορίσουμε αυτές τις έννοιες θα ήταν να θεωρήσουμε τις συλλογές από αβελιανές ομάδες $\{\mathrm{Ker}\phi_U\}, \{\mathrm{Im}\phi_U\}$ και $\{\mathrm{Coker}\phi_U\}$ όπου το U είναι οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο του X, κι αν αυτές είναι δεμάτια (χρησιμοποιώντας ως ομομορφισμούς περιορισμού αυτούς που επάγονται από το $\mathcal{G}$ για τους πυρήνες και από το $\mathcal{H}$ για τις εικόνες και τους συμπυρήνες), τότε να τις αποκαλούμε πυρήνα, εικόνα και συμπυρήνα του ϕ αντίστοιχα. Ωστόσο το μόνο που είναι σχετικά άμεσο είναι ότι οι συλλογές αυτές είναι προδεμάτια και σ' αυτό ακριβώς το σημείο θα φανεί η χρησιμότητα της δεματιοποίησης και της καθολικής ιδιότητάς της.

Πρόταση 1.1.5. *Έστω $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ένας ομομορφισμός δεματιών πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X. Για ένα ανοιχτό $U \subseteq X$ θέτουμε*

$$\mathcal{F}(U) \coloneqq \{s \in \mathcal{G}(U) \mid \phi_U(s) = 0\}.$$

Τότε το $\mathcal{F}$ είναι ένα δεμάτι από αβελιανές ομάδες πάνω από τον X.

Απόδειξη. Όπως αναφέρουμε παραπάνω αυτή η συλλογή είναι προδεμάτι πάνω από τον X. Επίσης, αφού το $\mathcal{G}$ είναι δεμάτι, τότε και το $\mathcal{F}$ ικανοποιεί την ιδιότητα **(F1)** των δεματιών. Μένει μόνο να δείξουμε την ιδιότητα **(F2)**.

Έστω ανοιχτό $U \subseteq X$ κι έστω $\{U_i\}_{i\in I}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του U. Έστω $\{s_i\}_{i\in I}$ μια συλλογή από $s_i \in \mathcal{F}(U_i), i \in I$ τέτοια ώστε για κάθε $i, j \in I$ για τα οποία έχουμε ότι $U_{ij} \coloneqq U_i \cap U_j \neq \emptyset$ να ισχύει ότι $\rho_{U_{ij},U_i}(s_i) = \rho_{U_{ij},U_j}(s_j)$ (όπως έχουμε αναφέρει, αυτοί οι ομομορφισμοί είναι $\rho_{V,U} \coloneqq \rho^{\mathcal{G}}_{V,U}|_{\mathcal{F}(U)}$). Επειδή $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ και το $\mathcal{G}$ είναι δεμάτι, από την ιδιότητα **(F2)** βρίσκουμε μοναδικό $s \in \mathcal{G}(U)$ τέτοιο ώστε $\rho^{\mathcal{G}}_{U_i,U}(s) = s_i$ για κάθε $i \in I$. Έστω $t = \phi_U(s)$ κι έστω $t_i = \rho^{\mathcal{H}}_{U_i,U}(t)$. Τότε $t_i = \phi_{U_i}(\rho^{\mathcal{G}}_{U_i,U}(s)) = \phi_{U_i}(s_i) = 0$. Από την ιδιότητα **(F1)** του $\mathcal{H}$ παίρνουμε ότι $t = 0$, άρα $s \in \mathcal{F}(U)$, άρα το $\mathcal{F}$ έχει και την ιδιότητα **(F2)**. □

Ορισμός 1.1.6. *Για έναν μορφισμό δεματιών $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, ονομάζουμε* πυρήνα *του ϕ το δεμάτι $\mathcal{F}$ όπως περιγράφεται στην παραπάνω πρόταση. Συμβολίζουμε τον πυρήνα με $\mathrm{Ker}\phi$.*

Με την ευκαιρία του ορισμού του πυρήνα δίνουμε και τον ορισμό του υποδεματιού ενός δεματιού:

Ορισμός 1.1.7. *Αν $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ είναι δεμάτια αβελιανών ομάδων τέτοια ώστε για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ να ισχύει ότι $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$ και για κάθε ανοιχτά $V \subseteq U \subseteq X$ να ισχύει ότι $\rho^{\mathcal{F}}_{V,U} = \rho^{\mathcal{G}}_{V,U}|_{\mathcal{F}(U)}$, τότε το $\mathcal{F}$ καλείται* υποδεμάτι *του $\mathcal{G}$.*

Για παράδειγμα ο πυρήνας του $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ είναι υποδεμάτι του $\mathcal{G}$. Μένει να εξετάσουμε αν και το προδεμάτι που σχηματίζεται από τις εικόνες των ϕ_U είναι υποδεμάτι του $\mathcal{H}$.

Θέτουμε λοιπόν

$$\mathcal{I}(U) \coloneqq \mathrm{Im}\phi_U = \{\phi_U(s) \in \mathcal{H}(U) \mid s \in \mathcal{G}(U)\}$$

για το προδεμάτι των εικόνων των $\phi(U)$ (με τους επαγόμενους από το $\mathcal{H}$ ομομορφισμούς περιορισμού $\rho^{\mathcal{H}}_{V,U}|_{\mathcal{I}(U)}$). Το $\mathcal{I}$ έχει την ιδιότητα **(F1)** εξ ορισμού των ομομορφισμών περιορισμού, οπότε μένει να ελέγξουμε τι γίνεται με την ιδιότητα **(F2)**.

Έστω $\{U_i\}_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του ανοιχτού $U \subseteq X$ κι έστω $t_i \in \mathcal{I}(U_i), i \in I$ τέτοια ώστε $\rho_{U_{ij},U_i}(t_i) = \rho_{U_{ij},U_j}(t_j)$ όποτε ισχύει ότι $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Αφού το $\mathcal{H}$ είναι δεμάτι ξέρουμε ότι υπάρχει μοναδικό $t \in \mathcal{H}(U)$ τέτοιο ώστε $\rho^{\mathcal{H}}_{U_i,U}(t) = t_i$. Το ερώτημα είναι αν αυτό το t είναι στοιχείο του $\mathcal{I}(U)$, αν δηλαδή υπάρχει $s \in \mathcal{G}(U)$ τέτοιο ώστε $\phi_U(s) = t$.

Επειδή κάθε t_i είναι μέσα στο $\mathcal{I}(U_i)$, υπάρχουν (όχι μοναδικά) $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ τέτοια ώστε $t_i = \phi_{U_i}(s_i)$. Ωστόσο δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε εν γένει ότι υπάρχουν κατάλληλες επιλογές για τα s_i ώστε να «συμφωνούν» στις τομές, δηλαδή δεν είναι απαραίτητο να ισχύει ότι $\rho^{\mathcal{G}}_{U_{ij},U_i}(s_i) = \rho^{\mathcal{G}}_{U_{ij},U_j}(s_j)$, άρα οι εικόνες των ϕ_U *δεν* αποτελούν πάντα ένα δεμάτι.

Παρατήρηση 1.1.8. *Μάλιστα το «πόσο απέχει» το $\mathcal{I}(U)$ από το να είναι δεμάτι είναι ένα ερώτημα που με φυσιολογικό τρόπο μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη της συνομολογίας δεματιών, αλλά θα αναφερθούμε εκτενώς σε αυτήν σε επόμενο κεφάλαιο.*

Ορισμός 1.1.9. *Για έναν μορφισμό δεματιών $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, ονομάζουμε* εικόνα *του ϕ το δεμάτι που μέσω της δεματιοποίησης αντιστοιχεί στο προδεμάτι $\mathcal{I}$ που περιγράφεται παραπάνω. Συμβολίζουμε την εικόνα με Imϕ.*

Μένει να δούμε τι ισχύει για το προδεμάτι των συμπυρήνων των ϕ_U οπότε θέτουμε:

$$\mathcal{C}(U) := \mathrm{Coker}\phi_U = \mathcal{H}(U)/\mathcal{I}(U).$$

Οι ομομορφισμοί περιορισμού επάγονται από αυτούς του $\mathcal{H}$ με τον αναμενόμενο τρόπο:

$$\rho_{V,U}(t \bmod \mathcal{I}(U)) = \rho^{\mathcal{H}}_{V,U}(t) \bmod \mathcal{I}(V).$$

Παρόλα αυτά ούτε αυτό το προδεμάτι είναι εν γένει δεμάτι και θα το δούμε αυτό μέσα από ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1.10. *Θεωρούμε την προβολική ευθεία $\mathbb{P}^1_k$ πάνω από ένα σώμα k ως το προβολικό σχήμα Projk$[x_0, x_1]$. Ένα ανοιχτό κάλυμμα της προβολικής ευθείας μπορεί να δοθεί από δύο αφινικές ευθείες $U_0 =$ Speck$[x]$ και $U_1 =$ Speck$[y]$ όπου $x = x_1/x_0$ και $y = x_0/x_1$. Θέτουμε $\mathfrak{p}_0 = (x_1)$ και $\mathfrak{p}_\infty = (x_0)$. Έτσι το $\mathfrak{p}_0$ ανήκει στο U_0 κι αντιστοιχεί στο σημείο (x), δηλαδή είναι η αρχή αυτής της αφινικής ευθείας, και το $\mathfrak{p}_\infty$ ανήκει στο U_1 κι αντιστοιχεί στο σημείο (y), δηλαδή είναι η αρχή της άλλης αφινικής ευθείας. Σημειώνουμε εδώ ότι οι δύο αυτές αφινικές ευθείες είναι κολλημένες παντού εκτός από τα $\mathfrak{p}_0$ και $\mathfrak{p}_\infty$.*

Ορίζουμε τώρα ένα υποδεμάτι $\mathcal{J}$ του $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ ως εξής:

$$\mathcal{J}(U) := \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k} & \text{αν } \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_\infty \notin U, \\ \left\{ s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} s(\mathfrak{p}_0) = 0 \text{ για } \mathfrak{p}_0 \in U, \\ s(\mathfrak{p}_\infty) = 0 \text{ για } \mathfrak{p}_\infty \in U \end{array} \right\} & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Είναι σχετικά άμεσο ότι το $\mathcal{J}$ είναι υποδεμάτι του $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$. Ένας αναμενόμενος μορφισμός $\iota : (J) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ προκύπτει από τις ενθέσεις $\mathcal{J}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U)$.

Παρατηρούμε τώρα ότι για το U_0 παίρνουμε $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U_0) = k[x]$ και $\mathcal{J}(U_0) = (x)$, και για το U_1 παίρνουμε $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U_1) = k[y]$ και $\mathcal{J}(U_1) = (y)$. Επίσης ισχύει ότι $\Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(\mathbb{P}^1_k) = k$ και $\mathcal{J}(\mathbb{P}^1_k) = 0$. Πράγματι, *για $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(\mathbb{P}^1_k)$, έστω $F = \rho_{U_0,\mathbb{P}^1_k}(f)$ και $G = \rho_{U_1,\mathbb{P}^1_k}(f)$. Τότε $F \in k[x]$ και $G \in k[y]$. Επίσης στην τομή $U_{01} = U_0 \cap U_1 =$ Speck$[x, \frac{1}{x}]$ και $\rho_{U_{01},U_0}(F) = \rho_{U_{01},U_1}(G)$, όπου στο U_{01} το $\rho_{U_{01},U_1}(y)$ είναι το $1/x$. Έτσι παίρνουμε ότι*

$F(x) = G(1/x)$ κι επειδή τα F, G είναι πολυώνυμα μιας μεταβλητής συμπεραίνουμε ότι $F = G =$ σταθ., οπότε $f \in k$. Επιπλέον, αν $f \neq 0$, τότε δεν μηδενίζεται στα $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_\infty$.

Έχοντας υπ' όψιν όλα τα παραπάνω θα εξετάσουμε το προδεμάτι των συμπυρήνων των ι_U του μορφισμού δεματιών ι. Για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ έχουμε επομένως

$$\mathcal{C}(U) = \mathit{Coker}\iota_U = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U)/\mathcal{J}(U),$$

και συγκεκριμένα παίρνουμε:

$$\mathcal{C}(U_0) = k[x]/(x) \cong k \quad \text{και} \quad \mathcal{C}(U_1) = k[y]/(y) \cong k.$$

*Αφού $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_\infty \notin U_{01}$, έχουμε $\mathcal{J}(U_{01}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U_{01})$, άρα $\mathcal{C}(U_{01}) = 0$. Τότε, για το ανοιχτό κάλυμμα $\{U_0, U_1\}$ του $\mathbb{P}^1_k$, έστω $a \in \mathcal{C}(U_0) = k, b \in \mathcal{C}(U_1) = k, a \neq b$. Τότε $\rho_{U_{01},U_0}(a) = 0 = \rho_{U_{01},U_1}(b)$, δηλαδή τα a, b «συμφωνούν» στον περιορισμό της τομής U_{01}. Όμως $\mathcal{C}(\mathbb{P}^1_k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(\mathbb{P}^1_k)/\mathcal{J}(\mathbb{P}^1_k) = k$ και οι περιορισμοί του $\mathcal{C}, \rho_{U_0,\mathbb{P}^1_k}, \rho_{U_1,\mathbb{P}^1_k}$ είναι υποχρεωτικά ταυτοτικοί, οπότε δεν υπάρχει $f \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^1_k) = k$ τέτοιο ώστε $\rho_{U_0,\mathbb{P}^1_k}(f) = a$ και $\rho_{U_1,\mathbb{P}^1_k}(f) = b$. Επομένως το $\mathcal{C}$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα **(F2)**, δηλαδή δεν είναι δεμάτι.*

Ορισμός 1.1.11. *Για έναν μορφισμό δεματιών $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, ονομάζουμε* συμπυρήνα *του ϕ το δεμάτι που μέσω της δεματιοποίησης αντιστοιχεί στο προδεμάτι $\mathcal{C}$ που περιγράφεται παραπάνω. Συμβολίζουμε τον συμπυρήνα με $\mathit{Coker}\phi$.*

Έχουμε πλέον ορίσει τις βασικές έννοιες που θέλαμε και παρόλο που οι συλλογές εικόνων και συμπυρήνων δεν είναι εν γένει δεμάτια, οι δεματιοποιήσεις τους είναι αρκετά στενά συνδεδεμένες με τα προδεμάτια αυτά ώστε να μας δίνουν αρκετά χρήσιμες ιδιότητες. Συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω θεώρημα που περιγράφει τα στάχυα αυτών των δεματιών.

Θεώρημα 1.1.12. *Έστω $\phi_x : \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ να είναι ο επαγόμενος ομομορφισμός σταχυών στο x από τον μορφισμό δεματιών αβελιανών ομάδων $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Τότε τα στάχυα $(\mathit{Ker}\phi)_x, (\mathit{Im}\phi)_x, (\mathit{Coker}\phi)_x$ των δεματιών $\mathit{Ker}\phi, \mathit{Im}\phi, \mathit{Coker}\phi$, αντίστοιχα, στο x είναι ισόμορφα με τον πυρήνα, την εικόνα και τον συμπυρήνα, αντίστοιχα, του ομομορφισμού αβελιανών ομάδων ϕ_x. Συνοπτικά:*

$$\begin{aligned}
&(\mathit{Ker}\phi)_x = \mathit{Ker}\phi_x,\\
&(\mathit{Im}\phi)_x = \mathit{Im}\phi_x = \phi_x(\mathcal{G}_x),\\
&(\mathit{Coker}\phi)_x = \mathit{Coker}\phi_x = \mathcal{H}_x/\phi_x(\mathcal{G}_x).
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω ανοιχτό $U \subseteq X, \phi_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ και

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(U) = \mathrm{Ker}\phi_U,\\
&\mathcal{I}(U) = \phi_U(\mathcal{G}(U)),\\
&\mathcal{C}(U) = \mathcal{H}(U)/\mathcal{I}(U).
\end{aligned}$$

Τότε έχουμε τις εξής ακριβείς ακολουθίες αβελιανών ομάδων:

$$\begin{aligned}
&0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{I}(U) \to 0,\\
&0 \to \mathcal{I}(U) \to \mathcal{H}(U) \to \mathcal{C}(U) \to 0.
\end{aligned}$$

Ισχύει ότι το να παίρνουμε ευθέα όρια διατηρεί την ακρίβεια των ακολουθιών (δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη άσκηση, παραλείπουμε την απόδειξη), οπότε:

$$\begin{aligned}
&0 \to \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U) \to \varinjlim_{x \in U} \mathcal{G}(U) \to \varinjlim_{x \in U} \mathcal{I}(U) \to 0,\\
&0 \to \varinjlim_{x \in U} \mathcal{I}(U) \to \varinjlim_{x \in U} \mathcal{H}(U) \to \varinjlim_{x \in U} \mathcal{C}(U) \to 0.
\end{aligned}$$

Από την παρατήρηση 1.1.1 παίρνουμε τελικά τις ακόλουθες ακριβείς ακολουθίες:

$$0 \to (\mathrm{Ker}\phi)_x \to \mathcal{G}_x \to (\mathrm{Im}\phi)_x \to 0,$$
$$0 \to (\mathrm{Im}\phi)_x \to \mathcal{H}_x \to (\mathrm{Coker}\phi)_x \to 0.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι η απεικόνιση $\mathcal{G}_x \to (\mathrm{Im}\phi)_x \to \mathcal{H}_x$, δηλαδή είναι η σύνθεση ενός επιμορφισμού με έναν μονομορφισμό, άρα ο πυρήνας της είναι ο πυρήνας του επιμορφισμού και η εικόνα της η εικόνα του μονομορφισμού. Άρα από την πρώτη από τις ακριβείς ακολουθίες στις οποίες καταλήξαμε παίρνουμε ότι $\mathrm{Ker}\phi_x = (\mathrm{Ker}\phi)_x$ και $\mathrm{Im}\phi_x = (\mathrm{Im}\phi)_x$. Από τη δεύτερη ακριβή ακολουθία στην οποία καταλήξαμε παίρνουμε ότι $(\mathrm{Coker}\phi)_x = \mathcal{H}_x/(\mathrm{Im}\phi)_x = \mathcal{H}_x/\mathrm{Im}\phi_x = \mathrm{Coker}\phi_x$, άρα έχουμε τα ζητούμενα. □

Πριν περάσουμε στην τελευταία υποενότητα αυτής της ενότητας όπου θα ασχοληθούμε με ακριβείς ακολουθίες δεματιών, δίνουμε έναν ορισμό που θα χρειαστούμε:

Ορισμός 1.1.13. *Έστω $\mathcal{F}$ υποδεμάτι του δεματιού $\mathcal{G}$. Για τον φυσικό μορφισμό $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ θα συμβολίζουμε τον συμπυρήνα του με $\mathcal{G}/\mathcal{F}$. Το δεμάτι $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ καλείται* δεμάτι-πηλίκο *του $\mathcal{G}$ με το υποδεμάτι $\mathcal{F}$. Εξ ορισμού το δεμάτι-πηλίκο $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ είναι το δεμάτι που αντιστοιχεί στο προδεμάτι αβελιανών ομάδων $\mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$.*

1.1γ´ Ακριβείς ακολουθίες

Παραθέτουμε κάποιους σημαντικούς ορισμούς και τη σχετική ορολογία μαζί με κάποιες αρχικές ιδιότητες τους σε μορφή παρατήρησης.

Ορισμός 1.1.14. *Έστω*

$$\cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} \cdots$$

μια ακολουθία από δεμάτια και μορφισμούς μεταξύ τους. Λέμε ότι αυτή η ακολουθία είναι ακριβής στο $\mathcal{F}_i$ (ή στη θέση i) *αν $Im\phi_{i-1} = Ker\phi_i$. Αν είναι ακριβής σε κάθε i, τότε λέγεται* ακριβής.

Ορισμός 1.1.15. *Αν με 0 συμβολίζουμε το δεμάτι που σε κάθε ανοιχτό σύνολο αντιστοιχεί την τετριμμένη ομάδα, τότε μια ακριβής ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

θα λέγεται βραχεία ακριβής ακολουθίας.

Παρατήρηση 1.1.16. *Για έναν μορφισμό δεματιών $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ αποδεικνύεται (με εφαρμογή των βασικών ιδιοτήτων όσων έχουμε ορίσει ως τώρα - δε θα δώσουμε αυτές τις αποδείξεις) ότι είναι 1-1 αν και μόνο αν $Ker\phi = 0$, και επί αν και μόνο αν $Im\phi = \mathcal{G}$, όπως ακριβώς στην περίπτωση των ομάδων/δακτυλίων/προτύπων.*

Με βάση την παραπάνω ορολογία, ο ϕ είναι 1-1 αν και μόνο αν η ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$$

είναι ακριβής στο $\mathcal{F}$ (μπορούμε να λέμε απλά ότι είναι ακριβής όταν δεν υπάρχει σύγχυση σε ποια θέση της ακολουθίας αναφερόμαστε). Επίσης ο ϕ είναι επί αν και μόνο αν η ακολουθία

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \to 0$$

είναι ακριβής.

Μια χρήσιμη βραχεία ακριβής ακολουθία εμφανίζεται όποτε έχουμε υποδεμάτι $\mathcal{F}$ ενός δεματιού $\mathcal{G}$, μέσω του επαγόμενου μορφισμού δεματιών $\iota : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$:

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F} \to 0.$$

Ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι σ' αυτήν την περίπτωση, για κάθε άλλη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το δεμάτι $\mathcal{H}$ είναι ισόμορφο με το δεμάτι $\mathcal{G}/\mathcal{F}$.

Από το θεώρημα 1.1.12 παίρνουμε άμεσα την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.1.17. *Η ακολουθία δεματιών αβελιανών ομάδων πάνω από τοπολογικό χώρο X*

$$\cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} \cdots$$

είναι ακριβής αν και μόνο αν η ακολουθία των σταχυών σε κάθε $x \in X$

$$\cdots \to \mathcal{F}_{i-1,x} \xrightarrow{\phi_{i-1,x}} \mathcal{F}_{i,x} \xrightarrow{\phi_{i,x}} \mathcal{F}_{i+1,x} \xrightarrow{\phi_{i+1,x}} \cdots$$

είναι ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων.

Η επόμενη πρόταση μας δηλώνει ότι εν γένει μια βραχεία ακριβής ακολουθία δεματιών δεν συνεπάγεται βραχεία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων στα ανοιχτά $U \subseteq X$, σε αντίθεση με την περίπτωση των σταχυών. Μάλιστα, μας δείχνει συγκεκριμένα σε ποιο σημείο ενδέχεται να χάνεται η ακρίβεια. Αυτή η έλλειψη ακρίβειας (που συνδέεται με το γεγονός ότι η συλλογή των εικόνων ενός μορφισμού δεματιών δεν είναι εν γένει δεμάτι - βλ. παρατήρηση 1.1.8 και το κομμάτι που προηγείται αυτής) είναι που κάνει απαραίτητη και φυσιολογική τη θεωρία συνομολογίας δεματιών.

Πρόταση 1.1.18. *Για μια ακριβή ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

δεματιών αβελιανών ομάδων πάνω από τοπολογικό χώρο X και για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$, παίρνουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_U} \Gamma(U, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{H}).$$

Ωστόσο, ακόμα κι αν η ψ είναι επί, η ψ_U δεν είναι απαραίτητα επί (βλ. παρατήρηση 1.1.3).

Απόδειξη. Από την υπόθεση ξέρουμε ότι η ϕ είναι 1-1, άρα για την επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \Gamma(U, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{H}) = \mathcal{H}(U),$$

παίρνουμε ότι η ϕ_U είναι 1-1.

Έστω $t \in \mathcal{G}(U)$ τέτοιο ώστε $\psi_U(t) = 0$. Από την πρόταση 1.1.17 γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\mathrm{Ker}\psi_x = \mathrm{Im}\phi_x$. Επομένως για κάθε $x \in U$ υπάρχει $s_x \in \mathcal{F}_x$ τέτοιο ώστε $\phi_x(s_x) = t_x$. Αφού η ϕ_x είναι 1-1, αυτό το s_x είναι μοναδικά καθορισμένο. Επιλέγουμε μια ανοιχτή περιοχή V του x κι ένα $s_V \in \mathcal{F}(V)$ τέτοιο ώστε το φύτρο του s_V στο x να είναι s_x. Τότε υπάρχει $W \subseteq U \cap V$ ώστε $\rho^{\mathcal{G}}_{W,V}(\phi_V(s_V)) = \rho^{\mathcal{G}}_{W,U}(t)$ (καθώς τα $\phi_V(s_V), t$ έχουν κοινό φύτρο στο x). Συνεπώς παίρνουμε ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i \in I}$ του U και μοναδικά καθορισμένα $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ (θυμίζουμε ότι η ϕ_U είναι 1-1) τέτοια ώστε $\phi_{U_i}(s_i) = \rho^{\mathcal{G}}_{U_i,U}(t)$. Επειδή σε κάθε $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ η $\phi_{U_{ij}}$ είναι 1-1 έχουμε ότι $\rho_{U_{ij},U_i}(s_i) = \rho_{U_{ij},U_j}(s_j)$. Από την ιδιότητα **(F2)** του δεματιού $\mathcal{F}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $s \in \mathcal{F}(U)$ τέτοιο ώστε $\rho_{U_i,U}(s) = s_i, i \in I$, άρα $\rho^{\mathcal{G}}_{U_i,U}(\phi_U(s)) = \rho^{\mathcal{G}}_{U_i,U}(t)$ για κάθε $i \in I$. Τελικά από την ιδιότητα **(F1)** του δεματιού $\mathcal{G}$ παίρνουμε ότι $\phi_U(s) = t$, οπότε $\mathrm{Ker}\psi_U = \mathrm{Im}\phi_U$.

Από το παράδειγμα 1.1.10 έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}/\mathcal{J} \to 0. \tag{1.1}$$

Στο παράδειγμα αυτό δείξαμε ότι $\Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = k$. Παρατηρούμε επιπλέον ότι για $x \neq \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_\infty$ έχουμε $\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k,x}$, άρα το δεμάτι $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}/\mathcal{J}$ έχει στάχυ σε κάθε τέτοιο x την τετριμμένη ομάδα. Για τα στάχυα στα σημεία $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_\infty$ βλέπουμε ότι $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}/\mathcal{J})_{\mathfrak{p}_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k,\mathfrak{p}_i}/\mathcal{J}_{\mathfrak{p}_i} \cong k$, όπου $i \in \{0, \infty\}$. Άρα τα στάχυα στα σημεία $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_\infty$ είναι k και στα υπόλοιπα σημεία τα στάχυα είναι 0 (εξ αιτίας αυτών το δεμάτι $\mathcal{J}$ καλείται *δεμάτι-ουρανοξύστης*). Έτσι $\Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}/\mathcal{J}) \cong k \oplus k$. Αυτό σημαίνει ότι ο ομομορφισμός

$$k \cong \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) \to \Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}/\mathcal{J}) \cong k \oplus k$$

δεν μπορεί να είναι επί. Επομένως η ακρίβεια στην τελευταία θέση της βραχείας ακριβούς ακολουθίας (1.1) ενδεχομένως να «χάνεται» όταν πάμε στις αντίστοιχες ακολουθίες αβελιανών ομάδων των δεματιών. □

1.2 Σχεδόν-συναφή δεμάτια και συναφή δεμάτια

Μέχρι στιγμής αναφερόμασταν μόνο σε δεμάτια αβελιανών ομάδων, σ' αυτήν την ενότητα όμως θα αναφερθούμε σε δεμάτια $\mathcal{O}_X$-προτύπων. Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει μια (αρκετά ευρεία αλλά με ιδιαίτερα «καλές» ιδιότητες) κατηγορία τέτοιων δεματιών, τα σχεδόν-συναφή δεμάτια. Κάποια από αυτά θα τα ονομάσουμε συναφή δεμάτια κι έχουν ακόμα καλύτερες ιδιότητες. Εν γένει η θεωρία μπορεί να αναπτυχθεί πάνω από δαχτυλιδόχωρους (στα αγγλικά ringed spaces), ωστόσο εμείς θα αρκεστούμε στο να την αναπτύξουμε πάνω από σχήματα μιας και αυτά είναι που μας ενδιαφέρουν κυρίως.

1.2α΄ $\mathcal{O}_X$-πρότυπα

Εάν M είναι ένα πρότυπο πάνω από ένα αντιμεταθετικό δακτύλιο με μονάδα R, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δεμάτι $\widetilde{M}$ από R-πρότυπα πάνω από το αφινικό σχήμα $X = \mathrm{Spec}R$: Στα βασικά ανοιχτά X_f θέτουμε $\Gamma(X_f, \widetilde{M}) = M_f$, όπου M_f είναι ο εντοπισμός του M ως προς το πολλαπλασιαστικό σύνολο $\{1, f, f^2, f^3, \dots\}$. Στα τυχαία ανοιχτά ο ορισμός γίνεται με εντελώς αντίστοιχο τρόπο με αυτόν που ορίζουμε το δεμάτι δομής ενός αφινικού σχήματος. Σημειώνουμε ότι σε τυχαίο σημείο $\mathfrak{p} \in X$ το στάχυ του $\widetilde{M}$ είναι

$$\varinjlim_{\mathfrak{p} \in X_f} M_f = M_{\mathfrak{p}}.$$

Επιπλέον ισχύει ότι για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ το $\Gamma(U, \widetilde{M})$ είναι ένα $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-πρότυπο. Επίσης για ανοιχτά $V \subseteq U \subseteq X$ οι ομομορφισμοί περιορισμού κάνουν μεταθετικό το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U, \widetilde{M}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \widetilde{M}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(V, \widetilde{M}) & \longrightarrow & \Gamma(V, \widetilde{M})
\end{array}$$

Λέμε ότι το $\widetilde{M}$ είναι ένα δεμάτι από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα, ή ότι είναι το ίδιο ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.

Γενικεύουμε τώρα τον ορισμό για δεμάτια πάνω από οποιοδήποτε σχήμα X:

Ορισμός 1.2.1. *Ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων $\mathcal{F}$ πάνω από ένα σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$ λέγεται* $\mathcal{O}_X$-πρότυπο *ή* δεμάτι από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα, *αν για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ το $\mathcal{F}(U)$ είναι ένα $\mathcal{O}_X(U)$-πρότυπο τέτοιο ώστε για ανοιχτά $V \subseteq U \subseteq X$ το διάγραμμα*

$$\begin{CD} \mathcal{O}_X)(U) \times \mathcal{F}(U) @>>> \mathcal{F}(U) \\ @VVV @VVV \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) @>>> \mathcal{F}(V) \end{CD}$$

να είναι μεταθετικό, όπου οι οριζόντιες απεικονίσεις υποδεικνύουν τις δομές των $\mathcal{O}_X(U)$ και $\mathcal{O}_X(V)$-προτύπων των $\mathcal{F}(U)$ και $\mathcal{F}(V)$ αντίστοιχα. Ένα προδεμάτι $\mathcal{O}_X$-προτύπων *ορίζεται ομοίως μέσω ενός προδεματιού αβελιανών ομάδων.*

Παρατήρηση 1.2.2. *Σημειώνουμε ότι στον παραπάνω ορισμό δεν έπαιξε κάποιον ουσιαστικό ρόλο το γεγονός ότι χρησιμοποιήσαμε το δεμάτι δομής ενός σχήματος. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε ένα οποιοδήποτε δεμάτι αντιμεταθετικών δακτυλίων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο, τότε μπορούμε να ορίσουμε πάνω από αυτόν τον τοπολογικό χώρο δεμάτια προτύπων πάνω από αυτούς τους δακτύλιους όπως κάναμε παραπάνω.*

Παρατηρούμε ότι για τυχαίο $x \in X$ το στάχυ $\mathcal{F}_x$ του $\mathcal{F}$ στο x είναι ένα $\mathcal{O}_{X,x}$-πρότυπο. Συγκεκριμένα αν τα $s \in \mathcal{O}_X(U)$ και $t \in \mathcal{F}(V)$ $(x \in U \cap V)$ επάγουν στους δακτύλιους φύτρων στοιχεία $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ και $f \in \mathcal{F}_x$ αντίστοιχα, τότε θέτουμε $\hat{s} = \rho_{U\cap V,U}(s)$ και $\hat{t} = \rho^{\mathcal{F}}_{U\cap V,V}(t)$. Τότε ορίζεται καλά δομή $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπου στο $\mathcal{F}_x$ αν θέσουμε $a \cdot f \coloneqq (\hat{s} \cdot \hat{t})_x$, όπου $(\hat{s} \cdot \hat{t})_x$ είναι το φύτρο στο x του στοιχείου $\hat{s} \cdot \hat{t} \in \mathcal{F}(W)$.

Ορισμός 1.2.3. *Αν $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ είναι δύο $\mathcal{O}_X$-πρότυπα και $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι ένας μορφισμός δεματιών αβελιανών ομάδων, τότε αυτός είναι* μορφισμός $\mathcal{O}_X$-προτύπων *αν για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ το διάγραμμα*

$$\begin{CD} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) @>{(id_{\mathcal{O}_X(U)}, \phi_U)}>> \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{G}(U) \\ @VVV @VVV \\ \mathcal{F}(U) @>{\phi_U}>> \mathcal{G}(U) \end{CD}$$

είναι μεταθετικό. Ο επαγόμενος ομομορφισμός στα στάχυα $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ είναι ένας ομομορφισμός $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπων. Το σύνολο των μορφισμών $\mathcal{O}_X$-προτύπων μεταξύ του $\mathcal{F}$ και του $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Παρατήρηση 1.2.4. (i) *Το $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ είναι ένα $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-πρότυπο.*

(ii) *Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο πάνω από το X και $U \subseteq X$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολό του, τότε*

$$Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{F}|_U) \cong \mathcal{F}(U)$$

(για παράδειγμα, ένας φυσικός ισομορφισμός είναι αυτός που στέλνει τον τυχαίο μορφισμό $\mathcal{O}_X|_U$-προτύπων φ στο $\varphi_U(1)$).

Η δεματιοποίηση ορίστηκε στην υποενότητα 1.1α΄ για οποιοδήποτε προδεμάτι αβελιανών ομάδων. Άρα αν έχουμε ένα προδεμάτι $\mathcal{O}_X$-προτύπων τότε το ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ όπως ορίστηκε είναι ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων που έχει την καθολική ιδιότητα που περιγράψαμε (πρόταση 1.1.4), ωστόσο δεν ξέρουμε ακόμα αν είναι δεμάτι $\mathcal{O}_X$-προτύπων. Αυτό μας εξασφαλίζει το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 1.2.5. *Αν $\mathcal{G}$ είναι ένα προδεμάτι $\mathcal{O}_X$-προτύπων, τότε η δεματιοποίησή του ${}^{\alpha}\mathcal{G}$ είναι ένα δεμάτι $\mathcal{O}_X$-προτύπων.*

Απόδειξη. Έστω ανοιχτό $U \subseteq X$. Θα δείξουμε ότι το ${}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$ όπως ορίστηκε στην πρώτη ενότητα είναι ένα $\mathcal{O}_X(U)$-πρότυπο. Έστω $b \in \mathcal{O}_X(U)$ κι έστω $\{s(x)\}_{x\in U} \in {}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$. Τότε ορίζουμε $b \cdot \{s(x)\} := \{b_x \cdot s(x)\}_{x\in U}$, όπου b_x είναι το φύτρο του b στο x. Για τυχαίο $x \in U$ επιλέγουμε ανοιχτό $V \subseteq U, x \in V$ και $t \in \mathcal{G}(V)$ τέτοια ώστε $t_y = s(y)$ για κάθε $y \in V$. Τότε έχουμε $\widetilde{t} = \rho_{V,U}(b) \cdot t \in \mathcal{G}(V)$ κι έχουμε $\widetilde{t}_y = b_y \cdot s(y)$ για κάθε $y \in V$. Επομένως παίρνουμε $b \cdot \{s(x)\} \in {}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$, όπως θέλαμε. Με αυτήν την πράξη το ${}^{\alpha}\mathcal{G}(U)$ αποκτά δομή $\mathcal{O}_X(U)$-προτύπου. Η συμβατότητα αυτής της δομής με τους ομομορφισμούς περιορισμού αποδεικνύεται εύκολα. □

Πόρισμα 1.2.6. *Ο πυρήνας, η εικόνα, κι ο συμπυρήνας ενός μορφισμού $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ είναι $\mathcal{O}_X$-πρότυπα.*

Απόδειξη. Για ένα τυχαίο ανοιχτό $U \subseteq X$ παίρνουμε τα $\mathcal{O}_X(U)$-πρότυπα $\mathrm{Ker}\phi_U$, $\mathrm{Im}\phi_U$, $\mathrm{Coker}\phi_U$ που είναι συμβατά με τους ομομορφισμούς περιορισμού. Επομένως ο $\mathrm{Ker}\phi$ είναι ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο κι από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε ότι και τα $\mathrm{Im}\phi, \mathrm{Coker}\phi$ είναι $\mathcal{O}_X$-πρότυπα. □

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιήσαμε τη δεματιοποίηση (της οποίας η καθολική ιδιότητα ισχύει κατά αντίστοιχο τρόπο όταν έχουμε προδεμάτια και δεμάτια από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα) για να ορίσουμε κάποιες έννοιες κεντρικής σημασίας για τη μελέτη που θέλουμε να κάνουμε, θα τη χρησιμοποιήσουμε πάλι, αυτή τη φορά για να κατασκευάσουμε και $\mathcal{O}_X$-πρότυπα.

Ορισμός 1.2.7. (i) *Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ δεμάτια αβελιανών ομάδων. Αν για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ θεωρήσουμε τις αβελιανές ομάδες $\mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$, τότε αυτές σχηματίζουν ένα δεμάτι. Το δεμάτι αυτό λέγεται* ευθύ άθροισμα *των $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ και το συμβολίζουμε με $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Αν επιπλέον τα $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ είναι $\mathcal{O}_X$-πρότυπα, τότε και το ευθύ άθροισμά τους είναι επίσης $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Συχνά θα γράφουμε $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ ή $\mathcal{O}_X^n$ αντί για $\underbrace{\mathcal{O}_X \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X}_{n}$.*

(ii) *Αν ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$ είναι ισόμορφο με το $\mathcal{O}_X^n$ για κάποιο n, τότε το $\mathcal{F}$ λέγεται* ελεύθερο πρότυπο τάξης *n.*

(iii) *Αν για ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$ υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i\in I}$ του X τέτοιο ώστε για κάθε $i \in I$ ο περιορισμός $\mathcal{F}|_{U_i}$ του $\mathcal{F}$ στο U_i να είναι ένα ελεύθερο πρότυπο τάξης n πάνω από το $\mathcal{O}_{U_i} = \mathcal{O}_X|_{U_i}$, τότε το $\mathcal{F}$ λέγεται* τοπικά ελεύθερο πρότυπο τάξης *n ή* τοπικά ελεύθερο δεμάτι τάξης *n. Για $n = 1$ ένα ελεύθερο δεμάτι τάξης 1 λέγεται* αντιστρέψιμο δεμάτι *πάνω από το X.*

(iv) *Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ δύο $\mathcal{O}_X$-πρότυπα κι έστω ανοιχτό $U \subseteq X$. Η συλλογή των $\mathcal{O}_X(U)$-προτύπων $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$, $U \subseteq X$, αποτελεί ένα προδεμάτι από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα. Το δεμάτι που αντιστοιχεί σ' αυτό το προδεμάτι μέσω της δεματιοποίησης λέγεται* τανυστικό γινόμενο *των $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$, και συμβολίζεται με $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. Αυτό το τανυστικό γινόμενο είναι επίσης ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.*

Τα τοπικά ελεύθερα δεμάτια (και ειδικά τα αντιστρέψιμα δεμάτια) είναι αντικείμενα που εμφανίζονται πολύ συχνά στην Αλγεβρική Γεωμετρία με αρκετά φυσιολογικό τρόπο. Όπως θα δούμε στο ακόλουθο παράδειγμα, υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα τοπικά ελεύθερα δεμάτια και τα δεμάτια τοπικών τομών διανυσματικών δεσμών πάνω από ένα σχήμα (όλα αυτά ορίζονται στο παράδειγμα).

Παράδειγμα 1.2.8. *Ορίζουμε* διανυσματική δέσμη τάξης n *πάνω από ένα σχήμα* X *να είναι ένας μορφισμός σχημάτων* $f : W \to X$ *που ικανοποιεί τις δύο ακόλουθες συνθήκες:*

(V1) *Υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα* $\{U_i\}_{i\in I}$ *του* X *ώστε για κάθε* $i \in I$ *να υπάρχει ένας ισομορφισμός σχημάτων πάνω από το* U_i

$$\phi_i : f^{-1}(U_i) \to \mathbb{A}^n_{U_i} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathit{Spec}\mathbb{Z}} U_i,$$

όπου $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} := \mathit{Spec}\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ *(παρατηρούμε εδώ την αναλογία με τις τοπικές τετριμμενοποιήσεις - στα αγγλικά λέγονται local trivializations).*

(V2) *Όταν* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, *για αυθαίρετο αφινικό σχήμα* $V = \mathit{Spec}R \subseteq U_i \cap U_j$, *ο ισομορφισμός* $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}|_{\mathbb{A}^n_V} : \mathbb{A}^n_V \to \mathbb{A}^n_V$ *είναι ο ισομορφισμός σχημάτων που επάγεται από έναν γραμμικό αυτομορφισμό*

$$\begin{aligned} \theta_{ij} : R[x_1, \dots, x_n] &\to R[x_1, \dots, x_n] \\ x_k &\mapsto \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l, a_{kl} \in R. \end{aligned}$$

Μια διανυσματική δέσμη τάξης 1 ονομάζεται δέσμη γραμμών *(στα αγγλικά line bundle).*

Έστω $f : W \to X$ *μια διανυσματική δέσμη τάξης* n. *Για ένα αυθαίρετο ανοιχτό* $U \subseteq X$ *ορίζουμε*

$$\mathcal{F}(U) := \{s : U \to W \mid \text{ο } s \text{ είναι μορφισμός σχημάτων τέτοιος ώστε } f \circ s = id_U\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathcal{F}(U)$ *ονομάζονται* τομές *του μορφισμού* $f : W \to X$ *πάνω από το* U. *Για κάθε αφινικό ανοιχτό* $U \subseteq U_i$, $i \in I$, *τέτοιο ώστε* $U = \mathit{Spec}A$, *μπορούμε να ταυτίσουμε το* $f^{-1}(U)$ *με το* $\mathbb{A}^n_U = \mathit{Spec}A[x_1, \dots, x_n]$ *(αυτή η ισότητα προκύπτει από τις ιδιότητες του τανυστικού γινομένου και το γεγονός ότι το ινώδες γινόμενο αφινικών σχημάτων πάνω από ένα αφινικό σχήμα* $\mathit{Spec}B$ *«είναι το ίδιο» με το τανυστικό γινόμενο των δακτυλίων των ολικών τομών τους - στα αγγλικά global sections - ως* B*-άλγεβρες) ως σχήματα πάνω από το* U. *Αφού* $s(U) \subseteq f^{-1}(U)$, *αυτή η ταύτιση συνεπάγεται ότι μια τομή* $s : U \to W \in \mathcal{F}(U)$ *αντιστοιχεί σ' έναν ομομορφισμό* A*-αλγεβρών* $\sigma : A[x_1, \dots, x_n] \to A$. *Επιπλέον, ένας τέτοιος* σ *χαρακτηρίζεται πλήρως από τις τιμές* $a_i = \sigma(x_i) \in A, i \in \{1, \dots, n\}$. *Τελικά υπάρχει μια αντιστοιχία (σαν σύνολα) μεταξύ του* $\mathcal{F}(U)$ *και του* $A^{\oplus n}$ *η οποία με τη σειρά της ορίζει μια δομή ελεύθερου* A*-προτύπου πάνω στο* $\mathcal{F}(U)$. *Για* $U \subseteq U_i \cap U_j$, *επάγονται δύο δομές ελεύθερου* A*-προτύπου πάνω στο* $\mathcal{F}(U)$, *ωστόσο από την ιδιότητα* ***(V2)*** *αυτές οι δομές είναι ισόμορφες.*

Για γενικό ανοιχτό $U \subseteq X$, *επιλέγουμε ένα ανοιχτό κάλυμμα από αφινικά υποσύνολα* $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *του* U *ώστε κάθε* V_λ *να περιέχεται σε κάποιο* U_i. *Τότε για* $s, t \in \mathcal{F}(U)$ *ορίζουμε* $s + t$ *να είναι το* $\rho_{V_\lambda,U}(s) + \rho_{V_\lambda,U}(t)$ *πάνω στο* V_λ, *και για* $c \in \mathcal{O}_X(U)$ *το* $c \cdot s$ *να είναι το* $\rho_{V_\lambda,U}(c) \cdot \rho_{V_\lambda,U}(s)$ *πάνω στο* V_λ. *Έτσι το* $\mathcal{F}(U)$ *αποκτά δομή* $\mathcal{O}_X(U)$*-προτύπου, κι έτσι το* $\mathcal{F}$ *γίνεται* $\mathcal{O}_X$*-πρότυπο. Μάλιστα απ' όλη την παραπάνω μελέτη προκύπτει ότι το* $\mathcal{F}$ *είναι ένα τοπικά ελεύθερο δεμάτι τάξης* n. *Αυτό το δεμάτι καλείται* δεμάτι τοπικών τομών *της διανυσματικής δέσμης* $f : W \to X$.

Αντιστρόφως, αποδεικνύεται ότι ένα τοπικά ελεύθερο δεμάτι τάξης n *πάνω από το* X *είναι ισομορφικό ως* $\mathcal{O}_X$*-πρότυπο μ' ένα δεμάτι τοπικών τομών κάποιας διανυσματικής δέσμης τάξης* n *πάνω από το* X. *Δηλαδή τελικά τα τοπικά ελεύθερα δεμάτια πάνω από ένα σχήμα αντιστοιχούν με τον τρόπο που περιγράψαμε στις διανυσματικές δέσμες πάνω από αυτό το σχήμα και συγκεκριμένα τα αντιστρέψιμα δεμάτια αντιστοιχούν στις δέσμες γραμμών.*

Πρόταση 1.2.9. *Έστω $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ δεμάτια από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα. Τότε για ανοιχτά $U \subseteq X$, το προδεμάτι $Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ είναι δεμάτι. Αυτό το δεμάτι συμβολίζεται με $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Αν το $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο τάξης n, τότε το $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ είναι ισόμορφο με το $\mathcal{G}^{\oplus n}$ ως $\mathcal{O}_X$-πρότυπα. Επιπλέον, από μια ακριβή ακολουθία από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα*

$$0 \to \mathcal{H}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{H}_2 \xrightarrow{g} \mathcal{H}_3 \to 0,$$

παίρνουμε ακριβείς ακολουθίες

$$0 \to \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_3, \mathcal{F}) \xrightarrow{g^*} \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_2, \mathcal{F}) \xrightarrow{f^*} \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}),$$

$$0 \to \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}_1) \xrightarrow{f_*} \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}_2) \xrightarrow{g_*} \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}_3).$$

Απόδειξη. Για συντομία θέτουμε $\mathcal{H}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Για ανοιχτά $V \subseteq U \subseteq X$ ο ομομορφισμός περιορισμού του $\mathcal{H}$ είναι ο φυσικός περιορισμός ενός μορφισμού δεματιών. Βλέπουμε ότι η συλλογή των $\mathcal{H}(U)$ με τους ομομορφισμούς περιορισμού που περιγράψαμε αποτελεί ένα προδεμάτι από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα.

Έστω $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτό κάλυμμα ενός ανοιχτού $U \subseteq X$. Υποθέτουμε ότι για $\phi \in \mathcal{H}(U)$ και για κάθε $i \in I$ ισχύει ότι $\phi_i = \rho^{\mathcal{H}}_{U_i,U}(\phi) = 0$. Θα δείξουμε ότι $\phi = 0$: Έστω ανοιχτό $V \subseteq U$ κι έστω $s \in \mathcal{F}(V)$. Θέτουμε $V_i = V \cap U_i$. Τότε

$$\phi_{iV_i}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_i,V}(s)) = 0, \quad \text{με} \quad \phi_{iV_i}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_i,V}(s)) = \phi_{V_i}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_i,V}(s)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_i,V}(\phi_V(s)),$$

για κάθε $i \in I$, άρα $\phi_V(s) = 0$. Συνεπώς $\phi = 0$.

Στη συνέχεια έστω $\phi_i \in \mathcal{H}(U_i), i \in I$ τέτοια ώστε $\rho^{\mathcal{H}}_{U_{ij},U_i}(\phi_i) = \rho^{\mathcal{H}}_{U_{ij},U_j}(\phi_j) = \phi_{ij}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\phi \in \mathcal{H}(U)$ ώστε για κάθε $i \in I$ να ισχύει ότι $\rho^{\mathcal{H}}_{U_i,U}(\phi) = \phi_i$: Έστω ανοιχτό $V \subseteq U$ κι έστω $s \in \mathcal{F}(V)$. Έστω $V_i = V \cap U_i$ όπως πριν κι έστω $s_i = \rho^{\mathcal{F}}_{V_i,V}(s)$. Πρέπει να ορίσουμε το $\phi_V(s)$ με τέτοιον τρόπο ώστε για κάθε $i \in I$ να ισχύει ότι $(\rho^{\mathcal{H}}_{U_i,U}(\phi))_{V_i}(s_i) = \phi_{iV_i}(s_i)$. Θέτουμε λοιπόν $t_i = \phi_{iV_i}(s_i), i \in I$. Τότε παίρνουμε ότι $\rho^{\mathcal{G}}_{V_{ij},V_i}(t_i) = \phi_{ijV_{ij}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_{ij},V_i}(s_i)) = \phi_{ijV_{ij}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_{ij},V}(s)) = \phi_{ijV_{ij}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_{ij},V_j}(s_j)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_{ij},V_j}(t_j)$, κι άρα υπάρχει μοναδικό $t \in \mathcal{G}(V)$ ώστε $\rho^{\mathcal{G}}_{V_i,V}(t) = t_i$. Θέτουμε $\phi_V(s) = t$ και μπορούμε να ελέγξουμε ότι ισχύει το ζητούμενο. Τελικά το $\mathcal{H}$ είναι όντως δεμάτι.

Τώρα, αν $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus n}$, τότε έχουμε ότι

$$\mathcal{H}(U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}((\mathcal{O}_X|_U)^{\oplus n}, \mathcal{G}|_U) \cong \mathcal{G}(U)^{\oplus n},$$

δηλαδή $\mathcal{H} \cong \mathcal{G}^{\oplus n}$.

Τέλος θα δείξουμε την ακρίβεια της ακολουθίας

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_3, \mathcal{F}) \xrightarrow{g^*} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_2, \mathcal{F}) \xrightarrow{f^*} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_1, \mathcal{F})$$

κι η ακρίβεια της άλλης αποδεικνύεται παρομοίως. Έστω ανοιχτό $U \subseteq X$ κι έστω $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{H}_3|_U, \mathcal{F}|_U)$ τέτοιος ώστε $\phi \circ g|_U = 0$. Θα δείξουμε ότι $\phi = 0$: Έστω ανοιχτό $V \subseteq U$ και $t \in \mathcal{H}_3(V)$. Επειδή η g είναι επί, $\mathrm{Im}g = \mathcal{H}_3$, οπότε (από τον ορισμό της δεματιοποίησης) μπορούμε να βρούμε ανοιχτό κάλυμμα $\{W_i\}_{i \in I}$ του V και $s_i \in \mathcal{H}_2(W_i)$ τέτοια ώστε $g_{W_i}(s_i) = \rho_{W_i,V}(t)$. Τότε θα έχουμε $\phi_{W_i}(\rho_{W_i,V}(t)) = \phi_{W_i}(g_{W_i}(s_i)) = (\phi \circ g)|_{W_i}(s_i) = 0$, οπότε $\rho_{W_i,V}(\phi_V(t)) = 0$ για κάθε $i \in I$, άρα $\phi_V(t) = 0$, άρα $\phi = 0$. Επομένως η g^* είναι 1-1.

Έπειτα έστω $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{H}_2|_U, \mathcal{F}|_U)$ τέτοιο ώστε $\psi \circ f|_U = 0$. Τότε ο ψ είναι ταυτοτικά μηδενικός μορφισμός πάνω στην $\mathrm{Im}f|_U$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τον ψ ως στοιχείο του $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}((\mathcal{H}_2/\mathrm{Im}f)|_U, \mathcal{F}|_U)$. Η ακριβής ακολουθία

$$0 \to \mathcal{H}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{H}_2 \xrightarrow{g} \mathcal{H}_3 \to 0$$

συνεπάγεται ότι $\mathcal{H}_3 \cong \mathcal{H}_2/\mathrm{Ker}g \cong \mathcal{H}_2/\mathrm{Im}f$, δηλαδή η g επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ $\mathcal{H}_3$ και $\mathcal{H}_2/\mathrm{Im}f$. Άρα τελικά μπορώ να βρω $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{H}_3|_U, \mathcal{F}|_U)$ τέτοιον ώστε $\psi = \phi \circ g|_U$. Συνεπώς έχουμε $\mathrm{Im}g^* = \mathrm{Ker}f^*$, όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 1.2.10. *Η προηγούμενη πρόταση ενισχύει την ομοιότητα μεταξύ των δεματιών και των προτύπων. Αναφέρουμε δύο ακόμα παραδείγματα αυτής της ομοιότητας χωρίς απόδειξη (μπορούν να αποδειχθούν θεωρώντας τους αναμενόμενους μορφισμούς δεματιών):*

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \oplus \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H}),$$
$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}) \cong \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \oplus \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}).$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε κι αποδεικνύουμε ιδιότητες του τανυστικού γινομένου δύο $\mathcal{O}_X$-προτύπων. Συγκεκριμένα θα δούμε πώς «υπολογίζονται» τα στάχυα του τανυστικού γινομένου κι επίσης θα δούμε πότε διατηρείται η ακρίβεια μιας ακολουθίας $\mathcal{O}_X$-προτύπων αν την πολλαπλασιάσουμε τανυστικά με ένα τυχαίο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο (αυτή η ιδιότητα είναι μια ακόμα ομοιότητα μεταξύ δεματιών και προτύπων).

Πρόταση 1.2.11. (i) *Το στάχυ $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$ στο x του τανυστικού γινομένου $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ των $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι ισόμορφο με το $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$ ως $\mathcal{O}_{X,x}$-πρότυπα.*

(ii) *Για την ακριβή ακολουθία από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα*

$$\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0,$$

ισχύει ότι η ακολουθία που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την τανυστικά (πάνω από το $\mathcal{O}_X$) με ένα τυχαίο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{G}$

$$\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \to \mathcal{F}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \to \mathcal{F}_3 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \to 0,$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. (i) Από τον ορισμό της δεματιοποίησης έχουμε ότι:

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

Για ένα ανοιχτό $U \subseteq X$ που περιέχει το x, ο ομομορφισμός $\mathcal{O}_X(U)$-προτύπων

$$\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$$

επάγει έναν ομομορφισμό $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπων

$$\phi : (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \to \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x.$$

Θα κατασκευάσουμε έναν διγραμμικό ομομορφισμό $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπων

$$\Psi : \mathcal{F}_x \times \mathcal{G}_x \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$$

ο οποίος θα επάγει έναν ομομορφισμό $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπων (μέσω της καθολικής ιδιότητας του τανυστικού γινομένου)

$$\psi : \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$$

ο οποίος θα είναι αντίστροφος του ϕ, δηλαδή οι ϕ και ψ θα είναι ισομορφισμοί, δίνοντας το ζητούμενο.

Έστω λοιπόν $f_x \in \mathcal{F}_x$ κι έστω $g_x \in \mathcal{G}_x$. Θεωρούμε ανοιχτό $U \subseteq X$ που περιέχει το x κι επιλέγουμε $f \in \mathcal{F}(U)$ και $g \in \mathcal{G}(U)$ τέτοια ώστε τα φύτρα των f και g στο x να είναι f_x και g_x αντίστοιχα. Θέτουμε τότε $\Psi(f_x, g_x)$ να είναι το φύτρο του $f \otimes g \in \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$, το οποίο είναι φυσικά στοιχείο του $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$. Το ότι ο Ψ είναι καλά ορισμένος προκύπτει από την παρατήρηση που κάναμε στην αρχή της απόδειξης (δηλαδή για τον ίδιο λόγο που και ο ϕ είναι καλά ορισμένος). Η απόδειξη της διγραμμικότητας του Ψ είναι μια απλή (και κουραστική) άσκηση. Επομένως παίρνουμε έναν (μοναδικό, λόγω καθολικής ιδιότητας) ομομορφισμό ψ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_x \times \mathcal{G}_x \arrow[rr] \arrow[dr, "\Psi"'] & & \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \arrow[dl, "\psi"] \\ & (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x & \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι $\phi(\Psi(f_x, g_x)) = f_x \otimes g_x$, οπότε $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Επίσης για $f \otimes g \in \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ έχουμε

$$\phi((f \otimes g)_x) = f_x \otimes g_x \in \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x,$$

κι επίσης $\psi(f_x \otimes g_x) = (f \otimes g)_x$, οπότε $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Άρα οι ϕ και ψ είναι όντως ισομορφισμοί $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπων.

(ii) Από την Αντιμεταθετική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι αν έχουμε μια ακριβή ακολουθία από R-πρότυπα

$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0,$$

και την πολλαπλασιάσουμε τανυστικά πάνω από τον R με ένα R-πρότυπο N, τότε παίρνουμε πάλι μια ακριβή ακολουθία

$$M_1 \otimes_R N \to M_2 \otimes_R N \to M_3 \otimes_R N \to 0.$$

Όπως δείξαμε ισχύει ότι $(F_i \otimes_{\mathcal{O}_X} G)_x = F_{i,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$ κι επειδή η ακρίβεια μιας ακολουθίας δεματιών χαρακτηρίζεται πλήρως από την ακρίβεια στα στάχυα της, το ζητούμενο έπεται από την παρατήρηση που κάναμε για τη διατήρηση της ακρίβειας μιας ακολουθίας (της συγκεκριμένης μορφής που αναφέραμε) από πρότυπα μετά από τανυστικό πολλαπλασιασμό.

□

Ένα χαρακτηριστικό αντικείμενο ενός σχήματος X είναι η αποκαλούμενη *ομάδα Picard* του σχήματος και αυτήν ορίζουμε στο ακόλουθο παράδειγμα (σ' αυτό θα φάνει πάλι η χρησιμότητα των αντιστρέψιμων δεματιών).

Παράδειγμα 1.2.12. *Για αντιστρέψιμα δεμάτια $\mathcal{L}$ και $\mathcal{M}$ πάνω από σχήμα X, το $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ είναι επίσης αντιστρέψιμο δεμάτι. Επίσης ισχύει ότι $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X = \mathcal{L}$. Θέτουμε τώρα $\mathcal{L}^{-1} := \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Ορίζουμε τον αναμενόμενο μορφισμό $\mathcal{O}_X$-προτύπων μέσω των ομομορφισμών $\mathcal{O}_X(U)$-προτύπων για ανοιχτά $U \subseteq X$*

$$\begin{aligned} \phi_U : \mathcal{L}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1}(U) &\to \mathcal{O}_X(U), \\ \alpha \otimes f &\mapsto f(\alpha). \end{aligned}$$

Για ένα αφινικό ανοιχτό $U \subseteq X$ που είναι τέτοιο ώστε $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$, παίρνουμε

$$\mathcal{L}^{-1}|_U \cong \underline{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U) \cong \mathcal{O}_U.$$

Προκύπτει ότι ο ϕ_U είναι ένας ισομορφισμός $\mathcal{O}_X(U)$-προτύπων, άρα ο ϕ είναι ισομορφισμός $\mathcal{O}_X$-προτύπων, δηλαδή $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$.

Επομένως, οι κλάσεις ισόμορφων αντιστρέψιμων δεματιών $\mathcal{O}_X$-προτύπων με πράξη το τανυστικό γινόμενο δεματιών σχηματίζουν ομάδα (με ουδέτερο στοιχείο το $\mathcal{O}_X$). Αυτή η ομάδα ονομάζεται ομάδα Picard *του σχήματος X και τη συμβολίζουμε με $PicX$. Συμβολίζουμε επίσης με $\mathcal{L}^{\otimes n}$ το δεμάτι $\underbrace{\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}}_{n}$ και για $n = -m, m \geq 1$ γράφουμε $\mathcal{L}^{\otimes n}$ για το δεμάτι $(\mathcal{L}^{-1})^{\otimes m}$. Τέλος ορίζουμε $\mathcal{L}^0 := \mathcal{O}_X$.*

Ορισμός 1.2.13. *Έστω ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{G}$. Αν για μια αυθαίρετη βραχεία ακριβή ακολουθία $\mathcal{O}_X$-προτύπων*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

η επαγόμενη βραχεία ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \to \mathcal{F}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \to \mathcal{F}_3 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \to 0$$

είναι κι αυτή ακριβής, τότε το $\mathcal{G}$ καλείται $\mathcal{O}_X$-επίπεδο *(στα αγγλικά $\mathcal{O}_X$-flat) δεμάτι (ή πρότυπο).*

Αυτός ο ορισμός είναι σε απόλυτη αναλογία με τον ορισμό ενός επίπεδου προτύπου. Οι ομοιότητες συνεχίζονται και στις εξής ιδιότητες: Το $\mathcal{O}_X$ είναι $\mathcal{O}_X$-επίπεδο δεμάτι διότι $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F}$ για κάθε $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$. Επίσης ένα ελεύθερο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο είναι $\mathcal{O}_X$-επίπεδο δεμάτι διότι $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\oplus n} \cong \mathcal{F}^{\oplus n}$ κι επίσης η ακρίβεια μιας ακολουθίας δεν επηρεάζεται αν την αθροίσουμε ευθέως με τον εαυτό της. Γενικεύουμε τα παραπάνω με το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 1.2.14. (i) *Ένα τοπικά ελεύθερο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο είναι $\mathcal{O}_X$-επίπεδο δεμάτι.*

(ii) *Ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{G}$ είναι $\mathcal{O}_X$-επίπεδο αν και μόνο αν το στάχυ $\mathcal{G}_x$ είναι ένα $\mathcal{O}_{X,x}$-επίπεδο πρότυπο για κάθε σημείο $x \in X$.*

Απόδειξη. Το (ii) συνεπάγεται το (i) διότι αν $\mathcal{G}$ είναι ένα τοπικά ελεύθερο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο, τότε το στάχυ $\mathcal{G}_x$ στο τυχαίο $x \in X$ θα είναι $\mathcal{O}_{X,x}$-επίπεδο πρότυπο (από το (ii)), άρα το $\mathcal{G}$ θα είναι $\mathcal{O}_X$-επίπεδο δεμάτι (πάλι από το (ii)).

Για να δείξουμε το (ii) αρκεί να θυμηθούμε ότι $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$ κι ότι η ακρίβεια μιας ακολουθίας δεματιών χαρακτηρίζεται από την ακρίβεια της ακολουθίας των σταχυών τους σε τυχαίο σημείο $x \in X$. □

1.2β΄ Σχεδόν-συναφή δεμάτια

Τα πεπερασμένα παραγόμενα και τα πεπερασμένα παριστώμενα πρότυπα πάνω από ένα αντιμεταθετικό δακτύλιο με μονάδα R είναι πολύ σημαντικά για την Αντιμεταθετική Άλγεβρα. Υπενθυμίζουμε ότι ένα R-πρότυπο καλείται *πεπερασμένα παριστώμενο* αν έχει πεπερασμένη παράσταση, δηλαδή αν είναι ισομορφικό με τον συμπυρήνα ενός ομομορφισμού ελεύθερων R-προτύπων πεπερασμένης τάξης $\phi : R^{\oplus m} \to R^{\oplus n}$. Αυτές οι έννοιες μεταφέρονται με φυσιολογικό τρόπο και στην περίπτωση των δεματιών $\mathcal{O}_X$-προτύπων όπου έχουμε επιπλέον τις συγγενικές έννοιες των σχεδόν-συναφών και των συναφών δεματιών που θα ορίσουμε στη συνέχεια. Από εδώ και στο εξής τον περιορισμό του δεματιού $\mathcal{O}_X|_U$ στο ανοιχτό $U \subseteq X$ θα τον συμβολίζουμε απλώς με $\mathcal{O}_U$.

Ορισμός 1.2.15. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U \subseteq X$ του x τέτοια ώστε η ακολουθία $\mathcal{O}_X$-προτύπων*

$$\mathcal{O}_U^{\oplus I} \to \mathcal{O}_U^{\oplus J} \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

να είναι ακριβής τότε το $\mathcal{F}$ καλείται σχεδόν-συναφές δεμάτι. *Σημειώνουμε ότι τα I και J δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένα σύνολα και οι πληθάριθμοί τους ενδεχομένως να αλλάζουν για διαφορετικά σημεία x.*

Παρατήρηση 1.2.16. *Ο ορισμός ενός πεπερασμένα παριστώμενου προτύπου δίνεται ισοδύναμα ως εξής: Για έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο με μονάδα R, ένα R-πρότυπο M καλείται πεπερασμένα παριστώμενο αν υπάρχει ακριβής ακολουθία $R^{\oplus n} \to R^{\oplus m} \to M \to 0$, όπου $n, m \in \mathbb{N}$.*

Παρά την ομοιότητα, ο ορισμός του σχεδόν-συναφούς δεματιού δεν αντιστοιχεί στον ορισμό του πεπερασμένα παριστώμενου προτύπου ακριβώς διότι τα I και J μπορεί να είναι άπειρα σύνολα. Στην πραγματικότητα οποιοδήποτε R-πρότυπο M εμφανίζεται σε μια ακριβή ακολουθία $R^{\oplus I} \to R^{\oplus J} \to M \to 0$ όπου τα I, J είναι αυθαίρετα, ενώ αυτό δεν ισχύει για κάθε περιορισμό σε ανοιχτό υποσύνολο ενός μη-σχεδόν-συναφούς δεματιού.

Τελικά τα σχεδόν-συναφή δεμάτια θα δούμε ότι αντιστοιχούν στα δεμάτια που τοπικά (η σχεδόν-συνάφεια είναι εξ ορισμού μια τοπική ιδιότητα ενός δεματιού) επάγονται από κάποια πρότυπα πάνω από κάποιους δακτύλιους του δεματιού δομής.

Παράδειγμα 1.2.17. (i) *Το δεμάτι $\mathcal{O}_X$ είναι προφανώς σχεδόν-συναφές.*

(ii) *Έστω $X = SpecR$ ένα αφινικό σχήμα. Δοθέντος ενός R-προτύπου M θεωρούμε το επαγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\widetilde{M}$ (όπως το ορίσαμε στην αρχή της υποενότητας 1.2α'). Από δύο R-πρότυπα κι έναν ομομορφισμό $\phi : M \to N$ μεταξύ τους μπορούμε να ορίσουμε έναν μορφισμό $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\widetilde{\phi} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$. Επίσης για οποιοδήποτε σημείο $\mathfrak{p} \in SpecR$ ο επαγόμενος (από τον $\widetilde{\phi}$) ομομορφισμός στα στάχυα των $\widetilde{M}, \widetilde{N}$ είναι ακριβώς ο εντοπισμένος ομομορφισμός $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$. Είναι άσκηση Αντιμεταθετικής Άλγεβρας η απόδειξη της διατήρησης της ακρίβειας μιας ακολουθίας R-προτύπων μέσω του εντοπισμού σ' ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p} \in SpecR$, κι επειδή η ακριβεία μιας ακολουθίας δεματιών χαρακτηρίζεται από την ακρίβεια των ακολουθιών των σταχυών στα διάφορα σημεία του σχήματος συμπεραίνουμε ότι μια ακριβής ακολουθία*

$$\cdots \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to \cdots$$

επάγει μια ακριβή ακολουθία

$$\cdots \to \widetilde{M_1} \to \widetilde{M_2} \to \widetilde{M_3} \to \cdots$$

των αντίστοιχων δεματιών πάνω από το αφινικό σχήμα X.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι το $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\widetilde{M}$ που καθορίζεται από ένα R-πρότυπο M είναι σχεδόν-συναφές διότι από την παρατήρηση 1.2.16 έχουμε ακριβή ακολουθία $R^{\oplus I} \to R^{\oplus J} \to M \to 0$ για κάποια I και J κι από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{O}_U^{\oplus I} \to \mathcal{O}_U^{\oplus J} \to \widetilde{M} \to 0$, μιας και έχουμε ότι $\widetilde{R} = \mathcal{O}_X$ και $\widetilde{R^{\oplus I}} = \mathcal{O}_X^{\oplus I}$ (εδώ για κάθε σημείο $x \in X$ η περιοχή του που ικανοποιεί τον ορισμό της σχεδόν-συνάφειας είναι όλο το αφινικό σχήμα X, ωστόσο αυτό δεν συμβαίνει πάντα αν το σχήμα δεν είναι αφινικό).

Όπως φαίνεται από το παράδειγμα 1.2.17(ii), στην περίπτωση των αφινικών σχημάτων τα δεμάτια $\mathcal{O}_X$-προτύπων που ορίζονται «φυσιολογικά» είναι σχεδόν-συναφή και στην πραγματικότητα αυτά είναι όλα τα σχεδόν-συναφή δεμάτια πάνω από ένα αφινικό σχήμα. Για να καταλήξουμε αργότερα σ' αυτό το συμπέρασμα, παραθέτουμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες των δεματιών, πάνω από αφινικά σχήματα, που επάγονται από κάποιο πρότυπο.

Πρόταση 1.2.18. *Έστω $(X, \mathcal{O}_X)$ αφινικό σχήμα που καθορίζεται από έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο με μονάδα R.*

(i) *Το $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\widetilde{M}$ που επάγεται από το R-πρότυπο M είναι σχεδόν-συναφές και για κάθε βασικό ανοιχτό $D(f) \subseteq X$ έχουμε ότι $\Gamma(D(f), \widetilde{M}) = M_f$, και συγκεκριμένα $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$.*

(ii) *Για έναν ομομορφισμό από R-πρότυπα $\phi : M \to N$, η απεικόνιση*

$$\begin{aligned}\Phi : Hom_R(M, N) &\to Hom_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})\\ \phi &\mapsto \widetilde{\phi}\end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός R-προτύπων.

(iii) *Για R-πρότυπα M και N έχουμε ισομορφισμούς $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} \cong \widetilde{M \oplus N}$ και $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \cong \widetilde{M \otimes_R N}$. Επιπλέον αν το M είναι πεπερασμένα παριστώμενο R-πρότυπο, έχουμε έναν ισομορφισμό*

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \cong \widetilde{Hom_R(M, N)}.$$

Απόδειξη. (i) Έχουμε ήδη ορίσει το $\widetilde{M}$ με τέτοιον τρόπο ώστε $\Gamma(D(f), \widetilde{M}) = M_f$ και $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$. Επίσης έχουμε δείξει ότι αυτό είναι σχεδόν-συναφές δεμάτι.

(ii) Ορίζουμε

$$\begin{aligned}\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) &\to \mathrm{Hom}_R(M, N)\\ f &\mapsto \phi := f_X.\end{aligned}$$

Είναι άμεσο ότι $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. Απ' την άλλη για $\mathfrak{p} \in X = \mathrm{Spec} R$, η f επάγει έναν ομομορφισμό $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$-προτύπων $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ μεταξύ των σταχυών στο $\mathfrak{p}$ (θυμίζουμε ότι $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$). Ο επαγόμενος από τον $\Psi(f) = \phi = f_X$ μορφισμός $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\widetilde{\phi} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ επάγει με τη σειρά του έναν $R_{\mathfrak{p}}$-ομομορφισμό $\widetilde{\phi}_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ στα στάχυα στο $\mathfrak{p}$. Παρατηρούμε ότι για $\frac{m}{s} \in M_{\mathfrak{p}}$, όπου $m \in M$ και $s \in R \setminus \mathfrak{p}$, ισχύει ότι

$$\widetilde{\phi}_{\mathfrak{p}}(\frac{m}{s}) = \frac{\phi(m)}{s} = \frac{f_X(m)}{s}.$$

Επίσης για τον $f_{\mathfrak{p}}$ έχουμε ότι

$$f_{\mathfrak{p}}(\frac{m}{s}) = f_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{s} \cdot \frac{m}{1}) = \frac{1}{s} f_{\mathfrak{p}}(\frac{m}{1}) = \frac{f_X(m)}{s},$$

δηλαδή $\widetilde{\phi}_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}}$. Άρα $\widetilde{\phi} = \widetilde{f_X} = f$, δηλαδή $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. Το ότι ο Φ είναι ομομορφισμός R-προτύπων είναι σχετικά εύκολο να το δούμε, άρα τελικά όντως ο Φ είναι ισομορφισμός.

(iii) Το δεμάτι $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N}$ σ' ένα βασικό ανοιχτό $D(f)$ αντιστοιχεί το $M_f \oplus N_f = (M \oplus N)_f$ (η απόδειξη αυτής της ισότητας είναι άσκηση Αντιμεταθετικής Άλγεβρας), κι από αυτό προκύπτει ότι $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} \cong \widetilde{M \oplus N}$.

Το δεμάτι $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$ είναι η δεματιοποίηση του προδεματιού που σ' ένα ανοιχτό $U \subseteq X$ αντιστοιχεί το $\widetilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \widetilde{N}(U)$ και συγκεκριμένα σ' ένα βασικό ανοιχτό $D(f)$ αντιστοιχεί το $M_f \otimes_{R_f} N_f = (M \otimes_R N)_f$ (η απόδειξη κι αυτής της ισότητας είναι άσκηση Αντιμεταθετικής Άλγεβρας). Άρα $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \cong \widetilde{M \otimes_R N}$.

Έστω τώρα ότι το M είναι πεπερασμένα παριστώμενο R-πρότυπο. Απ' τους ορισμούς των αντίστοιχων δεματιών, για τυχαίο βασικό ανοιχτό $D(f) \subseteq X$ έχουμε

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})(D(f)) = \mathrm{Hom}_{R_f}(M_f, N_f)$$

και

$$\widetilde{\mathrm{Hom}_R(M, N)}(D(f)) = (\mathrm{Hom}_R(M, N))_f,$$

άρα για το τελευταίο ζητούμενο της πρότασης αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός R_f-προτύπων

$$\alpha_M : \mathrm{Hom}_{R_f}(M_f, N_f) \to (\mathrm{Hom}_R(M, N))_f.$$

Αφού το M είναι πεπερασμένα παριστώμενο συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$R^{\oplus n} \xrightarrow{\phi} R^{\oplus m} \xrightarrow{\psi} M \to 0, \tag{1.2}$$

όπου n, m είναι φυσικοί αριθμοί. Αυτό συνεπάγεται ότι και η ακολουθία

$$R_f^{\oplus n} \xrightarrow{\phi_f} R_f^{\oplus m} \xrightarrow{\psi_f} M_f \to 0$$

είναι ακριβής (ο εντοπισμός διατηρεί την ακρίβεια ακολουθιών προτύπων - άσκηση Αντιμεταθετικής Άλγεβρας). Επομένως παίρνουμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{R_f}(M_f, N_f) \xrightarrow{\psi_f^*} \mathrm{Hom}_{R_f}(R_f^{\oplus m}, N_f) \xrightarrow{\phi_f^*} \mathrm{Hom}_{R_f}(R_f^{\oplus n}, N_f).$$

Από την άλλη, αν στην (1.2) περάσουμε πρώτα στα $\mathrm{Hom}(-, N)$ και μετά εφαρμόσουμε εντοπισμό στο f, τότε παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \to (\mathrm{Hom}_R(M, N))_f \xrightarrow{(\psi^*)_f} (\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus m}, N))_f \xrightarrow{(\phi^*)_f} (\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus n}, N))_f.$$

Έχουμε επίσης τους ισομορφισμούς

$$\mathrm{Hom}_{R_f}(R_f^{\oplus m}, N_f) \cong N_f^{\oplus m} \cong (N^{\oplus m})_f \cong (\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus m}, N))_f,$$

$$\mathrm{Hom}_{R_f}(R_f^{\oplus n}, N_f) \cong N_f^{\oplus n} \cong (N^{\oplus n})_f \cong (\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus n}, N))_f.$$

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R_f}(M_f, N_f) \arrow[r, "\psi_f^*"] \arrow[d, "\alpha_M"] & \mathrm{Hom}_{R_f}(R_f^{\oplus m}, N_f) \arrow[r, "\phi_f^*"] \arrow[d, "\alpha_{R^{\oplus m}}"] & \mathrm{Hom}_{R_f}(R_f^{\oplus n}, N_f) \arrow[d, "\alpha_{R^{\oplus n}}"] \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{Hom}_R(M, N))_f \arrow[r, "(\psi^*)_f"] & (\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus m}, N))_f \arrow[r, "(\phi^*)_f"] & (\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus n}, N))_f
\end{tikzcd}$$

όπου $\alpha_{R^{\oplus m}}$ και $\alpha_{R^{\oplus n}}$ είναι οι ισομορφισμοί που αναφέρουμε παραπάνω. «Παίζοντας κυνηγητό» σ' αυτό το διάγραμμα (αναφερόμαστε στο λεγόμενο diagram chasing - τη γνωστή αποδεικτική τεχνική απ΄ την Αντιμεταθετική Άλγεβρα) μπορούμε να δείξουμε ότι τελικά και ο ομομορφισμός R_f-προτύπων α_M είναι ισομορφισμός, όπως θέλαμε.

$\square$

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε έναν πολύ χρήσιμο χαρακτηρισμό για τα σχεδόν-συναφή δεμάτια πάνω από αφινικά σχήματα.

Θεώρημα 1.2.19. *Ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$ πάνω από ένα αφινικό σχήμα $X = SpecR$ είναι σχεδόν-συναφές αν και μόνο αν το $\mathcal{F}$ είναι ισομορφικό με ένα δεμάτι $\widetilde{M}$ που επάγεται από ένα R-πρότυπο M. Τότε προφανώς θα ισχύει ότι το $\Gamma(X, \mathcal{F})$ είναι ισομορφικό με το M ως R-πρότυπα.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη εξηγήσει γιατί κάθε δεμάτι της μορφής $\widetilde{M}$ για κάποιο R-πρότυπο M είναι σχεδόν-συναφές. Αντίστροφα, για ένα σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$, έστω $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$. Θα δείξουμε ότι το $\widetilde{M}$ είναι ισόμορφο με το $\mathcal{F}$ ως $\mathcal{O}_X$-πρότυπα. Αφού το $\mathcal{F}$ είναι σχεδόν-συναφές, για ένα αυθαίρετο σημείο $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $D(f)$ του $\mathfrak{p}$ τέτοια ώστε η ακολουθία

$$(\mathcal{O}_X|_{D(f)})^{\oplus I} \xrightarrow{\phi} (\mathcal{O}_X|_{D(f)})^{\oplus J} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}|_{D(f)} \to 0$$

να είναι ακριβής. Τότε ορίζουμε

$$M_{D(f)} := \mathrm{Coker}\{\phi_{D(f)} : R_f^{\oplus I} \to R_f^{\oplus J}\}.$$

Από το παράδειγμα 1.2.17(ii) η ακριβής ακολουθία

$$R_f^{\oplus I} \xrightarrow{\phi_{D(f)}} R_f^{\oplus J} \xrightarrow{\pi} M_{D(f)} \to 0$$

όπου π είναι η φυσική προβολή $R_f^{\oplus J} \to R_f^{\oplus J}/\phi_{D(f)}(R_f^{\oplus I}) \cong M_{D(f)}$, επάγει ακριβή ακολουθία στα επαγόμενα δεμάτια

$$(\mathcal{O}_X|_{D(f)})^{\oplus I} \xrightarrow{\widetilde{\phi_{D(f)}}=\phi} (\mathcal{O}_X|_{D(f)})^{\oplus J} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{M_{D(f)}} \to 0.$$

Από όλα τα παραπάνω παίρνουμε ότι $\mathcal{F}|_{D(f)} \cong \widetilde{M_{D(f)}} \cong \mathrm{Coker}\phi$ ως $\mathcal{O}_{D(f)}$-πρότυπα, άρα και $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) \cong M_{D(f)}$ ως R_f-πρότυπα. Για χάρη απλότητας θεωρούμε ότι στην τελευταία σχέση έχουμε ισότητα, δηλαδή $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = M_{D(f)}$.

Για κάθε $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ επιλέγουμε ένα $D(f)$ όπως παραπάνω και παίρνουμε ένα ανοιχτό κάλυμμα για το αφινικό σχήμα X. Λόγω της σχεδόν-συμπάγειας του X (ακολουθούμε εδώ την γαλλική σχολή που χαρακτηρίζει ως συμπαγή έναν *Hausdorff* χώρο αν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα για κάθε ανοιχτό κάλυμμα, ενώ αν ο χώρος δεν είναι Hausdorff και ικανοποιεί αυτήν τη συνθήκη λέγεται *σχεδόν-συμπαγής* - στα αγγλικά quasi-compact) μπορούμε να διαλέξουμε πεπερασμένα τέτοια $D(f_i), i \in I$ για να καλύψουμε τον X, δηλαδή $X = \cup_{i \in I} D(f_i)$, όπου το I είναι πεπερασμένο σύνολο. Για απλότητα θα γράφουμε M_i αντί για $M_{D(f_i)} = \Gamma(D(f_i), \mathcal{F})$.

Ο ομομορφισμός περιορισμού $\rho_i := \rho_{D(f_i),X} : M = \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(D(f_i), \mathcal{F}) = M_i$ επάγει έναν ομομορφισμό R_{f_i}-προτύπων $\widehat{\rho_i} : M_{f_i} \to M_i$. Αν δείξουμε ότι ο $\widehat{\rho_i}$ είναι ισομορφισμός για κάθε $i \in I$ τότε θα έχουμε ότι τα δεμάτια $\mathcal{F}$ και $\widetilde{M}$ «συμφωνούν» στα βασικά ανοιχτά υποσύνολα του X, άρα είναι ισόμορφα, όπως θέλαμε.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι ο $\widehat{\rho_i}$ είναι 1-1. Αν για κάποιο $s \in M$ ισχύει $\widehat{\rho_i}(\frac{s}{f_i^m}) = 0$, τότε έχουμε ότι $\widehat{\rho_i}(\frac{s}{f_i^m}) = \frac{1}{f_i^m}\widehat{\rho_i}(\frac{s}{1}) = 0$, δηλαδή $\widehat{\rho_i}(\frac{s}{1}) = 0$. Εξ ορισμού ο $\widehat{\rho_i}$ είναι ο εντοπισμός του ρ_i στο f_i, άρα τελικά παίρνουμε $\rho_i(s) = 0$. Από την άλλη, για $j \neq i$ έχουμε $D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$, κι άρα $\mathcal{F}|_{D(f_i f_j)} = (\mathcal{F}|_{D(f_j)})|_{D(f_i f_j)} = \widetilde{M_j}|_{D(f_i f_j)} = \widetilde{(M_j)_{(f_i f_j)}}$. Επειδή

$$\rho_{D(f_i f_j),X}(s) = \rho_{D(f_i f_j),D(f_i)}(\rho_i(s)) = 0,$$

τότε και

$$\rho_{D(f_i f_j),X}(s) = \rho_{D(f_i f_j),D(f_j)}(\rho_j(s)) = 0,$$

άρα μπορούμε να βρούμε φυσικό αριθμό n_j ώστε $(f_i f_j)^{n_j} \rho_j(s) = 0$ στο $\widetilde{(M_j)}_{(f_i f_j)}$. Αφού $\frac{1}{f_j} \in \mathcal{O}_X(D(f_j)) = R_{f_j}$, παίρνουμε $f_i^{n_j} \rho_j(s) = \rho_j(f_i^{n_j} s) = 0$. Αφού το I είναι πεπερασμένο σύνολο, μπορούμε να βρούμε φυσικό αριθμό $n = \max_{j \in I} n_j$, ώστε $\rho_j(f_i^n s) = 0$ για κάθε $j \in I$. Οι ρ_j είναι όμως εξ ορισμού οι $\rho_{D(f_j),X}$, άρα από τη συνθήκη **(F1)** του δεματιού $\mathcal{F}$ παίρνουμε $f_i^n s = 0$ στο $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Συνεπώς, $\frac{s}{f_i^m} = 0$ στο M_{f_i}, δηλαδή όντως ο $\widehat{\rho_i}$ είναι 1-1.

Τέλος δείχνουμε ότι ο $\widehat{\rho_i}$ είναι επί. Όπως και στην απόδειξη για το 1-1, θεωρούμε

$$\rho_{D(f_i f_j),D(f_i)}(s_i) \in \mathcal{F}(D(f_i f_j)) = (M_j)_{f_i f_j}.$$

Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε φυσικό αριθμό n_j ώστε $(f_i f_j)^{n_j} s_i \in M_j$. Αφού το M_j είναι R_{f_j}-πρότυπο, έχουμε $f_i^{n_j} s_i \in M_j$. Πάλι θέτουμε $n = \max_{j \in I} n_j$. Τότε για κάθε $j \in I$ έχουμε $f_i^n s_i \in M_j$. Από τη συνθήκη **(F2)** για το δεμάτι $\mathcal{F}$ παίρνουμε $s \in M = \mathcal{F}(X)$ που καθορίζεται από το $f_i^n s_i$, με $\rho_i(s) = f_i^n s_i$. Έτσι $\widehat{\rho_i}(\frac{s}{f_i^n}) := \frac{\rho_i(s)}{f_i^n} = \frac{f_i^n s_i}{f_i^n} = s_i$, επομένως ο $\widehat{\rho_i}$ είναι όντως επί. □

Η μεγαλή σημασία αυτού του χαρακτηρισμού γίνεται εμφανής από το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 1.2.20. *Για μια ακριβή ακολουθία από σχεδόν-συναφή $\mathcal{O}_X$-πρότυπα*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

πάνω από ένα αφινικό σχήμα $X = SpecR$, παίρνουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία από R-πρότυπα:

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_3) \to 0.$$

Απόδειξη. Έστω $M_i = \Gamma(X, \mathcal{F}_i)$. Από την πρόταση 1.1.18 έχουμε ότι η ακολουθία R-προτύπων

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3$$

είναι ακριβής. Από το θεώρημα 1.2.19 έχουμε ότι $\mathcal{F}_i \cong \widetilde{M_i}$. Από υπόθεση ο μορφισμός $\widetilde{\phi_2} : \widetilde{M_2} \to \widetilde{M_3}$ είναι επί.

Θέτουμε $N = \mathrm{Coker}\phi_2$. Η ακριβής ακολουθία

$$M_2 \xrightarrow{\phi_2} M_3 \to N \to 0$$

επάγει (από το παράδειγμα 1.2.17(ii)) μια ακριβή ακολουθία

$$\widetilde{M_2} \xrightarrow{\widetilde{\phi_2}} \widetilde{M_3} \to \widetilde{N} \to 0$$

από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα. Άρα έχουμε $\widetilde{N} = \mathrm{Coker}\widetilde{\phi_2}$. Αφού η $\widetilde{\phi_2}$ είναι επί, έχουμε $\widetilde{N} = 0$. Άρα $N = \Gamma(X, \widetilde{N}) = 0$, δηλαδή η ϕ_2 είναι επί. □

Η απόδειξη αυτού του πορίσματος αναδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να χρησιμοποιούμε το θεώρημα 1.2.19 «μεταφέροντας» αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε από τα σχεδόν-συναφή δεμάτια πάνω από αφινικά σχήματα στα πρότυπα στα οποία αυτά αντιστοιχούν και αντίστροφα, αναλόγως τι μας συμφέρει. Άλλο ένα παράδειγμα απόδειξης με την ίδια ιδέα είναι αυτή του ακόλουθου πορίσματος:

Πόρισμα 1.2.21. *Άν έχουμε μια ακριβή ακολουθία από σχεδόν-συναφή δεμάτια πάνω από ένα αφινικό σχήμα $X = SpecR$,*

$$\cdots \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to \cdots,$$

τότε παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία από R-πρότυπα

$$\cdots \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_3) \to \cdots.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την ακρίβεια στη $\Gamma(X, \mathcal{F}_2)$. Έστω ότι έχουμε

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3,$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$L = \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\phi_X} M = \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\psi_X} N = \Gamma(X, \mathcal{F}_3)$$

είναι ακριβής.

Μιας και $\psi \circ \phi = 0$, παίρνουμε $\psi_X \circ \phi_X = 0$, άρα επάγεται ομομορφισμός R-προτύπων $\eta : \text{Coker}\phi_X \to N$. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\widetilde{\text{Coker}\phi_X} = \text{Coker}\phi, \quad \widetilde{\text{Im}\eta} = \text{Im}\psi$$

μιας και για κάθε βασικό ανοιχτό υποσύνολο του X τα αντίστοιχα δεμάτια «συμφωνούν» μεταξύ τους. Λόγω της ακρίβειας της ακολουθίας της υπόθεσης, ισχύει ότι $\text{Im}\phi = \text{Ker}\psi$ κι άρα ο επαγόμενος μορφισμός $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\widetilde{\eta} : \widetilde{\text{Coker}\phi_X} \to \widetilde{N} = \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}_3)}$ είναι 1-1 (μπορούμε να το ελέγξουμε και «περνόντας» στα στάχυα). Άρα $\text{Ker}\widetilde{\eta} = 0$, οπότε $\text{Ker}\eta = 0$, δηλαδή ο η είναι 1-1. □

Σημειώνουμε ότι η συλλογή των σχεδόν-συναφών δεματιών πάνω από ένα αφινικό σχήμα $X = \text{Spec}R$ ως αντικείμενα και οι μορφισμοί δεματιών τους ως μορφισμοί αποτελούν μια κατηγορία. Το σύνολο των μορφισμών μεταξύ των δεματιών $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ θα το συμβολίζουμε με $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (προσέχοντας όμως να μην το συγχέουμε με το *δεμάτι* $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$). Την κατηγορία των σχεδόν-συναφών δεματιών θα την συμβολίζουμε με ($\mathcal{O}_X$-q.c.Mod). Στην «γλώσσα» της θεωρίας κατηγοριών λοιπόν, όλα τα παραπάνω αποδεικνύουν την ισοδυναμία δύο κατηγοριών:

Πόρισμα 1.2.22. *Για ένα αφινικό σχήμα $X = SpecR$, ο συναρτητής*

$$\begin{aligned} \Phi : (R - Mod) &\to (\mathcal{O}_X - q.c.Mod) \\ M &\mapsto \widetilde{M}, \end{aligned}$$

δίνει μια ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \Psi : (\mathcal{O}_X - \text{q.c.Mod}) &\to (R - \text{Mod}) \\ \mathcal{F} &\mapsto \Gamma(X, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Από το παράδειγμα 1.2.17(ii) και το θεώρημα 1.2.19 συμπεραίνουμε ότι $\Psi \circ \Phi \simeq \text{id}$ και $\Phi \circ \Psi \simeq \text{id}$ (όπου το $\simeq$ σημαίνει ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός μεταξύ των δύο συναρτητών). □

Επιπλέον η κατηγορία των σχεδόν-συναφών δεματιών περιέχει όλους τους πυρήνες, όλες τις εικόνες κι όλους τους συμπυρήνες των μορφισμών της.

Πόρισμα 1.2.23. *Έστω $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ σχεδόν-συναφή δεμάτια πάνω από ένα σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$. Τότε τα δεμάτια Kerϕ, Imϕ και Cokerϕ που αντιστοιχούν σ' έναν μορφισμό $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι σχεδόν-συναφή.*

Απόδειξη. Αφού το X καλύπτεται από αφινικά σχήματα, η σχεδόν-συνάφεια των δεματιών που μας απασχολούν μπορεί να ελεγχθεί πάνω από ένα αφινικό σχήμα. Άρα υποθέτουμε ότι το X είναι ένα αφινικό σχήμα Spec$R$. Έστω $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ και $N = \Gamma(X, \mathcal{G})$. Τότε $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ και $\mathcal{G} = \widetilde{N}$. Επομένως παίρνουμε $\mathrm{Ker}\phi = \widetilde{\mathrm{Ker}\phi_X}$, $\mathrm{Im}\phi = \widetilde{\mathrm{Im}\phi_X}$ και $\mathrm{Coker}\phi = \widetilde{\mathrm{Coker}\phi_X}$ (διότι τα αντίστοιχα δεμάτια «συμφωνούν» στα βασικά ανοιχτά υποσύνολα του $X = \mathrm{Spec}R$), δηλαδή τα τρία αυτά δεμάτια είναι σχεδόν-συναφή. □

Παρατήρηση 1.2.24. *Στην τελευταία απόδειξη παρατηρούμε ότι ο χαρακτηρισμός των σχεδόν-συναφών δεματιών πάνω από αφινικά σχήματα είναι σημαντικός και για γενικά σχήματα. Συγκεκριμένα ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$ πάνω από ένα σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$ είναι σχεδόν-συναφές αν και μόνο αν για μια αφινική κάλυψη $X = \cup_{i\in I} U_i$, με $U_i = \mathrm{Spec}R_i$, ο περιορισμός $\mathcal{F}|_{U_i}$ επάγεται από ένα R_i-πρότυπο M_i, δηλαδή $\mathcal{F}|_{U_i} = \widetilde{M_i}$, για κάθε $i \in I$.*

1.2γ΄ Συναφή δεμάτια

Όπως είπαμε και στην παρατήρηση 1.2.16 και αποδείξαμε στο πόρισμα 1.2.22, τα σχεδόν-συναφή δεμάτια πάνω από ένα αφινικό σχήμα Spec$R$ αντιστοιχούν στα πρότυπα πάνω από τον δακτύλιο R. Όπως κι όταν μιλάμε για R-πρότυπα κεντρικό ρόλο παίζουν τα πεπερασμένα παραγόμενα, έτσι και στη μελέτη των $\mathcal{O}_X$-προτύπων θα ασχοληθούμε με αυτά που είναι πεπερασμένα παραγόμενα και κυρίως με μια υποκατηγορία αυτών, τα συναφή πρότυπα.

Ορισμός 1.2.25. *Έστω ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$.*

(i) *Αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U \subseteq X$ που περιέχει το x τέτοια ώστε η ακολουθία $\mathcal{O}_U$-προτύπων*

$$\mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

να είναι ακριβής, τότε το $\mathcal{F}$ καλείται πεπερασμένα παραγόμενο *$\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Σημειώνουμε ότι το n μπορεί να μεταβάλλεται για διαφορετικά σημεία του X. Επίσης θα ήταν πιο συνετό να το αποκαλούμε* τοπικά πεπερασμένα παραγόμενο *$\mathcal{O}_X$-πρότυπο, ωστόσο έχει επικρατήσει η ονομασία όπως τη δώσαμε στον ορισμό.*

(ii) *Το $\mathcal{F}$ καλείται* συναφές *δεμάτι αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:*

   (α΄) Το $\mathcal{F}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.

   (β΄) Για ένα αυθαίρετο ανοιχτό $U \subseteq X$ και για έναν αυθαίρετο μορφισμό $\mathcal{O}_U$-προτύπων

$$\phi : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U,$$

   ο πυρήνας Kerϕ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο.

Σημειώνουμε ότι η δεύτερη συνθήκη ουσιαστικά σημαίνει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο υποδεμάτι του $\mathcal{F}$ είναι πεπερασμένα παριστώμενο.

Παρατήρηση 1.2.26. (i) *Σε αντιστοιχία με το παράδειγμα 1.2.17 αναφέρουμε ότι το $\mathcal{O}_X$ είναι προφανώς πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Επίσης αν το R-πρότυπο M είναι πεπερασμένα παραγόμενο (δηλαδή υπάρχει ακριβής ακολουθία $R^{\oplus n} \to M \to 0$), τότε το επαγόμενο δεμάτι $\widetilde{M}$ πάνω από το αφινικό σχήμα Spec$R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο (διότι επάγεται η ακριβής ακολουθία $\mathcal{O}_X^{\oplus n} \to \widetilde{M} \to 0$ η οποία καλύπτει την απαραίτητη συνθήκη για κάθε $x \in X$).*

(ii) *Ένα δεμάτι μπορεί να είναι πεπερασμένα παραγόμενο χωρίς να είναι σχεδόν-συναφές. Για παράδειγμα, αν έχουμε $X = \mathrm{Spec}k[t] = \mathbb{A}^1_k$ όπου k είναι ένα σώμα και O είναι η αρχή της αφινικής ευθείας (δηλαδή το σημείο $(t) \in \mathrm{Spec}k[t]$), τότε ορίζουμε ένα υποδεμάτι $\mathcal{I}$ του $\mathcal{O}_X$ μέσω των σχέσεων:*

$$\mathcal{I}(U) := \begin{cases} \mathcal{O}_X(U) & \text{αν } O \notin U, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Το $\mathcal{I}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο διότι υπάρχει ένας φυσικός επιμορφισμός $\mathcal{O}_X$-προτύπων $h : \mathcal{O}_X \to \mathcal{I}$. Ωστόσο, το $\mathcal{I}$ δεν είναι σχεδόν-συναφές διότι $\mathcal{I} \neq 0$ ενώ $\mathcal{I}(X) = 0$.

Για να υπάρχει συνέπεια στην επιλογή των ονομάτων που δίνουμε, αναμένουμε κάθε συναφές δεμάτι να είναι και σχεδόν-συναφές. Πράγματι, αν $\mathcal{F}$ είναι ένα συναφές δεμάτι, τότε είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο, οπότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq X$ που να περιέχει το x ώστε η ακολουθία των $\mathcal{O}_U$-προτύπων

$$\mathcal{O}_U^{\oplus n} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}|_U \to 0$$

να είναι ακριβής. Τότε κι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}\psi$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο, επομένως μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $V \subseteq U$ που να περιέχει επίσης το x ώστε η ακολουθία

$$\mathcal{O}_V^{\oplus m} \xrightarrow{\phi} (\mathrm{Ker}\psi)|_V \to 0$$

να είναι ακριβής. Επομένως παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{O}_V^{\oplus m} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_V^{\oplus n} \xrightarrow{\psi|_V} \mathcal{F}|_V \to 0,$$

δηλαδή το $\mathcal{F}$ είναι σχεδόν-συναφές. Επειδή συγκεκριμένα κάθε συναφές δεμάτι ικανοποιεί μια ακριβή ακολουθία που δίνει μια πεπερασμένη παράστασή του όπως παραπάνω, θα λέμε κι ότι κάθε συναφές είναι πεπερασμένα παριστώμενο και θα εννοούμε την ύπαρξη αυτής της ακριβούς ακολουθίας (δηλαδή με I και J πεπερασμένα σύνολα).

Για να αναδείξουμε τη διαφορά μεταξύ σχεδόν-συναφών και συναφών δεματιών θα δώσουμε παράδειγμα ενός σχεδόν-συναφούς που δεν είναι συναφές.

Παράδειγμα 1.2.27. *Έστω I το ιδεώδες του δακτυλίου $k[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ των πολυωνύμων με άπειρες στο πλήθος μεταβλητές πάνω από ένα σώμα k που ορίζεται ως $I := (x_1x_2, \dots, x_1x_n, \dots, x_ix_j, \dots)$, κι έστω $R := k[x_1, x_2, \dots]/I$. Αν J είναι το ιδεώδες που παράγεται από τις εικόνες εντός του R των $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, τότε έχουμε μια ακριβή ακολουθία R-προτύπων*

$$0 \to J \to R \xrightarrow{\cdot \overline{x_1}} R,$$

όπου το $\overline{x_1}$ είναι η εικόνα του x_1 μέσα στον R. Πάνω από το αφινικό σχήμα $X = \mathrm{Spec}R$, παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία από σχεδόν-συναφή $\mathcal{O}_X$-πρότυπα

$$0 \to \widetilde{J} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X.$$

Τότε το δεμάτι $\widetilde{J} = \mathrm{Ker}\phi$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Επομένως το $\mathcal{O}_X$ δεν είναι συναφές δεμάτι ως $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.

Παρατηρούμε ότι σ' αυτό το παράδειγμα ο R δεν είναι δακτύλιος Noether, οπότε μπορούμε να βρούμε και να χρησιμοποιήσουμε το J που δεν είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες. Πάνω από αφινικά σχήματα $\mathrm{Spec}R$ όπου ο R είναι δακτύλιος Noether έχουμε τον εξής σημαντικό χαρακτηρισμό:

Πρόταση 1.2.28. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο πάνω από ένα αφινικό σχήμα $X = SpecR$ που καθορίζεται από έναν δακτύλιο Noether R.*

(i) *Το $\mathcal{F}$ είναι συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο αν και μόνο αν το $\Gamma(X, \mathcal{F})$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο. Συγκεκριμένα, το $\mathcal{O}_X$ είναι συναφές δεμάτι.*

(ii) *Το $\mathcal{F}$ είναι συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο αν και μόνο αν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.*

Απόδειξη. (i) Έστω ότι το $\mathcal{F}$ είναι ένα συναφές δεμάτι. Τότε μπορούμε να βρούμε αφινικό κάλυμμα του $X = \cup_{i \in I} D(f_i)$ ώστε για κάθε $i \in I$ η ακολουθία

$$\mathcal{O}_{D(f_i)}^{\oplus n_i} \to \mathcal{F}|_{D(f_i)} \to 0$$

να είναι ακριβής. Αφού τα $D(f_i)$ έχουν δομή αφινικού σχήματος και το $\mathcal{F}$ είναι σχεδόν-συναφές δεμάτι, παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία από R_{f_i}-πρότυπα:

$$R_{f_i}^{\oplus n_i} \xrightarrow{\phi_i} M_i = \Gamma(D(f_i), \mathcal{F}) \to 0.$$

Άρα τα M_i είναι πεπερασμένα παραγόμενα R_{f_i}-πρότυπα, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε γεννήτορες $t_{ij} = \phi_i(0, \dots, 0, \overset{j}{\overset{\sqcap}{1}}, 0, \dots, 0)$ του M_i.

Έστω $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Τότε $M_i = M_{f_i}$, οπότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m_{ij} ώστε $\widetilde{t_{ij}} := f_i^{m_{ij}} t_{ij} \in M$. Έστω ένα τυχαίο στοιχείο $s \in M$. Θεωρούμε ότι $\frac{s}{1} \in M_{f_i}$ και γράφουμε

$$\frac{s}{1} = \sum_{j=1}^{n_i} a_j t_{ij},$$

όπου $a_j \in R_{f_i}$. Επομένως υπάρχει αρκούντως μεγάλος θετικός ακέραιος r_i τέτοιος ώστε

$$f_i^{r_i} s = \sum_{j=1}^{n_i} b_j \widetilde{t_{ij}},$$

όπου $b_j \in R$.

Επειδή ο X είναι σχεδόν-συμπαγής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το I είναι πεπερασμένο. Παρατηρούμε ότι $X = \cup_{i \in I} D(f_i) = \cup_{i \in I} D(f_i^{r_i})$, άρα δεν υπάρχει πρώτο ιδεώδες που να περιέχει όλα τα $f_i^{r_i}$, δηλαδή τα $f_i^{r_i}$ παράγουν τον δακτύλιο R. Έχουμε επομένως κάποια $c_i \in R$ ώστε $\sum_{i \in I} c_i f_i^{r_i} = 1$, οπότε

$$s = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} (c_i b_j) \widetilde{t_{ij}},$$

και συγκεκριμένα το M παράγεται από πεπερασμένα στο πλήθος $\widetilde{t_{ij}}$ ως R-πρότυπο.

Αντίστροφα, έστω ότι το $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο. Τότε $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Αφού για $f \in R$ το M_f είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R_f-πρότυπο, έχουμε έναν επί ομομορφισμό

$$R_f^{\oplus n} \to M_f \to 0.$$

Αυτός ο ομομορφισμός επάγει έναν επιμορφισμό από $\mathcal{O}_{D(f)}$-πρότυπα

$$\mathcal{O}_{D(f)}^{\oplus n} \to \widetilde{M_f} \to 0.$$

Θεωρώντας ότι $M_f = \Gamma(D(f), \mathcal{F})$, βλέπουμε ότι $\widetilde{M_f} = \mathcal{F}|_{D(f)}$, άρα το $\mathcal{F}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.

Έστω ανοιχτό $U \subseteq X$ κι έστω

$$\phi : \mathcal{O}_U^{\oplus m} \to \mathcal{F}|_U$$

ένας μορφισμός $\mathcal{O}_U$-προτύπων. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το $\mathcal{O}_U$-πρότυπο $\mathrm{Ker}\phi$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Για $x \in U$, επιλέγουμε ένα αφινικό ανοιχτό σύνολο $D(f) \subseteq U$ που περιέχει το x. Τότε ο περιορισμός του ϕ στο $D(f)$ καθορίζεται από έναν ομομορφισμό R_f-προτύπων

$$\psi : R_f^{\oplus m} \to M_f.$$

Έτσι έχουμε $(\mathrm{Ker}\phi)|_{D(f)} = \widetilde{\mathrm{Ker}\psi}$. Σημειώνουμε ότι ο R_f είναι δακτύλιος Noether (αφού ο R είναι δακτύλιος Noether), άρα το πεπερασμένα παραγόμενο R_f-πρότυπο $R_f^{\oplus m}$ είναι πρότυπο Noether. Έτσι ο $\mathrm{Ker}\psi$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R_f-πρότυπο (ως υποπρότυπο του $R_f^{\oplus m}$). Επομένως το $\widetilde{\mathrm{Ker}\psi}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_{D(f)}$-πρότυπο.

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι πράγματι ο $\mathrm{Ker}\phi$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο, άρα το $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ είναι ένα συναφές δεμάτι.

(ii) Εξ ορισμού αν το $\mathcal{F}$ είναι συναφές δεμάτι, τότε είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Αντιστρόφως, έστω ότι το $\mathcal{F}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Από αυτό που αποδείξαμε παραπάνω αρκεί να δείξουμε ότι το $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο.

Έστω ένα ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i \in I}$ του X ώστε να υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες

$$\mathcal{O}_{U_i}^{\oplus n_i} \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{F}|_{U_i} \to 0.$$

Μιας και ο X είναι σχεδόν-συμπαγής, υπάρχει ανοιχτό πεπερασμένο κάλυμμα $\{U_i\}_{i \in I}, U_i = D(f_i), f_i \in R$ του X με ακριβείς ακολουθίες όπως οι παραπάνω. Τότε οι

$$\phi_{iU_i}(0, \ldots, 0, \overset{j}{1}, 0, \ldots, 0) = g_j^{(i)} \in \Gamma(D(f_i), \mathcal{F}) = M_{f_i}, j \in \{1, 2, \ldots, n_i\},$$

είναι γεννήτορες του $\mathcal{F}|_{U_i}$ ως $\mathcal{O}_{U_i}$-πρότυπο (καθορίζουν τον ομομορφισμό R_{f_i}-προτύπων $R_{f_i} \xrightarrow{\phi_{iU_i}} \mathcal{F}(U_i) = M_{f_i}$ άρα και όλον τον μορφισμό $\mathcal{O}_{U_i}^{\oplus n_i} \to \mathcal{F}|_{U_i}$). Θεωρούμε θετικό ακέραιο l αρκούντως μεγάλο ώστε $f_i^l g_j^{(i)} = g_{ij} \in M$. Αφού λοιπόν τα $g_{ij}|_{U_i}, j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$ παράγουν το $\mathcal{F}|_{U_i}$ ως ένα $\mathcal{O}_{U_i}$-πρότυπο, τα $g_{ij}, 1 \leq i \leq m = |I|, 1 \leq j \leq n_i$, παράγουν το $\mathcal{F}$ ως ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Πράγματι, θέτουμε $n = \sum_{i=1}^m n_i$ και ελέγχουμε ότι η ακολουθία $\mathcal{O}_X$-προτύπων

$$\mathcal{O}_X^{\oplus n} = \widetilde{R^{\oplus n}} \to \mathcal{F} = \widetilde{M} \to 0,$$
$$(a_{ij}) \mapsto \sum_{i,j} a_{ij} g_{ij},$$

είναι ακριβής (για να δούμε ότι είναι επιμορφισμός ελέγχουμε ότι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί στα στάχυα είναι επί). Επομένως το M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και άρα το $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ είναι ένα συναφές δεμάτι.

□

Παρατήρηση 1.2.29. *Η παραπάνω πρόταση μας δίνει έναν χαρακτηρισμό για τη συνάφεια σχεδόν-συναφών δεματιών πάνω από σχήματα που είναι τοπικά Noether (δηλαδή επιδέχονται αφινική κάλυψη με φάσματα δακτυλίων Noether). Συγκεκριμένα, ένα σχεδόν-συναφές δεμάτι πάνω από ένα σχήμα που είναι τοπικά Noether είναι συναφές αν και μόνο αν είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Στη συνέχεια θα δείξουμε διάφορα αποτέλεσματα που αφορούν στις διαδικασίες μέσα από τις οποίες μπορούμε από συναφή δεμάτια να πάρουμε άλλα συναφή δεμάτια. Ξεκινάμε μ' ένα σημαντικό θεώρημα απ' το οποίο θα πάρουμε αρκετά τέτοια αποτελέσματα.

Θεώρημα 1.2.30. *Έστω μια βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα πάνω από ένα σχήμα X. Αν οποιαδήποτε δύο από τα τρία δεμάτια $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ είναι συναφή, τότε και το τρίτο είναι συναφές.

Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε δύο γενικούς ισχυρισμούς που θα μας βοηθήσουμε στη συνέχεια.

Ισχυρισμός 1: Αν έχουμε έναν επιμορφισμό από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και το $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε και το $\mathcal{B}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Για τυχαίο σημείο $x \in X$ υπάρχουν μια ανοιχτή περιοχή του $U \subseteq X$, ένας θετικός ακέραιος n και ένας μορφισμός $\mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{A}|_U$ που είναι επί. Συνθέτοντας με τον $f|_U$ παίρνουμε έναν επιμορφισμό $\mathcal{O}_U$-προτύπων $\mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{B}_U$, άρα το $\mathcal{B}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.

Ισχυρισμός 2: Αν έχουμε έναν ομομορφισμό από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, το $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο και το $\mathcal{B}$ είναι συναφές, τότε η $\mathrm{Im}g$ είναι επίσης συναφές δεμάτι.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Από τον ισχυρισμό 1 παίρνουμε ότι η $\mathrm{Im}g$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο δεμάτι. Έστω ανοιχτό $U \subseteq X$ και ένας μορφισμός $\mathcal{O}_U$-προτύπων $\pi : \mathcal{O}_U^{\oplus m} \to \mathrm{Im}g|_U$. Συνθέτοντας τον ϕ με την φυσική εμφύτευση $\iota : \mathrm{Im}g \to \mathcal{B}$ παίρνουμε $\mathrm{Ker}\pi = \mathrm{Ker}(\iota \circ \pi)$. Από υπόθεση, το $\mathcal{B}$ είναι συναφές, άρα ο $\mathrm{Ker}(\iota \circ \pi)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο, άρα ο $\mathrm{Ker}\pi$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο. Επομένως η $\mathrm{Im}g$ είναι συναφές δεμάτι.

Έστω τώρα ότι τα $\mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ είναι συναφή και έστω x τυχαίο σημείο του X. Έστω U ανοιχτή περιοχή του x και n θετικός ακέραιος ώστε ο μορφισμός των $\mathcal{O}_U$-προτύπων $f : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{G}|_U$ να είναι επί (υπάρχει διότι το $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο). Τότε ο μορφισμός $\psi \circ f : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{H}|_U$ θα είναι επί και ο μορφισμός $\mathrm{Ker}(\psi \circ f) \to \mathrm{Ker}\psi|_U$ θα είναι επίσης επί. Λόγω της ακρίβειας της ακολουθίας στην υπόθεση έχουμε $\mathrm{Ker}\psi|_U = \mathrm{Im}\phi|_U = \mathcal{F}|_U$. Επίσης έχουμε υποθέσει ότι το $\mathcal{H}$ είναι συναφές άρα ο $\mathrm{Ker}(\psi \circ f)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο. Από τον ισχυρισμό 1 συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{F}|_U$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο. Από τον ισχυρισμό 2, κι αφού το $\mathcal{F}$ είναι ισόμορφο με την $\mathrm{Im}\phi$, παίρνουμε τελικά ότι το $\mathcal{F}$ είναι συναφές.

Έστω ότι τα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι συναφή. Από τον ισχυρισμό 1 προκύπτει ότι το $\mathcal{H}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του X κι ένας μορφισμός $\mathcal{O}_U$-προτύπων $h : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{H}|_U$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο $\mathrm{Ker}h$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο. Έστω $a_i = h(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{H}(U)$. Μιας και ο μορφισμός ψ είναι επί, μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $V \subseteq U$ τέτοιο ώστε να υπάρχουν $b_i \in \mathcal{G}(V)$ που να ικανοποιούν τις σχέσεις $\psi(b_i) = a_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Επιπλέον το $\mathcal{F}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως συναφές, άρα μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $W \subseteq V$ και φυσικό αριθμό l τέτοια ώστε να υπάρχει επιμορφισμός $\mathcal{O}_W$-προτύπων

$j : \mathcal{O}_W^{\oplus l} \to \mathcal{F}|_W$. Θεωρούμε τώρα

$$\begin{aligned} \widetilde{h} : \mathcal{O}_W^{\oplus l} \oplus \mathcal{O}_W^{\oplus n} &\to \mathcal{G}|_W \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \phi(j(\alpha)) + \sum \beta_i b_i, \end{aligned}$$

όπου $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Από υπόθεση το $\mathcal{G}$ είναι συναφές, άρα ο $\mathrm{Ker}\widetilde{h}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_W$-πρότυπο. Εξ ορισμού του $\widetilde{h}$, έχουμε έναν επιμορφισμό $\mathcal{O}_W$-προτύπων $\mathrm{Ker}\widetilde{h} \to \mathrm{Ker}(h|_W)$ (είναι καλά ορισμένος μορφισμός διότι αν $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ker}\widetilde{h}$, τότε $\phi(j(\alpha)) + \sum \beta_i b_i = 0$, άρα $\psi(\phi(j(\alpha)) + \sum \beta_i b_i) = 0$, άρα $\sum \beta_i a_i = 0$, όπου όμως $h(\beta) = \sum \beta_i a_i$). Από τον ισχυρισμό 1 παίρνουμε ότι ο $\mathrm{Ker}(h|_W)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_W$-πρότυπο, άρα και ο $\mathrm{Ker}h$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο. Επομένως το $\mathcal{H}$ είναι συναφές.

Τέλος, έστω ότι τα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{H}$ είναι συναφή. Αν x είναι τυχαίο σημείο του X, επιλέγουμε κατάλληλη ανοιχτή περιοχή του U τέτοια ώστε να υπάρχουν επιμορφισμοί $\mathcal{O}_U$-προτύπων $f : \mathcal{O}_U^{\oplus l} \to \mathcal{F}|_U$ και $h : \mathcal{O}_U^{\oplus m} \to \mathcal{H}|_U$. Για $a_i = h(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0 \dots, 0) \in \mathcal{H}(U)$, επιλέγουμε αρκούντως μικρή ανοιχτή περιοχή του x, $V \subseteq U$, τέτοια ώστε να υπάρχουν $b_i \in \mathcal{G}(U)$ που να ικανοποιούν τις σχέσεις $\psi(b_i) = a_i$. Τότε ο μορφισμός

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_V^{\oplus l} \oplus \mathcal{O}_V^{\oplus m} &\to \mathcal{G}|_V \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m) &\mapsto \phi(f(\alpha_1, \dots, \alpha_l)) + \sum \beta_i b_i, \end{aligned}$$

είναι επιμορφισμός $\mathcal{O}_V$-προτύπων (πράγματι, κάθε στοιχείο s_x του $\mathcal{G}_x$ μέσω του ομομορφισμού ψ_x αντιστοιχεί σ' ένα $\sum \beta_i a_{ix}$, άρα $s_x - \sum \beta_i b_{ix} \in \mathrm{Ker}\psi_x = \mathrm{Im}\phi_x \cong \mathcal{F}_x$, οπότε $s_x - \sum \beta_i b_{ix} = \phi_x(f_x(\alpha_{1x}, \dots, \alpha_{lx}))$). Άρα το $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο δεμάτι.

Έστω τώρα $h : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{G}|_U$ ένας μορφισμός $\mathcal{O}_U$-προτύπων. Τότε αφού το $\mathcal{H}$ είναι συναφές, ο $\mathrm{Ker}(\psi|_U \circ h)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο. Επομένως, υπάρχει ανοιχτή περιοχή $V \subseteq U$ του x τέτοια ώστε να υπάρχει επιμορφισμός $\mathcal{O}_V$-προτύπων

$$g : \mathcal{O}_V^{\oplus m} \to \mathrm{Ker}(\psi|_U \circ h)|_V.$$

Θέτουμε $a_i = g(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}_U^{\oplus n}(V)$ και $b_i = h(a_i) \in \mathcal{G}(V)$. Αφού $\psi_V(b_i) = 0$, τότε υπάρχουν μοναδικά $c_i \in \mathcal{F}(V)$ τέτοια ώστε $\phi_V(c_i) = b_i$ (αφού $\mathrm{Im}\phi_V = \mathrm{Ker}\psi_V$). Επομένως παίρνουμε ένα μορφισμό $\mathcal{O}_V$-προτύπων

$$\begin{aligned} \widetilde{h} : \mathcal{O}_V^{\oplus m} &\to \mathcal{F}|_V \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_m) &\mapsto \sum_{i=1}^{m} \gamma_i c_i. \end{aligned}$$

Από υπόθεση το $\mathcal{F}$ είναι συναφές άρα ο $\mathrm{Ker}\widetilde{h}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_V$-πρότυπο. Ορίζεται λοιπόν ένας μορφισμός $\mathcal{O}_V$-προτύπων

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\widetilde{h} &\to \mathrm{Ker}(h|_V) \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_m) &\mapsto \sum_{i=1}^{m} \gamma_i a_i \end{aligned}$$

ο οποίος είναι επί (ο $\mathrm{Ker}(h|_V)$ είναι $\mathcal{O}_V$-υποπρότυπο του $\mathrm{Ker}(\psi|_U \circ h)|_V$). Από τον ισχυρισμό 1 παίρνουμε ότι ο $\mathrm{Ker}(h|_V)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_V$ πρότυπο, άρα ο $\mathrm{Ker}h$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο, όπως θέλαμε. Επομένως το $\mathcal{G}$ είναι συναφές δεμάτι. $\square$

Πόρισμα 1.2.31. *Έστω $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ένας μορφισμός $\mathcal{O}_X$-προτύπων πάνω από ένα σχήμα X. Τότε τα δεμάτια Kerϕ, Imϕ και Cokerϕ είναι όλα συναφή.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και $U \subseteq X$ ανοιχτή περιοχή του x τέτοια ώστε ο μορφισμός $\mathcal{O}_U$-προτύπων $\psi : \mathcal{O}_U^{\oplus m} \to \mathcal{F}|_U$ να είναι επί. Συνθέτοντας τον ψ με τον επιμορφισμό $\mathcal{F}|_U \to \mathrm{Im}\phi|_U$ παίρνουμε πάλι επιμορφισμό $\mathcal{O}_U^{\oplus m} \to \mathrm{Im}\phi|_U$, άρα η Im$\phi$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.

Έπειτα, για ένα ανοιχτό $V \subseteq X$ κι έναν μορφισμό $\mathcal{O}_V$-προτύπων $\eta : \mathcal{O}_V^{\oplus n} \to \mathrm{Im}\phi|_V$, θεωρούμε τη σύνθεση του η με τον κανονικό 1-1 μορφισμό $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\iota|_V : \mathrm{Im}\phi|_V \to \mathcal{G}|_V$ και παρατηρούμε ότι $\mathrm{Ker}\eta = \mathrm{Ker}(\iota|_V \circ \eta)$. Αφού το $\mathcal{G}$ είναι συναφές, συμπεραίνουμε ότι ο $\mathrm{Ker}(\iota|_V \circ \eta) = \mathrm{Ker}\eta$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_V$-πρότυπο, άρα η Imϕ είναι ένα συναφές δεμάτι.

Τώρα, υπενθυμίζουμε ότι έχουμε βραχείες ακριβείς ακολουθίες από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα

$$0 \to \mathrm{Ker}\phi \to \mathcal{F} \to \mathrm{Im}\phi \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Im}\phi \to \mathcal{G} \to \mathrm{Coker}\phi \to 0,$$

οι οποίες σε συνδυασμό με το θεώρημα 1.2.30 μας δίνουν τη συνάφεια των Kerϕ και Cokerϕ. □

Πόρισμα 1.2.32. *Για συναφή $\mathcal{O}_X$-πρότυπα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ πάνω από ένα σχήμα X, τα δεμάτια $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ και $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ είναι συναφή.*

Απόδειξη. Αφού τα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα $\mathcal{O}_X$-πρότυπα, τότε και το ευθύ άθροισμά τους $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο (αθροίζουμε ευθέως τους επιμορφισμούς που αντιστοιχούν στα $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$). Έπειτα, αν έχουμε έναν μορφισμό $\mathcal{O}_U$-προτύπων ($U \subseteq X$ ανοιχτό) $\phi : \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})|_U$, τότε υπάρχει μορφισμός

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_1 \circ \phi) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_2 \circ \phi) &\to \mathrm{Ker}\phi \\ x \oplus y &\mapsto \begin{cases} x + y & \text{αν } x, y \in \mathrm{Ker}\phi, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \end{aligned}$$

που εύκολα ελέγχουμε ότι είναι επί. Επειδή τα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι συναφή, οι πυρήνες $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_1 \circ \phi)$ και $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_2 \circ \phi)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα $\mathcal{O}_U$-πρότυπα, άρα και ο Kerϕ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}_U$-πρότυπο. Άρα το $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ είναι συναφές δεμάτι.

Αφού κάθε συναφές δεμάτι είναι πεπερασμένα παριστώμενο, για τυχαίο σημείο $x \in X$ υπάρχουν μια ανοιχτή περιοχή του $U \subseteq X$ και μια ακριβής ακολουθία από $\mathcal{O}_U$-πρότυπα

$$\mathcal{O}_U^{\oplus m} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U \to 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τανυστικά την (1.2γ′) με το $\mathcal{G}|_U$ παίρνουμε πάλι μια ακριβή ακολουθία (1.2.11) από $\mathcal{O}_U$-πρότυπα

$$\mathcal{G}^{\oplus m}|_U \xrightarrow{\phi \otimes \mathrm{id}} \mathcal{G}^{\oplus n}|_U \to \mathcal{F}|_U \otimes \mathcal{G}|_U \to 0.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G}|_U \cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U$ μιας και είναι δεματιοποιήσεις του ίδιου προδεματιού $\mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_U(V)} \mathcal{G}(V)$, για ανοιχτά $V \subseteq U$. Επομένως $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U \cong \mathrm{Coker}(\phi \otimes \mathrm{id})$. Λόγω συνάφειας του $\mathcal{G}$ έχουμε και τη συνάφεια του $\mathcal{G}|_U$ και των $\mathcal{G}^{\oplus m}|_U$, $\mathcal{G}^{\oplus n}|_U$ (βάσει αυτού που δείξαμε παραπάνω για το ευθύ άθροισμα συναφών). Το πόρισμα 1.2.31 μας δίνει ότι ο συμπυρήνας $\mathrm{Coker}(\phi \otimes \mathrm{id})$ είναι συναφές δεμάτι, άρα το $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U$ είναι συναφές, άρα και το $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})$ είναι συναφές (η συνάφεια είναι τοπική ιδιότητα - αρκεί να την δείξουμε για τα ανοιχτά ενός καλύμματος του χώρου).

Από την (1.2γ′) παίρνουμε άλλη μία ακριβή ακολουθία από $\mathcal{O}_U$-πρότυπα (από την πρόταση 1.2.9)

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) \to \mathcal{G}^{\oplus n}|_U \xrightarrow{\phi_*} \mathcal{G}^{\oplus m}|_U.$$

Έχουμε ότι $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U$, εξ ορισμού του $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Επομένως $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U \cong \mathrm{Ker}\phi_*$, κι από το πόρισμα 1.2.31 συμπεραίνουμε ότι ο πυρήνας αυτός είναι συναφές δεμάτι, άρα τελικά και το $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ είναι συναφές δεμάτι. $\square$

Το τελευταίο αποτέλεσμα που θα δούμε σ' αυτήν την ενότητα σχετικά με τα συναφή δεμάτια αφορά σε μια βολική περιγραφή για τα στάχυα του δεματιού $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ όταν το $\mathcal{F}$ είναι συναφές.

Πρόταση 1.2.33. *Έστω $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ δύο $\mathcal{O}_X$-πρότυπα πάνω από ένα σχήμα X. Αν το $\mathcal{F}$ είναι συναφές δεμάτι, τότε για ένα τυχαίο $x \in X$ υπάρχει ισομορφισμός $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπων*

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x).$$

Απόδειξη. Για ένα συναφές δεμάτι $\mathcal{F}$ ξέρουμε ότι είναι πεπερασμένα παριστώμενο, άρα για τυχαίο $x \in X$ υπάρχουν μια ανοιχτή περιοχή $U \subseteq X$ του x και μια ακριβής ακολουθία από $\mathcal{O}_U$-πρότυπα

$$\mathcal{O}_U^{\oplus m} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_U^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_U \to 0.$$

Εξ ορισμού του $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ έχουμε $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U$, οπότε παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \mathcal{G})|_U \xrightarrow{\phi_*} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus m}, \mathcal{G})|_U$$

από $\mathcal{O}_U$-πρότυπα. Με τη σειρά της αυτή η ακριβής ακολουθία δίνει μια ακριβή ακολουθία στα στάχυα

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \mathcal{G})_x \xrightarrow{\phi_{*x}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus m}, \mathcal{G})_x.$$

Πάλι από τον ορισμό του δεματιού $\underline{\mathrm{Hom}}$ για οποιαδήποτε δεμάτια $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ έχουμε

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{A}|_V, \mathcal{B}|_V),$$

άρα ορίζεται ένας φυσικός ομομορφισμός $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπων

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, \mathcal{B})_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{A}_x, \mathcal{B}_x).$$

Αν τώρα περάσουμε στα στάχυα στην ακριβή ακολουθία που έχουμε από την πεπερασμένη παράσταση του $\mathcal{F}$ θα πάρουμε μια άλλη ακριβή ακολουθία $\mathcal{O}_{X,x}$-προτύπων

$$\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus m} \to \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus n} \to \mathcal{F}_x \to 0$$

που με τη σειρά της θα μας δώσει μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus n}, \mathcal{G}_x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus m}, \mathcal{G}_x).$$

Συνεπώς παίρνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα από $\mathcal{O}_{X,x}$-πρότυπα

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \mathcal{G})_x & \xrightarrow{\phi_{*x}} & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus m}, \mathcal{G})_x \\
 & & {\scriptstyle\eta_1}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_2}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_3}\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus n}, \mathcal{G}_x) & \xrightarrow{\phi_{x*}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus m}, \mathcal{G}_x)
\end{array}$$

όπου $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$ και $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{G}_x) \cong \mathcal{G}_x$. Άρα οι η_2 και η_3 είναι ισομορφισμοί, οπότε «παίζοντας κυνηγητό» σ' αυτό το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι και ο η_1 είναι ισομορφισμός, όπως θέλαμε. $\square$

1.3 Ευθεία εικόνα και αντίστροφη εικόνα

1.3α΄ Ευθεία εικόνα και αντίστροφη εικόνα ενός δεματιού μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης

Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων X και Y. Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων πάνω από τον X, τότε παίρνουμε ένα δεμάτι $f_*\mathcal{F}$ πάνω από τον Y που προσδιορίζεται από το προδεμάτι $\{\mathcal{F}(f^{-1}(U))\}$, όπου $U \subseteq Y$ ανοιχτά (στην πραγματικότητα αυτό το προδεμάτι είναι δεμάτι όταν είναι και το $\mathcal{F}$). Το $f_*\mathcal{F}$ καλείται *ευθεία εικόνα* του $\mathcal{F}$ μέσω της f.

Αν στην ίδια περίσταση είχαμε ένα δεμάτι $\mathcal{G}$ πάνω από τον Y, αναρωτιόμαστε πώς θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα δεμάτι πάνω από τον X (μια αντίστοιχη ιδέα όπως αυτή της ευθείας εικόνας εδώ δεν μπορεί να μας δώσει δεμάτι γιατί πολύ απλά αν $V \subseteq X$ είναι ανοιχτό, το $f(V)$ δεν είναι απαραίτητα ανοιχτό). Η κατασκευή θα γίνει χρησιμοποιώντας ευθέα όρια: Για ένα ανοιχτό $V \subseteq X$ ορίζουμε μια διάταξη των ανοιχτών $U \subseteq Y$ που περιέχουν το $f(V)$ ως εξής: $U_1 > U_2$ αν $U_1 \subseteq U_2$. Τα $\{\mathcal{G}(U)\}$, $f(V) \subseteq U$ αποτελούν ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων, άρα ορίζεται το ευθύ όριό τους

$$\varinjlim_{f(V)\subseteq U} \mathcal{G}(U).$$

Ορίζονται με φυσικό τρόπο ομομορφισμοί περιορισμού ρ_{V_2,V_1} όταν έχουμε $V_2 \subseteq V_1$ (αφού αν $U \subseteq Y$ είναι τέτοιο ώστε $f(V_1) \subseteq U$, τότε και $f(V_2) \subseteq U$) και με αυτούς παίρνουμε ένα προδεμάτι πάνω από τον X. Το αποτέλεσμα της δεματιοποίησης αυτού του προδεματιού είναι ένα δεμάτι που θα συμβολίζουμε με $f^{-1}\mathcal{G}$ και θα ονομάζουμε *αντίστροφη εικόνα* του δεματιού $\mathcal{G}$ μέσω της f.

Παρατήρηση 1.3.1. *Εξ ορισμού της δεματιοποίησης ξέρουμε ότι το στάχυ του $f^{-1}\mathcal{G}$ στο $x \in X$ δίνεται από τη σχέση*

$$(f^{-1}\mathcal{G})_x = \varinjlim_{f(x)\in U} \mathcal{G}(U) = \mathcal{G}_{f(x)}.$$

Από αυτήν τη σχέση προκύπτει το ότι παίρνοντας αντίστροφες εικόνες μέσω συνεχούς απεικόνισης διατηρείται η ακρίβεια ακολουθιών. Συγκεκριμένα *αν έχουμε $f : X \to Y$ μια συνεχή απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων και έχουμε μια ακριβή ακολουθία δεματιών αβελιανών ομάδων πάνω από τον Y*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

τότε και η ακολουθία

$$0 \to f^{-1}\mathcal{F}_1 \to f^{-1}\mathcal{F}_2 \to f^{-1}\mathcal{F}_3 \to 0$$

θα είναι ακριβής. Πράγματι *από την δοσμένη ακριβή ακολουθία και για τυχαίο $x \in X$, λόγω της πρότασης 1.1.17, περνάμε στην ακριβή ακολουθία των σταχυών*

$$0 \to \mathcal{F}_{1,f(x)} \to \mathcal{F}_{2,f(x)} \to \mathcal{F}_{3,f(x)} \to 0$$

κι από όσα είπαμε στην αρχή της παρατήρησης αυτή είναι η ακριβής ακολουθία

$$0 \to (f^{-1}\mathcal{F}_1)_x \to (f^{-1}\mathcal{F}_2)_x \to (f^{-1}\mathcal{F}_3)_x \to 0.$$

Άρα πάλι από την πρόταση 1.1.17 παίρνουμε ότι η ζητούμενη ακολουθία είναι ακριβής.

Το ακόλουθο λήμμα περιγράφει τη σημαντική σχέση μεταξύ ευθείας εικόνας και αντίστροφης εικόνας:

Λήμμα 1.3.2. *Έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων X και Y. Τότε για ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω από τον X κι ένα δεμάτι $\mathcal{G}$ πάνω από τον Y, υπάρχει ένας ισομορφισμός αβελιανών ομάδων*

$$Hom_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong Hom_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}),$$

όπου τα $Hom_X(\cdot,\cdot)$ και $Hom_Y(\cdot,\cdot)$ είναι τα σύνολα των μορφισμών δεματιών πάνω από τον X και τον Y, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Για χάρη απλότητας, έστω $f^\bullet\mathcal{G}$ το προδεμάτι που ορίσαμε παραπάνω κι από το οποίο παίρνουμε το δεμάτι $f^{-1}\mathcal{G}$ μέσω δεματιοποίησης. Θα δείξουμε αυτό που θέλουμε σε δύο βήματα, δείχνοντας ότι οι δύο αβελιανές ομάδες είναι ισόμορφες με την $\mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F})$.

Το ότι $\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F})$ προκύπτει από την πρόταση 1.1.4. Αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι

$$\mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Έστω $\hat{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\text{presheaf}}(f^\bullet\mathcal{G}, \mathcal{F})$ και έστω ανοιχτό $V \subseteq Y$. Τότε ορίζεται ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\tilde{\psi}_{f^{-1}(V)} : \mathcal{G}(V) \to f^\bullet\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\hat{\psi}_{f^{-1}(V)}} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{F}(V).$$

Αν θέσουμε $\psi_V := \tilde{\psi}_{f^{-1}(V)}$, τότε τα $\{\psi_V\}$ επάγουν έναν μορφισμό δεματιών αβελιανών ομάδων από το $\mathcal{G}$ στο $f_*\mathcal{F}$.

Αντίστροφα, για δοσμένο $\phi \in \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ παίρνουμε ομομορφισμούς ομάδων

$$\phi_V : \mathcal{G}(V) \to f_*\mathcal{F} = \mathcal{F}(f^{-1}(V)),$$

όπου τα V είναι ανοιχτά υποσύνολα του Y. Έτσι για τυχαίο ανοιχτό $U \subseteq X$ παίρνουμε ανοιχτό V τέτοιο ώστε $f(U) \subseteq V$ και μέσω του ϕ_V παίρνουμε ομομορφισμό ομάδων

$$\tilde{\phi}_{U,V} : \mathcal{G}(V) \xrightarrow{\phi_V} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\rho_{U,f^{-1}(V)}} \mathcal{F}(U).$$

Επειδή ο ϕ είναι μορφισμός δεματιών, συμπεραίνουμε ότι οι ομομορφισμοί $\tilde{\phi}_{U,V}$ είναι συμβατοί με τους ομομορφισμούς περιορισμού $\rho_{V,V'}$ όπου $f(U) \subseteq V \subseteq V'$ υπό την έννοια ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(V') \arrow[d, "\rho_{V,V'}"'] \arrow[dr, "\tilde{\phi}_{U,V'}"] & \\
\mathcal{G}(V) \arrow[r, "\tilde{\phi}_{U,V}"'] & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}$$

Από τις ιδιότητες των ευθέων ορίων συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\hat{\phi}_U : f^\bullet\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

ο οποίος δεν είναι δύσκολο να ελεγχθεί ότι είναι συμβατός με τους ομομορφισμούς περιορισμού των προδεματιών $f^\bullet\mathcal{G}$ και $\mathcal{F}$, δηλαδή ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
f^{\bullet}\mathcal{G}(U) \arrow[r, "\hat{\phi}_U"] \arrow[d, "\rho^{f^{\bullet}\mathcal{G}}_{W,U}"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{W,U}"] \\
f^{\bullet}\mathcal{G}(W) \arrow[r, "\hat{\phi}_W"'] & \mathcal{F}(W)
\end{tikzcd}$$

Επομένως οι $\{\hat{\phi_U}\}$ ορίζουν έναν μορφισμό προδεματιών από το $f^{\bullet}\mathcal{G}$ στο $\mathcal{F}$.

Ακολουθώντας προσεκτικά τους ορισμούς μπορούμε να ελέγξουμε ότι οι απεικονίσεις $\hat{\psi} \mapsto \psi$ και $\phi \mapsto \hat{\phi}$ που ορίσαμε παραπάνω είναι η μία αντίστροφη της άλλης αποδεικνύοντας αυτό που θέλαμε. □

1.3β΄ Ευθεία εικόνα και αντίστροφη εικόνα ενός δεματιού μέσω ενός μορφισμού σχημάτων

Για έναν μορφισμό σχημάτων $f : X \to Y$ και ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$ μπορούμε να ορίσουμε την ευθεία εικόνα $f_*\mathcal{F}$ ώστε να είναι $f_*\mathcal{O}_X$-πρότυπο και με φυσικό τρόπο και $\mathcal{O}_Y$-πρότυπο. Συγκεκριμένα, ο μορφισμός σχημάτων f πιο πλήρως θα έπρεπε να γράφεται ως $\Phi = (f, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ όπου f είναι μια συνεχής απεικόνιση και $\theta : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ είναι ένας μορφισμός δεματιών αντιμεταθετικών δακτυλίων. Για ένα ανοιχτό $U \subseteq Y$ έχουμε

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \times \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U)),$$

οπότε επάγεται μια δομή $f_*\mathcal{O}_X$-προτύπου στο $f_*\mathcal{F}$. Επιπλέον οι ομομορφισμοί αντιμεταθετικών δακτυλίων

$$\theta_U : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$$

μαζί με τη δομή $f_*\mathcal{O}_X$-προτύπου που περιγράψαμε δίνουν μια δράση του $\mathcal{O}_Y(U)$ στο $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) = (f_*\mathcal{F})(U)$

$$\mathcal{O}_Y(U) \times (f_*\mathcal{F})(U) \to (f_*\mathcal{F})(U).$$

Έτσι έχουμε και μια δομή $\mathcal{O}_Y$-προτύπου για το $f_*\mathcal{F}$.

Στην περίπτωση που έχουμε έναν μορφισμό αφινικών σχημάτων, η ευθεία εικόνα ενός σχεδόν-συναφούς δεματιού έχει μια πιο συγκεκριμένη μορφή:

Πρόταση 1.3.3. *Έστω ένας μορφισμός μεταξύ αφινικών σχημάτων $(\phi^a, \phi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) = (\mathit{Spec}S, \mathcal{O}_{\mathit{Spec}S}) \to (Y, \mathcal{O}_Y) = (\mathit{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathit{Spec}R})$ που επάγεται από έναν μορφισμό αντιμεταθετικών δακτυλίων $\phi : R \to S$ (θεωρούμε γνωστή την αντι-ισοδυναμία μεταξύ της κατηγορίας των αφινικών σχημάτων και της κατηγορίας των αντιμεταθετικών δακτυλίων). Έστω $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο που επάγεται από ένα S-πρότυπο M. Τότε η ευθεία εικόνα $\phi^a_*\mathcal{F}$ συμπίπτει με το $\mathcal{O}_Y$-πρότυπο που καθορίζεται από τη δομή R-προτύπου του M μέσω του ϕ. Συνεπώς, η ευθεία εικόνα ενός σχεδόν-συναφούς δεματιού είναι σχεδόν-συναφές δεμάτι (όταν έχουμε μορφισμό αφινικών σχημάτων).*

Απόδειξη. Για $f \in R$, έστω $g = \phi(f) \in S$. Τότε η αντίστροφη εικόνα ενός ανοιχτού συνόλου $U = D(f)$ του Y μέσω της συνεχούς απεικόνισης ϕ^a είναι $(\phi^a)^{-1}(D(f)) = D(g)$. Οπότε ο ομομορφισμός

$$\phi^\sharp_U : \mathcal{O}_Y(U) \to (\phi^a_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X((\phi^a)^{-1}(U))$$

είναι ακριβώς ο ομομορφισμός $\phi_f : R_f \to S_g$ που επάγεται από τον ϕ.

Έστω $M_{[\phi]}$ το M ως R-πρότυπο μέσω του ϕ. Τότε μέσω του ϕ_f μπορούμε να δούμε το M_g ως R_f-πρότυπο, το οποίο θα συμβολίζουμε με $(M_g)_{[\phi_f]}$. Παρατηρούμε ότι το $(M_g)_{[\phi_f]}$ συμπίπτει με το $(M_{[\phi]})_f$ ως R_f-πρότυπα. Εξ ορισμού το $\phi^a_*\mathcal{F}$ αντιστοιχεί στα βασικά ανοιχτά $D(f)$ τα R_f-πρότυπα $(M_g)_{[\phi_f]}$, επομένως καταλήγουμε στο ότι $\phi^a_*\mathcal{F} = \widetilde{M_{[\phi]}}$. □

Στη συνέχεια θέλουμε να δούμε πώς για έναν μορφισμό $f : X \to Y$ θα μπορούσαμε να ορίσουμε την αντίστροφη εικόνα ενός $\mathcal{O}_Y$-προτύπου $\mathcal{G}$ ώστε να είναι $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Σε αντιστοιχία με την ευθεία εικόνα, πρώτα παρατηρούμε ότι η αντίστροφη εικόνα, με τον ορισμό που δώσαμε στην προηγούμενη υποενότητα 1.3α΄, αποκτά δομή $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-προτύπου (θυμίζουμε την παρατήρηση 1.2.2).

Ο μορφισμός σχημάτων $f : X \to Y$ καθορίζει (εξ ορισμού) έναν μορφισμό δεματιών αντιμεταθετικών δακτυλίων $\theta : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. Από το λήμμα 1.3.2, ο θ καθορίζει έναν ομομορφισμό δεματιών αντιμεταθετικών δακτυλίων $\hat{\theta} : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. Έτσι, το δεμάτι $\mathcal{O}_X$ μπορεί μέσω του $\hat{\theta}$ να θεωρηθεί ως $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-άλγεβρα (δηλαδή δεμάτι από $f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)$-άλγεβρες, όπου $U \subseteq X$ είναι ανοιχτά). Τώρα είμαστε σε θέση να θεωρήσουμε το τανυστικό γινόμενο των δύο $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-προτύπων $f^{-1}\mathcal{G}$ και $\mathcal{O}_X$:

$$f^*\mathcal{G} \coloneqq f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Το $\mathcal{O}_X$-πρότυπο (εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι όντως τέτοιο) $f^*\mathcal{G}$ είναι αυτό που αποκαλούμε *αντίστροφη εικόνα του $\mathcal{G}$ μέσω του μορφισμού σχημάτων f* (αν θέλαμε να είμαστε απόλυτα συνεπείς θα έπρεπε να γράφουμε $\Phi = (f, \theta)$ για τον μορφισμό σχημάτων και $\Phi^*\mathcal{G}$ για την αντίστροφη εικόνα του $\mathcal{G}$ μέσω του Φ, ωστόσο θα ακολουθήσουμε κι εμείς τη συνήθη κατάχρηση του συμβολισμού). Το στάχυ αυτού του $\mathcal{O}_X$-προτύπου στο τυχαίο σημείο $x \in X$ δίνεται από τη σχέση

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Όπως για την ευθεία εικόνα, έτσι και για την αντίστροφη εικόνα έχουμε μια πιο συγκεκριμένη περιγραφή για αυτήν όταν έχουμε μορφισμό αφινικών σχημάτων και το δεμάτι που αντιστρέφουμε είναι σχεδόν-συναφές.

Πρόταση 1.3.4. *Έστω ένας μορφισμός μεταξύ αφινικών σχημάτων $(\phi^a, \phi^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) = (\mathit{Spec}S, \mathcal{O}_{\mathit{Spec}S}) \to (Y, \mathcal{O}_Y) = (\mathit{Spec}R, \mathcal{O}_{\mathit{Spec}R})$ που επάγεται από έναν μορφισμό αντιμεταθετικών δακτυλίων $\phi : R \to S$. Έστω $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ ένα $\mathcal{O}_Y$-πρότυπο που επάγεται από ένα R-πρότυπο M. Τότε η αντίστροφη εικόνα $(\phi^a)^*\mathcal{F}$ του $\mathcal{F}$ μέσω του μορφισμού ϕ^a είναι το $\mathcal{O}_X$-πρότυπο που καθορίζεται από το S-πρότυπο $M \otimes_R S$.*

Παρατήρηση 1.3.5. *Αυτή η πρόταση κάνει πιο ξεκάθαρη την ομοιότητα που υπάρχει (ήδη από τον ορισμό της $f^*\mathcal{G}$) μεταξύ της γνωστής από την Αντιμεταθετική Άλγεβρα επέκτασης βαθμωτών (στα αγγλικά extension of scalars) και της αντίστροφης εικόνας μέσω ενός μορφισμού σχημάτων.*

Απόδειξη. Ως τανυστικό γινόμενο R-προτύπων (το S γίνεται R-πρότυπο μέσω του ϕ), το $M \otimes_R S$ είναι R-πρότυπο, ωστόσο με άμεσο τρόπο μπορεί να αποκτήσει δομή S-προτύπου (συγκεκριμένα $s' \cdot (m \otimes s) = m \otimes s's$). Επειδή είναι πιο «ενδιαφέρουσα» η δομή του ως S-προτύπου, θα συμβολίζουμε με $M \otimes_R S$ όταν το θεωρούμε ως S-πρότυπο, ενώ με $[M \otimes_R S]_R$ όταν το θεωρούμε ως R-πρότυπο.

Θεωρούμε τον φυσικό ομομορφισμό R-προτύπων $h : M \to [M \otimes_R S]_R$ που στέλνει το m στο $m \otimes 1$. Τότε ο h επάγει έναν μορφισμό $\mathcal{O}_Y$-προτύπων

$$\tilde{h} : \widetilde{M} \to [\widetilde{M \otimes_R S}]_R.$$

Από την πρόταση 1.3.3 ξέρουμε ότι ο $\tilde{h}$ μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\tilde{h} : \mathcal{F} \to \phi^a_*(\widetilde{M \otimes_R S}).$$

Από το λήμμα 1.3.2 παίρνουμε έναν μορφισμό δεματιών:

$$\hat{h} : (\phi^a)^{-1}\mathcal{F} \to \widetilde{M \otimes_R S}.$$

Ο $\hat{h}$ είναι βέβαια μορφισμός $(\phi^a)^{-1}\mathcal{O}_Y$-προτύπων, επειδή όμως το $\widetilde{M \otimes_R S}$ είναι ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο, ο $\hat{h}$ επάγει έναν μορφισμό $\mathcal{O}_X$-προτύπων

$$\bar{h} : (\phi^a)^*\mathcal{F} = (\phi^a)^{-1}\mathcal{F} \otimes_{(\phi^a)^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \to \widetilde{M \otimes_R S}.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ του S και θέσουμε $\mathfrak{q} = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$, τότε $\phi^a(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$, κι από τη σχέση που γράψαμε για τα στάχυα της αντίστροφης εικόνας μέσω μορφισμού σχημάτων παίρνουμε

$$((\phi^a)^*\mathcal{F})_{\mathfrak{p}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{q}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}}} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{q}} \otimes_{R_{\mathfrak{q}}} S_{\mathfrak{p}} = (M \otimes_R S)_{\mathfrak{p}}.$$

Άρα ο $\bar{h}$ επάγει ισομορφισμούς των σταχυών σε όλα τα $x \in X$, οπότε είναι και ισομορφισμός δεματιών (πρόταση 1.1.2). □

Από την τελευταία πρόταση προκύπτει ως πόρισμα το κατά πόσο διατηρείται η συνάφεια και η σχεδόν-συνάφεια από την αντίστροφη εικόνα μέσω ενός μορφισμού σχημάτων.

Πόρισμα 1.3.6. *Έστω $f : X \to Y$ ένας μορφισμός σχημάτων.*

(i) *Για ένα σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_Y$-πρότυπο $\mathcal{G}$, η αντίστροφη εικόνα $f^*\mathcal{G}$ μέσω του f είναι σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.*

(ii) *Όταν τα X και Y είναι σχήματα τοπικά Noether, η αντίστροφη εικόνα $f^*\mathcal{G}$ ενός συναφούς $\mathcal{O}_Y$-προτύπου $\mathcal{G}$ είναι συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.*

Απόδειξη. (i) Για $x \in X$ και $y = f(x) \in Y$, επιλέγουμε αφινικές ανοιχτές περιοχές $U = \mathrm{Spec}S$ και $V = \mathrm{Spec}R$ των x και y, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $f(U) \subseteq V$. Τότε ο $f|_U$ επάγεται από έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : R \to S$. Αφού το $\mathcal{G}$ είναι σχεδόν-συναφές, το θεώρημα 1.2.19 παίρνουμε ότι το $\mathcal{G}|_V$ είναι ισομορφικό με το $\widetilde{M}$, όπου $M = \Gamma(V, \mathcal{G})$. Άρα από την πρόταση 1.3.4 έχουμε ότι $f^*\mathcal{G}|_U = \widetilde{M \otimes_R S}$. Επομένως το $f^*\mathcal{G}|_U$ είναι σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_U$-πρότυπο κι επειδή το x ήταν εξ αρχής τυχαίο συμπεραίνουμε ότι το $f^*\mathcal{G}$ είναι σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο.

(ii) Αν τα X και Y είναι σχήματα τοπικά Noether, τότε οι περιοχές που επιλέξαμε παραπάνω για το προηγούμενο ζητούμενο είναι φάσματα δακτυλίων Noether, δηλαδή R και S είναι δακτύλιοι Noether. Από την πρόταση 1.2.28 συμπεραίνουμε ότι για ένα συναφές δεμάτι $\mathcal{G}$, το R-πρότυπο $M = \Gamma(V, \mathcal{G})$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επομένως και το $M \otimes_R S$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο S-πρότυπο. Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι το $f^*\mathcal{G}|_U$ είναι συναφές δεμάτι κι επειδή το x ήταν εξ αρχής τυχαίο σημείο του X έχουμε ότι το $f^*\mathcal{G}$ είναι συναφές.

□

Για να βρούμε αντίστοιχα αποτελέσματα για την ευθεία εικόνα χρειαζόμαστε μια καινούργια έννοια.

Ορισμός 1.3.7. *Για έναν μορφισμό σχημάτων $f : X \to Y$, αν υπάρχει ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα $\{V_i\}_{i \in I}$ του Y τέτοιο ώστε τα $f^{-1}(V_i)$ να είναι σχεδόν-συμπαγή για κάθε $i \in I$, τότε ο f καλείται* σχεδόν-συμπαγής μορφισμός.

Πρόταση 1.3.8. *Έστω $f : X \to Y$ μορφισμός σχημάτων. Αν είτε ο f είναι σχεδόν-συμπαγής και διαχωρισμένος, είτε το X είναι σχήμα Noether, τότε η ευθεία εικόνα $f_*\mathcal{F}$ ενός σχεδόν-συναφούς δεματιού $\mathcal{F}$ είναι σχεδόν-συναφές δεμάτι.*

Απόδειξη. Είναι αρκετό να αποδείξουμε την σχεδόν-συνάφεια της ευθείας εικόνας $f_*\mathcal{F}$ σε μια περιοχή ενός σημείου του Y, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Y είναι αφινικό σχήμα. Επιπλέον, αν ο f είναι σχεδόν-συμπαγής μορφισμός, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το X είναι σχεδόν-συμπαγές επίσης (πάλι επειδή αρκεί να εξετάσουμε τα σχήματα και τα δεμάτια τους τοπικά για να δείξουμε τη σχεδόν-συνάφεια). Από την άλλη, αν το X είναι σχήμα Noether, τότε πάλι θα είναι σχεδόν-συμπαγές. Σε κάθε περίπτωση, επιλέγουμε ένα πεπερασμένο αφινικό ανοιχτό κάλυμμα του X, $\{U_i\}_{i\in I}$.

Αν έχουμε έναν διαχωρισμένο μορφισμό f από ένα σχήμα X σ' ένα αφινικό σχήμα, τότε ισχύει ότι η τομή δύο αφινικών ανοιχτών υποσυνόλων του X, $U_i \cap U_j$, είναι επίσης αφινικό ανοιχτό σύνολο (βλ. πρόταση 1.4.8 στην επόμενη ενότητα). Από την άλλη, αν το X είναι σχήμα Noether, τότε η τομή $U_{ij} = U_i \cap U_j$ δύο αφινικών ανοιχτών, καλύπτεται από πεπερασμένα αφινικά ανοιχτά σύνολα $\{U_{ijk}\}$.

Μια τομή $s \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F})(= \Gamma(V, f_*\mathcal{F}))$ καθορίζεται πλήρως από τις τομές $\{s_i\}_{i\in I}$ πάνω από τα $f^{-1}(V) \cap U_i$ των οποίων οι περιορισμοί σε κάθε U_{ijk}, σαφώς, συμπίπτουν. Σχηματίζουμε τώρα την ακόλουθη ακριβή ακολουθία:

$$0 \to f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i\in I} f_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{ijk} f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}}),$$

όπου οι ϕ και ψ ορίζονται ως εξής: ο ϕ καθορίζεται με φυσικό τρόπο από τους ομομορφισμούς περιορισμού $\rho^{\mathcal{F}}_{U_i\cap f^{-1}(V), f^{-1}(V)}$ και ο ψ από τους ομομορφισμούς περιορισμού $\rho^{\mathcal{F}}_{U_{ijk}\cap f^{-1}(V), U_i\cap f^{-1}(V)}$ στα $f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$ και $-\rho^{\mathcal{F}}_{U_{jik}\cap f^{-1}(V), U_i\cap f^{-1}(V)}$ στα $f_*(\mathcal{F}|_{U_{jik}})$ (προσοχή στο πρόσημο). Από τον ορισμό των ϕ και ψ γίνεται επίσης ξεκάθαρο γιατί η ακολουθία είναι ακριβής.

Από την πρόταση 1.3.3 παίρνουμε ότι τα δεμάτια $f_*(\mathcal{F}|_{U_i})$ και $f_*(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$ είναι σχεδόν-συναφή. Από το πόρισμα 1.2.23 παίρνουμε τελικά τη σχεδόν-συνάφεια του $f_*\mathcal{F}$. □

Αν τώρα εξετάσουμε κατά πόσο διατηρείται η συνάφεια ενός δεματιού μέσω της ευθείας εικόνας, θα παρατηρήσουμε ότι ακόμα κι αν έχουμε μορφισμό $f : X \to Y$ μεταξύ σχημάτων Noether, τότε η ευθεία εικόνα ενός συναφούς δεματιού $\mathcal{F}$ δεν είναι απαραίτητα συναφές δεμάτι.

Παράδειγμα 1.3.9. *Έστω ένας k-ομομορφισμός $\phi : k \to k[x]$ από ένα σώμα k σ' έναν πολυωνυμικό δακτύλιο $k[x]$ πάνω από το k, ο οποίος επάγεται από έναν μορφισμό αφινικών σχημάτων $\phi^a : X = Speck[x] \to Y = Speck$. Από την πρόταση 1.2.28 παίρνουμε ότι το $\mathcal{O}_X$ είναι συναφές δεμάτι. Τότε το $\phi^a_*\mathcal{O}_X$ είναι ένα δεμάτι πάνω από το $Y = Speck$ το οποίο καθορίζεται από το k-πρότυπο $k[x]$ (πρόταση 1.3.3). Παρατηρούμε ότι το $k[x]$ δεν είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο k-πρότυπο. Επομένως πάλι από την πρόταση 1.2.28 συμπεραίνουμε ότι το $\phi^a_*\mathcal{O}_X$* δεν *είναι συναφές δεμάτι.*

Για τη σύνδεση της ευθείας και της αντίστροφης εικόνας έχουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα με το λήμμα 1.3.2:

Λήμμα 1.3.10. *Έστω $f : X \to Y$ ένας μορφισμός σχημάτων. Για ένα $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$ κι ένα $\mathcal{O}_Y$-πρότυπο $\mathcal{G}$, υπάρχει ένας ισομορφισμός αβελιανών ομάδων*

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}),$$

όπου $Hom_{\mathcal{O}_X}(\cdot,\cdot)$ και $Hom_{\mathcal{O}_Y}(\cdot,\cdot)$ είναι τα σύνολα των μορφισμών $\mathcal{O}_X$ και $\mathcal{O}_Y$-προτύπων, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποίησουμε τους ίδιους συμβολισμούς με την απόδειξη του λήμματος 1.3.2. Θεωρούμε το $f^{\bullet}\mathcal{G}$ ως ένα προδεμάτι από $f^{\bullet}\mathcal{O}_Y$-πρότυπα. Θεωρούμε το τανυστικό γινόμενο προδεματιών $f^{\bullet}\mathcal{G} \otimes_{f^{\bullet}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η δεματιοποίηση αυτού του προδεματιού είναι το $f^*\mathcal{G}$. Έπειτα, όπως στην απόδειξη του λήμματος 1.3.2 μπορούμε να δείξουμε τους ισομορφισμούς

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-presheaf}}(f^{\bullet}\mathcal{G} \otimes_{f^{\bullet}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X, \mathcal{F}),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-presheaf}}(f^{\bullet}\mathcal{G} \otimes_{f^{\bullet}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

παίρνοντας το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.3.11. *Για μορφισμό σχημάτων $f : X \to Y$ και σχεδόν-συναφές δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω από το X, υπάρχει ένας φυσικός μορφισμός $\mathcal{O}_X$-προτύπων $\eta : f^*f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Πράγματι, αν στο λήμμα 1.3.10 θεωρήσουμε ως $\mathcal{G} = f_*\mathcal{F}$, τότε ο η είναι ο μορφισμός που αντιστοιχεί στον ταυτοτικό $id_{f_*\mathcal{F}}$.*

Τέλος, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε κατά πόσο διατηρείται η ακρίβεια μικρών ακολουθιών μέσα από την ευθεία και αντίστροφη είκονα μέσω ενός μορφισμού σχημάτων:

Πρόταση 1.3.12. *Για έναν μορφισμό σχημάτων $f : X \to Y$, έστω*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

μια ακριβής ακολουθία $\mathcal{O}_X$-προτύπων, και έστω

$$0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to 0$$

μια ακριβής ακολουθία $\mathcal{O}_Y$-προτύπων. Τότε παίρνουμε τις ακόλουθες ακριβείς ακολουθίες:

$$0 \to f_*\mathcal{F}_1 \to f_*\mathcal{F}_2 \to f_*\mathcal{F}_3,$$

$$f^*\mathcal{G}_1 \to f^*\mathcal{G}_2 \to f^*\mathcal{G}_3 \to 0.$$

Απόδειξη. Για τυχαίο ανοιχτό $U \subseteq Y$ έχουμε ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F}_1(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}_2(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}_3(f^{-1}(U))$$

άρα περνώντας στα στάχυα και γυρνώντας μετά πίσω στα δεμάτια παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \to f_*\mathcal{F}_1 \to f_*\mathcal{F}_2 \to f_*\mathcal{F}_3.$$

Από την παρατήρηση 1.3.1 παίρνουμε ακριβή ακολουθία

$$0 \to f^{-1}\mathcal{G}_1 \to f^{-1}\mathcal{G}_2 \to f^{-1}\mathcal{G}_3 \to 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τανυστικά με $\mathcal{O}_X$ πάνω από το $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ παίρνουμε τελικά

$$f^*\mathcal{G}_1 \to f^*\mathcal{G}_2 \to f^*\mathcal{G}_3 \to 0$$

όπως θέλαμε. □

1.4 Σχήματα και σχεδόν-συναφή δεμάτια

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου θα δούμε παραδείγματα χρήσης των σχεδόν-συναφών δεματιών για τον ορισμό κάποιων χρήσιμων σχημάτων. Συγκεκριμένα θα δούμε πώς τα κλειστά υποσχήματα καθορίζονται από σχεδόν-συναφή δεμάτια. Θα αναφερθούμε ακόμη στο γεγονός ότι τα αφινικά σχήματα πάνω από ένα δοθέν σχήμα Y (θα ορίσουμε τι ακριβώς σημαίνει αυτό) είναι ουσιαστικά «το ίδιο» με τις σχεδόν-συναφείς $\mathcal{O}_Y$-άλγεβρες (πρόκειται για μια γενίκευση της αντιστοιχίας μεταξύ αφινικών σχημάτων και αντιμεταθετικών δακτυλίων).

1.4α΄ Κλειστά υποσχήματα και ιδεώδη δεμάτια

Στο βιβλίο του Hartshorne, [2], ο ορισμός για τα κλειστά υποσχήματα δίνεται μέσω κλάσεων ισοδυναμίας κλειστών εμφυτεύσεων (στα αγγλικά closed immersions):

Ορισμός 1.4.1. *Ένας μορφισμός σχημάτων $f : Y \to X$ καλείται* κλειστή εμφύτευση *αν επάγει ομοιομορφισμό του υποκείμενου τοπολογικού χώρου του Y σε κάποιο κλειστό υποσύνολο του X και επάγει έναν επιμορφισμό δεματιών $f^\sharp : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$. Καλούμε* κλειστό υποσχήμα *του σχήματος X μια κλάση ισοδυναμίας κλειστών εμφυτεύσεων, όπου οι κλειστές εμφυτεύσεις $f : Y \to X$ και $f' : Y' \to X'$ καλούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ισομορφισμός σχημάτων $i : Y' \to Y$ τέτοιος ώστε $f' = f \circ i$.*

Ο ορισμός αυτός δίνει έμφαση στο ότι δεν αρκεί να έχουμε ένα κλειστό υποσύνολο του X για να έχουμε ένα κλειστό υποσχήμα του, πρέπει να προσδιορίσουμε με ποιον τρόπο «περιορίζουμε» το δεμάτι $\mathcal{O}_X$ σ' αυτό το κλειστό υποσύνολο.

Ωστόσο στο δεύτερο τόμο του Ueno, [3], ο ορισμός της κλειστής εμφύτευσης και του κλειστού υποσχήματος ακολουθεί τον ορισμό του Grothendieck, [4]. Για να δώσουμε αυτόν τον ορισμό πρέπει πρώτα να ορίσουμε κάποιες άλλες έννοιες.

Ορισμός 1.4.2. *Αν το $\mathcal{J}$ είναι ένα $\mathcal{O}_X$-υποπρότυπο του δεματιού δομής $\mathcal{O}_X$ (αυτό σημαίνει ότι για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$, το $\mathcal{J}(U)$ είναι ιδεώδες του $\mathcal{O}_X(U)$), τότε ονομάζεται* ιδεώδες δεμάτι *του $\mathcal{O}_X$. Αν επιπλέον το $\mathcal{J}$ είναι σχεδόν-συναφές δεμάτι, τότε ονομάζεται* σχεδόν-συναφές ιδεώδες δεμάτι.

Ορισμός 1.4.3. *Για ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω στον τοπολογικό χώρο X, θέτουμε*

$$\mathit{supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\},$$

και το ονομάζουμε στήριγμα *του $\mathcal{F}$.*

Λήμμα 1.4.4. *Έστω σχήμα X και $\mathcal{J}$ ένα σχεδόν-συναφές ιδεώδες δεμάτι του X. Τότε το στήριγμα $Y = \mathit{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ του δεματιού-πηλίκο $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Επίσης το $(Y, \iota^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ (όπου $\iota : Y \to X$ είναι η φυσική εμφύτευση του Y στο X) είναι κλειστό υποσχήμα του X (με τον επιμορφισμό δεματιών να είναι αυτός που επάγεται φυσικά).*

Απόδειξη. Έστω $\{U_j\}_{j\in J}$ αφινικό κάλυμμα του X, δηλαδή $U_j = \mathrm{Spec}A_j$, και $I_j = \Gamma(U_j, \mathcal{J})$, οπότε τα I_j είναι ιδεώδη των δακτυλίων A_j. Επίσης το $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|_{U_j}$ είναι δεμάτι αντιμεταθετικών δακτυλίων που καθορίζεται από το A_j/I_j για κάθε $j \in J$. Έχουμε

$$\mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \cap U_j = V(I_j) \subseteq \mathrm{Spec}A_j.$$

Πράγματι, για $\mathfrak{p} \supseteq I_j$ έχουμε $(A_j/I_j)_\mathfrak{p} \neq 0$ και για $\mathfrak{p} \not\supseteq I_j$ έχουμε $A_{j,\mathfrak{p}} = I_{j,\mathfrak{p}}$, δηλαδή $(A_j/I_j)_\mathfrak{p} = 0$. Επομένως, αφού το $\mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \cap U_j$ είναι κλειστό υποσύνολο του U_j και το $\{U_j\}_{j\in J}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του X, τότε το στήριγμα του $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Ο μορφισμός που επάγεται φυσικά από το $\mathcal{O}_X$ στο $\iota_*\iota^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ είναι ο εξής: Για τυχαίο ανοιχτό $U \subseteq X$ έχουμε επιμορφισμό $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{J}(U)$. Επίσης ισχύει ότι $\iota_*\iota^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})(U) = \iota^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})(\iota^{-1}(U)) = \iota^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})(U\cap Y) = \varinjlim_{U\cap Y\subseteq V} (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})(V)$, άρα το στάχυ στο τυχαίο $x \in X$ είναι $(\iota_*\iota^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x$, επομένως ισχύει ότι $\iota_*\iota^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, οπότε παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.4.5. *Το δεμάτι του παραπάνω λήμματος $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|_Y := \iota^{-1}\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ θα το συμβολίζουμε και με $\mathcal{O}_Y$ ή καταχρηστικά απλά με $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, μιας και εκτός του Y όλα τα στάχυα του $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ είναι μηδενικά.*

Δίνουμε τώρα τον εναλλακτικό ορισμό ενός κλειστού σχήματος και αμέσως μετά αποδεικνύουμε ότι είναι ισοδύναμος μ' αυτόν που έχουμε δώσει ήδη.

Δεύτερος Ορισμός 1.4.6. *Έστω σχήμα $(X, \mathcal{O}_X)$. Το $(Y, \mathcal{O}_Y)$ καλείται* κλειστό υποσχήμα *του X αν και μόνο αν υπάρχει $\mathcal{J}$ σχεδόν-συναφές ιδεώδες δεμάτι πάνω από το X ώστε $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (supp(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}), \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ (ακολουθούμε τον συμβολισμό της παρατήρησης 1.4.5). Τότε ένας μορφισμός σχημάτων $f : W \to X$ καλείται* κλειστή εμφύτευση *αν υπάρχουν ένα κλειστό υποσχήμα $(Y, \mathcal{O}_Y)$ του X κι ένας ισομορφισμός σχημάτων $\theta : W \to Y$ ώστε $f = \iota \circ \theta$.*

Πρόταση 1.4.7. *Οι ορισμοί για την έννοια του κλειστού υποσχήματος 1.4.1 και 1.4.6 είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Από το λήμμα 1.4.4 παίρνουμε ότι αν έχουμε κλειστό υποσχήμα με την έννοια του 1.4.6, τότε έχουμε κλειστό σχήμα και με την έννοια του 1.4.1.

Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι ο πυρήνας του επιμορφισμού δεματιών $\iota^\sharp : \mathcal{O}_X \to \iota_*\mathcal{O}_Y$, που ξέρουμε ότι υπάρχει από τον ορισμό 1.4.1, είναι σχεδόν-συναφές ιδεώδες δεμάτι του $\mathcal{O}_X$.

Γνωρίζουμε ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος (ως τοπολογικός χώρος) του X, άρα η εμφύτευση $\iota : Y \to X$ είναι σχεδόν-συμπαγής μορφισμός (κλειστά υποσύνολα σχεδόν-συμπαγών συνόλων είναι επίσης σχεδόν-συμπαγή).

Επίσης ο ι είναι 1-1 απεικόνιση των υποκείμενων τοπολογικών χώρων και ο μορφισμός $\iota^\sharp$ είναι επί. Αυτό συνεπάγεται ότι ο ι είναι μονομορφισμός σχημάτων (με την κατηγορική έννοια - η απόδειξη αυτού είναι άμεση αν γράψουμε αναλυτικά τι σημαίνουν οι δύο ιδιότητες του ι που αναφέραμε).

Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι ο ι είναι διαχωρισμένος μορφισμός, αφού ένας μορφισμός σχημάτων είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν ο αντίστοιχος διαγώνιος μορφισμός του είναι ισομορφισμός (αρκεί κι εδώ να γράψουμε αναλυτικά τι σημαίνουν οι έννοιες μονομορφισμός και ισομορφισμός) και κάθε ισομορφισμός είναι κλειστή εμφύτευση (με την έννοια του 1.4.1).

Τελικά από την πρόταση 1.3.8 (όπου η έννοια του διαχωρισμένου μορφισμού χρησιμοποιείται με βάση την έννοια της κλειστής εμφύτευσης του 1.4.1) και αφού το $\mathcal{O}_Y$ είναι σχεδόν-συναφές δεμάτι, παίρνουμε ότι το δεμάτι $\iota_*\mathcal{O}_Y$ είναι σχεδόν-συναφές δεμάτι. Από το πόρισμα 1.2.23 παίρνουμε ότι ο $\mathrm{Ker}\iota^\sharp$ είναι σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_X$-υποπρότυπο του $\mathcal{O}_X$, άρα σχεδόν-συναφές ιδεώδες δεμάτι του $\mathcal{O}_X$, όπως θέλαμε. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε δύο χρήσιμες ιδιότητες των κλειστών εμφυτεύσεων και μια χρήσιμη ιδιότητα των διαχωρισμένων μορφισμών (που προσδιορίζονται από κλειστές εμφυτεύσεις).

Πρόταση 1.4.8. (i) *Ένας μορφισμός αφινικών σχημάτων $f : SpecB \to SpecA$ είναι κλειστή εμφύτευση αν και μόνο αν ο ομομορφισμός δακτυλίων $\phi : A \to B$ είναι επί. Τότε ο B είναι ισομορφικός με τον δακτύλιο-πηλίκο A/I του ιδεώδους $I = Ker\phi$.*

(ii) *Για ένα αφινικό ανοιχτό υποσύνολο $U \subseteq X$, η αντίστροφη εικόνα $j^{-1}(U)$ μιας κλειστής εμφύτευσης $j : Y \to X$ είναι ένα αφινικό ανοιχτό υποσύνολο του Y, εκτός αν $j^{-1}(U) = \emptyset$.*

(iii) *Αν έχουμε έναν διαχωρισμένο μορφισμό $f : X \to Y = SpecR$, τότε για κάθε αφινικά ανοιχτά υποσύνολα του X, έστω U και V, η τομή τους $U \cap V$ είναι επίσης ένα αφινικό ανοιχτό υποσύνολο του X, εκτός αν $U \cap V = \emptyset$.*

Απόδειξη. (i) Από το θεώρημα 1.2.19 παίρνουμε ότι ένα σχεδόν-συναφές ιδεώδες δεμάτι $\mathcal{J}$ του $X = \mathrm{Spec}A$ συμπίπτει με το δεμάτι $\widetilde{I}$ που επάγεται από το ιδεώδες $I = \Gamma(X, \mathcal{J})$. Επομένως το κλειστό υποσχήμα $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ που καθορίζεται από το ιδεώδες δεμάτι $\mathcal{J}$, όπου $Y = \mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = V(I) \subseteq X$, είναι ισομορφικό με το $(\mathrm{Spec}(A/I), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/I)})$.

Γνωρίζουμε ότι η κλειστή εμφύτευση f επάγει έναν ισομορφισμό h μεταξύ του $\mathrm{Spec}B$ κι ενός κλειστού υποσχήματος $(Y, \mathcal{O}_Y)$ του $\mathrm{Spec}A$. Σε συνδυασμό με τα παραπάνω, υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων $A/I \cong B$ όπου I είναι το ιδεώδες του A που παράγει το σχεδόν-συναφές ιδεώδες δεμάτι $\mathcal{J} = \mathrm{Ker}f^\sharp$. Επίσης ο f παραγοντοποιείται ως $f = \iota \circ h$, όπου ι είναι η φυσική εμφύτευση του Y στο X, άρα η f προσδιορίζεται από τους ομομορφισμούς δακτυλίων $A \to A/I \xrightarrow{\sim} B$, δηλαδή ο ομομορφισμός $\phi : A \to B$ που αντιστοιχεί στον f είναι όντως επί (με $\widetilde{\mathrm{Ker}\phi} = \mathrm{Ker}f^\sharp$).

Αντίστροφα, αν έχουμε επί ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : A \to B$, αυτός παραγοντοποιείται ως $A \to A/I \xrightarrow{\sim} B$, και ο αντίστοιχος μορφισμός αφινικών σχημάτων $f := \phi^a : \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ είναι σύνθεση του ισομορφισμού $\mathrm{Spec}B \cong \mathrm{Spec}(A/I)$ με την φυσική εμφύτευση $\mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}A$, όπου το $\mathrm{Spec}(A/I)$ είδαμε ότι είναι κλειστό υποσχήμα του $\mathrm{Spec}A$. Επομένως η f είναι κλειστή εμφύτευση.

(ii) Από την κλειστή εμφύτευση έχουμε έναν επιμορφισμό δεματιών $j^\sharp : \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_Y$, άρα έναν ισομορφισμό $j_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, όπου $\mathcal{J} := \mathrm{Ker}(j^\sharp)$ είναι σχεδόν-συναφές ιδεώδες υποδεμάτι του $\mathcal{O}_X$ (αφού η j είναι κλειστή εμφύτευση). Αν U είναι αφινικό ανοιχτό υποσύνολο του X, τότε $j_*\mathcal{O}_Y|_U \cong (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|_U$ και αν $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ και $J = \Gamma(U, \mathcal{J})$, τότε $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|_U \cong \widetilde{A/J}$ (ως σχεδόν-συναφές δεμάτι πάνω από αφινικό σχήμα), οπότε $j_*\mathcal{O}_Y|_U = \mathcal{O}_Y|_{j^{-1}(U)} \cong \widetilde{A/J}$. Επομένως το $j^{-1}(U) \neq \emptyset$ ως σχήμα είναι ισόμορφο με το αφινικό σχήμα $\mathrm{Spec}(A/J)$, δηλαδή είναι αφινικό ανοιχτό υποσύνολο του Y.

(iii) Αφού ο f είναι διαχωρισμένος μορφισμός, ο διαγώνιος μορφισμός $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ είναι μια κλειστή εμφύτευση. Έστω $U = \mathrm{Spec}A$ και $V = \mathrm{Spec}B$. Τότε ο μορφισμός f πάνω από τα U και V καθορίζεται από τους ομομορφισμούς δακτυλίων $g : R \to A$ και $h : R \to B$, αντίστοιχα. Επομένως παίρνουμε $U \times_Y V \cong \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$, το οποίο είναι αφινικό ανοιχτό υποσύνολο του $X \times_Y X$. Παρατηρούμε ότι $U \cap V = \Delta_{X/Y}^{-1}(U \times_Y V)$, άρα από το (ii), το $U \cap V$ είναι αφινικό ανοιχτό σύνολο.

□

Παρατήρηση 1.4.9. *Στην παραπάνω απόδειξη βλέπουμε τη χρησιμότητα της ισοδυναμίας των δύο ορισμών 1.4.1 και 1.4.6. Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ένας μορφισμός είναι κλειστή εμφύτευση δείχνουμε ότι ικανοποιεί τον ορισμό 1.4.1 που απαιτεί τον έλεγχο λιγότερων συνθηκών, ενώ όταν ξέρουμε ότι ένας μορφισμός είναι κλειστή εμφύτευση χρησιμοποιούμε τον 1.4.6 που χαρακτηρίζει πιο συγκεκριμένα το κλειστό υποσχήμα που καθορίζει η κλειστή απεικόνιση (χαρακτηρίζοντας έτσι πιο συγκεκριμένα και την ίδια την κλειστή απεικόνιση).*

Τέλος, σε περιπτώσεις όπως αυτές που μας απασχόλησαν σ' αυτήν την υποενότητα μπορεί να συναντήσουμε την ακόλουθη ορολογία: Για ένα κλειστό υποσχήμα W ενός σχήματος Y η ευθεία εικόνα $\iota_*\mathcal{F}$ ενός δεματιού $\mathcal{F}$ (πάνω από το W) μέσω του φυσικού μορφισμού σχημάτων $\iota : W \to Y$ (που επάγει έναν επιμορφισμό δεματιών $\mathcal{O}_Y \to \iota_*\mathcal{O}_W$) ικανοποιεί τη σχέση $(\iota_*\mathcal{F})_y = 0$ για κάθε $y \in Y \setminus W$. Γι' αυτό το λόγο λέμε ότι το $\iota_*\mathcal{F}$ είναι το *δεμάτι που παίρνουμε επεκτείνοντας το $\mathcal{F}$ με 0 έξω από το W*.

1.4β΄ Αφινικοί μορφισμοί και σχεδόν-συναφείς $\mathcal{O}_Y$-άλγεβρες

Τυπικό παράδειγμα μορφισμών που ικανοποιούν τις συνθήκες της πρότασης 1.3.8 είναι οι αφινικοί μορφισμοί.

Ορισμός 1.4.10. *Έστω $f : X \to Y$ ένας μορφισμός σχημάτων. Αν υπάρχει αφινικό κάλυμμα $\{U_i\}_{i\in I}$ του Y τέτοιο ώστε το $f^{-1}(U_i)$ να είναι αφινικό ανοιχτό σύνολο του X, τότε ο f καλείται* αφινικός μορφισμός. *Λέμε επίσης ότι το X είναι ένα* αφινικό σχήμα πάνω από το Y.

Έστω ένας αφινικός μορφισμός $f : X \to Y$. Γνωρίζουμε ότι τα αφινικά σχήματα είναι σχεδόν-συμπαγή, άρα άμεσα προκύπτει ότι ένας αφινικός μορφισμός είναι σχεδόν-συμπαγής. Επιπλέον, αν $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι το αφινικό κάλυμμα του Y που μας εξασφαλίζει ο ορισμός του αφινικού μορφισμού, τότε οι επαγόμενοι μορφισμοί $f^{-1}(U_i) \to U_i$ είναι μορφισμοί μεταξύ αφινικών σχημάτων, άρα είναι διαχωρισμένοι (κάθε μορφισμός αφινικών σχημάτων είναι διαχωρισμένος, βλ. [1], σελ.132, λήμμα 3.22). Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι τα $\Delta_{f^{-1}(U_i)/U_i}(f^{-1}(U_i)) = \Delta_{X/Y}(f^{-1}(U_i))$ είναι κλειστά υποσύνολα ως προς τα $f^{-1}(U_i) \times_{U_i} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(U_i) \times_Y f^{-1}(U_i)$ (τα οποία είναι ανοιχτά και καλύπτουν το $X \times_Y X$) για κάθε $i \in I$. Τελικά η εικόνα $\Delta_{X/Y}(X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times_Y X$ (το βλέπουμε αν παρατηρήσουμε ότι το συμπλήρωμα της εικόνας είναι ανοιχτό σε κάθε $f^{-1}(U_i) \times_Y f^{-1}(U_i)$) άρα και ο μορφισμός f είναι διαχωρισμένος (ένας μορφισμός σχημάτων $f : X \to Y$ είναι διαχωρισμένος αν και μόνο αν ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος της εικόνας του διαγώνιου μορφισμού του είναι κλειστός ως προς τον υποκείμενο χώρο του $X \times_Y X$, βλ. [1], σελ.133, πρόταση 3.23).

Έτσι από την πρόταση 1.3.8 συμπεραίνουμε ότι η ευθεία εικόνα του δεματιού δομής $\mathcal{O}_X$ μέσω του f, $f_*\mathcal{O}_X$, είναι σχεδόν-συναφές δεμάτι αντιμεταθετικών δακτυλίων πάνω από τον Y. Επιπλέον, για κάθε ανοιχτό $U \subseteq Y$, το $(f_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ γίνεται $\mathcal{O}_Y(U)$-άλγεβρα μέσω του μορφισμού $\theta : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ που επάγεται από τον f. Αυτή η δομή $\mathcal{O}_Y$-άλγεβρας είναι επίσης συμβατή με τους ομομορφισμούς περιορισμού του $f_*\mathcal{O}_X$. Άρα το $f_*\mathcal{O}_X$ είναι μια σχεδόν-συναφής (αντιμεταθετική) *$\mathcal{O}_Y$-άλγεβρα.*

Στην πραγματικότητα, η σχεδόν-συναφής $\mathcal{O}_Y$-άλγεβρα $f_*\mathcal{O}_X$ που βρήκαμε μέσα από τον αφινικό μορφισμό $f : X \to Y$ «περιέχει όλη την πληροφορία του μορφισμού», δηλαδή μέσα από αυτήν μπορούμε να ανακτήσουμε τον αφινικό μορφισμό f. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίου την απόδειξη παραλείπουμε:

Θεώρημα 1.4.11. *Για ένα αφινικό σχήμα πάνω από το Y, δηλαδή για έναν αφινικό μορφισμό $f : X \to Y$, υπάρχει μια επαγόμενη $\mathcal{O}_Y$-άλγεβρα $\mathcal{A}_X = f_*\mathcal{O}_X$. Αυτή η αντιστοιχία επάγει μια αντι-ισοδυναμία μεταξύ της κατηγορίας των αφινικών σχημάτων πάνω από το Y, $(Affine/Y)$, και της κατηγορίας των σχεδόν-συναφών $\mathcal{O}_Y$-αλγεβρών πάνω από το Y, $(q.c.\mathcal{O}_Y\text{-}alg)$.*

Απόδειξη. Βλ. [3], σελ.47-49. □

Κεφάλαιο 2

Συνομολογία σχεδόν-συναφών και συναφών δεματιών

2.1 Μεστά δεμάτια

Αρχικά θα ασχοληθούμε με δεμάτια αβελιανών ομάδων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X. Σε επόμενες υποενότητες θα επεκταθούμε και σε δεμάτια $\mathcal{O}_X$-προτύπων. Ο πρώτος σημαντικός ορισμός είναι αυτός ενός μεστού (στα αγγλικά flabby, στα γαλλικά flasque) δεματιού.

Ορισμός 2.1.1. *Ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X καλείται* μεστό δεμάτι *αν κάθε τομή του $\mathcal{F}$ πάνω από οποιοδήποτε ανοιχτό $U \subseteq X$ μπορεί να επεκταθεί σε τομή πάνω από ολόκληρο το X, δηλαδή αν ο ομομορφισμός περιορισμού $\rho_{U,X} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ είναι επί για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$.*

Παραθέτουμε το βασικό παράδειγμα μεστού δεματιού που σχετίζεται με ένα δοθέν δεμάτι αβελιανών ομάδων $\mathcal{F}$ πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X:

Παράδειγμα 2.1.2. *Έστω $\mathcal{F}$ δεμάτι πάνω από τοπολογικό χώρο X και $\mathbb{F}$ ο δεματιόχωρος (στα αγγλικά sheafed space) του $\mathcal{F}$ (υπενθυμίζουμε ότι $\mathbb{F} := \sqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$, με τοπολογία που επάγεται αν θεωρήσουμε ως ανοιχτά υποσύνολά του τα $V(s) := \{s_x \mid x \in V\} \subseteq \mathbb{F}$, όπου $V \subseteq X$ είναι ανοιχτό και $s \in \mathcal{F}(V)$). Για ένα ανοιχτό $U \subseteq X$ ορίζουμε*

$$C^0(\mathcal{F})(U) := \left\{ s : U \to \mathbb{F} \;\middle|\; \begin{array}{l} s \text{ είναι απεικόνιση τέτοια ώστε } p \circ s = id_U, \\ \text{χωρίς να είναι απαραίτητα συνεχής} \end{array} \right\},$$

όπου $p : \mathbb{F} \to X$ είναι η φυσική προβολή που στέλνει το τυχαίο $s_x \in \mathbb{F}$ στο $x \in X$ (η οποία είναι συνεχής και τοπικός ομοιομορφισμός).

Για ανοιχτά υποσύνολα $V \subseteq U$ ορίζουμε απεικονίσεις περιορισμού $\rho_{V,U}$ με τον αναμενόμενο τρόπο:

$$\begin{aligned} \rho_{V,U} : C^0(\mathcal{F})(U) &\to C^0(\mathcal{F})(V) \\ s &\mapsto s|_V, \end{aligned}$$

όπου $s|_V$ είναι ο περιορισμός της $s : U \to \mathbb{F}$ στο V. Έπειτα μπορούμε να μετατρέψουμε το $C^0(\mathcal{F})(U)$ σε αβελιανή ομάδα για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ ορίζοντας $(s + t)(x) = s(x) + t(x), x \in U$, οπότε $s + t \in C^0(\mathcal{F})(U)$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι οι απεικονίσεις περιορισμού είναι πλέον ομομορφισμοί ομάδων, άρα έχουμε ένα προδεμάτι αβελιανών ομάδων πάνω από τον X. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι στην πραγματικότητα το $C^0(\mathcal{F})$ είναι δεμάτι.

Θα δείξουμε τώρα ότι το $C^0(\mathcal{F})$ είναι μεστό δεμάτι. Έστω ανοιχτό $U \subseteq X$ κι έστω $s \in C^0(\mathcal{F})(U)$. Ορίζουμε

$$\tilde{s}(x) := \begin{cases} s(x) & \text{αν } x \in U \\ 0_x & \text{αν } x \notin U, \end{cases}$$

όπου 0_x είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{F}_x$. Τότε προφανώς $\tilde{s} \in C^0(\mathcal{F})(X)$ και $\tilde{s}|_U = s$. Επομένως ο ομομορφισμός περιορισμού $\rho_{U,X} : C^0(\mathcal{F})(X) \to C^0(\mathcal{F})(U)$ είναι επί. Άρα όντως το $C^0(\mathcal{F})$ είναι μεστό δεμάτι.

Τέλος, υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\mathcal{F}(U) \cong \{s : U \to \mathbb{F} \mid s \in C^0(\mathcal{F})(U) \text{ με την } s \text{ να είναι συνεχής}\},$$

οπότε υπάρχει φυσικός 1-1 μορφισμός δεματιών

$$\iota_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to C^0(\mathcal{F}).$$

Η σημασία των μεστών δεματιών στον ορισμό της συνομολογίας φαίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.1.3. (i) *Για μια ακριβή ακολουθία δεματιών αβελιανών ομάδων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0,$$

αν το $\mathcal{F}$ είναι μεστό δεμάτι, τότε για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$ η ακολουθία

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_U} \Gamma(U, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{H}) \to 0$$

είναι ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων.

(ii) *Για μια ακριβή ακολουθία δεματιών αβελιανών ομάδων*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

αν τα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι μεστά, τότε και το $\mathcal{H}$ είναι μεστό δεμάτι.

Απόδειξη. (i) Από την πρόταση 1.1.18, αρκεί να δείξουμε ότι ο ομομορφισμός ομάδων $\Gamma(U, \mathcal{G}) \to \Gamma(U, \mathcal{H})$ είναι επί.

Για $s \in \Gamma(U, \mathcal{H})$ έστω

$$\mathcal{M} := \left\{ (t, V) \,\middle|\, \begin{array}{l} V \subseteq U \text{ ανοιχτό, τέτοιο ώστε} \\ t \in \mathcal{G}(V) \text{ και } \psi_V(t) = \rho_{V,U}(s) \end{array} \right\}.$$

Αφού ο ψ είναι επιμορφισμός δεματιών, έχουμε $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Ορίζουμε σχέση διάταξη στο $\mathcal{M}$ ως εξής: $(t_1, V_1) < (t_2, V_2)$ αν και μόνο αν $V_1 \subseteq V_2 \subseteq U$ και $t_1 = \rho_{V_1,V_2}(t_2)$. Αν θεωρήσουμε μια αλυσίδα αυτής της διάταξης, δηλαδή ένα πλήρως διατεταγμένο $\{(t_\lambda, V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{M}$, τότε το στοιχείο $V := \cup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \mathcal{M}$ είναι άνω φράγμα αυτής της αλυσίδας. Πράγματι, αφού για κάθε λ έχουμε $V_\lambda \subseteq U$, τότε $V \subseteq U$, κι αφού για κάθε $\lambda < \mu$ έχουμε $\rho_{V_\lambda,V_\mu}(t_\mu) = t_\lambda$, τότε από την ιδιότητα **(F2)** των δεματιών παίρνουμε $t \in \mathcal{G}(U)$ τέτοιο ώστε $\rho_{V_\lambda,V}(t) = t_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Έτσι έχουμε $(t, V) \in \mathcal{M}$ κι επίσης για κάθε $\lambda \in \Lambda$ έχουμε $(t_\lambda, V_\lambda) < (t, V)$.

Από τα παραπάνω και το Λήμμα του Zorn συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μεγιστικό στοιχείο $(\tilde{t},\tilde{V}) \in \mathcal{M}$. Θα δείξουμε ότι $\tilde{V} = U$ κι αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξη.

Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\tilde{V} \neq U$. Τότε για $x \in U \setminus \tilde{V}$ μπορούμε να βρούμε ανοιχτή περιοχή $V_x \subseteq U$ του x και $t_x \in \mathcal{G}(V_x)$ τέτοια ώστε $\psi_{V_x}(t_x) = \rho_{V_x,U}(s)$. Συγκεκριμένα, $(t_x, V_x) \in \mathcal{M}$. Τότε έστω

$$W := \tilde{V} \cap V_x \quad \text{και} \quad u := \rho_{W,V_x}(t_x) - \rho_{W,\tilde{V}}(\tilde{t}).$$

Παίρνουμε $\psi_W(u) = 0$. Επομένως υπάρχει $v \in \mathcal{F}(W)$ τέτοιο ώστε $\phi_W(v) = u$. Αφού το $\mathcal{F}$ είναι μεστό, υπάρχει και $\tilde{v} \in \mathcal{F}(V_x)$ τέτοιο ώστε $\rho_{W,V_x}(\tilde{v}) = v$. Τότε έστω $\tilde{t_x} = t_x - \phi_{V_x}(\tilde{v})$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\rho_{W,V_x}(\tilde{t_x}) &= \rho_{W,V_x}(t_x) - \rho_{W,V_x}(\phi_{V_x}(\tilde{v})) = \rho_{W,V_x}(t_x) - \phi_W(\rho_{W,V_x}(\tilde{v})) \\ &= \rho_{W,V_x}(t_x) - \phi_W(v) = \rho_{W,V_x}(t_x) - u = \rho_{W,\tilde{V}}(\tilde{t}).\end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει $\hat{t} \in \mathcal{G}(V_x \cup \tilde{V})$ τέτοιο ώστε

$$\rho_{V_x,V_x\cup\tilde{V}}(\hat{t}) = t_x \quad \text{και} \quad \rho_{\tilde{V},V_x\cup\tilde{V}}(\hat{t}) = \tilde{t}.$$

Συνεπώς $(\hat{t}, V_x \cup \tilde{V}) \in \mathcal{M}$ το οποίο αντιβαίνει στη μεγιστικότητα του $(\tilde{t},\tilde{V})$, άτοπο. Άρα όντως $\tilde{V} = U$.

(ii) Για ένα ανοιχτό $U \subseteq X$ και για $s \in \mathcal{H}(U)$, η μεστότητα του $\mathcal{F}$ συνεπάγεται, λόγω του (i), ότι υπάρχει $t \in \mathcal{G}(U)$ τέτοιο ώστε $\psi_U(t) = s$. Αφού το $\mathcal{G}$ είναι μεστό, τότε υπάρχει $\tilde{t} \in \mathcal{G}(X)$ τέτοιο ώστε $\rho_{U,X}(\tilde{t}) = t$. Έστω $\tilde{s} = \psi_X(\tilde{t}) \in \mathcal{H}(X)$. Τότε:

$$\rho_{U,X}(\tilde{s}) = \rho_{U,X}(\psi_X(\tilde{t})) = \psi_U(\rho_{U,X}(\tilde{t})) = \psi_U(t) = s.$$

Επομένως, ο ομομορφισμός περιορισμού $\rho_{U,X} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(U)$ είναι επί για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$, άρα το $\mathcal{H}$ είναι ένα μεστό δεμάτι.

□

Ορισμός 2.1.4. *Για ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X, μια ακριβής ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{G}^3 \xrightarrow{\delta^3} \cdots$$

καλείται μεστή ανάλυση *(στα αγγλικά flabby resolution) του $\mathcal{F}$, αν όλα τα $\mathcal{G}^i, i \geq 0$, είναι μεστά δεμάτια.*

Για μια μεστή ανάλυση ενός *μεστού* δεματιού, έχουμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο με αυτό της πρότασης 2.1.3(i):

Πρόταση 2.1.5. *Έστω*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{g_0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{g_1} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{g_2} \mathcal{G}_3 \xrightarrow{g_3} \cdots \tag{2.1}$$

μια μεστή ανάλυση ενός μεστού *δεματιού $\mathcal{F}$ πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X, κι έστω ανοιχτό $U \subseteq X$. Τότε η ακολουθία*

$$0 \to \Gamma(U,\mathcal{F}) \to \Gamma(U,\mathcal{G}_0) \to \Gamma(U,\mathcal{G}_1) \to \Gamma(U,\mathcal{G}_2) \to \cdots$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Η ακριβής ακολουθία (2.1) δίνει μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}_0 \to \mathrm{Im} g_0 \to 0.$$

Η μεστότητα του $\mathcal{F}$ μας δίνει μια ακριβή ακολουθία (από την πρόταση 2.1.3(i))

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{G}_0) \to \Gamma(U, \mathrm{Im} g_0) \to 0. \tag{2.2}$$

Η μεστότητα του $\mathcal{F}$ και η μεστότητα του $\mathcal{G}_0$ σε συνδυασμό με την πρόταση 2.1.3(ii) μας δίνουν τη μεστότητα του $\mathrm{Im} g_0$.

Η ακριβής ακολουθία (2.1) δίνει άλλη μία βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathrm{Im} g_0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathrm{Coker} g_0 \to 0.$$

Η μεστότητα του $\mathrm{Im} g_0$ μας δίνει μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to \Gamma(U, \mathrm{Im} g_0) \to \Gamma(U, \mathcal{G}_1) \to \Gamma(U, \mathrm{Coker} g_0) \to 0. \tag{2.3}$$

Η μεστότητα του $\mathrm{Im} g_0$ και η μεστότητα του $\mathcal{G}_1$ μας δίνουν τη μεστότητα του $\mathrm{Coker} g_0$.

Η ακρίβεια των ακολουθιών (2.2) και (2.3) συνεπάγονται την ακρίβεια της ακολουθίας (με τους αναμενόμενους μορφισμούς)

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{G}_0) \to \Gamma(U, \mathcal{G}_1). \tag{2.4}$$

Έπειτα, αφού $\mathrm{Im} g_0 = \mathrm{Ker} g_1$, τότε $\mathrm{Coker} g_0 = \mathcal{G}_1/\mathrm{Im} g_0 = \mathcal{G}_1/\mathrm{Ker} g_1 \cong \mathrm{Im} g_1$, άρα από την (2.1) παίρνουμε κι άλλη ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathrm{Coker} g_0 \to \mathcal{G}_2 \to \mathrm{Im} g_2 \to 0.$$

Η μεστότητα του $\mathrm{Coker} g_0$ μας δίνει ακριβή ακολουθία

$$0 \to \Gamma(U, \mathrm{Coker} g_0) \to \Gamma(U, \mathcal{G}_2) \to \Gamma(U, \mathrm{Im} g_2). \tag{2.5}$$

Η μεστότητα του $\mathrm{Coker} g_0$ και η μεστότητα του $\mathcal{G}_2$ μας δίνουν τη μεστότητα του $\mathrm{Im} g_2$.

Η ακρίβεια των ακολουθιών (2.3) και (2.5) συνεπάγονται τη «συνέχιση» της ακρίβειας της ακολουθίας (2.4) στην ακολουθία (με τους αναμενόμενους μορφισμούς)

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{G}_0) \to \Gamma(U, \mathcal{G}_1) \to \Gamma(U, \mathcal{G}_2). \tag{2.6}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία αναδρομικά, μπορούμε να συνεχίσουμε την ακολουθία (2.6) με τέτοιο τρόπο ώστε να πάρουμε τη ζητούμενη ακριβή ακολουθία. □

Στη συνέχεια παραθέτουμε το πιο βασικό παράδειγμα μεστής ανάλυσης ενός δεματιού $\mathcal{F}$, η οποία κατασκευάζεται ξεκινώντας από το «φυσικό» μεστό δεμάτι που αντιστοιχεί στο $\mathcal{F}$ (παράδειγμα 2.1.2):

Παράδειγμα 2.1.6. *Για ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ αβελιανών ομάδων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X, από το παράδειγμα 2.1.2 έχουμε μια ακριβή ακολουθία δεματιών αβελιανών ομάδων:*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}}} C^0(\mathcal{F}),$$

όπου το $C^0(\mathcal{F})$ είναι ένα μεστό δεμάτι. Για να συνεχίσουμε αυτήν την ακολουθία σε βραχεία ακριβή ακολουθία, θέτουμε

$$\mathcal{F}_1 := C^0(\mathcal{F})/\iota_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$$

και παίρνουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}}} C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}_1 \to 0. \tag{2.7}$$

Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία παίρνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}_1}} C^0(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}_1}} \mathcal{F}_2 \to 0, \tag{2.8}$$

όπου το $C^0(\mathcal{F}_1)$ *είναι μεστό δεμάτι και* $\mathcal{F}_2 := C^0(\mathcal{F}_1)/\iota_{\mathcal{F}_1}(\mathcal{F}_1)$. *Θέτουμε:*

$$\iota := \iota_{\mathcal{F}}, \quad \delta^0 := \iota_{\mathcal{F}_1} \circ \eta_{\mathcal{F}}, \quad C^1(\mathcal{F}) := C^0(\mathcal{F}_1).$$

Τότε παίρνουμε μια ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{F})$$

η οποία είναι ακριβής διότι η $\iota_{\mathcal{F}_1}$ *είναι 1-1, το οποίο σε συνδυασμό με την (2.7) συνεπάγεται ότι*

$$Ker\delta^0 = Ker(\iota_{\mathcal{F}_1} \circ \eta_{\mathcal{F}}) = Ker\eta_{\mathcal{F}} = Im\iota_{\mathcal{F}} = Im\iota.$$

Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω για το $\mathcal{F}_2$ *παίρνουμε*

$$0 \to \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}_2}} C^0(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}_2}} \mathcal{F}_3 \to 0, \tag{2.9}$$

όπου το $C^0(\mathcal{F}_2)$ *είναι μεστό δεμάτι και* $\mathcal{F}_3 := C^0(\mathcal{F}_2)/\iota_{\mathcal{F}_2}(\mathcal{F}_2)$. *Θέτουμε:*

$$\delta^1 := \iota_{\mathcal{F}_2} \circ \eta_{\mathcal{F}_1} \quad \textit{και} \quad C^2(\mathcal{F}) := C^0(\mathcal{F}_2).$$

Τότε παίρνουμε συνολικά μια ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{F})$$

η οποία είναι ακριβής διότι η $\iota_{\mathcal{F}_2}$ *είναι 1-1, οπότε*

$$Ker\delta^1 = Ker\eta_{\mathcal{F}_1} = Im\iota_{\mathcal{F}_1}$$

και η $\eta_{\mathcal{F}}$ *είναι επί, οπότε*

$$Im\iota_{\mathcal{F}_1} = Im(\iota_{\mathcal{F}_1} \circ \eta_{\mathcal{F}}) = Im\delta^0.$$

Αναδρομικά μπορούμε να συνεχίσουμε επ' άπειρον αυτήν την κατασκευή και να πάρουμε τελικά μια μεστή ανάλυση του $\mathcal{F}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\ \iota\ } C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\ \delta^0\ } C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\ \delta^1\ } C^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{\ \delta^2\ } \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\ \delta^{n-1}\ } C^n(\mathcal{F}) \xrightarrow{\ \delta^n\ } C^{n+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\ \delta^{n+1}\ } \cdots$$

Αυτή η ανάλυση καλείται η κανονική μεστή ανάλυση *του* $\mathcal{F}$ *και συνήθως συμβολίζεται με* $(C^\bullet(\mathcal{F}), \delta^\bullet)$.

Η κανονική μεστή ανάλυση που μόλις ορίσαμε έχει μια επιθυμητή ιδιότητα που περιγράφουμε στο ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 2.1.7. *Για μια ακριβή ακολουθία δεματιών αβελιανών ομάδων*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0,$$

το διάγραμμα που επάγεται από τις κανονικές μεστές αναλύσεις των $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & C^0(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^3(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & C^0(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C^3(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & C^0(\mathcal{H}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{H}) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{H}) & \longrightarrow & C^3(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

είναι μεταθετικό κι επίσης όλες οι οριζόντιες και κατακόρυφες ακολουθίες του είναι ακριβείς.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε την ακρίβεια της ακολουθίας

$$0 \to C^0(\mathcal{F}) \to C^0(\mathcal{G}) \to C^0(\mathcal{H}) \to 0. \tag{2.10}$$

Για τυχαίο $x \in X$, η ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \to 0$$

είναι ακριβής (από την πρόταση 1.1.17), οπότε από όσα είδαμε στο παράδειγμα 2.1.2 παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \to C^0(\mathcal{F})(U) \to C^0(\mathcal{G})(U) \to C^0(\mathcal{H})(U) \to 0$$

για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$, άρα και η ακολουθία (2.10) είναι όντως ακριβής. Έτσι παίρνουμε ένα διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \iota_{\mathcal{F}}}\downarrow & & {\scriptstyle \iota_{\mathcal{G}}}\downarrow & & {\scriptstyle \iota_{\mathcal{H}}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^0(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C^0(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

που είναι μεταθετικό (εξ ορισμού του $C^0(\cdot)$ και του μορφισμού ι). Αυτό με τη σειρά του επάγει ένα διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{G}}"'] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{H}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

που είναι επίσης μεταθετικό (άμεσο) και που όλες οι οριζόντιες και κατακόρυφες ακολουθίες του είναι ακριβείς (ουσιαστικά το μόνο που μένει να αποδειχθεί είναι η ακρίβεια της τελευταίας οριζόντιας ακολουθίας, κι αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε στα στάχυα στο τυχαίο $x \in X$, όπου σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε ακολουθίες αβελιανών ομάδων και θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα-φίδι - στα αγγλικά snake lemma, βλ. [5] λήμμα 2.4). Από την τελευταία οριζόντια ακολουθία παίρνουμε άλλη μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to C^0(\mathcal{F}_1) \to C^0(\mathcal{G}_1) \to C^0(\mathcal{H}_1) \to 0$$

κι επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία και «κολλώντας» κατάλληλα τα διαγράμματα που προκύπτουν, παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Μια άμεση επέκταση αυτού του λήμματος είναι στην περίπτωση μιας άπειρης ακριβούς ακολουθίας από δεμάτια:

Πόρισμα 2.1.8. *Για μια ακριβή ακολουθία δεματιών*

$$0 \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{f_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{f_3} \mathcal{F}_4 \xrightarrow{f_4} \cdots ,$$

οι κανονικές μεστές αναλύσεις $(C^\bullet(\mathcal{F}_i), \delta_i^\bullet)$ *των* $\mathcal{F}_i$, *για* $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, *δίνουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1 \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[d] & C^3(\mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_2 \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & C^3(\mathcal{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_3 \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{F}_3) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{F}_3) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{F}_3) \arrow[r] \arrow[d] & C^3(\mathcal{F}_3) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_4 \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{F}_4) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{F}_4) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{F}_4) \arrow[r] \arrow[d] & C^3(\mathcal{F}_4) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

του οποίου όλες οι οριζόντιες και κατακόρυφες ακολουθίες είναι ακριβείς.

Απόδειξη. «Σπάμε» τη δοσμένη ακριβή ακολουθία σε βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{F}_1 &\xrightarrow{f_1} \mathcal{F}_2 \to \mathrm{Coker} f_1 \to 0, \\ 0 \to \mathrm{Coker} f_1 &\to \mathcal{F}_2 \to \mathrm{Im} f_2 \to 0, \\ 0 \to \mathrm{Im} f_2 &\to \mathcal{F}_3 \to \mathrm{Coker} f_2 \to 0. \end{aligned}$$

Τότε χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.1.7 για αυτές τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες και μετά «κολλώντας» κατάλληλα τα διαγράμματα που παίρνουμε, κατασκευάζουμε αναδρομικά το ζητούμενο διάγραμμα. □

2.2 Ομάδες συνομολογίας

Όπως είδαμε από το παράδειγμα 2.1.6, για ένα δοθέν δεμάτι αβελιανών ομάδων $\mathcal{F}$ πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X, υπάρχει μια μεστή ανάλυση του $\mathcal{F}$:

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{G}^3 \xrightarrow{\delta^3} \cdots . \tag{2.11}$$

Από αυτήν την ακριβή ακολουθία παίρνουμε μια ακολουθία αβελιανών ομάδων (που δεν είναι ακριβής όταν το $\mathcal{F}$ δεν είναι τετριμμένο):

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{G}^0) \xrightarrow{\delta^0_X} \Gamma(X, \mathcal{G}^1) \xrightarrow{\delta^1_X} \Gamma(X, \mathcal{G}^2) \xrightarrow{\delta^2_X} \Gamma(X, \mathcal{G}^3) \xrightarrow{\delta^3_X} \cdots . \tag{2.12}$$

Από την ακρίβεια της 2.11 ισχύει ότι $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, άρα παίρνουμε και

$$\delta^{n+1}_X \circ \delta^n_X = 0, n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Επομένως το $\mathcal{D} := (A^n = \Gamma(X, \mathcal{G}^n), \delta^n_X)$ είναι ένα συναλυσιδωτό σύμπλεγμα (στα αγγλικά cochain complex) αβελιανών ομάδων κι άρα μπορούμε να ορίσουμε ομάδες συνομολογίας αυτού του συμπλέγματος που θα «μετράνε» πόσο απέχει η 2.12 από το να είναι ακριβής:

$$H^n(\mathcal{D}) := \mathrm{Ker}\delta^n_X / \mathrm{Im}\delta^{n-1}_X, n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

όπου θεωρούμε $\delta^{-1}_X = 0$.

Δύο είναι τα κύρια αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε σε αυτήν την υποενότητα και που θέτουν τα θεμέλια για μια χρήσιμη θεωρία συνομολογίας δεματιών. Πρώτο είναι το αποτέλεσμα περί ανεξαρτησίας των $H^n(\mathcal{D}), n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ από την επιλογή της μεστής ανάλυσης, δηλαδή το ότι οι ομάδες συνομολογίας που ορίσαμε παραπάνω εξαρτώνται μόνο από τον χώρο X και το δεμάτι $\mathcal{F}$. Το δεύτερο αποτέλεσμα είναι σχετικό με την κατασκευή μιας μακράς ακριβούς ακολουθίας ομάδων συνομολογίας δεματιών (θα ορίσουμε τι ακριβώς είναι αυτό στη συνέχεια) από μια βραχεία ακριβή ακολουθία δεματιών πάνω από έναν τοπολογικό χώρο.

Λήμμα 2.2.1. *Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό με πάνω, ισχύει ότι:*

$$H^0(\mathcal{D}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Απόδειξη. Από την ακρίβεια της 2.11 παίρνουμε δύο βραχείες ακριβείς ακολουθίες:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{F} &\to \mathcal{G}^0 \to \mathrm{Im}\delta^0 \to 0, \\ 0 \to \mathrm{Im}\delta^0 &\to \mathcal{G}^1 \to \mathrm{Coker}\delta^0 \to 0. \end{aligned}$$

Αυτές συνεπάγονται τις εξής ακριβείς ακολουθίες αβελιανών ομάδων:

$$\begin{aligned} 0 &\to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}^0) \to \Gamma(X,\mathrm{Im}\delta^0), \\ 0 &\to \Gamma(X,\mathrm{Im}\delta^0) \to \Gamma(X,\mathcal{G}^1) \to \Gamma(X,\mathrm{Coker}\delta^0). \end{aligned}$$

Τότε η σύνθεση ομομορφισμών

$$\Gamma(X,\mathcal{G}^0) \to \Gamma(X,\mathrm{Im}\delta^0) \to \Gamma(X,\mathcal{G}^1)$$

είναι ακριβώς ο ομομορφισμός δ^0_X, οπότε

$$\mathrm{Ker}\delta^0_X = \mathrm{Im}\iota_X.$$

Επομένως η ακολουθία

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota_X} \Gamma(X,\mathcal{G}^0) \xrightarrow{\delta^0_X} \Gamma(X,\mathcal{G}^1)$$

είναι ακριβής, που σημαίνει ότι

$$H^0(X,\mathcal{F}) := \mathrm{Ker}\delta^0_X \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$$

όπως θέλαμε. □

Λήμμα 2.2.2. *Για ένα μεστό δεμάτι $\mathcal{F}$, έχουμε*

$$H^n(\mathcal{D}) = 0, n \in \{1,2,\dots\}$$

όπου $\mathcal{D}$ είναι ένα συναλυσιδωτό σύμπλεγμα όπως προηγουμένως.

Απόδειξη. Για μια μεστή ανάλυση του μεστού $\mathcal{F}$

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{G}^3 \xrightarrow{\delta^3} \cdots,$$

από την πρόταση 2.1.5 παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota_X} \Gamma(X,\mathcal{G}^0) \xrightarrow{\delta^0_X} \Gamma(X,\mathcal{G}_1) \xrightarrow{\delta^1_X} \Gamma(X,\mathcal{G}^2) \xrightarrow{\delta^2_X} \Gamma(X,\mathcal{G}^3) \xrightarrow{\delta^3_X} \cdots.$$

Επομένως, για $n \geq 1$ έχουμε

$$\mathrm{Ker}\delta^n_X = \mathrm{Im}\delta^{n-1}_X,$$

δηλαδή $H^n(\mathcal{D}) = 0$ για κάθε $n \geq 1$. □

Θεώρημα 2.2.3. *Οι ομάδες συνομολογίας $H^n(\mathcal{D})$ καθορίζονται μοναδικά από τον χώρο X και το δεμάτι $\mathcal{F}$, δηλαδή ανεξάρτητα από την επιλογή της μεστής ανάλυσης του $\mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Έστω

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^2 \to \mathcal{G}^3 \to \cdots$$

μια μεστή ανάλυση του $\mathcal{F}$ κι έστω

$$0 \to \mathcal{F} \to C^0(\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{F}) \to C^3(\mathcal{F}) \to \cdots$$

η κανονική μεστή ανάλυση του $\mathcal{F}$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι ομάδες συνομολογίας που ορίζονται από την πρώτη μεστή ανάλυση είναι ισόμορφες με τις ομάδες συνομολογίας της κανονικής μεστής ανάλυσης.

Από το πόρισμα 2.1.8 παίρνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα ακριβών ακολουθιών:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{G}^0) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{G}^1) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{G}^2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{G}^0) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{G}^1) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{G}^2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{G}^0) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{G}^1) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{G}^2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Από αυτό παίρνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα αβελιανών ομάδων:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathcal{G}^0) \arrow[r, "\delta_X^0"] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathcal{G}^1) \arrow[r, "\delta_X^1"] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathcal{G}^2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,C^0(\mathcal{F})) \arrow[r] \arrow[d, "d_X^0"'] & \Gamma(X,C^0(\mathcal{G}^0)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,C^0(\mathcal{G}^1)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,C^0(\mathcal{G}^2)) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,C^1(\mathcal{F})) \arrow[r] \arrow[d, "d_X^1"'] & \Gamma(X,C^1(\mathcal{G}^0)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,C^1(\mathcal{G}^1)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,C^1(\mathcal{G}^2)) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,C^2(\mathcal{F})) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,C^2(\mathcal{G}^0)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,C^2(\mathcal{G}^1)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,C^2(\mathcal{G}^2)) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Τότε από την πρόταση 2.1.5 παίρνουμε ότι στο τελευταίο διάγραμμα εκτός από την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη, όλες οι άλλες γραμμές και στήλες είναι ακριβείς ακολουθίες. Αυτό που εμείς πρέπει να δείξουμε είναι ότι υπάρχουν ισομορφισμοί

$$f^n : \mathrm{Ker} d_X^n / \mathrm{Im} d_X^{n-1} \to \mathrm{Ker} \delta_X^n / \mathrm{Im} \delta_X^{n-1},$$

για κάθε $n \geq 0$, όπου $d_X^{-1} \coloneqq 0$ και $\delta_X^{-1} \coloneqq 0$.

Αυτούς τους ισομορφισμούς συνήθως τους βρίσκουμε με χρήση διαφόρων λημμάτων που χρησιμοποιούν την τεχνική του κυνηγητού-σε-διάγραμμα. Το βασικό λήμμα πίσω από όλα αυτά είναι το λεγόμενο λήμμα-σαλαμάνδρα που βρίσκουμε στο [5]. Βασικό πόρισμα αυτού είναι το λεγόμενο $n \times n$-λήμμα, το οποίο στο [5] είναι το λήμμα 2.6, και το οποίο είναι ακριβώς αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε (αν και η απόδειξη θα μπορούσε να γίνει απευθείας με χρήση κυνηγητού-σε-διάγραμμα, θεωρούμε πιο ενδιαφέρουσα την γενικότερη προσέγγιση που προσφέρεται από το λήμμα-σαλαμάνδρα γι' αυτό και παραπέμπουμε σε αυτό). $\square$

Παρατήρηση 2.2.4. (i) *Εξ αιτίας του θεωρήματος 2.2.3, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $H^n(\mathcal{D})$ θα συμβολίζεται με $H^n(X,\mathcal{F})$ και θα καλείται* n-οστή ομάδα συνομολογίας του δεματιού $\mathcal{F}$.

(ii) *Μια εναλλακτική απόδειξη του λήμματος 2.2.2 μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.2.3. Πράγματι, για ένα μεστό δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω από έναν χώρο X μπορούμε να υπολογίσουμε τις ομάδες συνομολογίας του χρησιμοποιώντας τη μεστή ανάλυση*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to 0 \to 0 \to \cdots ,$$

απ' την οποία παίρνουμε προφανώς

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \begin{cases} \Gamma(X, \mathcal{F}), & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

Πόρισμα 2.2.5. *Έστω Y κλειστός υπόχωρος του τοπολογικού χώρου X κι έστω $\iota : Y \to X$ η φυσική εμφύτευσή του. Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα δεμάτι πάνω από τον Y, τότε έχουμε ισομορφισμούς*

$$H^n(X, \iota_*\mathcal{F}) \cong H^n(Y, \mathcal{F}),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για ένα μεστό δεμάτι $\mathcal{G}$ πάνω από τον Y, ισχύει ότι και το $\iota_*\mathcal{G}$ είναι μεστό δεμάτι πάνω από τον X. Πράγματι, για κάθε ανοιχτό $U \subseteq X$, έχουμε $\iota_*\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(\iota^{-1}(U)) = \mathcal{G}(U \cap Y)$, κι επομένως ο ομομορφισμός περιορισμού $\iota_*\mathcal{G}(X) \to \iota_*\mathcal{G}(U)$ είναι ο ομομορφισμός περιορισμού $\mathcal{G}(Y) \to \mathcal{G}(U \cap Y)$ που είναι επί (μιας και το $\mathcal{G}$ είναι μεστό δεμάτι).

Θεωρούμε τώρα την κανονική μεστή ανάλυση του $\mathcal{F}$

$$0 \to \mathcal{F} \to C^0(\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{F}) \to \cdots .$$

Τότε η ακολουθία

$$0 \to \iota_*\mathcal{F} \to \iota_*C^0(\mathcal{F}) \to \iota_*C^1(\mathcal{F}) \to \iota_*C^2(\mathcal{F}) \to \cdots . \tag{2.13}$$

είναι μια μεστή ανάλυση του $\iota_*\mathcal{F}$. Πράγματι, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, το δεμάτι $\iota_*C^i(\mathcal{F})$ είναι μεστό με βάση την παρατήρηση που κάναμε, και η ακολουθία είναι ακριβής διότι στα στάχυα στο τυχαίο $x \in X$ η ακολουθία γίνεται

$$0 \to (\iota_*\mathcal{F})_x \to (\iota_*C^0(\mathcal{F}))_x \to (\iota_*C^1(\mathcal{F}))_x \to (\iota_*C^2(\mathcal{F}))_x \to \cdots$$

η οποία είναι μη-μηδενική μόνο για $x \in Y \subseteq X$ και τότε είναι ίδια με την ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F}_x \to C^0(\mathcal{F})_x \to C^1(\mathcal{F})_x \to C^2(\mathcal{F})_x \to \cdots$$

που είναι βέβαια ακριβής.

Επομένως, από το θεώρημα 2.2.3, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ομάδες συνομολογίας του $\iota_*\mathcal{F}$ μέσω της μεστής ανάλυσης 2.13 και συγκεκριμένα της ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \to \Gamma(X, \iota_*C^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \iota_*C^1(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \iota_*C^2(\mathcal{F})) \to \cdots$$

που είναι ίδια με την ακολουθία

$$0 \to \Gamma(Y, C^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(Y, C^1(\mathcal{F})) \to \Gamma(Y, C^2(\mathcal{F})) \to \cdots ,$$

απ' όπου προκύπτει και το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το δεύτερο βασικό αποτέλεσμα που αναφέραμε ότι θα μας απασχολήσει σ' αυτήν την υποενότητα και που σχετίζεται με την κατασκευή μιας μακράς ακριβούς ακολουθίας ομάδων συνομολογίας.

Θεώρημα 2.2.6. *Για μια ακριβή ακολουθία δεματιών αβελιανών ομάδων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0,$$

έχουμε μια επαγόμενη μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων συνομολογίας

$$\begin{aligned} 0 \to & H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{H}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to \\ \to & H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \to H^2(X,\mathcal{F}) \to H^2(X,\mathcal{G}) \to \\ \to & H^2(X,\mathcal{H}) \to H^3(X,\mathcal{F}) \to H^3(X,\mathcal{G}) \to H^3(X,\mathcal{H}) \to \cdots . \end{aligned}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αφού ισχύει ότι $H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$, $H^0(X,\mathcal{G}) = \Gamma(X,\mathcal{G})$ και $H^0(X,\mathcal{H}) = \Gamma(X,\mathcal{H})$, κι αφού γνωρίζουμε ότι η ακριβής ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

επάγει την ακριβή ακολουθία ομάδων

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_X} \Gamma(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi_X} \Gamma(X,\mathcal{H}),$$

παίρνουμε την αρχή της μακράς ακριβούς ακολουθίας που θέλουμε να βρούμε:

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{H}).$$

Από το λήμμα 2.1.7, οι κανονικές μεστές αναλύσεις των $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ δίνουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

του οποίου όλες οι οριζόντιες και όλες οι κατακόρυφες ακολουθίες είναι ακριβείς.

Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό θέτουμε

$$F^n = \Gamma(X, C^n(\mathcal{F})), \quad G^n = \Gamma(X, C^n(\mathcal{G})), \quad H^n = \Gamma(X, C^n(\mathcal{H})),$$

οπότε έχουμε και το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F^0 \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[d, "d_F^0"'] & G^0 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "d_G^0"'] & H^0 \arrow[r] \arrow[d, "d_H^0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "d_F^1"'] & G^1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "d_G^1"'] & H^1 \arrow[r] \arrow[d, "d_H^1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "d_F^2"'] & G^2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "d_G^2"'] & H^2 \arrow[r] \arrow[d, "d_H^2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^3 \arrow[r, "\phi_3"] \arrow[d, "d_F^3"'] & G^3 \arrow[r, "\psi_3"] \arrow[d, "d_G^3"'] & H^3 \arrow[r] \arrow[d, "d_H^3"'] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

του οποίου όλες οι οριζόντιες ακολουθίες είναι ακριβείς.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν εστιάσουμε στο κομμάτι του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^n \arrow[r] \arrow[d, "d_F^n"'] & G^n \arrow[r] \arrow[d, "d_G^n"'] & H^n \arrow[r] \arrow[d, "d_H^n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^{n+1} \arrow[r] & G^{n+1} \arrow[r] & H^{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

κι εφαρμόσουμε το λήμμα-φίδι, τότε θα πάρουμε μια μακρά ακριβή ακολουθία

$$\begin{aligned}
0 \to &\mathrm{Ker} d_F^n \to \mathrm{Ker} d_G^n \to \mathrm{Ker} d_H^n \to \\
&\to \mathrm{Coker} d_F^n \to \mathrm{Coker} d_G^n \to \mathrm{Coker} d_H^n \to 0,
\end{aligned}$$

όπου $\mathrm{Coker} d_F^n = F^{n+1}/\mathrm{Im} d_F^n$, κι αντίστοιχα για τους συμπυρήνες $\mathrm{Coker} d_G^n$, $\mathrm{Coker} d_H^n$. Προσαρμόζοντας κατάλληλα το $n \geq 1$, παίρνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με τις οριζόντιες ακολουθίες να είναι ακριβείς:

$$\begin{tikzcd}
 & F^n/\mathrm{Im} d_F^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_F^n}"'] & G^n/\mathrm{Im} d_G^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_G^n}"'] & H^n/\mathrm{Im} d_H^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_H^n}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} d_F^{n+1} \arrow[r] & \mathrm{Ker} d_G^{n+1} \arrow[r] & \mathrm{Ker} d_H^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker} \overline{d_F^n} &= \mathrm{Ker} d_F^n/\mathrm{Im} d_F^{n-1} = H^n(X, \mathcal{F}), \\
\mathrm{Ker} \overline{d_G^n} &= \mathrm{Ker} d_G^n/\mathrm{Im} d_G^{n-1} = H^n(X, \mathcal{G}), \\
\mathrm{Ker} \overline{d_H^n} &= \mathrm{Ker} d_H^n/\mathrm{Im} d_H^{n-1} = H^n(X, \mathcal{H}),
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathrm{Coker} \overline{d_F^n} &= \mathrm{Ker} d_F^{n+1}/\mathrm{Im} \overline{d_F^n} = \mathrm{Ker} d_F^{n+1}/\mathrm{Im} d_F^n = H^{n+1}(X, \mathcal{F}), \\
\mathrm{Coker} \overline{d_G^n} &= \mathrm{Ker} d_G^{n+1}/\mathrm{Im} \overline{d_G^n} = \mathrm{Ker} d_F^{n+1}/\mathrm{Im} d_G^n = H^{n+1}(X, \mathcal{G}), \\
\mathrm{Coker} \overline{d_H^n} &= \mathrm{Ker} d_H^{n+1}/\mathrm{Im} \overline{d_H^n} = \mathrm{Ker} d_F^{n+1}/\mathrm{Im} d_H^n = H^{n+1}(X, \mathcal{H}),
\end{aligned}$$

αφού $\mathrm{Im} \overline{d_i^n} = \mathrm{Im} d_i^n$, $i \in \{F, G, H\}$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το λήμμα-φίδι στο τελευταίο διάγραμμα παίρνουμε μια μακρά ακριβή ακολουθία

$$\begin{aligned}
H^n(X, \mathcal{F}) \to &H^n(X, \mathcal{G}) \to H^n(X, \mathcal{H}) \to \\
&\to H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{G}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{H}).
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω για κάθε n κατασκευάζουμε τελικά τη ζητούμενη μακρά ακριβή ακολουθία. □

Ορίσαμε λοιπόν τις ομάδες συνομολογίας ενός δεματιού $\mathcal{F}$ πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X και δείξαμε ότι ικανοποιούν τη βασική ιδιότητα του θεωρήματος 2.2.6. Ωστόσο ο ορισμός που δώσαμε συνήθως δεν προσφέρει κάποιον πρακτικό τρόπο υπολογισμού αυτών των ομάδων. Για να «παρακάμψουμε» κάπως αυτήν τη δυσκολία, θα ορίσουμε αργότερα τις ομάδες συνομολογίας Čech που μπορούν να υπολογιστούν πιο εύκολα και θα δούμε πώς αυτές σχετίζονται με τις ομάδες συνομολογίας που ορίσαμε σ' αυτήν την υποενότητα.

2.3 Συνομολογία αφινικών σχημάτων Noether

Το γεγονός ότι για μια ακριβή ακολουθία σχεδόν-συναφών δεματιών πάνω από ένα αφινικό σχήμα η ακρίβεια διατηρείται όταν περνάμε στην ακολουθία των ολικών τομών (βλ. πόρισμα 1.2.20 και πόρισμα 1.2.21) συνεπάγεται ότι αν βρούμε μια μεστή ανάλυση σχεδόν-συναφών δεματιών για ένα δοθέν σχεδόν-συναφές δεμάτι, τότε οι ομάδες συνομολογίας του δοθέντος δεματιού για $n \geq 1$ θα είναι τετριμμένες. Ωστόσο η κανονική μεστή ανάλυση ενός σχεδόν-συναφούς δεματιού δεν αποτελείται απαραίτητα από σχεδόν-συναφή δεμάτια. Την κατάλληλη μεστή ανάλυση από σχεδόν-συναφή δεμάτια θα μας τη δώσει αυτό που θα ονομάσουμε «ενριπτική ανάλυση» του προτύπου που καθορίζει το δοθέν σχεδόν-συναφές δεμάτι.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω $f : M \to N$ ένας αυθαίρετος 1-1 ομομορφισμός R-προτύπων. Αν για κάθε ομομορφισμό R-προτύπων $g : M \to I$ υπάρχει ένας ομομορφισμός R-προτύπων $h : N \to I$ που να κάνει το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, τότε το R-πρότυπο I καλείται ενριπτικό R-πρότυπο *(στα αγγλικά ο όρος είναι* injective R-module*).*

Ισοδύναμα, αν για μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to M \to N$$

η επαγόμενη ακολουθία

$$\mathit{Hom}_R(N, I) \to \mathit{Hom}_R(M, I) \to 0$$

είναι ακριβής (δηλαδή αν ο ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathit{Hom}_R(-, I)$ είναι ακριβής), τότε το R-πρότυπο I καλείται ενριπτικό R-πρότυπο.

Ορισμός 2.3.2. *Αν για ένα R-πρότυπο M έχουμε μια ακριβή ακολουθία*

$$0 \to M \xrightarrow{f} I^0 \xrightarrow{g^0} I^1 \xrightarrow{g^1} I^2 \xrightarrow{g^2} I^3 \to \cdots$$

όπου τα I^j, $j \in \mathbb{N}$ είναι ενριπτικά R-πρότυπα, τότε αυτή η ακολουθία καλείται ενριπτική ανάλυση *του M (στα αγγλικά injective resolution).*

Βασική ιδιότητα των ενριπτικών προτύπων είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 2.3.3. *Για ένα αυθαίρετο R-πρότυπο M υπάρχει ένα ενριπτικό R-πρότυπο I ώστε το M να είναι R-υποπρότυπο του I. Στη γλώσσα της θεωρίας κατηγοριών αυτό σημαίνει ότι η κατηγορία RMod έχει* αρκετά ενριπτικά αντικείμενα *(στα αγγλικά λέμε enough injectives).*

Απόδειξη. Βλ. [6], θεώρημα 3.18, σελ. 160. □

Χρησιμοποιώντας αυτήν την πρόταση μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ενριπτική ανάλυση για οποιοδήποτε R-πρότυπο M ως εξής: Έστω I^0 ένα ενριπτικό R-πρότυπο που περιέχει το M ως υποπρότυπό του, κι έστω $\iota : M \to I^0$ η αντίστοιχη ένθεση. Έχουμε δηλαδή μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} I^0.$$

Έπειτα θεωρούμε ως I^1 ένα ενριπτικό R-πρότυπο που περιέχει ως υποπρότυπό του το $I^0/\iota(M)$. Έτσι έχουμε μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to I^0/\iota(M) \to I^1.$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές ακολουθίες παίρνουμε την ακριβή ακολουθία R-προτύπων

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} I^0 \xrightarrow{\eta^0} I^1.$$

Αναδρομικά, λοιπόν, επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω παίρνουμε την ενριπτική ανάλυση που θέλαμε

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} I^0 \xrightarrow{\eta^0} I^1 \xrightarrow{\eta^1} I^2 \xrightarrow{\eta^2} I^3 \to \cdots .$$

Ακολουθούν τρία λήμματα, καθένα από τα δύο πρώτα είναι απαραίτητο για την απόδειξη του επόμενου, και το τελευταίο περιγράφει ουσιαστικά την κατάλληλη μεστή ανάλυση την οποία αναζητούμε (ενός σχεδόν-συναφούς δεματιού πάνω από ένα αφινικό σχήμα Noether).

Λήμμα 2.3.4. *(Artin-Rees) Έστω δακτύλιος Noether R κι έστω $I \subsetneq R$ ένα ιδεώδες του. Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο κι έστω $N \subseteq M$ ένα R-υποπρότυπό του. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος c τέτοιος ώστε για κάθε ακέραιο $n \geq c$ να ισχύει ότι*

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N).$$

Απόδειξη. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $I^{n-c}(I^c M \cap N) \subseteq I^n M \cap N$, οπότε μένει να δείξουμε και τον ανάποδο εγκλεισμό.

Θέτουμε $I^0 = R$ και τον βαθμωτό δακτύλιο $S \coloneqq R \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots = \oplus_{n\in\mathbb{N}} I^n$. Έστω ότι $I = (f_1, \ldots, f_t)$, αφού το I θα είναι πεπερασμένα παραγόμενο (λόγω του ότι ο R είναι δακτύλιος Noether). Μιας και έχουμε τον επιμορφισμό δακτυλίων

$$\begin{aligned} R[X_1, \ldots, X_t] &\to S \\ X_1^{e_1} \cdots X_t^{e_t} &\mapsto f_1^{e_1} \cdots f_t^{e_t} \end{aligned}$$

και ο $R[X_1, \ldots, X_t]$ είναι δακτύλιος Noether, τότε και ο S είναι δακτύλιος Noether.

Θέτουμε τώρα το βαθμωτό πρότυπο $\oplus_{n\in\mathbb{N}} I^n M = M \oplus IM \oplus I^2 M \oplus \cdots$ πάνω από τον βαθμωτό δακτύλιο S. Τότε αυτό είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο S-πρότυπο. Πράγματι, αν τα $x_1, \ldots, x_r$ παράγουν το M ως R-πρότυπο, τότε παράγουν και το $\oplus_{n\in\mathbb{N}} I^n M$ ως S-πρότυπο. Επομένως το $\oplus_{n\in\mathbb{N}} I^n M$ είναι και S-πρότυπο Noether. Άρα το S-υποπρότυπο $\oplus_{n\in\mathbb{N}}(I^n M \cap N)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο S-πρότυπο. Αν κάποιοι γεννήτορές του είναι τα $\xi_i \in \oplus_{n\in\mathbb{N}}(I^n M \cap N)$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι τα ξ_i είναι ομογενή στοιχεία του βαθμωτού προτύπου $\oplus_{n\in\mathbb{N}}(I^nM \cap N)$, δηλαδή $\xi_i \in I^{d_i}M \cap N$ για κάποια $d_i \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $c := \max_{i\in I} d_i$. Τότε για κάθε $n \geq c$, κάθε στοιχείο του $I^nM \cap N$ γράφεται ως $\sum_{i=1}^{s} h_i\xi_i$ με $h_i \in I^{n-d_i}$. Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$I^{n-d_i}(I^{d_i}M \cap N) \subseteq I^{n-c}(I^cM \cap N)$$

απ' όπου τελικά παίρνουμε και το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Λήμμα 2.3.5. *Έστω $\mathfrak{a}$ ένα ιδεώδες ενός δακτυλίου Noether R, κι έστω I ένα ενριπτικό R-πρότυπο. Τότε το*

$$J := \{a \in I \mid \mathfrak{a}^n a = 0 \text{ για κάποιον θετικό ακέραιο } n\}$$

είναι επίσης ένα ενριπτικό R-πρότυπο.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Αρχικά δείχνουμε ότι για ένα ιδεώδες $\mathfrak{b}$ του R, η ένθεση $b \hookrightarrow R$ επάγει έναν επί ομομορφισμό R-προτύπων

$$\mathrm{Hom}_R(R, J) \to \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{b}, J). \tag{2.14}$$

Έστω, λοιπόν, ένας $\phi \in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{b}, J)$. Εξ ορισμού του J υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $\mathfrak{a}^n\phi(b) = 0$ για κάθε $b \in \mathfrak{b}$. Αφού το $\mathfrak{b}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, ως ιδεώδες ενός δακτυλίου Noether, έχουμε έναν θετικό ακέραιο N τέτοιον ώστε $\mathfrak{a}^N\phi(\mathfrak{b}) = (0)$. Από το λήμμα 2.3.4 παίρνουμε ότι υπάρχει ένας θετικός ακέραιος r τέτοιος ώστε $\mathfrak{a}^m \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{m-r}(\mathfrak{a}^r \cap \mathfrak{b})$ για κάθε $m \geq r$. Επομένως για $n \geq N + r$ έχουμε

$$\phi(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}) = \phi(\mathfrak{a}^{n-r}(\mathfrak{a}^r \cap \mathfrak{b})) = \mathfrak{a}^{n-r}\phi(\mathfrak{a}^r \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}^{n-r}\phi(\mathfrak{b}) = (0).$$

Έτσι παίρνουμε έναν ομομορφισμό $\overline{\phi} : \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n) \to J \subseteq I$. Αφού το I είναι ενριπτικό R-πρότυπο, υπάρχει ένας ομομορφισμός R-προτύπων $\overline{\psi} : R/\mathfrak{a}^n \to I$ τέτοιος ώστε $\overline{\phi} = \overline{\psi} \circ \iota$, με $\iota : \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n) \to R/\mathfrak{a}^n$ να είναι η φυσική ένθεση. Θέτουμε $\psi := \overline{\psi} \circ p$, όπου $p : R \to R/\mathfrak{a}^n$ είναι η φυσική προβολή. Τότε, για $a \in R$ έχουμε

$$\mathfrak{a}^n\psi(a) = \psi(\mathfrak{a}^n a) \subseteq \psi(\mathfrak{a}^n) = \overline{\psi}(\bar{0}) = 0,$$

δηλαδή $\psi(a) \in J$. Επομένως $\psi \in \mathrm{Hom}_R(R, J)$ και η σύνθεση $\mathfrak{b} \hookrightarrow R \xrightarrow{\psi} J$ συμπίπτει με τον ϕ. Συνεπώς ο ομομορφισμός R-προτύπων 2.14 είναι όντως επί.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι για μια γενική ένθεση R-προτύπων $M \hookrightarrow N$, ο επαγόμενος ομομορφισμός R-προτύπων

$$\mathrm{Hom}_R(N, J) \to \mathrm{Hom}_R(M, J) \tag{2.15}$$

είναι επί, δηλαδή θα δείξουμε ότι το J είναι πράγματι ένα ενριπτικό R-πρότυπο (επομένως θα συμπεράνουμε κι ότι αυτό που δείξαμε στο πρώτο βήμα της απόδειξης είναι ένας χαρακτηρισμός για τα ενριπτικά R-πρότυπα). Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι το M είναι υποπρότυπο του N και ότι η ένθεση $M \hookrightarrow N$ είναι η φυσική ένθεση. Τότε ο ομομορφισμός 2.15 ορίζεται έτσι ώστε για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(N, J)$ να δίνει τον περιορισμό $f|_M \in \mathrm{Hom}_R(M, J)$. Έστω, λοιπόν, ένας $g \in \mathrm{Hom}_R(M, J)$. Θα χρησιμοποιήσουμε μια συνήθη τεχνική επέκτασης απεικονίσεων που βασίζεται στο λήμμα του Zorn.

Συγκεκριμένα θέτουμε

$$\mathcal{M} := \left\{ (g', M') \;\middle|\; \begin{array}{l} g' \in \mathrm{Hom}_R(M', J), g'|_M = g, \text{ όπου } M' \text{ είναι ένα} \\ R\text{-υποπρότυπο του } N \text{ που ικανοποιεί την } M \subseteq M' \subseteq N \end{array} \right\}.$$

Αφού $(g, M) \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Ορίζουμε σχέση διάταξης στο $\mathcal{M}$ έτσι ώστε $(g', M') < (g'', M'')$ αν και μόνο αν $M' \subseteq M''$ και $g''|_{M'} = g'$. Έστω $\{(g_\lambda, M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\}$ μια αλυσίδα (δηλαδή ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο) του $\mathcal{M}$. Τότε η ένωση $\widetilde{M} := \cup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ (η οποία είναι R-πρότυπο μιας και τα $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ διατάσσονται ολικά) μαζί με τον ομομορφισμό R-προτύπων $\widetilde{g} : \widetilde{M} \to J$ που ορίζεται ως $\widetilde{g}(m) = g_\lambda(m)$ όταν $m \in M_\lambda$ για οποιοδήποτε $\lambda \in \Lambda$ (είναι καλά ορισμένος λόγω της συμβατότητας των g_λ της αλυσίδας), αποτελούν ζευγάρι του $\mathcal{M}$, δηλαδή $(\widetilde{g}, \widetilde{M}) \in \mathcal{M}$. Πράγματι εξ ορισμού του $\widetilde{M}$ έχουμε ότι $M \subseteq \widetilde{M} \subseteq N$ και εξ ορισμού του ομομορφισμού $\widetilde{g}$ ισχύει ότι $\widetilde{g}|_M = g$. Επίσης είναι εμφανές από τον ορισμό του $(\widetilde{g}, \widetilde{M})$ ότι είναι άνω φράγμα της αλυσίδας $\{(g_\lambda, M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\}$. Ικανοποιούνται επομένως οι συνθήκες του λήμματος του Zorn, άρα υπάρχει μεγιστικό στοιχείο, έστω $(\hat{g}, \hat{M})$, στο $\mathcal{M}$.

Αν $\hat{M} \neq N$, τότε υπάρχει $n \in N \setminus \hat{M}$. Αν $\mathfrak{b} := \{a \in R \mid an \in \hat{M}\}$, τότε το $\mathfrak{b}$ είναι ένα ιδεώδες του R κι απ' ότι δείξαμε στο πρώτο βήμα της απόδειξης παίρνουμε ότι ο ομομορφισμός R-προτύπων

$$\mathrm{Hom}_R(R, J) \to \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{b}, J)$$

είναι επί. Έστω, τώρα, $\phi \in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{b}, J)$ με $\phi(a) = \hat{g}(an)$. Υπάρχει, λοιπόν, $\psi \in \mathrm{Hom}_R(R, J)$ τέτοιος ώστε για κάθε $a \in \mathfrak{b}$ να ισχύει $\psi(a) = \phi(a)$. Θέτουμε $\bar{M} := \hat{M} + Rn \subseteq N$ και $\bar{g}(\hat{m} + rn) := \hat{g}(\hat{m}) + \psi(r)$ για κάθε $\hat{m} \in \hat{M}$ και $r \in R$. Ο ομομορφισμός $\bar{g}$ είναι καλά ορισμένος διότι για $bn \in \hat{M} \cap Rn$ έχουμε $b \in \mathfrak{b}$ και $\hat{g}(bn) = \phi(b) = \psi(b)$. Συνεπώς έχουμε $\hat{M} \subsetneq \bar{M} \subseteq N$ και $\bar{g} \in \mathrm{Hom}_R(\bar{M}, J)$ με $\bar{g}|_M = g$ και $\bar{g}|_{\hat{M}} = \hat{g}$, δηλαδή $(\bar{g}, \bar{M}) \in \mathcal{M}$ και μάλιστα $(\bar{g}, \bar{M}) > (\hat{g}, \hat{M})$, το οποίο αντιβαίνει στη μεγιστικότητα του $(\hat{g}, \hat{M})$, άτοπο. Επομένως $\hat{M} = N$, οπότε ο ομομορφισμός $\hat{g} \in \mathrm{Hom}_R(N, J)$ είναι τέτοιος ώστε η σύνθεση $M \hookrightarrow N \xrightarrow{\hat{g}} J$ να συμπίπτει με τον ομομορφισμό g. Άρα δείξαμε ότι όντως ομομορφισμός 2.15 είναι επί, όπως θέλαμε. □

Λήμμα 2.3.6. *Για έναν δακτύλιο Noether R, το $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\widetilde{I}$ που καθορίζεται από ένα ενριπτικό R-πρότυπο I είναι ένα μεστό δεμάτι πάνω από το αφινικό σχήμα $X = SpecR$.*

Απόδειξη. Κι αυτή η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι για τυχαίο $f \in R$ ο ομομορφισμός περιορισμού

$$I = \Gamma(X, \widetilde{I}) \to \Gamma(D(f), \widetilde{I}) = I_f \tag{2.16}$$

είναι επί. Εξ ορισμού, ο ομομορφισμός 2.16 είναι ο φυσικός ομομορφισμός του εντοπισμού, οπότε αρκεί, για το πρώτο βήμα, να δείξουμε ότι το τυχαίο στοιχείο $\frac{a}{f^m} \in I_f$ με $a \in I, m \in \mathbb{N}$, είναι ίσο με ένα στοιχείο $\frac{b}{1} \in I_f$ με $b \in I$.

Θέτουμε

$$\mathfrak{a} := \{r \in R \mid f^n r = 0 \text{ για κάποιον θετικό ακέραιο } n\}.$$

Προφανώς το $\mathfrak{a}$ είναι ένα ιδεώδες του R. Αν $\mathfrak{a} = R$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $f^n \cdot 1 = 0$, δηλαδή το f είναι μηδενοδύναμο στοιχείο, κι έτσι $D(f) = \emptyset$ και $I_f = 0$. Άρα ο ομομορφισμός 2.16 είναι επί, τετριμμένα. Από την άλλη, αν $\mathfrak{a} \neq R$, τότε έχουμε τα εξής: Επειδή ο R είναι δακτύλιος Noether, το $\mathfrak{a}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, οπότε υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $f^n\mathfrak{a} = (0)$ (αυτός ο n αρκεί να είναι ο μέγιστος απ' αυτούς που αντιστοιχούν στους γεννήτορες του $\mathfrak{a}$). Έτσι, ο ομομορφισμός R-προτύπων

$$\begin{aligned} h : R/\mathfrak{a} &\to R \\ [r] &\mapsto f^{n+m} r, \end{aligned}$$

είναι καλά ορισμένος και 1-1. Επιπλέον ορίζεται κι ένας $\phi \in \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, I)$ μέσω του $\phi([r]) = rf^n a$. Αφού το I είναι εξ υποθέσεως ενριπτικό πρότυπο και ο h είναι 1-1, έχουμε $\psi \in \mathrm{Hom}_R(R, I)$ που να ικανοποιεί τη σχέση $\psi \circ h = \phi$. Θέτουμε $b \coloneqq \psi(1)$ και τότε

$$f^n a = \phi([1]) = \psi(h([1])) = \psi(f^{n+m}) = f^{n+m} b,$$

οπότε

$$\frac{a}{f^m} = \frac{f^n a}{f^{n+m}} = \frac{b}{1},$$

όπως θέλαμε.

Το δεύτερο βήμα είναι να δείξουμε ότι για ένα γενικό ανοιχτό $U \subseteq X$ ο ομομορφισμός περιορισμού

$$\rho_{U,X} : \Gamma(X, \widetilde{I}) = I \to \Gamma(U, \widetilde{I})$$

είναι επί, απ' όπου προκύπτει ότι το $\widetilde{I}$ είναι μεστό δεμάτι. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο R είναι δακτύλιος Noether.

Θέτουμε $Y_0 \coloneqq \overline{\mathrm{supp}\widetilde{I}}$. Αν $U \cap Y_0 = \emptyset$, τότε $\Gamma(U, \widetilde{I}) = 0$ κι έχουμε το ζητούμενο - αυτή είναι και η βάση της επαγωγής. Αν $U \cap Y_0 \neq \emptyset$, τότε μπορούμε να βρούμε $f \in R$ τέτοιο ώστε το ανοιχτό $D(f)$ να περιέχεται στο U και $D(f) \cap Y_0 \neq \emptyset$. Θέτουμε $Z \coloneqq X \setminus D(f)$ και συμβολίζουμε με $\Gamma_Z(\cdot, \cdot)$ τις τομές ενός δεματιού πάνω από ένα ανοιχτό οι οποίες έχουν στήριγμα εντός του Z (στήριγμα μιας τομής είναι το σύνολο των σημείων στα οποία τα φύτρα της τομής είναι μη-μηδενικά), οπότε προφανώς $\Gamma_Z(X, \widetilde{I}) \hookrightarrow \Gamma(X, \widetilde{I})$ και $\Gamma_Z(U, \widetilde{I}) \hookrightarrow \Gamma(U, \widetilde{I})$.

Έστω, λοιπόν, $s \in \Gamma(U, \widetilde{I})$, κι έστω $s' \coloneqq \rho_{D(f),U}(s)$. Λόγω του πρώτου βήματος της απόδειξης, υπάρχει $t \in \Gamma(X, \widetilde{I})$ τέτοιο ώστε $\rho_{D(f),X}(t) = s'$. Αν $t' \coloneqq \rho_{U,X}(t)$, τότε $\rho_{D(f),U}(s - t') = 0$, οπότε $s - t' \in \Gamma_Z(U, \widetilde{I})$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι ο ομομορφισμός

$$\Gamma_Z(X, \widetilde{I}) \to \Gamma_Z(U, \widetilde{I})$$

είναι επί (αφού τότε θα μπορούμε να βρούμε και μια προεικόνα του s μέσα στο I).

Θέτουμε τώρα $J \coloneqq \Gamma_Z(X, \widetilde{I}) = \{a \in I \mid f^n a = 0 \text{ για κάποιον θετικό ακέραιο } n\}$, το οποίο είναι ενριπτικό R-πρότυπο λόγω του λήμματος 2.3.5. Εξ ορισμού του J, έχουμε ότι $\Gamma(U, \widetilde{J}) = \Gamma_Z(U, \widetilde{I})$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι ο ομομορφισμός

$$\Gamma(X, \widetilde{J}) \to \Gamma(U, \widetilde{J})$$

είναι επί. Έστω $Y_1 \coloneqq \overline{\mathrm{supp}\widetilde{J}}$. Τότε $Y_1 \subseteq Y_0 \cap Z \subsetneq Y_0$.

Αν επαναλάβουμε όλα τα παραπάνω, θα πάρουμε αναδρομικά μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία $Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots$ κλειστών υποσυνολών του X, το οποίο είναι σχήμα Noether. Επομένως η ακολουθία αυτή είναι τελικά σταθερή, δηλαδή καταλήγουμε μετά από πεπερασμένες επαναλήψεις στην επαγωγική βάση που αναφέραμε, οπότε ο ζητούμενος ομομορφισμός είναι όντως επί. □

Θεώρημα 2.3.7. *Για ένα σχεδόν-συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο $\mathcal{F}$ πάνω από ένα αφινικό σχήμα Noether X, έχουμε*

$$H^n(X, \mathcal{F}) = 0, \quad n \geq 1.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ για κάποιο R-πρότυπο M (όπου ο R είναι δακτύλιος Noether), το οποίο ισχύει λόγω του θεωρήματος 1.2.19. Θεωρούμε μια ενριπτική ανάλυση του M

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots .$$

Λόγω του παραδείγματος 1.2.17(ii) παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία σχεδόν-συναφών δεματιών πάνω από το $X = \operatorname{Spec} R$

$$0 \to \widetilde{M} \to \widetilde{I}^0 \to \widetilde{I}^1 \to \widetilde{I}^2 \to \cdots .$$

Από το λήμμα 2.3.6 παίρνουμε ότι τα $\widetilde{I}^j$ είναι μεστά δεμάτια για κάθε $j \in \mathbb{N}$, οπότε η ανωτέρω ακριβής ακολουθία είναι μια μεστή ανάλυση του δεματιού $\widetilde{M}$, άρα μέσω αυτής μπορούμε να υπολογίσουμε τις ομάδες συνομολογίας του $\widetilde{M} = \mathcal{F}$. Παρατηρούμε τώρα ότι η ακολουθία

$$0 \to \Gamma(X, \widetilde{M}) = M \to \Gamma(X, \widetilde{I}^0) = I^0 \to \Gamma(X, \widetilde{I}^1) = I^1 \to \Gamma(X, \widetilde{I}^2) = I^2 \to \cdots$$

είναι ακριβής, οπότε ισχύει ότι $H^n(X, \widetilde{M}) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, όπως θέλαμε. $\square$

2.4 Ομάδες συνομολογίας Čech

Σ' αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε τις ομάδες συνομολογίας Čech για ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων πάνω από έναν τοπολογικό χώρο X ως προς ένα δοθέν ανοιχτό κάλυμμα του X. Επειδή ο ορισμός τους δίνεται με «συνδυαστικό» τρόπο, είναι πιο εύκολο να υπολογιστούν και θα δούμε ότι στην περίπτωση των σχημάτων, υπό κάποιες αρκετά εύλογες υποθέσεις, μας δίνουν τις ίδιες ομάδες συνομολογίας που ορίσαμε στην υποενότητα 2.2 μέσω των μεστών αναλύσεων.

Έστω $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X, έστω $U_{i_0 i_1 \ldots i_n} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots U_{i_n}$. Έστω $\mathcal{F}$ ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων πάνω από τον X. Ορίζουμε το εξής σύνολο:

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \left\{ \{f_{i_0 i_1 \ldots i_p}\} \in \prod_{i_0, i_1, \ldots, i_p \in I, i_n \neq i_m} \Gamma(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}, \mathcal{F}) \middle| f_{i_0 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_p} = -f_{i_0 \ldots i_{k+1} i_k \ldots i_p} \right\}$$

τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται *p-οστες εναλλάσσουσες συναλυσίδες* με τιμές στο $\mathcal{F}$ ως προς το $\mathcal{U}$.

Μία άμεση παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε για τις p-οστες εναλλάσσουσες συναλυσίδες είναι ότι για μια μετάθεση σ, $p+1$ στοιχείων, έχουμε

$$f_{i_{\sigma(0)} i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = \operatorname{sgn}\sigma f_{i_0 i_1 \ldots i_p},$$

όπου $\operatorname{sgn}\sigma$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης σ. Επίσης η ιδιότητα που προσδιορίζει τα στοιχεία του $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ συνεπάγεται ότι αν επιτρέπαμε την ταύτιση δύο δεικτών από τους $\{i_0, i_1, \ldots, i_p\}$, τότε θα είχαμε $f_{i_0 i_1 \ldots i_p} = 0$, γι' αυτό και στο γινόμενο έχουμε ως συνθήκη το ότι οι δείκτες πρέπει να είναι ανά δύο διαφορετικοί.

Για $\{f_{i_0 i_1 \ldots i_p}\}, \{g_{i_0 i_1 \ldots i_p}\} \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, ορίζουμε την πρόσθεση κατά συντεταγμένη:

$$\{f_{i_0 i_1 \ldots i_p}\} + \{g_{i_0 i_1 \ldots i_p}\} := \{f_{i_0 i_1 \ldots i_p} + g_{i_0 i_1 \ldots i_p}\}$$

κι έτσι το $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ αποκτά δομή αβελιανής ομάδας. Σε περίπτωση που το $\mathcal{F}$ είναι δεμάτι από R-πρότυπα για κάποιον δακτύλιο R, τότε, με αντίστοιχο τρόπο με την πρόσθεση, το $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ αποκτά κι αυτό δομή R-προτύπου.

Ορίζουμε ομομορφισμούς αβελιανών ομάδων μεταξύ των $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ και $C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \delta^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \{f_{i_0 i_1 \ldots i_p}\} &\mapsto \{g_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}}\}, \text{ όπου} \\ g_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}} &= \sum (-1)^k \rho(f_{i_0 i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_{p+1}}), \end{aligned}$$

με το σύμβολο $\widehat{i_k}$ να σημαίνει ότι παραλείπουμε το i_k, και τον περιορισμό ρ να είναι από το ανοιχτό $U_{i_0 i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_{p+1}}$ στο ανοιχτό $U_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}}$. Καταχρηστικά, για λιγότερο δυσανάγνωστο συμβολισμό, θα παραλείπουμε το ρ και για τον περιορισμό θα γράφουμε απλά $f_{i_0 i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_{p+1}}$, καθώς θα είναι σαφές κάθε φορά σε ποιο ανοιχτό θεωρούμε την συγκεκριμένη τομή. Η βασικότερη ιδιότητα του ομομορφισμού δ^p είναι η ακόλουθη:

Λήμμα 2.4.1. *Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:*

$$\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\{g_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}}\} \in \mathrm{Im}\delta^p$. Άρα υπάρχει $\{f_{i_0 i_1 \ldots i_p}\} \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ τέτοιο ώστε

$$g_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}} = \sum (-1)^k f_{i_0 i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_{p+1}}.$$

Έστω $\{h_{i_0 i_1 \ldots i_{p+2}}\} = \delta^{p+1}(\{g_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}}\})$ και υπολογίζουμε τώρα:

$$h_{i_0 i_1 \ldots i_{p+2}} = \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k g_{i_0 i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_{p+2}} \tag{2.17}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+2} \left(\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k+l} f_{i_0 i_1 \ldots \widehat{i_l} \ldots \widehat{i_k} \ldots i_{p+2}} + \sum_{l=k+1}^{p+2} (-1)^{k+l-1} f_{i_0 i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots \widehat{i_l} \ldots i_{p+2}} \right) \tag{2.18}$$

απ' όπου μπορούμε να δούμε ότι κάθε όρος εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές με αντίθετα πρόσημα, οπότε τελικά $\delta^{p+1}(\{g_{i_0 i_1 \ldots i_{p+1}}\}) = 0$, δηλαδή $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$. □

Από το λήμμα 2.4.1 παίρνουμε το *συναλυσιδωτό σύμπλεγμα Čech ως προς το ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$* (με συντελεστές στο δεμάτι $\mathcal{F}$) από το οποίο ορίζονται οι *p-οστες ομάδες συνομολογίας Čech ως προς το ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$* ως:

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \coloneqq \mathrm{Ker}\delta^p / \mathrm{Im}\delta^{p-1}, p \in \mathbb{N},$$

όπου $\delta^{-1} \coloneqq 0$.

Προφανώς οι ομάδες αυτές εξαρτώνται από το ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U}$. Μπορούμε να ορίσουμε p-οστες ομάδες συνομολογίας Čech (με συντελεστές στο δεμάτι $\mathcal{F}$) $\check{H}^p(X, \mathcal{F})$ ενός χώρου X θεωρώντας το ευθύ όριο των p-οστών ομάδων συνομολογίας ως προς τα διάφορα ανοιχτά καλύμματα, όπου η θεωρούμενη διάταξη στα ανοιχτά καλύμματα ορίζεται από την εκλέπτυνση. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτήν τη διαδικασία παραπέμπουμε στο [7], σελ.117-120.

Η πρώτη βασική παρατήρηση που έχουμε να κάνουμε αφορά στην 0-οστη ομάδα συνομολογίας Čech:

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}),$$

(το οποίο συνεπάγεται κι ότι $\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$). Πράγματι, για $\xi = \{f_i\} \in \mathrm{Ker}\delta^0$, έχουμε $\delta^0(\{f_i\}) = \rho_{U_{ij}, U_i}(f_i) - \rho_{U_{ij}, U_j}(f_j) = 0$, το οποίο εξ ορισμού του δεματιού μας καθορίζει ένα μοναδικό $f \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ τέτοιο ώστε $\rho_{U_i, X}(f) = f_i, i \in I$. Αντίστροφα, για κάθε $f \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ ορίζεται ένα $\{f_i\} = \{\rho_{U_i, X}(f)\} \in \mathrm{Ker}\delta^0$, οπότε τελικά όντως $\mathrm{Ker}\delta^0 = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Θεμελιώδης ιδιότητα που θέλουμε να ικανοποιούν τα αντικείμενα που ονομάζουμε ομάδες συνομολογίας είναι αυτή του θεωρήματος 2.2.6, δηλαδή ότι από μια βραχεία ακριβή ακολουθία δεματιών μπορούμε να περάσουμε σε μια μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων συνομολογίας. Αυτό δεν ισχύει εν γένει για τις ομάδες συνομολογίας Čech ενός τοπολογικού χώρου X, ωστόσο στην περίπτωση των σχημάτων που μας ενδιαφέρει περισσότερο έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.2. *Αν X είναι ένα διαχωρισμένο σχήμα (δηλαδή ο μορφισμός $X \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ είναι διαχωρισμένος) κι αν το $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ είναι ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα του X, τότε για μια βραχεία ακριβή ακολουθία σχεδόν-συναφών δεματιών*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0,$$

έχουμε μια μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων συνομολογίας Čech

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{H}) \to \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \tag{2.19}$$

$$\to \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to \check{H}^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^2(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \cdots . \tag{2.20}$$

Απόδειξη. Αφού ο $\pi : X \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ είναι ένας διαχωρισμένος μορφισμός, η τομή $U \cap V$ δύο αφινικών ανοιχτών υποσυνόλων U και V είναι επίσης αφινικό ανοιχτό υποσύνολο (βλ. πρόταση 1.4.8(iii)). Επομένως, για ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, η τομή $U_{i_0 i_1 \dots i_p}$ είναι ένα αφινικό ανοιχτό υποσύνολο. Επομένως από το πόρισμα 1.2.20 παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \to \mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \dots i_p}) \to \mathcal{G}(U_{i_0 i_1 \dots i_p}) \to \mathcal{H}(U_{i_0 i_1 \dots i_p}) \to 0.$$

Έτσι παίρνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς οριζόντιες και κατακόρυφες ακολουθίες:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi^0"] \arrow[d, "\delta^0_{\mathcal{F}}"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi^0"] \arrow[d, "\delta^0_{\mathcal{G}}"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta^0_{\mathcal{H}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi^1"] \arrow[d, "\delta^1_{\mathcal{F}}"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi^1"] \arrow[d, "\delta^1_{\mathcal{G}}"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta^1_{\mathcal{H}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi^2"] \arrow[d, "\delta^2_{\mathcal{F}}"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi^2"] \arrow[d, "\delta^2_{\mathcal{G}}"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta^2_{\mathcal{H}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^3(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi^3"] \arrow[d, "\delta^3_{\mathcal{F}}"] & C^3(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi^3"] \arrow[d, "\delta^3_{\mathcal{G}}"] & C^3(\mathcal{U},\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta^3_{\mathcal{H}}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Η συνέχεια της απόδειξης είναι ίδια με αυτή του θεωρήματος 2.2.6. □

Δηλαδή για τις ομάδες συνομολογίας ως προς ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα ενός διαχωρισμένου σχήματος έχουμε την επιθυμητή ιδιότητα σχηματισμού μακράς ακριβούς ακολουθίας των ομάδων συνομολογίας Čech.

Το θεώρημα και το πόρισμά του που ακολουθούν είναι αυτά που συνδέουν τη συνομολογία Čech με τη συνομολογία μέσω μεστών αναλύσεων που ορίσαμε στην υποενότητα 2.2. Ωστόσο τα διατυπώνουμε χωρίς να τα αποδεικνύουμε καθώς τα εργαλεία που χρειάζονται για τις αποδείξεις ξεφεύγουν από το σκοπό της παρούσας εργασίας.

Θεώρημα 2.4.3. *(Leray) Έστω $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X κι έστω $\mathcal{F}$ ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων πάνω από τον X. Αν για κάθε πεπερασμένη τομή $U_{i_0 i_1 \dots i_p} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$ ισχύει ότι*

$$H^n(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \mathcal{F}) = 0, \quad n \geq 1,$$

τότε έχουμε ισομορφισμούς

$$\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong H^n(X,\mathcal{F}), \quad n \geq 1.$$

Πόρισμα 2.4.4. *Για ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ ενός διαχωρισμένου σχήματος X και για ένα αυθαίρετο σχεδόν-συναφές δεμάτι πάνω από το X, έχουμε*

$$\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \check{H}^n(X,\mathcal{F}) \cong H^n(X,\mathcal{F}).$$

Το ακόλουθο παράδειγμα αναδεικνύει τη χρησιμότητα του πορίσματος 2.4.4 για τον υπολογισμό των ομάδων συνομολογίας $H^n(X,\mathcal{F})$:

Παράδειγμα 2.4.5. *Έστω $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ το δεμάτι δομής της προβολικής ευθείας πάνω από ένα σώμα k, δηλαδή του σχήματος $\mathbb{P}^1_k = Projk[x_0,x_1]$. Θα προσδιορίσουμε τις ομάδες συνομολογίας $H^n(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k})$, υπολογίζοντας τις ομάδες συνομολογίας Čech του δεματιού δομής ως προς το αφινικό ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_0 = D_+(x_0), U_1 = D_+(x_1)\}$ (ότι η προβολική ευθεία είναι διαχωρισμένο σχήμα δεν προκύπτει άμεσα, αλλά ισχύει).*

Εύκολα βλέπουμε ότι $C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U_0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U_1)$, $C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(U_{01})$ και $C^l(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = 0$ για κάθε $l \geq 2$ (άρα για κάθε $l \geq 2$ έχουμε $\check{H}^l(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = 0$, δηλαδή $H^l(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = 0$). Από το παράδειγμα 1.1.10 έχουμε ήδη δει ότι

$$\mathcal{O}_X(U_0) = k[\tfrac{x_1}{x_0}], \quad \mathcal{O}_X(U_1) = k[\tfrac{x_0}{x_1}], \quad \mathcal{O}_X(U_{01}) = k[\tfrac{x_1}{x_0},\tfrac{x_0}{x_1}].$$

Για απλότητα θα συμβολίζουμε με $x = \frac{x_1}{x_0}$ και $y = \frac{x_0}{x_1}$. Πάνω από το U_{01} έχουμε ακόμα $y = \frac{1}{x}$.

Για $\xi = \{f_0,f_1\} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$, μπορούμε να γράφουμε $f_0 = f_0(x) \in k[x]$, $f_1 = f_1(y) \in k[y]$ και $\delta^0\xi = f_1 - f_0 = f_1(\frac{1}{x}) - f_0(x) \in k[x,\frac{1}{x}]$. Αν $\delta^0\xi = 0$, τότε $f_1(\frac{1}{x}) = f_0(x)$, δηλαδή $f_1 = f_0 = \alpha \in k$, οπότε $Ker\delta^0 = k$, άρα $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) = k$ κι έτσι $H^0(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = k$.

Για $f_{01} \in k[x,\frac{1}{x}]$ μπορούμε να βρούμε $f(x)$ και $g(x)$ στο $k[x]$ τέτοια ώστε $f_{01} = f(\frac{1}{x}) - g(x)$. Θέτοντας $f_0(x) = g(x)$, $f_1(y) = f(y)$ και $\xi = \{f_0,f_1\} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k})$, έχουμε $\delta^0\xi = f_{01}$ κι άρα $Im\delta^0 = C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k})$. Επομένως $\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = 0$, οπότε και $H^1(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = 0$.

Ένα χρήσιμο λήμμα που μπορούμε εύκολα να δείξουμε χρησιμοποιώντας το πόρισμα 2.4.4 έχει να κάνει με τον μηδενισμό των ανώτερων ομάδων συνομολογίας του προβολικού χώρου πάνω από έναν δακτύλιο Noether R:

Λήμμα 2.4.6. *Για τον n-διάστατο προβολικό χώρο $X = \mathbb{P}^n_R$ πάνω από έναν δακτύλιο Noether R και για ένα σχεδόν-συναφές δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω από τον $\mathbb{P}^n_R$, έχουμε*

$$H^n(X,\mathcal{F}) = 0, \quad p \geq n+1.$$

Απόδειξη. Αφού $S = R[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ και $X = \mathrm{Proj}S$ (το οποίο είναι διαχωρισμένο σχήμα - αυτό δεν είναι άμεσο, αλλά ισχύει), έχουμε ένα αφινικό ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_i\}_{0\leq i\leq n}$ του X, όπου $U_i = D_+(x_i), i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Τότε όμως $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ για κάθε $p \geq n+1$ και το αποτέλεσμα προκύπτει λόγω του πορίσματος 2.4.4. □

Μέρος II

Étale συνομολογία

Κεφάλαιο 3

Βασική θεωρία

Η ανάπτυξη της θεωρίας της étale συνομολογίας έγινε από τους Grothendieck, Artin και Verdier πάνω στην ρηξικέλευθη ιδέα του Grothendieck ότι η κατάλληλη θεωρία συνομολογίας για την επίλυση των εικασιών του Weil θα προέκυπτε αν αντί για μια συνηθισμένη τοπολογία θεωρούσαμε ένα σύστημα καλυμμάτων που θα ικανοποιούσε αρκετές συνθήκες ώστε να αναπτυχθεί μια θεωρία δεματιών με βάση αυτό το σύστημα. Με την κατάλληλη τεχνική αυτή η θεωρία δεματιών θα μπορούσε να δώσει μια γενική συνομολογία δεματιών με πολλά από τα καλά χαρακτηριστικά γνωστών θεωριών συνομολογίας από τη θεωρία πολλαπλοτήτων (εδώ ο όρος πολλαπλότητα νοείται ως μετάφραση του όρου variety, όχι του όρου manifold) ορισμένων πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, κάτι που σύμφωνα με τον Weil θα έπρεπε να είναι αρκετό για να αποδειχθούν οι εικασίες του. Θα προσπαθήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο να παρουσιάσουμε αυτές τις ιδέες, ωστόσο αρκετές φορές η εμβάθυνση στις τεχνικές λεπτομέρειες δε θα είναι εφικτή και τότε θα παραπέμπουμε σε κατάλληλες πηγές.

Στο εξής οι δακτύλιοι που θα θεωρούμε θα υποθέτουμε ότι είναι δακτύλιοι Noether, εκτός αν αναφέρουμε ρητά ότι αυτή η υπόθεση δεν χρειάζεται.

3.1 Étale μορφισμοί

Στην «καρδιά» των πολλών τεχνικών λεπτομερειών βρίσκεται η έννοια του étale μορφισμού ο οποίος - όπως γίνεται συχνά στην αλγεβρική γεωμετρία - στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων έχει από πίσω του μια ξεκάθαρη γεωμετρική ιδέα που μπορεί να περιγραφεί επαρκώς και με αλγεβρικό τρόπο έτσι ώστε στην περίπτωση των σχημάτων, όταν «χάνονται» οι περισσότερες γεωμετρικές ιδέες και περιγραφές, η αλγεβρική περιγραφή να αποτελεί τον ορισμό.

3.1α΄ Étale μορφισμοί μη-ιδιόμορφων αλγεβρικών πολλαπλοτήτων

Όλες οι πολλαπλότητες που θα μας απασχολήσουν σε αυτήν την παράγραφο θεωρούμε ότι ορίζονται πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω W, V μη-ιδιόμορφες αλγεβρικές πολλαπλότητες πάνω από το k κι έστω κανονική (στα αγγλικά regular) απεικόνιση $\phi : W \to V$. Η ϕ αποκαλείται* étale στο $Q \in W$ *αν η επαγόμενη απεικόνιση $d\phi : Tgt_Q(W) \to Tgt_{\phi(Q)}(V)$ στους εφαπτόμενους χώρους είναι ένας ισομορφισμός. Η ϕ αποκαλείται* étale *αν είναι étale σε κάθε σημείο της W.*

Έχουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό για τις étale απεικονίσεις:

Πρόταση 3.1.2. *Έστω $V = Specm(A)$ μια μη-ιδιόμορφη αφινική πολλαπλότητα πάνω από το k, κι έστω W η υποπολλαπλότητα του $V \times \mathbb{A}^n$ που ορίζεται από τις εξισώσεις*

$$g_i(Y_1, \ldots, Y_n) = 0, g_i \in A[Y_1, \ldots, Y_n], i = 1, \ldots, n.$$

Η απεικόνιση προβολής $W \to V$ είναι étale στο σημείο $(P; b_1, \ldots, b_n)$ του W αν και μόνο αν ο Ιακωβιανός πίνακας $\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right)$ είναι μη-ιδιόμορφος στο $(P; b_1, \ldots, b_n)$.

Απόδειξη. Βλ. [8], σελ.16. □

Πόρισμα 3.1.3. *Έστω $phi : U \to V$, όπου $U = V = \mathbb{A}^m$ μια κανονική απεικόνιση. Τότε η ϕ είναι étale στο $(a_1, \ldots, a_m)$ αν και μόνο αν ο Ιακωβιανός πίνακας $\left(\frac{\partial(X_i \circ \phi)}{\partial Y_j}|_{(a_1,\ldots,a_m)}\right)$ είναι μη-ιδιόμορφος (όπου X_i είναι η i-οστή συνάρτηση συντεταγμένων στο V και Y_j είναι η j-οστή συνάρτηση συντεταγμένων στο U).*

Απόδειξη. Βλ. [8], σελ.17. □

Μια βασική παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι η συνθήκη μη-ιδιομορφίας του συγκεκριμένου Ιακωβιανού πίνακα του πορίσματος είναι ακριβώς η υπόθεση του θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης από την Ανάλυση.

Παράδειγμα 3.1.4. *Έστω $V = Specm(A)$ μια μη-ιδιόμορφη αφινική πολλαπλότητα πάνω από το k, κι έστω*

$$f(T) = a_0T^m + \cdots + a_m$$

πολυώνυμο με συντελεστές στην k-άλγεβρα A. Τότε κάθε a_i είναι μια κανονική συνάρτηση στο V, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε το $f(T)$ σαν μια συνεχή οικογένεια $f(P; T)$ πολυωνύμων που παραμετροποιούνται από το $P \in V$. Έστω $W = Specm(A[T]/(f(T)))$, κι έστω ότι η k-άλγεβρα $A[T]/(f(T))$ είναι ανηγμένη (χωρίς μηδενοδύναμα στοιχεία). Τότε η W είναι η υποπολλαπλότητα της $V \times \mathbb{A}^1$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$f(P; T) = 0,$$

και η ένθεση $A \hookrightarrow A[T]/(f(T))$ αντιστοιχεί στην προβολή $\pi : W \to V$, $(P; c) \mapsto P$. Υπενθυμίζουμε ότι για τυχόν $P \in V$, το $c \in \mathbb{A}^1$ είναι απλή ρίζα του $f(P_0; T)$ αν και μόνο αν δεν είναι ρίζα της παραγώγου $\frac{df(P_0;T)}{dT}$. Με βάση την πρόταση 3.1.2 μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η απεικόνιση π είναι étale στο $(P_0; c)$ αν και μόνο αν το c είναι απλή ρίζα του $f(P_0; T)$.

Παράδειγμα 3.1.5. *Έστω η απεικόνιση $x \mapsto x^n : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$. Αφού $\frac{dX^n}{dX} = nX^{n-1}$, βλέπουμε από το πόρισμα 3.1.3 ότι η συγκεκριμένη απεικόνιση δεν είναι étale πουθενά αν η χαρακτηριστική του k διαιρεί το n, ενώ αν δεν το διαιρεί είναι étale παντού εκτός από το $x = 0$.*

3.1β΄ Étale μορφισμοί αυθαίρετων πολλαπλοτήτων

Σε περιπτώσεις που οι πολλαπλότητες που μας απασχολούν έχουν ιδιόμορφα σημεία, η μελέτη μας στρέφεται από τους εφαπτόμενους χώρους στους εφαπτόμενους κώνους. Υπενθυμίζουμε ότι για μια πολλαπλότητα (που χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι περιέχει την αρχή των αξόνων) $V = \mathrm{Specm}(k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})$ πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k, ο εφαπτόμενος κώνος στην αρχή των αξόνων $P = (0, \ldots, 0)$ ορίζεται χρησιμοποιώντας το ιδεώδες $\mathfrak{a}_* = \{f_* | f \in \mathfrak{a}\}$, όπου για $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, f_* είναι το (μη-μηδενικό) ομογενές κομμάτι του f με τον μικρότερο βαθμό. Ο γεωμετρικός κώνος της V στο P είναι το σύνολο μηδενισμού του $\mathfrak{a}_*$. Ωστόσο ο δακτύλιος

$k[X_1, \ldots, X^n]/\mathfrak{a}_*$ μπορεί να έχει μηδενοδύναμα στοιχεία, οπότε ο γεωμετρικός κώνος δεν καθορίζει αυτόν τον δακτύλιο. Έτσι ορίζουμε ως εφαπτόμενο κώνο $C_P(V)$ της V στο σημείο P να είναι η k-άλγεβρα $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}_*$ (ισοδύναμα μπορούμε να σκεφτόμαστε το k-σχήμα $\mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}_*)$ για μια πιο «γεωμετρική» εκδοχή).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι μπορούμε να δώσουμε ορισμό του εφαπτόμενου κώνου που δεν εξαρτάται από την παράσταση του δακτύλιου συντεταγμένων της πολλαπλότητας ως k-άλγεβρα (δεν εξαρτάται δηλαδή από την εμφύτευση της πολλαπλότητας σε κάποιον αφινικό χώρο). Αρκεί να θυμηθούμε ότι σε κάθε τοπικό δακτύλιο A αντιστοιχεί με κανονικό τρόπο ένας βαθμωτός δακτύλιος $\mathrm{gr}(A) := \bigoplus_n \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_A$, όπου ο πολλαπλασιασμός ορίζεται με τον αναμενόμενο τρόπο

$$a, b \mapsto ab : \mathfrak{m}^i \times \mathfrak{m}^j \to \mathfrak{m}^{i+j}.$$

Για $A = \mathcal{O}_P$ έχουμε λοιπόν τον βαθμωτό δακτύλιο $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_P) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^{i+1}$, όπου $\mathfrak{m}_P$ είναι το μεγιστικό ιδεώδες που αντιστοιχεί στην αρχή P. Για μια δεδομένη εμφύτευση της πολλαπλότητας στον $\mathbb{A}^n$, ισχύει ότι $\mathfrak{m}_P = (\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n})$ και τότε ο βαθμωτός δακτύλιος $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_P)$ είναι ισόμορφος με τον εφαπτόμενο κώνο $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}_*$ (μπορούμε να το διαπιστώσουμε γράφοντας αναλυτικά το ευθύ άθροισμα του βαθμωτού δακτυλίου, βλ. [9], σελ.91, πρόταση 4.34). Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τον εφαπτόμενο κώνο μιας πολλαπλότητας V στο σημείο P να είναι ο βαθμωτός δακτύλιος $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_P)$.

Ορισμός 3.1.6. *Έστω $\phi : W \to V$ μια κανονική απεικόνιση πολλαπλοτήτων ορισμένων πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k. Τότε η ϕ ονομάζεται* étale *στο $Q \in W$ αν επάγει ισομορφισμό $C_{\phi(Q)}(V) \to C_Q(W)$ στους εφαπτόμενους κώνους (ως k-άλγεβρες). (Στην περίπτωση των μη-ιδιόμορφων πολλαπλοτήτων ο ορισμός αυτός συμφωνεί με τον ορισμό της προηγούμενης παραγράφου.)*

Αν θεωρήσουμε τους εφαπτόμενους κώνους ως βαθμωτούς δακτυλίους, τότε από κάποιες βασικές ιδιότητες της πλήρωσης (στα αγγλικά completion) ενός δακτυλίου σε σχέση με τον βαθμωτό δακτύλιό του έχουμε έναν ακόμα χαρακτηρισμό της étale ιδιότητας. Συγκεκριμένα από την Αντιεταθετική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι ένας τοπικός ομομορφισμός (τοπικών) δακτυλίων $A \to B$ ορίζει έναν ομομορφισμό βαθμωτών δακτυλίων $\mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(B)$ κι ότι αυτός ο ομομορφισμός είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο επαγόμενος ομομορφισμός των πληρώσεων $\hat{A} \to \hat{B}$ είναι ισομορφισμός (βλ.[10], Προτάσεις 10.22 και 10.23). Άρα μια κανονική απεικόνιση $\phi : W \to V$ πολλαπλοτήτων πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k είναι étale στο $Q \in W$ αν και μόνο αν ο επαγόμενος (από την ϕ) ομομορφισμός των πληρώσεων $\hat{\mathcal{O}}_{V,\phi(Q)} \to \hat{\mathcal{O}}_{W,Q}$ είναι ισομορφισμός.

Παράδειγμα 3.1.7. *Ο γεωμετρικός εφαπτόμενος κώνος στην αρχή P για την καμπύλη $V : Y^2 = X^3 + X^2$ ορίζεται από την εξίσωση $Y^2 = X^2$, δηλαδή είναι η ένωση των ευθειών $Y = X$ και $Y = -X$, και ο εφαπτόμενος κώνος είναι η άλγεβρα $C_P(V) = k[X, Y]/(Y^2 - X^2)$. Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση ϕ*

$$t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) : \mathbb{A}^1 \to V$$

τότε αυτή στέλνει το $Q = 1 \in \mathbb{A}^1$ στο $(0, 0) \in V$ και για να είναι étale στο $Q = 1$, πρέπει ο επαγόμενος ομομορφισμός στους αντίστοιχους εφαπτόμενους κώνους να είναι ισομορφισμός. Ο εφαπτόμενος κώνος του $\mathbb{A}^1$ στο $Q = 1$ είναι η άλγεβρα $k[S] := k[T - 1]$. Ο επαγόμενος ομομορφισμός των εφαπτόμενων κώνων προκύπτει από τον επαγόμενο ομομορφισμό των δακτύλιων συντεταγμένων

$$\overline{X} \mapsto T^2 - 1, \overline{Y} \mapsto T(T^2 - 1) : k[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3) \to k[T].$$

Πρακτικά ο υπολογισμός γίνεται πιο εύκολα αν θεωρήσουμε ότι οι εφαπτόμενοι κώνοι είναι βαθμωτοί δακτύλιοι (μπορούμε να το κάνουμε λόγω του ισομορφισμού που αναφέραμε παραπάνω). Τότε ο ομομορφισμός των δακτύλιων συντεταγμένων που γράψαμε μόλις επάγει μια απεικόνιση από το μεγιστικό ιδεώδες $\mathfrak{m}_P$ *στο μεγιστικό ιδεώδες* $\mathfrak{m}_Q$ *κι έτσι παίρνουμε απεικόνιση από τον βαθμωτό δακτύλιο* $\bigoplus_{i\geq 0}\mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^{i+1}$ *στον βαθμωτό δακτύλιο* $\bigoplus_{i\geq 0}\mathfrak{m}_Q^i/\mathfrak{m}_Q^{i+1}$. *Συγκεκριμένα αρκεί να προσδιορίσουμε που απεικονίζονται τα* $x := [\overline{X}] \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ *και* $y := [\overline{Y}] \in \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2$. *Κάνοντας κάποιες πράξεις κι αντικαθιστώντας όπου* $T-1$ *με* S, *βλέπουμε ότι το* x *απεικονίζεται στο* $[2S+S^2] \in \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2$ *και το* y *απεικονίζεται στο* $[2S+3S^2+S^3] \in \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2$, *δηλαδή αν θέσουμε* $s := [S] \in \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2$, *τότε ο ζητούμενος ομομορφισμός μεταξύ των εφαπτόμενων κώνων είναι ο εξής:*

$$x \mapsto 2s, y \mapsto 2s : C_P(V) = \bigoplus_{i\geq 0}\mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^{i+1} \to C_Q(\mathbb{A}^1) = \bigoplus_{i\geq 0}\mathfrak{m}_Q^i/\mathfrak{m}_Q^{i+1}$$

κι αμέσως βλέπουμε ότι δεν είναι 1-1, άρα δεν είναι ισομορφισμός. Άρα η ϕ *δεν είναι étale στο* $Q = 1$.

3.1γ΄ Étale μορφισμοί σχημάτων

Η βασική ιδέα πίσω από τους étale μορφισμούς ήταν να αποτελέσουν κάτι ανάλογο με τους τοπικούς διαφορομορφισμούς (στα αγγλικά diffeomorphisms) που συναντάμε στη μελέτη των μιγαδικών ή πραγματικών λείων πολλαπλοτήτων (στα αγγλικά manifolds). Όπως είδαμε οι étale μορφισμοί σε μη-ιδιόμορφες πολλαπλότητες επάγουν ισομορφισμό στους εφαπτόμενους χώρους, συνθήκη που θυμίζει το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, που όμως δεν ισχύει στη Zariski τοπολογία των αφινικών πολλαπλοτήτων μιας και τα ανοιχτά σύνολα αυτής της τοπολογίας είναι «πολύ μεγάλα». Για να διατηρηθούν όλες οι επιθυμητές ιδιότητες των διαφορομορφισμών ορίζουμε τους étale μορφισμούς μεταξύ σχημάτων χρησιμοποιώντας τις έννοιες των επίπεδων (flat) και μη-διακλαδιζόμενων (unramified) μορφισμών. Παραθέτουμε συγκεντρωμένα όσα θα χρειαστεί να γνωρίζουμε γι' αυτές τις έννοιες. Για τις αποδείξεις των ισχυρισμών που θα διατυπώσουμε παραπέμπουμε για παράδειγμα στο πρώτο κεφάλαιο του [11].

Ορισμός 3.1.8. *Ένας μορφισμός σχημάτων* $\phi : Y \to X$ *καλείται* επίπεδος *αν για κάθε* $y \in Y$ *ο τοπικός ομομορφισμός* $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ *είναι επίπεδος.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ομομορφισμός δακτυλίων $A \to B$ είναι επίπεδος αν ο συναρτητής $M \to B \otimes_A M$ από τα A-πρότυπα στα B-πρότυπα είναι ακριβής. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε κι ότι ο δακτύλιος B είναι μια επίπεδη A-άλγεβρα. Για να ελέγξουμε αν ένας ομομορφισμός $f : A \to B$ είναι επίπεδος, αρκεί να ελέγξουμε αν ο τοπικός ομομορφισμός $A_{f^{-1}(\mathfrak{m})} \to B_{\mathfrak{m}}$ είναι επίπεδος για κάθε μεγιστικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ του B (σημειώνουμε ότι εκτός από ικάνη, αυτή είναι και αναγκαία συνθήκη, δηλαδή χαρακτηρίζει τους επίπεδους ομομορφισμούς). Αυτό σημαίνει ότι για να ελέγξουμε αν ένας μορφισμός σχημάτων είναι επίπεδος αρκεί να το ελέγξουμε για τα κλειστά σημεία $y \in Y$.

Αν ο δακτύλιος A είναι ακέραια περιοχή, τότε η απεικόνιση $x \mapsto ax : A \to A$ είναι 1-1 για κάθε μη-μηδενικό $a \in A$. Επειδή ο A είναι επίπεδη A-άλγεβρα, έχουμε ότι και η απεικόνιση $x \mapsto ax : B \to B$ είναι 1-1 για κάθε μη-μηδενικό $a \in A$, οπότε για κάθε επίπεδη A-άλγεβρα B προκύπτει ότι κι ο ομομορφισμός $A \to B$ είναι 1-1. Μάλιστα αν ο δακτύλιος A είναι περιοχή Dedekind (δηλαδή είναι ακέραια περιοχή αλλά όχι σώμα, είναι δακτύλιος Noether, ακέραια κλειστός και κάθε μη-μηδενικό πρώτο ιδεώδες του είναι μεγιστικό), τότε ισχύει και το αντίστροφο, ότι δηλαδή κάθε 1-1 ομομορφισμός $A \to B$ είναι επίπεδος.

Για να αποκτήσουμε μια πιο «γεωμετρική» διαίσθηση πίσω από την έννοια του επίπεδου μορφισμού, αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες που έχουν αυτοί οι μορφισμοί στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων. Συγκεκριμένα, ένας επίπεδος μορφισμός πολλαπλοτήτων αντιστοιχεί σε μια οικογένεια πολλαπλοτήτων (τις ίνες του μορφισμού) που μεταβάλλονται με «καλό» τρόπο. Δηλαδή αν $\phi : Y \to X$ είναι ένας επίπεδος μορφισμός πολλαπλοτήτων, τότε για την ίνα $Y_x := \phi^{-1}(x)$ έχουμε ότι

$$\mathrm{dim} Y_x = \mathrm{dim} Y - \mathrm{dim} X$$

για όλα τα κλειστά σημεία $x \in X$ για τα οποία $Y_x \neq \emptyset$. Μάλιστα αν οι X, Y είναι μηιδιόμορφες πολλαπλότητες, ισχύει και το αντίστροφο. Επιπλέον, για έναν πεπερασμένο μορφισμό πολλαπλοτήτων $\phi : Y \to X$ ισχύει ότι είναι επίπεδος αν και μόνο αν όλες οι ίνες $\phi^{-1}(x)$ έχουν τον ίδιο αριθμό σημείων, αν λάβουμε υπόψιν τις πολλαπλότητες (multiplicities) των σημείων.

Τέλος, ένα κλειστό υποσχήμα Z του X εμφυτεύεται με επίπεδο μορφισμό $Z \hookrightarrow X$ αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα και ανοιχτό στο X (κι άρα είναι συνεκτική συνιστώσα του).

Ορισμός 3.1.9. *Ένας τοπικός ομομορφισμός $f : A \to B$ τοπικών δακτυλίων καλείται* μη-διακλαδιζόμενος *αν το σώμα $B/f(\mathfrak{m}_A)B$ είναι μια πεπερασμένη και διαχωρίσιμη επέκταση σώματος του $A/\mathfrak{m}_A$, ή, ισοδύναμα, αν*

(i) *$f(\mathfrak{m}_A)B = \mathfrak{m}_B$, και*

(ii) *το σώμα $B/\mathfrak{m}_B$ είναι πεπερασμένο και διαχωρίσιμο πάνω από το σώμα $A/\mathfrak{m}_A$.*

Ορισμός 3.1.10. *Ένας μορφισμός σχημάτων $\phi : Y \to X$ καλείται* μη-διακλαδιζόμενος *αν είναι πεπερασμένου τύπου και αν οι τοπικοί ομομορφισμοί $\mathcal{O}_{X,\phi(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ είναι μη-διακλαδιζόμενοι για κάθε $y \in Y$.*

Μια μη-τετριμμένη ιδιότητα των μη-διακλαδιζόμενων μορφισμών είναι ότι αρκεί να ελέγξουμε τη συνθήκη για τα κλειστά σημεία $y \in Y$. Ο πιο συνήθης χαρακτηρισμός των μη-διακλαδιζόμενων μορφισμών σχημάτων είναι ο εξής: Έστω $\phi : Y \to X$ ένας μορφισμός σχημάτων πεπερασμένου τύπου. Τότε ο ϕ είναι μη-διακλαδιζόμενος αν και μόνο αν το δεμάτι $\Omega_{Y/X}$ είναι μηδέν.

Ορισμός 3.1.11. *Ένας μορφισμός σχημάτων $\phi : Y \to X$ καλείται* étale *αν είναι επίπεδος και μη-διακλαδιζόμενος (οπότε είναι και πεπερασμένου τύπου).*

Ορισμός 3.1.12. *Ένας ομομορφισμός δακτυλίων $f : A \to B$ καλείται* étale *αν ο επαγόμενος μορφισμός σχημάτων Spec$B \to$ Spec$A$ είναι étale. Ισοδύναμα είναι étale αν*

(i) *ο B είναι πεπερασμένα παραγόμενη A-άλγεβρα,*

(ii) *ο B είναι επίπεδη A-άλγεβρα,*

(iii) *για όλα τα μεγιστικά ιδεώδη $\mathfrak{n}$ του B, το σώμα $B_\mathfrak{n}/f(\mathfrak{p})B_\mathfrak{n}$ είναι μια πεπερασμένη και διαχωρίσιμη επέκταση του σώματος $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, όπου $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{n})$.*

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να ελέγξουμε αν στην ειδικότερη περίπτωση των πολλαπλοτήτων ο ορισμός ενός étale μορφισμού σχημάτων που δώσαμε είναι σύμφωνος με τον ορισμό του étale μορφισμού πολλαπλοτήτων από την προηγούμενη παράγραφο.

Πρόταση 3.1.13. *Για μια κανονική απεικόνιση $\phi : Y \to X$ πολλαπλοτήτων πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα, ο ορισμός της étale απεικόνισης αυτής της παραγράφου συμφωνεί με τον αντίστοιχο ορισμό της προηγούμενης παραγράφου.*

Απόδειξη. Βλ. [8], πρόταση 2.9, σελ. 20-21. □

Πριν περάσουμε σε κάποια βασικά παραδείγματα, παραθέτουμε ένα χρήσιμο λήμμα σχετικό με ισομορφισμούς τοπικών δακτυλίων.

Λήμμα 3.1.14. *Έστω $\phi : A \to B$ ένας τοπικός ομομορφισμός τοπικών δακτυλίων. Αν*

(i) *ο ϕ είναι 1-1,*

(ii) *ο επαγόμενος ομομορφισμός των σωμάτων υπολοίπων $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$ είναι ισομορφισμός,*

(iii) *ο ϕ είναι μη-διακλαδιζόμενος,*

(iv) *ο B είναι πεπερασμένη A-άλγεβρα,*

τότε το ϕ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Μένει να δείξουμε μόνο ότι ο ϕ είναι επί. Από τη δεύτερη και την τρίτη υπόθεση παίρνουμε ότι

$$B = \phi(A) + \mathfrak{m}_B = \phi(A) + \mathfrak{m}_A B.$$

Η τελευταία υπόθεση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Nakayama για το A-πρότυπο B κι έτσι καταλήγουμε στο ότι $B = \phi(A)$. □

Παράδειγμα 3.1.15. (i) *Έστω k ένα σώμα. Μια τοπική k-άλγεβρα A είναι (εξ ορισμού) μη-διακλαδιζόμενη αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του σώματος k. Έστω A μια étale k-άλγεβρα. Αφού η A είναι μη-διακλαδιζόμενη πάνω από το k, τότε είναι επέκταση του σώματος k κι άρα έχει διάσταση 0 και είναι δακτύλιος Artin. Από το [10], θεώρημα 8.7, σελ. 90, παίρνουμε ότι η A είναι πεπερασμένο (ευθύ) γινόμενο τοπικών δακτυλίων Artin, που με τη σειρά τους είναι κι αυτοί πεπερασμένες διαχωρίσιμες επεκτάσεις του σώματος k. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ένα πεπερασμένο γινόμενο πεπερασμένων διαχωρίσιμων επεκτάσεων του k είναι μια étale k-άλγεβρα.*

(ii) *Έστω A ένας δακτύλιος, κι έστω $f(T)$ ένα μονικό πολυώνυμο (δηλαδή με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1) με συντελεστές στο A. Επειδή το $f(T)$ είναι μονικό, το A-πρότυπο $A[T]/(f(T))$ είναι ελεύθερο πεπερασμένης τάξης, κι άρα είναι επίπεδο. Για κάθε $b \in A[T]/(f(T))$ τέτοιο ώστε η «παράγωγος» $f'(T)$ να είναι αντιστρέψιμη στον $(A[T]/(f(T)))_b$, ο ομομορφισμός $A \to (A[T]/(f(T)))_b$ είναι étale (δεν είναι άμεσο αυτό). Ένας étale μορφισμός $\phi : V \to U$ καλείται* πρότυπος *(στα αγγλικά standard) αν είναι ισομορφικός με το Spec ενός τέτοιου ομομορφισμού, δηλαδή αν υπάρχει δακτύλιος A, μονικό πολυώνυμο $f(T) \in A[T]$ και $b \in A[T]/(f(T))$ που να ικανοποιούν τη συνθήκη του ακόλουθου μεταθετικού διαγράμματος:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathit{Spec}(A[T]/(f(T)))_b \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\approx"] & \mathit{Spec} A \end{tikzcd}$$

Μια σημαντική ιδιότητα των πρότυπων étale μορφισμών είναι ότι κάθε étale μορφισμός είναι τοπικά *πρότυπος, δηλαδή για οποιονδήποτε étale μορφισμό $\phi : Y \to X$ και $y \in Y$ υπάρχουν ανοιχτές αφινικές περιοχές V και U των y και $\phi(y)$, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $\phi(V) \subseteq U$ και ο περιορισμός $\phi|_V : V \to U$ να είναι πρότυπος (για απόδειξη βλ. [11], σελ. 26, θεώρημα I 3.14).*

(iii) *Ένα σχήμα X καλείται* φυσιολογικό *(στα αγγλικά normal) αν για κάθε $x \in X$ ο τοπικός δακτύλιος $\mathcal{O}_{X,x}$ είναι μια ακέραια κλειστή (ακέραια) περιοχή (δηλαδή είναι μια ακέραια περιοχή που η ακέραια κλειστότητά της μέσα στο σώμα πηλίκων της είναι ο εαυτός της). Αν το X είναι αφινικό σχήμα αυτό σημαίνει ότι το X είναι το φάσμα μιας ακέραια κλειστής περιοχής A. Έστω λοιπόν ένα συνεκτικό φυσιολογικό αφινικό σχήμα $X = SpecA$ κι έστω K το σώμα πηλίκων της A, δηλαδή το σώμα ρητών συναρτήσεων πάνω στο X. Έστω σώμα L μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του σώματος K. Έστω Y η φυσιολογικοποίηση (στα αγγλικά normalisation) του X στο L, δηλαδή έστω $Y = SpecB$ όπου B είναι η ακέραια κλειστότητα της A στο L. Τότε ο μορφισμός $\phi : Y \to X$ είναι πεπερασμένος (βλ. [10], πρόταση 5.17, σελ. 64) κι άρα είναι πεπερασμένου τύπου. Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του Y που δεν περιέχει κανένα κλειστό σημείο $y \in Y$ στο οποίο ο ϕ είναι διακλαδιζόμενος. Τότε από τα θεωρήματα 3.20 και 3.21 του [11] παίρνουμε ότι ο μορφισμός $U \to X$ είναι επίπεδος, κι άρα étale, κι ότι κάθε étale X-σχήμα είναι μια ξένη ένωση étale X-σχημάτων αυτού του τύπου.*

(iv) *Έστω X ένα σχήμα, κι έστω X_0 το κλειστό υποσχήμα του που ορίζεται από ένα μηδενοδύναμο ιδεώδες (άρα τα σχήματα X και X_0 έχουν τον ίδιο υποκείμενο τοπολογικό χώρο). Από το θεώρημα 3.23 του [11] παίρνουμε ότι η απεικόνιση $U \mapsto U_0 := U \times_X X_0$ είναι μια ισοδυναμία μεταξύ της κατηγορίας των étale X-σχημάτων και της κατηγορίας των étale X_0-σχημάτων.*

3.1δ΄ Ιδιότητες étale μορφισμών

Όπως αναφέραμε οι étale μορφισμοί θέλουμε να αποτελούν κάτι ανάλογο με τους τοπικούς διαφορομορφισμούς λείων πολλαπλοτήτων και σ' αυτήν την παράγραφο θα παραθέσουμε όλες τις χρήσιμες ομοιότητες που έχουν οι δύο αυτές έννοιες.

Πρόταση 3.1.16. (i) *Κάθε ανοιχτή εμφύτευση σχημάτων είναι étale.*

(ii) *Η σύνθεση δύο étale μορφισμών είναι étale.*

(iii) *Κάθε αλλαγή βάσης ενός étale μορφισμού είναι étale.*

(iv) *Αν οι $\phi \circ \psi$ και ϕ είναι étale μορφισμοί, τότε κι ο ψ είναι étale.*

Απόδειξη. (i) Αν έχουμε U ανοιχτό υποσχήμα του X, τότε η ένθεση $U \hookrightarrow X$ είναι étale, κι αυτό είναι κάτι που μπορούμε να το ελέγξουμε άμεσα από τους ορισμούς.

(ii) Επίσης μπορούμε να το ελέγξουμε άμεσα από τους ορισμούς.

(iii) Αν έχουμε έναν étale μορφισμό S-σχημάτων $Y \to X$ και έναν τυχαίο μορφισμό σχημάτων $S' \to S$, τότε θέλουμε να δείξουμε ότι ο επαγόμενος μορφισμός S'-σχημάτων $Y_{S'} \to X_{S'}$ είναι επίσης étale, όπου $Y_{S'} := S' \times_S Y, X_{S'} := S' \times_S X$ και ο επαγόμενος μορφισμός είναι ο $\mathrm{id}_{S'} \times_{\mathrm{id}_S} f$.

Στην περίπτωση των μη-ιδιόμορφων πολλαπλοτήτων (πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα), αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι σε σημείο $(s', y) \in S' \times_S Y$ ισχύει ότι

$$\mathrm{Tgt}_{(s',y)}(S' \times_S Y) = \mathrm{Tgt}_{s'}(S') \times_{\mathrm{Tgt}_s(S)} \mathrm{Tgt}_y(Y)$$

όπου s είναι η κοινή εικόνα των $s' \in S'$ και $y \in Y$ στο S.

Για τη γενική περίπτωση παραπέμπουμε στην πρόταση I 3.3 του [11].

(iv) Στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων (πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα) το ζητούμενο προκύπτει άμεσα αν εργαστούμε με εφαπτόμενους κώνους. Για τη γενική περίπτωση παραπέμπουμε στο πόρισμα I 3.6 του [11].

□

Πρόταση 3.1.17. *Έστω $\phi : Y \to X$ ένας étale μορφισμός σχημάτων.*

(i) *Για κάθε $y \in Y$, οι δακτύλιοι $\mathcal{O}_{Y,y}$ και $\mathcal{O}_{X,x}$ έχουν την ίδια διάσταση Krull.*

(ii) *Ο μορφισμός ϕ είναι σχεδόν-πεπερασμένος (στα αγγλικά quasi-finite).*

(iii) *Ο μορφισμός ϕ είναι ανοιχτός.*

(iv) *Αν το σχήμα X είναι ανηγμένο (στα αγγλικά reduced), τότε και το σχήμα Y είναι ανηγμένο.*

(v) *Αν το σχήμα X είναι φυσιολογικό (στα αγγλικά normal), τότε και το σχήμα Y είναι φυσιολογικό.*

(vi) *Αν το σχήμα X είναι κανονικό (στα αγγλικά regular), τότε και το σχήμα Y είναι κανονικό.*

Απόδειξη. (i) Για την περίπτωση που X και Y είναι συνεκτικές πολλαπλότητες, το γεγονός ότι οι τοπικοί δακτύλιοι έχουν την ίδια διάσταση είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι οι πολλαπλότητες έχουν την ίδια διάσταση. Αφού ο ϕ είναι étale, οι εφαπτόμενοι κώνοι είναι ισόμορφοι, άρα έχουν την ίδια διάσταση. Όμως ο εφαπτόμενος κώνος έχει την ίδια διάσταση με την πολλαπλότητα, κι έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

Για τη γενικότερη περίπτωση βλ. πρόταση I 3.17(a) στο [11].

(ii) Σχεδόν-πεπερασμένος μορφισμός σημαίνει ότι είναι πεπερασμένου τύπου και έχει πεπερασμένες ίνες. Επειδή ο ϕ είναι étale, είναι και μη-διακλαδιζόμενος κι αυτό συνεπάγεται ότι είναι πεπερασμένου τύπου (εξ ορισμού) κι έχει πεπερασμένες ίνες ([11], πρόταση I 3.2).

(iii) Αφού είναι étale, ο ϕ είναι επίπεδος και πεπερασμένου τύπου (ως μη-διακλαδιζόμενος), κι αυτό συνεπάγεται ότι είναι και ανοιχτός ([11], θεώρημα I 2.12).

(iv) Βλ. [11], παρατήρηση 3.18.

(v) Βλ. [11], πρόταση I 3.17(b).

(vi) Για πολλαπλότητες αυτό σημαίνει ότι αν η X είναι μη-ιδιόμορφη κι ο $\phi : Y \to X$ είναι étale, τότε και η Y είναι μη-ιδιόμορφη. Σ' αυτήν την περίπτωση, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι ένα σημείο P είναι μη-ιδιόμορφο αν και μόνο αν ο εφαπτόμενος κώνος στο P είναι πολυωνυμικός δακτύλιος με $\dim X$ μεταβλητές (κι οι εφαπτόμενοι κώνοι που μας ενδιαφέρουν θα είναι ισόμορφοι, αφού ο ϕ είναι étale). Για τη γενικότερη περίπτωση η ιδέα είναι παρόμοια, βλ. [11], πρόταση I 3.17(c).

□

Πρόταση 3.1.18. *Έστω $\phi : Y \to X$ ένας μορφισμός πεπερασμένου τύπου. Το σύνολο των σημείων $U \subseteq Y$ στα οποία ο ϕ είναι étale είναι ανοιχτό στο Y.*

Απόδειξη. Αν ο ϕ δεν είναι étale πουθενά, τότε το U είναι το κενό σύνολο, οπότε είναι ανοιχτό. Αν τώρα το σχήμα X είναι φυσιολογικό, τότε το U είναι το συμπλήρωμα του στηρίγματος του $\mathcal{O}_Y$-δεματιού $\Omega_{Y/X}$ (δηλαδή του $\mathrm{supp}(\Omega_{Y/X})$). Για την απόδειξη βλ. [11], πρόταση I 3.8. □

Πρόταση 3.1.19. *Έστω $\phi : Y \to X$ ένας étale μορφισμός πολλαπλοτήτων. Αν η X είναι συνεκτική, τότε κάθε τομή του ϕ είναι ένας ισομορφισμός της X σε μια συνεκτική συνιστώσα της Y.*

Απόδειξη. Για απλότητα θεωρούμε ότι το σώμα πάνω από το οποίο ορίζονται οι πολλαπλότητες είναι αλγεβρικά κλειστό. Έστω $s : X \to Y$ μια τομή του ϕ, δηλαδή μια κανονική απεικόνιση τέτοια ώστε $\phi \circ s = \mathrm{id}_X$. Το γράφημα $\Gamma_s := \{(x, s(x)) | x \in X\}$ είναι κλειστό στο $X \times Y$ (βλ. [9], πόρισμα 5.28), και η αντίστροφη εικόνα του μέσω της κανονικής απεικόνισης $y \mapsto (\phi(y), y) : Y \to X \times Y$ είναι το $s(X)$. Επομένως το $s(X)$ είναι κλειστό στο Y. Επιπλέον η τομή s είναι étale μορφισμός (πρόταση 3.1.16(iv)) κι από την πρόταση 3.1.17(iii) παίρνουμε ότι το $s(X)$ είναι ανοιχτό στην Y, άρα είναι συνεκτική συνιστώσα της. Επομένως οι $\phi|_{s(X)}$ και s είναι αντίστροφοι ισομορφισμοί. □

Πόρισμα 3.1.20. *Έστω $p : X \to S$ και $q : Y \to S$ μορφισμοί πολλαπλοτήτων πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα. Υποθέτουμε ότι ο p είναι étale και ότι η Y είναι συνεκτική. Έστω ϕ, ϕ' μορφισμοί $Y \to X$ τέτοιοι ώστε $p \circ \phi = q$ και $p \circ \phi' = q$. Αν οι ϕ και ϕ' συμφωνούν σε ένα σημείο του Y, τότε είναι ίσοι σε όλο το Y.*

Απόδειξη. Οι απεικονίσεις $(\mathrm{id}, \phi), (\mathrm{id}, \phi') : Y \to Y \times_S X$ είναι τομές της απεικόνισης προβολής $(y, x) \mapsto y : Y \times_S X \to Y$. Ισχύει ότι η απεικόνιση προβολής είναι étale (δεν είναι άμεσο), κι αφού η Y είναι συνεκτική πολλαπλότητα, από την πρόταση 3.1.19 παίρνουμε ότι οι απεικονίσεις (id, ϕ) και (id, ϕ') είναι ισομορφισμοί της Y με μια συνεκτική συνιστώσα του γινομένου $Y \times_S X$, και είναι (μερικώς) αντίστροφοι της απεικόνισης προβολής. Από υπόθεση αυτοί οι ισομορφισμοί συμφωνούν σε κάποιο σημείο $y_0 \in Y$, άρα είναι ίσοι μεταξύ τους (ως αντίστροφοι του ίδιου περιορισμού της απεικόνισης προβολής). Αλλά οι μορφισμοί ϕ και ϕ' είναι συνθέσεις των απεικονίσεων (id, ϕ) και (id, ϕ') με την απεικόνιση προβολής $Y \times_S X \to X$, κι άρα είναι ίσοι. □

Παρατήρηση 3.1.21. *Η πρόταση 3.1.19 ισχύει και για σχήματα αν υποθέσουμε επιπλέον ότι ο ϕ είναι διαχωρισμένος. Το πόρισμα 3.1.20 επίσης ισχύει για σχήματα αν υποθέσουμε επιπλέον ότι οι μορφισμοί ϕ, ϕ' επάγουν την ίδια απεικόνιση στο σώμα υπολοίπων στο σημείο που συμφωνούν. Για αποδείξεις βλ. [11], πορίσματα I 3.12 και 3.13.*

3.2 Sites

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 3, για να έχουμε θεωρία συνομολογίας δεν είναι απαραίτητο να έχουμε έναν τοπολογικό χώρο με τη συμβατική έννοια. Αρκεί να έχουμε μια κατηγορία $\boldsymbol{C}$ η οποία για κάθε αντικείμενο U της $\boldsymbol{C}$ είναι εφοδιασμένη με ένα σύνολο από οικογένειες απεικονίσεων, οι οποίες καλούνται *καλύμματα* του U, $(U_i \to U)_{i \in I}$ που ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

(i) Για κάθε κάλυμμα $(U_i \to U)_{i \in I}$ και κάθε μορφισμό $V \to U$ στην $\boldsymbol{C}$, τα ινώδη γινόμενα $U_i \times_U V$ υπάρχουν και η οικογένεια $(U_i \times_U V \to V)_{i \in I}$ είναι κάλυμμα του V.

(ii) Αν έχουμε κάλυμμα $(U_i \to U)_{i \in I}$ του U, κι αν για κάθε $i \in I$ έχουμε κάλυμμα $(V_{ij} \to U_i)_{j \in J_i}$ του U_i, τότε η οικογένεια $(V_{ij} \to U)_{i,j}$ είναι κάλυμμα του U (όπου $V_{ij} \to U$ είναι η σύνθεση $V_{ij} \to U_i \to U$).

(iii) Για κάθε αντικείμενο U στην $\boldsymbol{C}$, η οικογένεια $(U \xrightarrow{\text{id}} U)$ που αποτελείται από μια μοναδική απεικόνιση είναι κάλυμμα του U.

Αυτό το σύστημα καλυμμάτων που περιγράψαμε καλείται *τοπολογία Grothendieck* για την $\boldsymbol{C}$, και η κατηγορία $\boldsymbol{C}$ μαζί με την τοπολογία Grothendieck καλείται *site*. Αν $\boldsymbol{T}$ είναι ένα site, τότε με $\mathrm{Cat}(\boldsymbol{T})$ θα συμβολίζουμε την υποκείμενη κατηγορία του $\boldsymbol{T}$.

Για παράδειγμα, οι τοπολογικοί χώροι που ξέρουμε αντιστοιχούν κι αυτοί σε sites με τον εξής τρόπο: Έστω X τοπολογικός χώρος και $\boldsymbol{C}$ η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τα ανοιχτά υποσύνολα του X και ως μορφισμούς μεταξύ τους τις ενθέσεις. Τότε οι οικογένειες $(U_i \to U)_{i\in I}$ που είναι τέτοιες ώστε το $(U_i)_{i\in I}$ να είναι ανοιχτό κάλυμμα του U αποτελούν μια τοπολογία Grothendieck για την $\boldsymbol{C}$. Σ' αυτήν την κατηγορία τα ινώδη γινόμενα είναι οι τομές, δηλαδή για ανοιχτά υποσύνολα U και U' του V, έχουμε $U \times_V U' = U \cap U'$.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα βασικότερα παραδείγματα sites στα οποία το X θα είναι είτε μια πολλαπλότητα είτε ένα σχήμα. Αναφέρουμε εδώ μια ορολογία που θα χρειαστούμε: μια οικογένεια κανονικών απεικονίσεων πολλαπλοτήτων ή σχημάτων $(\phi_i : U_i \to U)_{i\in I}$ θα αποκαλείται *επί* αν $U = \cup_{i\in I}\phi_i(U_i)$.

Παράδειγμα 3.2.1. (i) Το site Zariski στο X. *Το site X_{zar} είναι αυτό που αντιστοιχεί στο σχήμα (ή την πολλαπλότητα) X όταν το βλέπουμε ως τοπολογικό χώρο με την τοπολογία Zariski (όπως περιγράψαμε παραπάνω).*

(ii) Το étale site στο X. *Το site X_{et} έχει ως υποκείμενη κατηγορία την Et/X που έχει ως αντικείμενα τους étale μορφισμούς σχημάτων $U \to X$ και ως μορφισμούς μεταξύ των αντικειμένων τους étale X-μορφισμούς $\phi : U \to V$. Τα καλύμματα είναι οι επί οικογένειες étale X-μορφισμών $(U_i \to U)_{i\in I}$ στην Et/X.*

(iii) Παραλλαγές του étale site στο X. *Αν στο παραπάνω παράδειγμα πάρουμε ως καλύμματα τις επί οικογένειες πεπερασμένων étale X-μορφισμών $(U_i \to U)_{i\in I}$ με U ένα Zariski ανοιχτό υποσύνολο, τότε αυτό που παίρνουμε είναι η* πεπερασμένη-étale τοπολογία *και το αντίστοιχο site συμβολίζεται με X_{fet}.*

Αν τώρα πάρουμε ως καλύμματα τις επί οικογένειες étale X-μορφισμών $(U_i \to U)_{i\in I}$ με την ιδιότητα «για κάθε $u \in U$, υπάρχει ένα $i \in I$ κι ένα $u_i \in U_i$ τέτοιο ώστε η επαγόμενη απεικόνιση $\kappa(u) \to \kappa(u_i)$ στα σώματα υπολοίπων είναι ισομορφισμός», τότε αυτό που παίρνουμε είναι η πλήρως διασπασμένη τοπολογία *και το αντίστοιχο site συμβολίζεται με X_{cd}.*

(iv) Το επίπεδο site στο σχήμα X. *Το site X_{Fl} έχει ως υποκείμενη κατηγορία την Sch/X που έχει ως αντικείμενα τα X-σχήματα και ως μορφισμούς τους X-μορφισμούς. Τα καλύμματα είναι οι επί οικογένειες X-μορφισμών $(U_i \xrightarrow{\phi_i} U)_{i\in I}$ με κάθε ϕ_i να είναι επίπεδος μορφισμός πεπερασμένου τύπου.*

(v) Το μεγάλο étale site στο σχήμα X. *Το site X_{Et} έχει επίσης ως υποκείμενη κατηγορία την Sch/X. Τα καλύμματα είναι οι επί οικογένειες étale X-μορφισμών $(U_i \to U)_{i\in I}$.*

Παρατήρηση 3.2.2. *Όταν το $U \to X$ ανήκει σ' ένα κάλυμμα του X, μπορούμε να σκεφτόμαστε το U σαν «ανοιχτό υποσύνολο» του X για την τοπολογία Grothendieck. Ωστόσο αυτή η αναλογία δεν είναι πάντα ακριβής διότι για παράδειγμα στο επίπεδο site μπορεί να έχουμε $U \to X$ και $U' \to X$ να είναι και τα δύο «ανοιχτά υποσύνολα» του X αλλά ένας X-μορφισμός $U \to U'$ μπορεί να μην απεικονίζει το U ως ανοιχτό υποσύνολο του U', δηλαδή ενδέχεται να έχουμε $U \to X$ και $U' \to X$ επίπεδους μορφισμούς χωρίς να είναι επίπεδος κι ο μορφισμός $U \to U'$.*

Ορισμός 3.2.3. *Έστω $\boldsymbol{T}_1$ και $\boldsymbol{T}_2$ δύο sites. Ένας συναρτητής Cat$(\boldsymbol{T}_2) \to$ Cat$(\boldsymbol{T}_1)$ που διατηρεί τα ινώδη γινόμενα και μετατρέπει καλύμματα σε καλύμματα καλείται* συνεχής απεικόνιση $\boldsymbol{T}_1 \to \boldsymbol{T}_2$ *(όπου παρατηρούμε ότι η κατεύθυνση είναι «ανάποδη»).*

Για παράδειγμα, μια απεικόνιση τοπολογικών χώρων $Y \to X$ ορίζει μια συνεχή απεικόνιση στα αντίστοιχα sites αν και μόνο αν είναι συνεχής με τη συνήθη έννοια. Επιπλέον, υπάρχουν προφανείς συνεχείς απεικονίσεις sites

$$X_{\mathrm{Fl}} \to X_{\mathrm{Et}} \to X_{\mathrm{et}} \to X_{\mathrm{cd}} \to X_{\mathrm{zar}}.$$

3.3 Ο τοπικός δακτύλιος για την étale τοπολογία

Σ' αυτήν την ενότητα, το X θα είναι μια πολλαπλότητα πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.

Ορισμός 3.3.1. (i) *Μια* étale γειτονιά *ενός σημείου $x \in X$ είναι ένας étale μορφισμός $U \to X$ μαζί με ένα σημείο $u \in U$ που απεικονίζεται στο x.*

(ii) *Ένας* μορφισμός étale γειτονιών $(V, v) \to (U, u)$ *είναι μια κανονική απεικόνιση $V \to U$ πάνω από το X που στέλνει το v στο u.*

Από το πόρισμα 3.1.20 προκύπτει ότι υπάρχει το πολύ μια απεικόνιση από μια συνεκτική étale γειτονιά προς μια άλλη étale γειτονιά (κι αυτή η απεικόνιση είναι επίσης étale, από την πρόταση 3.1.16(iv)). Απ'όλες τις συνεκτικές αφινικές étale γειτονιές, μπορούμε να σχηματίσουμε ένα κατευθυνόμενο σύνολο (αν τις θεωρούσαμε όλες δε θα είχαμε σύνολο, αλλά κλάση) ως εξής: Επιλέγουμε μια τέτοια γειτονιά, έστω $V = \mathrm{Specm}(A)$, κι έπειτα θεωρούμε όλες τις συνεκτικές αφινικές étale γειτονιές $\mathrm{Specm}(B)$ όπου ο B είναι εντοπισμός κάποιου πηλίκου μιας πεπερασμένα παραγόμενης A-άλγεβρας. Σ' αυτό το σύνολο ορίζουμε τη σχέση

$$(U, u) \leq (U', u'), \text{ αν υπάρχει απεικόνιση } (U', u') \to (U, u)$$

που το κάνει τελικά το κατευθυνόμενο σύνολο που θέλαμε. Ορίζουμε, τώρα, τον *τοπικό δακτύλιο στο x για την étale τοπολογία* ως εξής:

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}} := \varinjlim_{(U,u)} \Gamma(U, \mathcal{O}_U).$$

Επειδή κάθε Zariski ανοιχτή γειτονιά του x είναι επίσης και μια étale γειτονιά του x, παίρνουμε έναν ομομορφισμό $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$. Ομοίως, παίρνουμε κι έναν ομομορφισμό $\mathcal{O}_{U,u} \to \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ για κάθε étale γειτονιά (U, u) του x, απ' όπου παίρνουμε ότι

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \varinjlim_{(U,u)} \mathcal{O}_{U,u}.$$

Ορισμός 3.3.2. (i) *Ένα* γεωμετρικό σημείο *ενός σχήματος X είναι ένας μορφισμός $\bar{x} : Speck \to X$ όπου το k είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα.*

(ii) *Μια* étale γειτονιά *ενός γεωμετρικού σημείου $\bar{x} : Speck \to X$ είναι μια étale απεικόνιση $\phi : U \to X$ μαζί μ' ένα γεωμετρικό σημείο $\bar{u} : Speck \to U$ τέτοια ώστε $\bar{x} = \phi \circ \bar{u}$.*

(iii) *Ο* τοπικός δακτύλιος σ' ένα γεωμετρικό σημείο $\bar{x}$ για την étale τοπολογία *είναι*

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}} := \varinjlim_{U,\bar{u}} \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

όπου το όριο το παίρνουμε πάνω απ' όλες τις αφινικές étale γειτονιές $(U, \bar{u})$ *του* $\bar{x}$ *που έχουν τη μορφή που περιγράψαμε και παραπάνω στη συζήτηση για τις étale γειτονιές σημείων πολλαπλοτήτων. Στη συνέχεια θα αποκαλούμε αυτόν τον δακτύλιο τον* αυστηρά τοπικό δακτύλιο *στο* $\bar{x}$.

Με μια προσεκτική εξέταση των ορισμών επιβεβαιώνουμε ότι όταν αναφερόμαστε σε πολλαπλότητα X και σε κλειστό σημείο $x \in X$, τότε υπάρχει άμεσος τρόπος να δούμε το x ως γεωμετρικό σημείο της X και σε αυτήν την περίπτωση οι ορισμοί για τον τοπικό δακτύλιο για την étale τοπολογία στο x συμφωνούν.

3.4 Δεμάτια για την étale τοπολογία

Για να ορίσουμε προδεμάτια και δεμάτια για ένα site θα χρησιμοποιήσουμε την κατηγορική περιγραφή αυτών των εννοιών (αφού πλέον δεν έχουμε ανοιχτά υποσύνολα, αλλά μόνο αντικείμενα και συγκεκριμένους μορφισμούς μεταξύ τους). Ένα προδεμάτι συνόλων σε ένα site είναι $\boldsymbol{T}$ είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathcal{F} : \mathrm{Cat}(\boldsymbol{T}) \to \mathrm{Sets}$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε αντικείμενο U της $\mathrm{Cat}(\boldsymbol{T})$, ο $\mathcal{F}$ αντιστοιχίζει ένα σύνολο $\mathcal{F}(U)$, και σε κάθε μορφισμό $\phi : U \to V$ στην $\mathrm{Cat}(\boldsymbol{T})$ αντιστοιχίζει μια συνάρτηση $\mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$, έτσι ώστε $\mathcal{F}(\psi \circ \phi) = \mathcal{F}(\phi) \circ \mathcal{F}(\psi)$ και $\mathcal{F}(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$. Σημειώνουμε εδώ ότι η έννοια των προδεματιών δεν εξαρτάται από τα καλύμματα (κάτι που δε θα ισχύει για τα δεμάτια). Επίσης τη συνάρτηση $\mathcal{F}(\phi) : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ συνήθως την αποκαλούμε συνάρτηση περιορισμού και γράφουμε $a \mapsto a|_U$, ωστόσο πρέπει να είμαστε προσεκτικοί σε περιπτώσεις που υπάρχει παραπάνω από ένας μορφισμός $U \to V$ (κι άρα δεν είναι ξεκάθαρο πώς ορίζεται ο «περιορισμός»). Τέλος, αν αντί για την κατηγορία Sets είχαμε την κατηγορία των (αβελιανών) ομάδων ή των δακτυλίων, τότε θα είχαμε αντίστοιχα προδεμάτια (αβελιανών) ομάδων ή δακτυλίων.

Ένα δεμάτι σε ένα site $\boldsymbol{T}$ είναι ένα προδεμάτι $\mathcal{F}$ που ικανοποιεί την συνθήκη ότι η ακολουθία

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \tag{S}$$

είναι ακριβής για κάθε κάλυμμα $(U_i \to U)_{i\in I}$, για κάθε étale μορφισμό $U \to X$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{F}$ είναι δεμάτι αν για κάθε étale $U \to X$ η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &\to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \\ f &\mapsto (f|_{U_i})_{i\in I}, \end{aligned}$$

αντιστοιχίζει (αμφιμονοσήμαντα) το $\mathcal{F}(U)$ με το υποσύνολο του γινομένου που αποτελείται από οικογένειες $(f_i)_{i\in I}$ τέτοιες ώστε

$$f_i|_{U_i\times_U U_j} = f_j|_{U_i\times_U U_j}$$

για κάθε $(i, j) \in I \times I$.

Ένας μορφισμός προδεματιών είναι απλά ένας φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών, κι ένας μορφισμός δεματιών είναι ένας μορφισμός προδεματιών.

Αν το site $\boldsymbol{T}$ προκύπτει από έναν τοπολογικό χώρο όπως έχουμε περιγράψει, τότε οι ορισμοί αυτοί συμπίπτουν με τους συνήθεις ορισμούς των προδεματιών και των δεματιών, και των μορφισμών τους.

Το site που μας ενδιαφέρει είναι το étale site (étale τοπολογία θα αποκαλούμε την τοπολογία Grothendieck αυτού του site) και γι' αυτό θεωρούμε μια πολλαπλότητα (ή σχήμα) X και το étale site που του αντιστοιχεί. Αν $\mathcal{F}$ είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathrm{Et}/X \to$ Sets (ή Ab, ή κάποια άλλη από τις κατηγορίες που μας ενδιαφέρουν στη θεωρία δεματιών), τότε η συνθήκη για να είναι δεμάτι στο site X_{et} είναι να είναι ακριβής η ακολουθία (S) για κάθε étale μορφισμό $U \to X$ και κάθε étale κάλυμμα (δηλαδή επί οικογένεια étale X-μορφισμών) $(U_i \to U)_{i\in I}$.

Σημειώνουμε εδώ ότι ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ στο X_{et} ορίζει με περιορισμό ένα δεμάτι στο site U_{zar} για κάθε étale μορφισμό $U \to X$. Αυτό συνεπάγεται ότι αν $U = \bigsqcup_{i\in I} U_i$, όπου τα U_i είναι étale ανοιχτά υποσύνολα του U, τότε $\mathcal{F}(U) \approx \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$.

3.4α΄ Κριτήριο ελέγχου αν ένα προδεμάτι είναι δεμάτι στο X_{et}

Η πρόταση που ακολουθεί μας δίνει ένα κριτήριο για να ελέγχουμε ευκολότερα πότε ένα προδεμάτι είναι δεμάτι στο X_{et}.

Πρόταση 3.4.1. *Για να αποφασίσουμε αν ένα προδεμάτι $\mathcal{F}$ στο X_{et} είναι δεμάτι, αρκεί να ελέγξουμε αν το $\mathcal{F}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (S) στα Zariski ανοιχτά καλύμματα και για étale καλύμματα $(V \to U)$ (που αποτελούνται από μοναδική απεικόνιση) με τα V και U να είναι και τα δύο αφινικά.*

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η συνθήκη (S) ικανοποιείται για τα Zariski ανοιχτά καλύμματα, συνεπάγεται ότι $\mathcal{F}(\bigsqcup_{i\in I} U_i) = \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$. Άρα η (S) για καλύμματα $(U_i \to U)_{i\in I}$ όπου το I είναι πεπερασμένο σύνολο δεικτών είναι ισόμορφη με την (S) που προκύπτει από μοναδικό μορφισμό $(\bigsqcup_{i\in I} U_i \to U)$, αφού έχουμε ότι

$$(\bigsqcup_{i\in I} U_i) \times_U (\bigsqcup_{i\in I} U_i) = \bigsqcup_{(i,j)\in I\times I} (U_i \times_U U_j).$$

Παρόμοια, επειδή η πεπερασμένη ένωση αφινικών πολλαπλοτήτων (ή σχημάτων) είναι επίσης αφινική, η δεύτερη υπόθεση της πρότασης συνεπάγεται ότι η (S) ικανοποιείται για καλύμματα $(U_i \to U)_{i\in I}$ όπου το I είναι πεπερασμένο σύνολο δεικτών και τα U και U_i είναι αφινικά.

Η ολοκλήρωση της απόδειξης γίνεται με κυνηγητό-σε-διάγραμμα και παραπέμπουμε στο [11], πρόταση II 1.5. □

3.4β΄ Παραδείγματα δεματιών στο X_{et}

Πριν ξεκινήσουμε να αναφέρουμε τα βασικότερα παραδείγματα δεματιών στο site X_{et}, εισάγουμε την χρήσιμη έννοια του πιστά επίπεδου (στα αγγλικά faithfully flat) ομομορφισμού δακτυλίων.

Ορισμός 3.4.2. *Έστω $f : A \to B$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Ο f καλείται* πιστά επίπεδος *αν μια ακολουθία $M' \to M \to M''$ από A-πρότυπα είναι ακριβής όταν και μόνο όταν και η ακολουθία $B \otimes_A M' \to B \otimes_A M \to B \otimes_A M''$.*

Πρόταση 3.4.3. *Έστω $f : A \to B$ ένας επίπεδος ομομορφισμός δακτυλίων με $A \neq 0$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Αν M είναι ένα μη-μηδενικό A-πρότυπο, τότε και το $B \otimes_A M$ είναι μη-μηδενικό.*

(ii) *Ο f είναι πιστά επίπεδος.*

(iii) *Ο μορφισμός $^a f : SpecB \to SpecA$ είναι επί.*

Απόδειξη. [11], πρόταση I 2.7. □

Στη συνέχεια αν $A \to B$ είναι ο ομομορφισμός δακτυλίων που αντιστοιχεί σε επί étale μορφισμό $V \to U$ αφινικών πολλαπλοτήτων (ή σχημάτων), τότε για να ελέγχουμε τη δεύτερη συνθήκη της πρότασης 3.4.1, θα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι είναι πιστά επίπεδος ομομορφισμός (και δε θα χρειαστούμε ότι είναι μη-διακλαδιζόμενος).

Το δεμάτι δομής στο X_{et}. Για κάθε étale μορφισμό $U \to X$, ορίζουμε $\mathcal{O}_{X_{\text{et}}}(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι αυτή η διαδικασία ορίζει ένα δεμάτι $\mathcal{O}_{X_{\text{et}}}$ στο X_{et} και γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 3.4.1. Είναι σχετικά άμεσο να ελέγξουμε ότι ο περιορισμός στο site U_{zar} είναι δεμάτι για κάθε étale U πάνω από το X. Αποδεικνύουμε ότι η δεύτερη συνθήκη του κριτηρίου ικανοποιείται μέσω της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 3.4.4. *Για κάθε πιστά επίπεδο ομομορφισμό $A \to B$, η ακολουθία*

$$0 \to A \to B \xrightarrow{b \mapsto 1 \otimes b - b \otimes 1} B \otimes_A B$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν ο ομομορφισμός $f : A \to B$ επιδέχεται συστολή (στα αγγλικά retraction), δηλαδή έναν ομομορφισμό $r : B \to A$ τέτοιο ώστε $r \circ f = \text{id}$, τότε η πρόταση ισχύει. Πράγματι, εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\text{Im} f \subseteq \text{Ker} g$, όπου $g : B \xrightarrow{b \mapsto 1 \otimes b - b \otimes 1} B \otimes_A B$, και πρέπει μόνο να δείξουμε τον ανάποδο εγκλεισμό. Έστω, λοιπόν, $k : B \otimes_A B \to B$ ο ομομορφισμός που ορίζεται ως εξής: $b \otimes b' \mapsto b \cdot f(r(b'))$. Τότε:

$$k(1 \otimes b - b \otimes 1) = f(r(b)) - b.$$

Επομένως, αν $b \in \text{Ker} g$, τότε $1 \otimes b - b \otimes 1 = 0$, και $b = f(r(b)) \in \text{Im} f$.

Επίσης, αν δείξουμε ότι για έναν πιστά επίπεδο ομομορφισμό $A \to A'$ ισχύει ότι είναι ακριβής η ακολουθία

$$0 \to A' \xrightarrow{a' \mapsto a' \otimes 1} A' \otimes_A B \to (A' \otimes_A B) \otimes_{A'} (A' \otimes_A B) = A' \otimes_A B \otimes_A B,$$

όπου ο τελευταίος ομομορφισμός είναι ο αντίστοιχος που έχουμε στην ακολουθία της πρότασης (ουσιαστικά η τελευταία ακολουθία που γράψαμε είναι η αρχική ακολουθία όπου στη θέση του A έχουμε A' και στη θέση του B έχουμε $A' \otimes_A B$), τότε θα έχουμε και την ακρίβεια της αρχικής ακολουθίας. Αυτό ισχύει διότι η τελευταία ακολουθία που γράψαμε προκύπτει από την αρχική αν την πολλαπλασιάσουμε τανυστικά με A', κι έχουμε υποθέσει ότι έχουμε πιστά επίπεδο ομομορφισμό $A \to A'$.

Αν θεωρήσουμε ως A' να είναι το B με τον πιστά επίπεδο ομομορφισμό f που έχουμε εξ υποθέσεως και δείξουμε ότι ο ομομορφισμός $b \mapsto b \otimes 1 : B \to B \otimes_A B$ έχει συστολή, τότε θα έχουμε ότι η τελευταία ακολουθία είναι ακριβής (λόγω της παρατήρησης που κάναμε στην αρχή της απόδειξης) κι άρα η ζητούμενη ακολουθία θα είναι επίσης ακριβής. Επειδή, λοιπόν, ο ομομορφισμός $b \otimes b' \mapsto bb'$ είναι συστολή του $b \mapsto b \otimes 1$, έχουμε αυτό που θέλαμε. □

Το δεμάτι που ορίζεται από ένα σχήμα Z. Ένα X-σχήμα ορίζει έναν ανταλλοίωτο συναρτητή

$$\mathcal{F}_Z : \text{Et}/X \to \text{Sets}, \mathcal{F}_Z(U) = \text{Hom}_X(U, Z).$$

Αυτός ο συναρτητής θα δείξουμε ότι είναι δεμάτι συνόλων. Γνωρίζουμε ήδη ότι για τα Zariski ανοιχτά καλύμματα ικανοποιείται η συνθήκη (S). Μένει να δείξουμε ότι η συνθήκη ικανοποιείται και για καλύμματα που αποτελούνται από έναν μοναδικό επί étale μορφισμό αφινικών σχημάτων $f : V \to U$. Πρέπει δηλαδή να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_X(U, Z) & \to & \mathrm{Hom}_X(V, Z) & \rightrightarrows & \mathrm{Hom}_X(V \otimes_U V, Z) \\ g & \mapsto & g \circ f & \mapsto & g \circ f \circ \mathrm{pr}_1 \\ & & & \mapsto & g \circ f \circ \mathrm{pr}_2 \end{array}$$

είναι ακριβής (pr_1 και pr_2 είναι οι απεικονίσεις προβολής του ινώδους γινομένου $V \otimes_U V$). Επειδή ο f είναι επί, η πρώτη απεικόνιση είναι 1-1. Επίσης, εξ ορισμού του ινώδους γινομένου έχουμε ότι $f \circ \mathrm{pr}_1 = f \circ \mathrm{pr}_2$, άρα για $h \in \mathrm{Im}(g \mapsto g \circ f)$ ισχύει ότι $h = g' \circ f$ για κάποιον $g \in \mathrm{Hom}_X(U, Z)$ και $g' \circ f \circ \mathrm{pr}_1 = g' \circ f \circ \mathrm{pr}_2$, δηλαδή $h \circ \mathrm{pr}_1 = h \circ \mathrm{pr}_2$. Άρα μένει να δείξουμε μόνο ότι αν έχουμε $h \in \mathrm{Hom}_X(V, Z)$ τέτοιον ώστε $h \circ \mathrm{pr}_1 = h \circ \mathrm{pr}_2$, τότε υπάρχει $g \in \mathrm{Hom}_X(U, Z)$ τέτοιος ώστε $h = g \circ f$.

Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι το Z είναι αφινικό σχήμα. Τότε, αν $U = \mathrm{Spec}A, V = \mathrm{Spec}B$ και $Z = \mathrm{Spec}C$, αυτό που πρέπει να δείξουμε είναι ότι για έναν πιστά επίπεδο ομομορφισμό $f : A \to B$, η ακολουθία

$$\mathrm{Hom}_{A-alg}(C, A) \to \mathrm{Hom}_{A-alg}(C, B) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{A-alg}(C, B \otimes_A B)$$

είναι ακριβής. Αυτό ισχύει λόγω της πρότασης 3.4.4 και του γεγονότος ότι ο συναρτητής $\mathrm{Hom}_{A-alg}(C, \cdot)$ διατηρεί την ακρίβεια της συγκεκριμένης ακολουθίας. Σ' αυτήν την περίπτωση, λοιπόν, ο μορφισμός g προσδιορίζεται από τον αντίστοιχο ομομορφισμό A-αλγεβρών.

Στη γενικότερη περίπτωση, έστω $Z = \cup_{i \in I} Z_i$ όπου Z_i είναι αφινικά σχήματα. Τότε κάθε $h^{-1}(Z_i)$ είναι ανοιχτό υποσχήμα του V, άρα έχει ανοιχτό κάλυμμα από αφινικά σχήματα, έστω $h^{-1}(Z_i) = \cup_{j \in J} V_{ij}$. Ο μορφισμός f είναι étale και επί, άρα από την πρόταση 3.1.17 παίρνουμε ότι είναι ανοιχτός, οπότε τα $f(V_{ij})$ είναι ανοιχτά υποσχήματα του U κι άρα καλύπτονται από ανοιχτά αφινικά υποσχήματα, έστω $f(V_{ij}) = \cup_{k \in K} U_{ijk}$. Έτσι, ορίζουμε τον μορφισμό g που θέλουμε τμηματικά: Για κάθε αφινικό U_{ijk} (τα οποία καλύπτουν όλο το U, επειδή ο f είναι επί) έχουμε ότι το $f^{-1}(U_{ijk})$ είναι επίσης αφινικό (étale μορφισμοί μεταξύ αφινικών σχημάτων είναι αφινικοί μορφισμοί - αυτό δεν είναι καθόλου τετριμμένο, προκύπτει από αυτό που ονομάζεται Κύριο Θεώρημα του Zariski, βλ. [9], σελ.184). Επιπλέον ισχύει ότι $h(f^{-1}(U_{ijk})) \subseteq Z_i$, διότι αν $v_1, v_2 \in V = \mathrm{Spec}B$ είναι τέτοια ώστε $f(v_1) = f(v_2)$, τότε $h(v_1) = h(v_2)$. *Πράγματι*, έστω $Y = \mathrm{Spec}(\kappa(v_1) \otimes_A \kappa(v_2))$, όπου $\kappa(v_1), \kappa(v_2)$ είναι τα σώματα υπολοίπων των τοπικών δακτυλίων $\mathcal{O}_{V,v_1}, \mathcal{O}_{V,v_2}$ αντίστοιχα. Μπορούμε να ορίσουμε δύο μορφισμούς $Y \to V$ που επάγονται από τους φυσικούς ομομορφισμούς A-αλγεβρών $B \to \kappa(v_1) \to \kappa(v_1) \otimes \kappa(v_2)$ και $B \to \kappa(v_2) \to \kappa(v_1) \otimes \kappa(v_2)$, άρα για $y \in Y$ ο ένας μορφισμός θα το απεικονιζεί στο v_1 κι ο άλλος στο v_2. Αφού $f(v_1) = f(v_2)$, από την καθολική ιδιότητα του ινώδους γινομένου παίρνουμε μορφισμό $\psi : Y \to V \times_U V$ κι έτσι $h(v_1) = h(\mathrm{pr}_1(\psi(y))) = h(\mathrm{pr}_2(\psi(y))) = h(v_2)$. Άρα έχουμε étale επί μορφισμό αφινικών σχημάτων $f^{-1}(U_{ijk}) \to U_{ijk}$, οπότε ξέρουμε ότι έχουμε μορφισμό $g_{ijk} : U_{ijk} \to Z_i$ τέτοιον ώστε $h|_{f^{-1}(U_{ijk})} = g_{ijk} \circ f|_{f^{-1}(U_{ijk})}$. Εξ αιτίας της συγκεκριμένης ιδιότητας των g_{ijk}, αυτοί πάντα συμφωνούν σε κοινά χωρία, άρα αφού τα $\{U_{ijk}\}_{i,j,k}$ καλύπτουν το U, εντέλει παίρνουμε τον μορφισμό g που θέλαμε.

Πολλές φορές το δεμάτι αυτό συμβολίζεται και με $Z(U)$ για κάθε étale $U \to X$. Μια χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι αν το Z έχει δομή ομάδας, τότε το $\mathcal{F}_Z$ γίνεται δεμάτι ομάδων. Παραθέτουμε κάποια βασικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 3.4.5. (i) *Έστω μ_n το σχήμα που ορίζεται από την εξίσωση*

$$T^n - 1 = 0.$$

Τότε $\mu_n(U)$ είναι η ομάδα των n-οστών ριζών του $1 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ (υπενθυμίζουμε ότι οι μορφισμοί από ένα σχήμα προς ένα αφινικό σχήμα καθορίζονται πλήρως από τον επαγόμενο ομομορφισμό δακτυλίων στις ολικές τομές τους - βλ.[1], Πρόταση 3.4).

(ii) *Έστω $\mathbb{G}_a = Speck[x]$ η αφινική γραμμή θεωρημένη ως (αβελιανή) ομάδα με πράξη την πρόσθεση. Τότε $\mathbb{G}_a(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ ως αβελιανές ομάδες.*

(iii) *Έστω $\mathbb{G}_m = Spec(k[x,y]/(xy-1))$ η αφινική γραμμή χωρίς την αρχή θεωρημένη ως ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό. Τότε $\mathbb{G}_m(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times$.*

(iv) *Έστω GL_n το σχήμα που ορίζεται από την εξίσωση*

$$T \cdot det(T_{ij}) = 1$$

στον (n^2+1)-διάστατο χώρο, δηλαδή το σχήμα $Spec(k[T, T_{11}, \ldots, T_{nn}]/T \cdot det(T_{ij}) - 1)$. Τότε $GL_n(U) = GL_n(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))$, δηλαδή η ομάδα των αντιστρέψιμων $n \times n$-πινάκων με συντελεστές από τον δακτύλιο $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Για παράδειγμα, $GL_1 = \mathbb{G}_m$.

Σταθερά δεμάτια. Έστω X μια πολλαπλότητα ή ένα σχεδόν-συμπαγές σχήμα. Για κάθε σύνολο Λ, ορίζουμε

$$\mathcal{F}_\Lambda(U) = \Lambda^{\pi_0(U)}$$

δηλαδή το γινόμενο αντίγραφων του Λ με δείκτες από το σύνολο $\pi_0(U)$ των συνεκτικών συνιστωσών του U. Με τους αναμενόμενους μορφισμούς περιορισμού, παίρνουμε ένα δεμάτι που ονομάζεται *σταθερό δεμάτι στο X_{et} που ορίζεται από το* Λ. Αν το Λ είναι πεπερασμένο, τότε το σταθερό δεμάτι που ορίζει είναι το ίδιο με το δεμάτι που ορίζεται από το σχήμα $X \times \Lambda$ (που είναι το ίδιο με την ξένη ένωση αντίγραφων του X αριθμημένων από το Λ). Αν το Λ είναι ομάδα, τότε το $\mathcal{F}_\Lambda$ είναι δεμάτι ομάδων.

Το δεμάτι που ορίζεται από ένα συναφές $\mathcal{O}_X$-πρότυπο. Έστω $\mathcal{M}$ ένα συναφές δεμάτι από $\mathcal{O}_X$-πρότυπα στο X_{zar}. Για κάθε étale απεικόνιση $\phi : U \to X$ παίρνουμε ένα συναφές $\mathcal{O}_U$-πρότυπο $\phi^*\mathcal{M}$ στο U_{zar}. Για παράδειγμα, αν U και X είναι αφινικά σχήματα που αντιστοιχούν στους δακτύλιους B και A, τότε το $\mathcal{M}$ ορίζεται από ένα πεπερασμένα παραγόμενο A-πρότυπο M και το δεμάτι $\phi^*\mathcal{M}$ αντιστοιχεί στο B-πρότυπο $B \otimes_A M$ (βλ.1.2.19,1.3.4,1.3.6(ii)). Υπάρχει ένα προδεμάτι $U \mapsto \Gamma(U, \phi^*\mathcal{M})$ στο X_{et}, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{M}^{et}$. Για παράδειγμα, $(\mathcal{O}_{X_{\text{zar}}})^{et} = \mathcal{O}_{X_{\text{et}}}$. Για να επιβεβαιώσουμε ότι το $\mathcal{M}^{\text{et}}$ είναι δεμάτι, αρκεί, λόγω του 3.4.1, να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$0 \to M \to B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

είναι ακριβής όταν ο ομομορφισμός $A \to B$ είναι πιστά επίπεδος. Η απόδειξη αυτού είναι παρόμοια με αυτήν της περίπτωσης $M = A$ (βλ.3.4.4).

3.4γ΄ Στάχυα

Θα χρειαστούμε, όπως και στη συνήθη θεωρία δεματιών, να ορίσουμε το στάχυ ενός δεματιού πάνω σ' ένα étale site. Έστω X μια πολλαπλότητα πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα, κι έστω $\mathcal{F}$ ένα προδεμάτι ή δεμάτι πάνω στο X_{et}. Το *στάχυ* του $\mathcal{F}$ στο σημείο $x \in X$ είναι το ευθύ όριο

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U,u)} \mathcal{F}(U),$$

όπου παίρνουμε το όριο πάνω απ' όλες τις étale περιοχές του x, με τις ιδιότητες που αναφέραμε κι όταν ορίζαμε τον τοπικό δακτύλιο για την étale τοπολογία.

Τώρα, έστω X ένα σχήμα και $\mathcal{F}$ ένα προδεμάτι ή δεμάτι πάνω στο X_{et}. Το στάχυ του $\mathcal{F}$ σ' ένα γεωμετρικό σημείο $\bar{x} \to X$ είναι

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U,\bar{u})} \mathcal{F}(U),$$

όπου παίρνουμε το όριο πάνω απ' όλες τις étale περιοχές του $\bar{x}$, με τις ιδιότητες που αναφέραμε κι όταν ορίζαμε τον τοπικό δακτύλιο για την étale τοπολογία.

Παράδειγμα 3.4.6. (i) *Το στάχυ του $\mathcal{O}_{X_{et}}$ στο $\bar{x}$ είναι ίσο με $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$, που είναι ο αυστηρά τοπικός δακτύλιος στο $\bar{x}$.*

(ii) *Το στάχυ του δεματιού $\mathcal{F}_Z$ στο $\bar{x}$, όπου Z είναι μια πολλαπλότητα ή ένα σχήμα πεπερασμένου τύπου πάνω από το X, είναι το*

$$\varinjlim_{(U,u)} Hom_X(U, Z).$$

Για παράδειγμα, τα στάχυα των δεματιών $\mu_n, \mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m$ και GL_n στο $\bar{x}$ είναι τα $\mu_n(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$, $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ (ως αβελιανή ομάδα), $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\times}$ και $GL_n(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ αντίστοιχα.

(iii) *Το στάχυ του $\mathcal{M}^{et}$, όπου το $\mathcal{M}$ είναι ένα συναφές δεμάτι $\mathcal{O}_X$-προτύπων, στο $\bar{x}$ είναι το $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$, όπου το $\mathcal{M}_x$ είναι το στάχυ του $\mathcal{M}$ στο x (ως δεμάτι στην Zariski τοπολογία).*

3.4δ΄ Δεμάτια-ουρανοξύστης

Ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ αποκαλείται *δεμάτι-ουρανοξύστης* αν $\mathcal{F}_{\bar{x}} = 0$ σε όλα τα x (το x είναι εικόνα του γεωμετρικού σημείου $\bar{x}$), εκτός από πεπερασμένο αριθμό αυτών. Στη συνέχεια ορίζουμε κάποια τέτοια δεμάτια που μας είναι γενικά χρήσιμα.

Ξεκινάμε με μια γενική περίπτωση δεματιού-ουρανοξύστης πάνω από έναν τοπολογικό χώρο Hausdorff X. Έστω $x \in X$, κι έστω Λ μια αβελιανή ομάδα. Ορίζουμε

$$\Lambda^x(U) := \begin{cases} \Lambda & \text{αν } x \in U, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το Λ^x είναι δεμάτι πάνω στον X. Προφανώς το στάχυ του σε κάθε $y \neq x$ είναι 0, και το στάχυ του στο x είναι Λ, άρα πρόκειται όντως για δεμάτι-ουρανοξύστης. Αν, τώρα, $\mathcal{F}$ είναι ένα δεμάτι πάνω στον X, τότε εξ ορισμού του ευθέος ορίου έχουμε ότι ένας ομομορφισμός $\mathcal{F}_x := \varinjlim_U \mathcal{F}(U) \to \Lambda$ είναι το ίδιο με μια οικογένεια συμβατών (στους κοινούς περιορισμούς) ομομορφισμών $(\mathcal{F}(U) \to \Lambda)_U$ (τα U είναι οι ανοιχτές περιοχές του x), που είναι το ίδιο με μια απεικόνιση δεματιών $\mathcal{F} \to \Lambda^x$. Επομένως

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Lambda^x) \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_x, \Lambda).$$

Έστω τώρα ότι X είναι μια πολλαπλότητα πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα κι έστω $x \in X$. Για μια étale απεικόνιση $\phi : U \to X$, ορίζουμε

$$\Lambda^x(U) := \bigoplus_{u \in \phi^{-1}(x)} \Lambda.$$

Έτσι έχουμε ότι $\Lambda^x(U) = 0$, εκτός αν $x \in \phi(U)$ που σ' αυτήν την περίπτωση παίρνουμε το ευθύ άθροισμα αντίγραφων του Λ αριθμημένων από τα σημεία του U που απεικονίζονται στο x μέσω της ϕ (η οποία είναι étale κι άρα έχει πεπερασμένες ίνες). Έτσι, το Λ^x

είναι πάλι δεμάτι-ουρανοξύστης στο X_{et}, αφού όλα τα στάχυα είναι μηδενικά, εκτός από αυτό στο $\bar{x}$ που είναι ίσο με Λ. Έστω, τώρα, ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω στο X_{et}, κι έστω $\mathcal{F}_{\bar{x}} \to \Lambda$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Επιλέγοντας ένα $u \in \phi^{-1}(x)$, καθορίζουμε μια étale γειτονιά (U, u) για το x, κι άρα έχουμε έναν ομομορφισμό $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \Lambda$. Συνδυάζοντας αυτούς τους ομομορφισμούς για όλα τα $u \in \phi^{-1}(x)$, παίρνουμε έναν ομομορφισμό

$$\mathcal{F}(U) \to \Lambda^x(U).$$

Η οικογένεια των ομομορφισμών για όλα τα U είναι συμβατή με τους ομομορφισμούς περιορισμού, οπότε ορίζουν έναν μορφισμό δεματιών $\mathcal{F} \to \Lambda^x$. Επειδή και κάθε τέτοιος μορφισμός δεματιών δίνει έναν ομομορφισμό $\mathcal{F}_{\bar{x}} \to \Lambda$, παίρνουμε τελικά τον ισομορφισμό

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \Lambda^x) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{\bar{x}}, \Lambda).$$

Έστω ότι έχουμε ένα σχήμα X και ένα γεωμετρικό σημείο $\bar{x} : \mathrm{Spec}k \to X$ του X με εικόνα $x \in X$ (για απλότητα στο συμβολισμό, θεωρούμε ότι αυτή η απεικόνιση μόνο υλοποιεί το $\mathrm{Spec}k$ ως X-σχήμα). Για κάθε étale απεικόνιση $\phi : U \to X$, ορίζουμε

$$\Lambda^{\bar{x}}(U) = \bigoplus_{\mathrm{Hom}_X(\mathrm{Spec}k, U)} \Lambda.$$

Πάλι το $\Lambda^{\bar{x}}$ είναι δεμάτι πάνω στο X_{et}, και για ένα άλλο δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω στο X_{et} έχουμε έναν φυσικό ισομορφισμό

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \Lambda^{\bar{x}}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{\bar{x}}, \Lambda).$$

Ωστόσο, αν το $x \in X$ δεν είναι κλειστό σημείο, τότε *δεν* ισχύει απαραίτητα ότι $(\Lambda^{\bar{x}})_{\bar{y}} = 0$ όταν η εικόνα του $\bar{y}$ δεν είναι ίση με x. Οπότε, αν το x δεν είναι κλειστό, το $\Lambda^{\bar{x}}$ δεν είναι απαραίτητα δεμάτι-ουρανοξύστης.

3.5 Η κατηγορία των δεματιών στο X_{et}

Η κατηγορία των δεματιών σ' ένα étale site X_{et} είναι κατά κύριο λόγο σαν την κατηγορία των δεματιών στο αντίστοιχο Zariski site. Θα θεωρήσουμε γνωστές τις έννοιες της αβελιανής κατηγορίας και των συζυγών συναρτητών (στα αγγλικά adjoint functors) καθώς και τις βασικές ιδιότητες αυτών. Για μια μεστή σύνοψη αυτών που θα χρειαστούμε παραπέμπουμε στις σημειώσεις που ακολουθούμε [8], σελ. 50, 51. Βασική κατασκευή που περιγράφεται σ' αυτό το χωρίο είναι αυτή που από μια μικρή κατηγορία $\boldsymbol{C}$ (δηλαδή μια κατηγορία που τα αντικείμενά της σχηματίζουν σύνολο κι όχι γνήσια κλάση) κατασκευάζουμε την αβελιανή κατηγορία T των ανταλλοίωτων συναρτητών $\mathcal{F} : \boldsymbol{C} \to \mathrm{Ab}$ (για να είναι αυτή τοπικά μικρή, δηλαδή για να είναι σύνολα κι όχι κλάσεις οι συλλογές των μορφισμών μεταξύ δύο αντικειμένων, απαιτούμε στην αρχή να είναι μικρή η $\boldsymbol{C}$).

3.5α΄ Η κατηγορία των προδεματιών

Για δοσμένη πολλαπλότητα ή σχήμα X, έχουμε πει ότι τα προδεμάτια αβελιανών ομάδων στο X_{et} είναι οι ανταλλοίωτοι συναρτητές $\mathrm{Et}/X \to \mathrm{Ab}$. Για να εντάξουμε αυτήν την περίπτωση στην παραπάνω παρατήρηση, πρέπει να αντικαταστασήσουμε την κατηγορία Et/X με μια μικρή κατηγορία. Όπως κάναμε και στην περίπτωση του τοπικού δακτύλιου στο X_{et} που περιορίσαμε τις étale γειτονιές για να πάρουμε σύνολο, έτσι κι εδώ μπορούμε να περιοριστούμε στους étale μορφισμούς $U \to X$ της ακόλουθης μορφής: Το U έχει κάλυμμα από αφινικές πολλαπλότητες ή αφινικά σχήματα που προκύπτουν από πηλίκα δακτυλίων της μορφής $A[T_1, T_2, \dots]$ (οσωνδήποτε πεπερασμένων ή άπειρων μεταβλητών) όπου $A = \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ για κάποιο αφινικό ανοιχτό $V \subseteq X$ και $\{T_1, T_2, \dots\}$ είναι ένα σύνολο συμβόλων. Ωστόσο δε θα ασχοληθούμε περαιτέρω μ' αυτήν την τεχνική λεπτομέρεια, καθώς δεν επηρεάζει ουσιαστικά τη μελέτη που θα κάνουμε στη συνέχεια. Δηλαδή θα συνεχίσουμε να αναφερόμαστε στην κατηγορία Et/X και στην κατηγορία των προδεματιών αβελιανών ομάδων στο X_{et}, που θα συμβολίζουμε $\mathrm{PreSh}(X_{\mathrm{et}})$, σαν να αναφερόμαστε σε ολόκληρες τις κατηγορίες. Έτσι, γνωρίζουμε ήδη ότι η $\mathrm{PreSh}(X_{\mathrm{et}})$ είναι αβελιανή κατηγορία κι άρα μια ακολουθία $\mathcal{P}' \to \mathcal{P} \to \mathcal{P}''$ είναι ακριβής αν και μόνο αν η ακολουθία $\mathcal{P}'(U) \to \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}''(U)$ είναι ακριβής για κάθε étale μορφισμό $U \to X$. Γνωρίζουμε επίσης κι έναν τρόπο να κατασκευάζουμε πυρήνες, συμπυρήνες, γινόμενα, ευθέα αθροίσματα, ευθέα όρια και αντίστροφα όρια προδεματιών και μορφισμών προδεματιών, κι αυτός ο τρόπος είναι να συλλέγουμε για κάθε étale μορφισμό $U \to X$ τα αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν και να τα θεωρούμε ως προδεμάτια με τους επαγόμενους ομομορφισμούς περιορισμού.

3.5β΄ Η κατηγορία των δεματιών

Συνεχίζοντας προς την κατηγορία των δεματιών αβελιανών ομάδων στο X_{et} που μας ενδιαφέρει, την ορίζουμε ως την πλήρη υποκατηγορία (δηλαδή μια υποκατηγορία που μπορεί να μην έχει όλα τα αντικείμενα της αρχικής κατηγορίας, αλλά έχει όλους τους μορφισμούς της μεταξύ των αντικειμένων της) της $\mathrm{PreSh}(X_{\mathrm{et}})$ που έχει ως αντικείμενα τα προδεμάτια που ικανοποιούν τη συνθήκη S για κάθε κάλυμμα και κάθε étale X-μορφισμό. Θα τη συμβολίζουμε με $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}})$, και δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι είναι μια προσθετική κατηγορία. Αυτό που θα προσπαθήσουμε να διευκρινίσουμε τώρα, είναι το τι σημαίνει *ακρίβεια* μιας ακολουθίας δεματιών.

Ορισμός 3.5.1. *Ένας μορφισμός δεματιών (ή προδεματιών)$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ καλείται* τοπικά επί *αν για κάθε U και $s' \in \mathcal{F}'(U)$ υπάρχει ένα κάλυμμα $(U_i \to U)_{i \in I}$ τέτοιο ώστε ο περιορισμός $s|_{U_i}$ να ανήκει στην εικόνα του $\mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}'(U_i)$ για κάθε $i \in I$.*

Πρόταση 3.5.2. *Έστω $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ ένας μορφισμός δεματιών στο X_{et}. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η ακολουθία δεματιών $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}' \to 0$ είναι ακριβής.*

(ii) *Ο μορφισμός α είναι τοπικά επί.*

(iii) *Για κάθε γεωμετρικό σημείο $\bar{x} : Speck \to X$, ο επαγόμενος ομομορφισμός στα στάχυα $\alpha_{\bar{x}} : \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}'_{\bar{x}}$ είναι επί.*

Απόδειξη. $\boxed{\textbf{(ii)}\Rightarrow\textbf{(i)}}$ Έστω $\beta : \mathcal{F}' \to \mathcal{G}$ ένας μορφισμός δεματιών τέτοιος ώστε $\beta \circ \alpha = 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $\beta = 0$ (είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι το $\mathcal{F}'$ είναι η δεματιοποίηση - στην οποία αναφερόμαστε στην επόμενη παράγραφο - του προδεματιού των εικόνων των $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U)$, όπου τα U είναι étale «ανοιχτά υποσύνολα» του X).

Έστω $s' \in \mathcal{F}'(U)$ για κάποιον étale μορφισμό $U \to X$. Από υπόθεση, υπάρχει κάλυμμα $(U_i \to U)_{i \in I}$ και $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ τέτοια ώστε $\alpha(s_i) = s'|_{U_i}$. Τώρα

$$\beta(s')|_{U_i} = \beta(s'|_{U_i}) = (\beta \circ \alpha)(s_i) = 0$$

για κάθε $i \in I$. Αφού το $\mathcal{G}$ είναι δεμάτι, συμπεραίνουμε ότι $\beta(s') = 0$.

(i)⇒(iii) Έστω ότι ο ομομορφισμός $\alpha_{\bar{x}}$ δεν είναι επί για κάποιο γεωμετρικό σημείο $\bar{x}$ του X. Έστω $\Lambda \neq 0$ ο συμπυρήνας του $\mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}'_{\bar{x}}$. Έστω $\Lambda^{\bar{x}}$ το δεμάτι που έχουμε περιγράψει (στην παράγραφο για τα δεμάτια-ουρανοξύστης). Είδαμε ότι για κάθε δεμάτι $\mathcal{G}$ στο X_{et} ισχύει ότι $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \Lambda^{\bar{x}}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_{\bar{x}}, \Lambda)$. Ο ομομορφισμός $\mathcal{F}'_{\bar{x}} \to \Lambda$ ορίζει έναν μη-μηδενικό μορφισμό $\mathcal{F}' \to \Lambda^{\bar{x}}$, του οποίου η σύνθεση με τον $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ είναι μηδέν (επειδή αντιστοιχεί στη σύνθεση $\mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}'_{\bar{x}} \to \Lambda$). Επομένως η ακολουθία $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}' \to 0$ δεν είναι ακριβής.

(iii)⇒(ii) Έστω $U \to X$ ένας étale μορφισμός κι έστω $\bar{u} : \mathrm{Spec}k \to U$ ένα γεωμετρικό σημείο του U. Η σύνθεση $\mathrm{Spec}k \to U \to X$ είναι γεωμετρικό σημείο του X και θα το συμβολίζουμε με $\bar{x}$. Μια étale γειτονιά του $\bar{u}$ γίνεται étale γειτονιά του $\bar{x}$ αν συνθέσουμε με τον μορφισμό $U \to X$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι λόγω αυτού προκύπτει ότι $\mathcal{F}_{\bar{u}} \cong \mathcal{F}_{\bar{x}}$ για κάθε δεμάτι $\mathcal{F}$ στο X_{et} (που με περιορισμό μπορούμε να το δούμε και ως δεμάτι στο U_{et}).

Από τα παραπάνω και την υπόθεση (iii), παίρνουμε ότι ο ομομορφισμός $\mathcal{F}_{\bar{u}} \to \mathcal{F}'_{\bar{u}}$ είναι επί για κάθε γεωμετρικό σημείο $\bar{u}$ του U. Έστω $s \in \mathcal{F}'(U)$ κι έστω $\bar{u}$ γεωμετρικό σημείο του U με εικόνα $u \in U$. Αφού ο ομομορφισμός $\mathcal{F}_{\bar{u}} \to \mathcal{F}'_{\bar{u}}$ είναι επί, υπάρχει étale μορφισμός $V \to U$ του οποίου η εικόνα περιέχει το u και είναι τέτοιο ώστε το $s|_V$ να είναι στην εικόνα του $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}'(V)$. Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία για αρκετά $u \in U$, παίρνουμε το ζητούμενο κάλυμμα.

□

Πρόταση 3.5.3. *Έστω*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$$

μια ακολουθία δεματιών στο X_{et}. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) *Η ακολουθία είναι ακριβής στην κατηγορία των δεματιών.*

(ii) *Η ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$$

είναι ακριβής για όλους τους étale μορφισμούς $U \to X$.

(iii) *Η ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F}'_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}''_{\bar{x}}$$

είναι ακριβής για κάθε γεωμετρικό σημείο $\bar{x}$: Speck $\to X$ του X.

Απόδειξη. Βλ. [8], σελ. 52-53, πρόταση 7.5. □

Πρόταση 3.5.4. *Έστω*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

μια ακολουθία δεματιών αβελιανών ομάδων στο X_{et}. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) *Η ακολουθία είναι ακριβής στην κατηγορία των δεματιών.*

(ii) *Ο μορφισμός $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ είναι τοπικά επί και η ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$$

είναι ακριβής για κάθε étale μορφισμό $U \to X$.

(iii) *Η ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F}'_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}''_{\bar{x}} \to 0$$

είναι ακριβής για κάθε γεωμετρικό σημείο $\bar{x}$: Speck $\to X$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες προτάσεις. □

Πρόταση 3.5.5. *Η κατηγορία των δεματιών αβελιανών ομάδων στο X_{et}, $Sh(X_{et})$, είναι αβελιανή.*

Απόδειξη. Το μόνο που πρέπει να εξετάσουμε είναι αν η απεικόνιση από την συν-εικόνα (στα αγγλικά co-image) στην εικόνα είναι ισομορφισμός. Αυτό ισχύει, διότι επάγει ισομορφισμό στα στάχυα. □

3.5γ΄ Δεματιοποίηση ενός προδεματιού

Συνεχίζοντας με τις ομοιότητες μεταξύ της θεωρίας δεματιών στο Zariski site και της θεωρίας δεματιών στο étale site, θα αναφέρουμε τη διαδικασία δεματιοποίησης ενός προδεματιού. Ωστόσο θα την ορίσουμε χρησιμοποιώντας την καθολική ιδιότητα που αποδείξαμε ότι ισχύει σαν πρόταση στη συνήθη περίπτωση, για να αποφύγουμε να αναφερθούμε στο αντίστοιχο του étalé χώρου (της ξένης ένωσης των σταχυών δηλαδή) για την étale τοπολογία. Στην αρχή, για απλότητα, θα θεωρούμε ότι όλα τα προδεμάτια και δεμάτια είναι προδεμάτια και δεμάτια συνόλων.

Ορισμός 3.5.6. *Έστω $\mathcal{P} \to {}^{\alpha}\mathcal{P}$ ένας μορφισμός από ένα προδεμάτι $\mathcal{P}$ σ' ένα δεμάτι ${}^{\alpha}\mathcal{P}$. Τότε το ${}^{\alpha}\mathcal{P}$ είναι* το δεμάτι που αντιστοιχεί στο $\mathcal{P}$ *ή αλλιώς* η δεματιοποίηση του $\mathcal{P}$ *αν κάθε μορφισμός από το $\mathcal{P}$ προς ένα δεμάτι παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω του $\mathcal{P} \to {}^{\alpha}\mathcal{P}$, δηλαδή αν $Hom(\mathcal{P},\mathcal{F}) \cong Hom({}^{\alpha}\mathcal{P},\mathcal{F})$ για όλα τα δεμάτια $\mathcal{F}$.*

Εξ ορισμού το ${}^{\alpha}\mathcal{P}$, εφοδιασμένο με τον μορφισμό $\mathcal{P} \to {}^{\alpha}\mathcal{P}$, είναι μοναδικό ως προς μοναδικό ισομορφισμό, αν υπάρχει. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε ένα κριτήριο για το αν ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ είναι η δεματιοποίηση ενός προδεματιού $\mathcal{P}$.

Ορισμός 3.5.7. *Έστω $\mathcal{P}$ ένα προδεμάτι. Αν $s_1, s_2 \in \mathcal{P}(U)$ είναι τομές (στα αγγλικά sections), τότε τις χαρακτηρίζουμε* τοπικά ίσες *αν $s_1|_{U_i} = s_2|_{U_i}$ για όλα τα U_i ενός καλύμματος $(U_i \to U)_{i\in I}$ του U (άρα οι τοπικά ίσες τομές ενός δεματιού είναι ίσες).*

Λήμμα 3.5.8. *Έστω $i : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ ένας μορφισμός από ένα προδεμάτι $\mathcal{P}$ προς ένα δεμάτι $\mathcal{F}$. Αν:*

(i) *οι μόνες τομές ενός $\mathcal{P}(U)$ που έχουν την ίδια εικόνα στο $\mathcal{F}(U)$ είναι αυτές που είναι τοπικά ίσες, κι αν*

(ii) *ο i είναι τοπικά επί,*

τότε το $\mathcal{F}$, εφοδιασμένο με τον μορφισμό i, είναι η δεματιοποίηση του $\mathcal{P}$.

Απόδειξη. Έστω $i' : \mathcal{P} \to \mathcal{F}'$ ένας μορφισμός από το $\mathcal{P}$ προς ένα δεμάτι $\mathcal{F}'$, κι έστω $s \in \mathcal{F}(U)$ για κάποιο U étale ανοιχτό. Λόγω του (ii), υπάρχει ένα κάλυμμα $(U_i \to U)$ του U και υπάρχουν $s_i \in \mathcal{P}(U_i)$ τέτοια ώστε $i(s_i) = s|_{U_i}$. Λόγω του (i), τα $i'(s_i) \in \mathcal{F}'(U_i)$ δεν εξαρτώνται από την επιλογή των s_i (διότι αν έχουμε s_i' τέτοιο ώστε $i(s_i) = i(s_i')$, τότε τα s_i, s_i' θα είναι τοπικά ίσα κι άρα τα $i'(s_i), i'(s_i')$ θα είναι τοπικά ίσα, οπότε θα είναι και ίσα αφού το $\mathcal{F}'$ είναι δεμάτι). Επιπλέον, για τον ίδιο λόγο, οι περιορισμοί των $i'(s_i)$ και $i'(s_j)$ στο $\mathcal{F}'(U_i \times_U U_j)$ συμφωνούν. Ορίζουμε λοιπόν ως $\alpha(s)$ το μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{F}'(U)$ που περιορίζεται στα $i'(s_i)$ για όλα τα i. Τότε ο μορφισμός $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ είναι ο μοναδικός μορφισμός για τον οποίο ισχύει ότι $\alpha \circ i = i'$. Επομένως το $\mathcal{F}$, εφοδιασμένο με τον μορφισμό i, είναι όντως η δεματιοποίηση του $\mathcal{P}$. □

Λήμμα 3.5.9. *Έστω $\mathcal{P}$ ένα υπο-προδεμάτι ενός δεματιού $\mathcal{F}$. Για κάθε U, θέτουμε $\mathcal{P}'(U)$ να είναι το σύνολο των τομών $s \in \mathcal{F}(U)$ που τοπικά ανήκουν στο $\mathcal{P}$, δηλαδή υπάρχει ένα κάλυμμα $(U_i \to U)_{i\in I}$ του U τέτοιο ώστε $s|_{U_i} \in \mathcal{P}(U_i)$ για κάθε $i \in I$. Τότε το $\mathcal{P}'$ είναι υπο-δεμάτι του $\mathcal{F}$ και ο μορφισμός $\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ είναι τοπικά επί. Το $\mathcal{P}'$ καλείται το υπο-δεμάτι του $\mathcal{F}$ που* παράγεται *από το $\mathcal{P}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς. □

Για να κατασκευάσουμε το ${}^{\alpha}\mathcal{P}$, λοιπόν, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ κι έναν μορφισμό $\mathcal{P} \to \mathcal{F}$ που να ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του λήμματος 3.5.8, διότι τότε το υποδεμάτι του $\mathcal{F}$ που παράγεται από την εικόνα του $\mathcal{P}$ είναι η δεματιοποίηση του $\mathcal{P}$.

Όσα είπαμε ως τώρα ισχύουν και στην περίπτωση που έχουμε προδεμάτια και δεμάτια αβελιανών ομάδων ή δακτυλίων. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι τα προδεμάτια και τα δεμάτια αποτελούνται από αβελιανές ομάδες (σημειώνουμε εδώ ότι, προφανώς, η δεματιοποίηση ενός προδεματιού αβελιανών ομάδων είναι κι αυτή ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων), όπως έχουμε υποθέσει για τις κατηγορίες $\mathrm{PreSh}(X_{\mathrm{et}})$ και $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}})$.

Ένα δεμάτι που ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του λήμματος 3.5.8 και είναι εφοδιασμένο με έναν φυσικό μορφισμό από το $\mathcal{P}$ προς αυτό, είναι το $\mathcal{P}^* := \prod_{x\in X}(\mathcal{P}_{\bar{x}})^{\bar{x}}$, όπου το $\bar{x}$ είναι ένα γεωμετρικό σημείο του X με εικόνα x και $(\mathcal{P}_{\bar{x}})^{\bar{x}}$ είναι το δεμάτι που προκύπτει από μια αβελιανή ομάδα όπως περιγράψαμε στην παράγραφο για τα δεμάτια-ουρανοξύστης. Το ότι είναι πράγματι δεμάτι κι ότι ο φυσικός μορφισμός $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ ικανοποιεί τη συνθήκη (i) του λήμματος 3.5.8 μπορεί να ελεγχθεί εύκολα από τους διάφορους ορισμούς (έστω κι αν θέλει κάποια δουλειά να γραφτούν όλα αναλυτικά).

Λήμμα 3.5.10. *Αν ο μορφισμός $i : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) του λήμματος 3.5.8, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός*

$$i_{\bar{x}} : \mathcal{P}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}}$$

είναι ισομορφισμός για όλα τα γεωμετρικά σημεία $\bar{x}$ του X.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς. □

Θεώρημα 3.5.11. *Για κάθε προδεμάτι $\mathcal{P}$ στο X_{et}, υπάρχει η δεματιοποίησή του ${}^{\alpha}\mathcal{P}$ εφοδιασμένη με έναν μορφισμό $i : \mathcal{P} \to {}^{\alpha}\mathcal{P}$. Ο μορφισμός i επάγει έναν ισομορφισμό $\mathcal{P}_{\bar{x}} \to ({}^{\alpha}\mathcal{P})_{\bar{x}}$ στα στάχυα, για κάθε γεωμετρικό σημείο $\bar{x}$ του X. Ο συναρτητής $a : PreSh(X_{et}) \to Sh(X_{et})$ είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί του θεωρήματος προκύπτουν από όλη την παραπάνω συζήτηση. Για τον τελευταίο ισχυρισμό αρκεί να θυμηθούμε ότι μια ακολουθία (προ)δεματιών είναι ακριβής αν και μόνο αν η επαγόμενη ακολουθία σταχυών της είναι ακριβής (εντελώς αντίστοιχο αποτέλεσμα με το 1.1.17 που προσαρμόζεται στην étale τοπολογία όπως όλα όσα έχουμε δει ως τώρα), και να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.5.10. □

Παρατήρηση 3.5.12. *Η δεματιοποίηση είναι απαραίτητη σαν διαδικασία γιατί δεν είναι σίγουρο ότι κάποια προδεμάτια που σχηματίζονται με άμεσο τρόπο είναι όντως δεμάτια. Για παράδειγμα, μια ομάδα Λ ορίζει ένα* σταθερό προδεμάτι *$\mathcal{P}_{\Lambda}$ τέτοιο ώστε για κάθε $U \neq \emptyset$ να ισχύει ότι $\mathcal{P}_{\Lambda}(U) = \Lambda$, όμως το δεμάτι που αντιστοιχεί σ' αυτό δεν είναι τόσο «απλό», και είναι το $\mathcal{F}_{\Lambda}$ που έχουμε περιγράψει στην παράγραφο με τα παραδείγματα δεματιών στο X_{et}. Επίσης τα ευθέα αθροίσματα, τα ευθέα όρια, οι εικόνες και οι συμπυρήνες στην κατηγορία των δεματιών στο X_{et}, δηλαδή στην $Sh(X_{et})$, είναι όλα δεματιοποιήσεις των προδεματιών που σχηματίζονται με τον «αφελή» τρόπο (να μαζέψουμε δηλαδή σε μια συλλογή για κάθε U όλα τα ευθέα αθροίσματα, τα ευθέα όρια, τις εικόνες και τους συμπυρήνες αντίστοιχα).*

3.6 Ευθείες και αντίστροφες εικόνες δεματιών στο X_{et}

3.6α΄ Ευθείες εικόνες δεματιών

Έστω $\pi : Y \to X$ ένας μορφισμός πολλαπλοτήτων ή σχημάτων, κι έστω $\mathcal{P}$ ένα προδεμάτι στο Y_{et}. Για κάθε étale $U \to X$ ορίζουμε

$$\pi_*\mathcal{P}(U) := \mathcal{P}(U \times_X Y).$$

Επειδή η αλλαγή βάσης ενός étale μορφισμού είναι επίσης étale (3.1.16(iii)), έχουμε ότι ο μορφισμός $U \times_X Y \to Y$ είναι étale. Υπάρχουν επίσης προφανείς απεικονίσεις περιορισμού κι έτσι το $\pi_*\mathcal{P}$ γίνεται προδεμάτι στο X_{et}, το οποίο αποκαλείται *ευθεία εικόνα* του προδεματιού $\mathcal{P}$.

Λήμμα 3.6.1. *Αν το $\mathcal{F}$ είναι δεμάτι, τότε και το $\pi_*\mathcal{F}$ είναι δεμάτι.*

Απόδειξη. Για μια πολλαπλότητα (ή σχήμα) V πάνω από το X, θα συμβολίζουμε με V_Y την πολλαπλότητα (ή σχήμα) $V \times_X Y$ πάνω από το Y. Τότε έχουμε έναν συναρτητή

$$\mathrm{Et}/X \to \mathrm{Et}/Y, (V \to X) \mapsto (V_Y \to Y)$$

ο οποίος στέλνει étale μορφισμούς πάνω από το X σε étale μορφισμούς πάνω από το Y, επί οικογένειες απεικονίσεων σε επί οικογένειες, και ινώδη γινόμενα πάνω από το X σε ινώδη γινόμενα πάνω από το Y.

Έστω $(U_i \to U)_{i\in I}$ μια επί οικογένεια étale μορφισμών της κατηγορίας Et/X. Τότε η οικογένεια $(U_{iY} \to U_Y)$ είναι μια επί οικογένεια étale μορφισμών της κατηγορίας Et/Y, οπότε η ακολουθία

$$\mathcal{F}(U_Y) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_{iY}) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{F}(U_{iY} \times_Y UjY)$$

είναι ακριβής. Αυτή η ακολουθία όμως είναι ίδια με την ακολουθία

$$(\pi_*\mathcal{F})(U) \to \prod_{i\in I} (\pi_*\mathcal{F})(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} (\pi_*\mathcal{F})(U_i \times_Y U_j)$$

η οποία επομένως είναι ακριβής. □

Είναι άμεσο ότι ο συναρτητής $\pi_* : \mathrm{PreSh}(Y_{\mathrm{et}}) \to \mathrm{PreSh}(X_{\mathrm{et}})$ είναι ακριβής. Επομένως, ο περιορισμός του $\pi_* : \mathrm{Sh}(Y_{\mathrm{et}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}})$ είναι αριστερά ακριβής. Ωστόσο, συνήθως δεν είναι δεξιά ακριβής, αφού το να είναι τοπικά επί ένας μορφισμός $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ δεν συνεπάγεται ότι είναι τοπικά επί κι ο μορφισμός $\pi_*\mathcal{F} \to \pi_*\mathcal{F}'$.

Παράδειγμα 3.6.2. (i) *Έστω X μια πολλαπλότητα πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα κι έστω $\pi : X \to P$ μια απεικόνιση από την X προς ένα σημείο P. Τότε ο συναρτητής π_* στέλνει το δεμάτι $\mathcal{F}$ στην ομάδα των ολικών τομών του $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Προφανώς το να είναι τοπικά επί ένας μορφισμός $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ δεν συνεπάγεται ότι ο ομομορφισμός ομάδων $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}')$ είναι επί, οπότε σ' αυτήν την περίπτωση ο π_* δεν είναι δεξιά ακριβής συναρτητής.*

(ii) *Έστω i : Speck $\to X$ ένα γεωμετρικό σημείο του X, με εικόνα x, που θα συμβολίζουμε επομένως και με $\bar{x}$. Η κατηγορία των δεματιών αβελιανών ομάδων στο $\bar{x}$ είναι η κατηγορία των αβελιανών ομάδων (αρκεί να σκεφτούμε την αντιστοιχία $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(\bar{x})$). Έτσι, μπορούμε να σκεφτόμαστε μια αβελιανή ομάδα Λ ως ένα δεμάτι στο $\bar{x}$. Τότε $i_*\Lambda = \Lambda^{\bar{x}}$, το δεμάτι που ορίσαμε στην παράγραφο για τα δεμάτια-ουρανοξύστης.*

Αν έχουμε ένα γεωμετρικό σημείο $\bar{y}$ του Y, τότε συνθέτοντας με τον μορφισμό π παίρνουμε ένα γεωμετρικό σημείο του X, το $\bar{x}$ ή αλλιώς $\pi(\bar{y})$. Προφανώς ισχύει ότι

$$(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \varinjlim_{(U_Y, \bar{u}_Y)} \mathcal{F}(U_Y)$$

όπου το όριο το παίρνουμε πάνω απ' όλες τις étale γειτονιές του $\bar{y}$ της μορφής U_Y, όπου U είναι μια étale γειτονιά του $\bar{x}$. Επομένως, υπάρχει φυσιολογική απεικόνιση

$$(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{y}}$$

η οποία εν γένει δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί.

Πρόταση 3.6.3. (i) *Έστω $\pi : V \hookrightarrow X$ μια ανοιχτή εμφύτευση, δηλαδή η ένθεση μιας ανοιχτής υποπολλαπλότητας (ή ενός ανοιχτού υποσχήματος) στην X. Τότε:*

$$(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{x}} & \text{αν } x \in V, \\ ? & \text{αν } x \notin V. \end{cases}$$

(Το «?» σημαίνει ότι δεν υπάρχει γενική μορφή για το στάχυ σ' αυτήν την περίπτωση.)

(ii) *Έστω $\pi : Z \hookrightarrow X$ μια κλειστή εμφύτευση, δηλαδή η ένθεση μιας κλειστής υποπολλαπλότητας (ή ενός κλειστού υποσχήματος) στην X. Τότε:*

$$(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{x}} & \text{αν } x \in Z, \\ 0 & \text{αν } x \notin Z. \end{cases}$$

(iii) *Έστω $\pi : Y \to X$ ένας πεπερασμένος μορφισμός πολλαπλοτήτων (σχημάτων). Τότε*

$$(\pi_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{y \mapsto x} \mathcal{F}_{\bar{y}}^{d(y)}$$

όπου $d(y)$ είναι ο διαχωρίσιμος βαθμός (ουσιαστικά ο βαθμός του διαχωρίσιμου μέρους της επέκτασης) του $\kappa(y)$ πάνω από το $\kappa(x)$.

Απόδειξη. Βλ. [8], σελ. 59, Πρόταση 8.3. □

Πόρισμα 3.6.4. *Ο συναρτητής π_* είναι ακριβής αν ο μορφισμός π είναι πεπερασμένος ή κλειστή εμφύτευση.*

Απόδειξη. Το πόρισμα προκύπτει από την παραπάνω πρόταση και την πρόταση 3.5.4. □

Πρόταση 3.6.5. *Αν έχουμε μορφισμούς πολλαπλοτήτων ή σχημάτων $Z \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\pi'} X$, τότε $(\pi' \circ \pi)_* = \pi'_* \circ \pi_*$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές από τον ορισμό. □

3.6β´ Αντίστροφες εικόνες δεματιών

Έστω $\pi : Y \to X$ ένας μορφισμός πολλαπλοτήτων (ή σχημάτων). Θα ορίσουμε έναν αριστερά συζυγή για τον συναρτητή π_* (έτσι θα δούμε κι έναν διαφορετικό τρόπο ορισμού της αντίστροφης εικόνας δεματιού, εκτός από αυτόν που έχουμε μελετήσει ήδη στο πρώτο κεφάλαιο). Έστω $\mathcal{P}$ ένα προδεμάτι στο X_{et}. Έστω $V \to Y$ ένας étale μορφισμός. Ορίζουμε

$$\mathcal{P}'(V) = \varinjlim \mathcal{P}(U)$$

όπου παίρνουμε το ευθύ όριο πάνω από τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

όπου $U \to X$ είναι étale μορφισμός. Δεν είναι πολύ δύσκολο να ελέγξει κανείς ότι αν έχουμε ένα προδεμάτι $\mathcal{Q}$ στο Y_{et}, τότε υπάρχουν φυσικές αμφιμονοσήμαντες αντιστοιχίες μεταξύ

- των μορφισμών $\mathcal{P}' \to \mathcal{Q}$,
- οικογενειών απεικονίσεων $\mathcal{P}(U) \to \mathcal{Q}(V)$, με δείκτες τα παραπάνω μεταθετικά διαγράμματα, συμβατών με τις απεικονίσεις περιορισμού, και
- μορφισμών $\mathcal{P} \to \pi_*\mathcal{Q}$.

Επομένως ισχύει ότι

$$\text{Hom}_{Y_{\text{et}}}(\mathcal{P}', \mathcal{Q}) \cong \text{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{P}, \pi_*\mathcal{Q}),$$

έτσι ώστε να επάγονται φυσικοί ισομορφισμοί συναρτητών

$$\text{Hom}_{Y_{\text{et}}}((-)', \mathcal{Q}) \cong \text{Hom}_{X_{\text{et}}}(-, \pi_*\mathcal{Q}),$$

και

$$\text{Hom}_{Y_{\text{et}}}(\mathcal{P}', -) \cong \text{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{P}, \pi_*(-)).$$

Δυστυχώς, ακόμα κι αν το $\mathcal{P}$ είναι δεμάτι, το $\mathcal{P}'$ δεν είναι υποχρεωτικά δεμάτι. Επομένως, για ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ στο X_{et}, ορίζουμε $\pi^*\mathcal{F} := {}^{\alpha}\mathcal{F}'$ (υπενθυμίζουμε ότι έτσι συμβολίζουμε τη δεματιοποίηση του $\mathcal{F}'$). Έτσι, για οποιοδήποτε δεμάτι $\mathcal{G}$ στο Y_{et} ισχύει ότι

$$\text{Hom}_{Y_{\text{et}}}(\pi^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{Y_{\text{et}}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{F}, \pi_*\mathcal{G}),$$

δηλαδή ο συναρτητής π^* είναι όντως αριστερά συζυγής του $\pi_* : \text{Sh}(Y_{\text{et}}) \to \text{Sh}(X_{\text{et}})$.

Πρόταση 3.6.6. *Αν έχουμε μορφισμούς πολλαπλοτήτων ή σχημάτων $Z \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\pi'} X$, τότε $(\pi' \circ \pi)^* = \pi^* \circ \pi'^*$.*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι και οι δύο συναρτητές είναι αριστερά συζυγείς του $(\pi' \circ \pi)_* = \pi'_* \circ \pi_*$. □

Παρατήρηση 3.6.7. (i) *Αν έχουμε έναν étale μορφισμό $\pi : U \to X$, τότε εξ ορισμού του π^* μπορούμε να δούμε ότι ο συναρτητής αυτός είναι απλώς ένας συναρτητής που περιορίζει τα δεμάτια του X_{et} σε δεμάτια του U_{et}, αφού υπάρχει ένα τελικό αντικείμενο στην οικογένεια των διαγραμμάτων πάνω από τα οποία παίρνουμε το ευθύ όριο, το οποίο είναι το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X. \end{tikzcd}$$

(ii) *Έστω $\bar{x} = i : Speck \to X$ ένα γεωμετρικό σημείο του X. Για οποιοδήποτε δεμάτι $\mathcal{F}$ στο X_{et}, ισχύει ότι $(i^*\mathcal{F})(Speck) = \mathcal{F}_{\bar{x}}$, το οποίο προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς των i^* και $\mathcal{F}_{\bar{x}}$. Επομένως, για κάθε μορφισμό $\pi : Y \to X$ και κάθε γεωμετρικό σημείο $\bar{y} = i : Speck \to Y$ του Y, έχουμε*

$$(\pi^*\mathcal{F})_{\bar{y}} = i^*(\pi^*\mathcal{F})(Speck) = \mathcal{F}_{\bar{x}},$$

όπου το $\bar{x}$ είναι το γεωμετρικό σημείο $\pi \circ i$ του X. Αφού, λοιπόν, αυτό ισχύει για όλα τα γεωμετρικά σημεία του Y, συμπεραίνουμε ότι ο συναρτητής π^* είναι ακριβής, *οπότε* ο συναρτητής π_* διατηρεί τα ενριπτικά δεμάτια *(είναι ιδιότητα των συζυγών συναρτητών - αν ένας συναρτητής έχει ακριβή αριστερά συζυγή, τότε διατηρεί τα ενριπτικά αντικείμενα).*

3.6γ΄ Επέκταση με μηδέν

Έστω X μια πολλαπλότητα (ή ένα σχήμα). Έστω $j : U \hookrightarrow X$ μια ανοιχτή εμφύτευση. Στην παράγραφο για τις ευθείες εικόνες δεματιών, είδαμε ότι για ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ στο U_{et}, τα στάχυα του $j_*\mathcal{F}$ δεν είναι απαραίτητα μηδενικά σε σημεία έξω από το U (βλ. 3.6.3(i)). Σ' αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε έναν συναρτητή $j_!$, την *επέκταση με μηδέν*, τέτοιον ώστε το $j_!\mathcal{F}$ να έχει αυτήν την ιδιότητα.

Έστω $\mathcal{P}$ ένα προδεμάτι στο U_{et}. Για κάθε étale $\phi : V \to X$, ορίζουμε

$$\mathcal{P}_!(V) := \begin{cases} \mathcal{P}(V) & \text{αν } \phi(V) \subseteq U, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τότε το $\mathcal{P}_!$ είναι ένα προδεμάτι στο X_{et} και για οποιοδήποτε άλλο προδεμάτι $\mathcal{Q}$ στο X_{et} ένας μορφισμός $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}|_U = j^*\mathcal{Q}$ επεκτείνεται μοναδικά σε έναν μορφισμό $\mathcal{P}_! \to \mathcal{Q}$, με προφανή τρόπο. Επομένως

$$\mathrm{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{P}_!, \mathcal{Q}) \cong \mathrm{Hom}_{U_{\text{et}}}(\mathcal{P}, j^*\mathcal{Q})$$

έτσι ώστε να επάγονται φυσικοί ισομορφισμοί συναρτητών

$$\mathrm{Hom}_{X_{\text{et}}}((-)_!, \mathcal{Q}) \cong \mathrm{Hom}_{U_{\text{et}}}(-, j^*\mathcal{Q})$$

και

$$\mathrm{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{P}_!, -) \cong \mathrm{Hom}_{U_{\text{et}}}(\mathcal{P}, j^*(-)).$$

Δυστυχώς, ακόμα κι αν το $\mathcal{P}$ είναι δεμάτι, το $\mathcal{P}_!$ δεν είναι υποχρεωτικά δεμάτι. Επομένως, για ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ στο U_{et}, ορίζουμε $j_!\mathcal{F}$ να είναι η δεματιοποίηση ${}^{\alpha}\mathcal{F}_!$. Τότε για κάθε δεμάτι $\mathcal{G}$ στο X_{et} έχουμε

$$\mathrm{Hom}_{X_{\text{et}}}(j_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{F}_!, \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}_{U_{\text{et}}}(\mathcal{F}, j^*\mathcal{G})$$

έτσι ώστε ο $j_!$ να είναι αριστερά συζυγής του $j^* : \mathrm{Sh}(X_{\text{et}}) \to \mathrm{Sh}(U_{\text{et}})$.

Πρόταση 3.6.8. *Έστω $j : U \hookrightarrow X$ μια ανοιχτή εμφύτευση. Για κάθε δεμάτι $\mathcal{F}$ στο U_{et} και για κάθε γεωμετρικό σημείο $\bar{x}$ του X, έχουμε ότι*

$$(j_!\mathcal{F})_{\bar{x}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{x}} & \text{αν } x \in U \\ 0 & \text{αν } x \notin U. \end{cases}$$

Απόδειξη. Εξ αιτίας του λήμματος 3.5.10, αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση αντικαθιστώντας το $j_!\mathcal{F}$ με το $\mathcal{F}_!$, κι αυτή προκύπτει άμεσα από τον ορισμό. □

Πόρισμα 3.6.9. *Ο συναρτητής $j_! : Sh(U_{et}) \to Sh(X_{et})$ είναι ακριβής, και ο συναρτητής j^* διατηρεί τα ενριπτικά αντικείμενα.*

Απόδειξη. Από τις προτάσεις 3.5.4 και 3.6.8 παίρνουμε τον πρώτο ισχυρισμό, και ο δεύτερος προκύπτει από το ότι ο j^* έχει ακριβή αριστερά συζυγή (τον $j_!$). □

Παρατήρηση 3.6.10. *Είναι εφικτό να ορίσουμε τον συναρτητή $j_!$ για κάθε étale μορφισμό $j : U \to X$. Έστω $\mathcal{F}$ ένα δεμάτι στο U_{et}. Για κάθε étale $\phi : V \to X$, ορίζουμε*

$$\mathcal{F}_!(V) = \bigoplus_{\alpha : V \to U} \mathcal{F}(V)$$

όπου το άθροισμα το παίρνουμε πάνω από τους (étale) μορφισμούς $\alpha : V \to U$ που είναι τέτοιοι ώστε $j \circ \alpha = \phi$. Τότε το $\mathcal{F}_!$ είναι προδεμάτι στο X_{et} και ορίζουμε ως $j_!\mathcal{F}$ να είναι η δεματιοποίησή του. Πάλι μπορεί να δειχθεί ότι ο $j_!$ είναι αριστερά συζυγής του j^* και είναι ακριβής συναρτητής. Επομένως για j étale μορφισμό, ο j^* διατηρεί τα ενριπτικά αντικείμενα.

3.6δ΄ Ύπαρξη *αρκετών ενριπτικών* δεματιών

Υπενθυμίζουμε ότι σε μια αβελιανή κατηγορία $\boldsymbol{C}$, ένα αντικείμενό της I καλείται *ενριπτικό*, αν ισχύει ότι για κάθε ακριβή ακολουθία στη $\boldsymbol{C}$

$$0 \to A \to B,$$

η ακολουθία

$$\mathrm{Hom}(B, I) \to \mathrm{Hom}(A, I) \to 0$$

είναι επίσης ακριβής. Είναι απλή άσκηση να δείξει κανείς ότι τα γινόμενα ενριπτικών αντικειμένων είναι επίσης ενριπτικά. Τέλος, λέμε ότι μια αβελιανή κατηγορία έχει *αρκετά ενριπτικά* αντικείμενα αν κάθε αντικείμενο έχει μονομορφισμό προς ένα ενριπτικό αντικείμενο. Για παράδειγμα, η κατηγορία των αβελιανών ομάδων έχει πράγματι αρκετά ενριπτικά αντικείμενα.

Πρόταση 3.6.11. *Έστω X μια πολλαπλότητα (ή ένα σχήμα). Κάθε δεμάτι αβελιανών ομάδων $\mathcal{F}$ στο X_{et} μπορεί να εμφυτευτεί σε ένα ενριπτικό δεμάτι. Ισοδύναμα, η κατηγορία $Sh(X_{et})$ έχει αρκετά ενριπτικά αντικείμενα.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, επιλέγουμε ένα γεωμετρικό σημείο $\bar{x} = i_x : \mathrm{Spec}\kappa(x) \to X$ με εικόνα το x. Επιλέγουμε επίσης και μια εμφύτευση $\mathcal{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow I(x)$ της αβελιανής ομάδας $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ σε μια ενριπτική αβελιανή ομάδα. Τότε το δεμάτι $\mathcal{I}^x := i_{x*}(I(x)) = I(x)^{\bar{x}}$ (βλ. 3.6.2(ii)) είναι ενριπτικό (αφού οι αβελιανές ομάδες είναι τα δεμάτια του $\mathrm{Spec}\kappa(x)$ κι ο συναρτητής i_{x*} διατηρεί τα ενριπτικά αντικείμενα) άρα και το γινόμενο $\mathcal{I} := \prod_{x \in X} \mathcal{I}^x$ είναι ένα ενριπτικό δεμάτι, σύμφωνα με τα παραπάνω. Τελικά, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{F}^*$ το δεμάτι $\prod_{x \in X} (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\bar{x}}$, τότε η σύνθεση $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^* \hookrightarrow \mathcal{I}$ είναι η εμφύτευση που θέλαμε. □

Μια βασική ιδιότητα που έχουν τα ενριπτικά δεμάτια που θα μας είναι χρήσιμη αργότερα, είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 3.6.12. *Τα ενριπτικά δεμάτια στο X_{et} είναι* μεστά *(υπενθυμίζουμε ότι αυτό σημαίνει ότι κάθε ομομορφισμός περιορισμού είναι επί).*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{I}$ ένα ενριπτικό δεμάτι στο X_{et} κι έστω $V \to U$ ένας étale X-μορφισμός (όπου έχουμε τους étale μορφισμούς $a : U \to X$ και $b : V \to X$). Ορίζουμε ένα δεμάτι $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^U$ στο X_{et} ώστε για έναν étale μορφισμό $\phi : W \to X$ να δίνει

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^U(W) := \begin{cases} \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(W) & \text{αν υπάρχει } \psi : W \to U \text{ ώστε } \phi = a \circ \psi, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ είναι το σταθερό δεμάτι στο X_{et} που ορίζεται από το $\mathbb{Z}$. Ομοίως ορίζεται και το δεμάτι $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^V$. Ισχύει ότι $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^U(W) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^V(W)$ για όλα τα W εκτός από αυτά για τα οποία παραγοντοποιείται ο ϕ μέσω του a, αλλά δεν παραγοντοποιείται μέσω του b, και σ' αυτήν την περίπτωση το δεξί μέρος της παραπάνω ισότητας είναι μηδέν. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, οι τομές του $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{V}$ περιέχονται στις τομές του $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{U}$, δηλαδή υπάρχει ακριβής ακολουθία δεματιών στο X_{et}

$$0 \to \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{V} \to \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{U}.$$

Τώρα, επειδή το I είναι ενριπτικό, παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$\mathrm{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{U}, \mathcal{I}) \to \mathrm{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{V}, \mathcal{I}) \to 0.$$

Όμως, κάθε μορφισμός $f : \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{U} \to \mathcal{I}$ ουσιαστικά καθορίζεται πλήρως από ένα στοιχείου του $\mathcal{I}(U)$ (με τρόπο που είναι συμβατός με τους περιορισμούς), αυτό στο οποίο απεικονίζεται το στοιχείο $1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{U}(U) = \mathbb{Z}^{\pi_0(U)}$ (αφού για όλα τα «μεγαλύτερα» étale «ανοιχτά» οι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων θα είναι μηδενικοί, και για όλα τα «μικρότερα» οι ομομορφισμοί καθορίζονται από τους περιορισμούς). Δηλαδή, η τελευταία ακριβής ακολουθία γίνεται

$$\mathcal{I}(U) \to \mathcal{I}(V) \to 0$$

που είναι αυτό που θέλαμε. □

3.7 Συνομολογία δεματιών στο X_{et}

Πλέον θεωρούμε ότι είμαστε εξοικειωμένοι με τη βασική θεωρία περί παραγόμενων συναρτητών από την Ομολογική Άλγεβρα (παραπέμπουμε για παράδειγμα στο δεύτερο κεφάλαιο του [12]). Άλλωστε έχουμε επαναλάβει παρόμοια προσέγγιση στο κεφάλαιο 2, εδώ απλά θα χρησιμοποιήσουμε ένα λίγο πιο «αφηρημένο» λεξιλόγιο και θα μεταφέρουμε τα αποτελέσματα εκείνου του κεφαλαίου στην περίπτωσή μας μέσω της πρότασης 3.6.12. Θα υπενθυμίσουμε τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες αυτής της θεωρίας εφαρμόζοντάς τη στην κατηγορία $\mathrm{Sh}(X_{\text{et}})$.

Έως τώρα έχουμε δείξει ότι η κατηγορία δεματιών στο X_{et} είναι αβελιανή κι έχει αρκετά ενριπτικά αντικείμενα. Γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής

$$\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F}) : \mathrm{Sh}(X_{\text{et}}) \to \mathrm{Ab}$$

είναι αριστερά ακριβής, και ορίζουμε $H^r(X_{\text{et}}, -)$ να είναι ο *r-οστός δεξιά παραγόμενος συναρτητής* του. Συγκεκριμένα, για κάθε δεμάτι $\mathcal{F}$ σταθεροποιούμε μια *ενριπτική ανάλυσή* του, δηλαδή μια ακριβή ακολουθία

$$\mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \mathcal{I}^2 \to \cdots$$

όπου $I^0, I^1, I^2, \ldots$ είναι ενριπτικά δεμάτια. Εφαρμόζουμε τον συναρτητή $\Gamma(X, -)$ και παίρνουμε το (συναλυσιδωτό) σύμπλεγμα

$$0 \xrightarrow{d^{-1}=0} \Gamma(X, \mathcal{I}^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, \mathcal{I}^1) \xrightarrow{d^1} \Gamma(X, \mathcal{I}^2) \xrightarrow{d^2} \cdots.$$

Αυτό (εν γένει) δεν είναι πλέον ακριβές ως ακολουθία και ορίζουμε την *r-οστή ομάδα συνομολογίας* του να είναι η $H^r(X_{\text{et}}, \mathcal{F}) := \mathrm{Ker}(d^r)/\mathrm{Im}(d^{r-1})$.

Οι δεξιά παραγόμενοι συναρτητές και οι ομάδες συνομολογίας που ορίζονται με τη βοήθειά τους δεν εξαρτώνται από τις επιλογές των ενριπτικών αναλύσεων που κάνουμε για τα δεμάτια. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα 2.2.3, που προσαρμόζεται εύκολα στην περίπτωσή μας (πάντα χρησιμοποιώντας και την πρόταση 3.6.12). Οι βασικές ιδιότητες των δεξιά παραγόμενων συναρτητών, οι οποίες τους καθορίζουν και μοναδικά (έως μοναδικού ισομορφισμού) είναι οι ακόλουθες:

(i) Για κάθε δεμάτι $\mathcal{F}$, έχουμε ότι $H^0(X_{\text{et}}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

(ii) Αν το I είναι ενριπτικό, τότε $H^r(X_{\text{et}}, \mathcal{I}) = 0$ για κάθε $r > 0$.

(iii) Από μια βραχεία ακριβή ακολουθία δεματιών

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

προκύπτει μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$0 \to H^0(X_{\text{et}}, \mathcal{F}') \to H^0(X_{\text{et}}, \mathcal{F}) \to H^0(X_{\text{et}}, \mathcal{F}'') \to H^1(X_{\text{et}}, \mathcal{F}') \to \cdots,$$

και αυτή η αντιστοιχία είναι «συναρτητική» (στα αγγλικά functorial), δηλαδή η ύπαρξη μορφισμού από την πρώτη προς μια δεύτερη βραχεία ακριβή ακολουθία συνεπάγεται την ύπαρξη συμβατού μορφισμού από την πρώτη προς τη δεύτερη επαγόμενη μακρά ακριβή ακολουθία.

Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύονται όπως οι αντίστοιχές τους από το κεφάλαιο 2. Συγκεκριμένα η πρώτη αντιστοιχεί στο λήμμα 2.2.1, η δεύτερη στο λήμμα 2.2.2, και η τρίτη στο θεώρημα 2.2.6.

Πρόταση 3.7.1. *Έστω $L = L_2 \circ L_1$, όπου L_1 και L_2 είναι και οι δύο αριστερά ακριβείς συναρτητές από αβελιανές κατηγορίες με αρκετά ενριπτικά. Αν ο L_1 διατηρεί τα ενριπτικά αντικείμενα και για κάθε $r > 0$ ισχύει ότι $(R^r L_1)(X) = 0$ για κάποιο αντικείμενο X, τότε για κάθε $r \geq 0$ ισχύει ότι $(R^r L)(X) = (R^r L_2)(L_1 X)$.*

Απόδειξη. Έστω $X \to I^\bullet$ μια ενριπτική ανάλυση του X (και σ' αυτήν την πιο γενική περίπτωση δεν αλλάζει κάτι ουσιαστικό αν θεωρήσουμε διαφορετικές ενριπτικές αναλύσεις). Οι υποθέσεις που έχουμε κάνει για τον L_1 συνεπάγονται ότι η ακολουθία $L_1 X \to L_1 I^\bullet$ είναι μια ενριπτική ανάλυση του $L_1 X$ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τον συναρτητή $R^r L_2$ στο $L_1 X$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα αντικείμενα $(R^r L)(X)$ και $(R^r L_2)(L_1 X)$ είναι η r-οστή συνομολογία του ίδιου συμπλέγματος $L_2(L_1 I^\bullet) = L I^\bullet$. □

Παρατήρηση 3.7.2. *Έστω $\phi : U \to X$ ένας étale μορφισμός. Από την παρατήρηση 3.6.7(ii) και την παρατήρηση 3.6.10 παίρνουμε ότι ο συναρτητής $\phi^* : Sh(X_{et}) \to Sh(U_{et})$ είναι ακριβής και διατηρεί τα ενριπτικά αντικείμενα. Αφού η σύνθεση*

$$Sh(X_{et}) \xrightarrow{\phi^*} Sh(U_{et}) \xrightarrow{\Gamma(U,-)} Ab$$

είναι ο συναρτητής $\Gamma(U, -)$ (ο ϕ^* σ' αυτήν την περίπτωση λειτουργεί απλά ως περιορισμός), συμπεραίνουμε (από την παραπάνω πρόταση) ότι οι δεξιά παραγόμενοι συναρτητές του $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U) : Sh(X_{et}) \to Ab$ είναι οι $\mathcal{F} \mapsto H^r(U_{et}, \phi^*\mathcal{F}) = H^r(U_{et}, \mathcal{F}|_U)$. Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, αντί για $H^r(U_{et}, \mathcal{F}|_U)$ κάποιες φορές θα γράφουμε $H^r(U_{et}, \mathcal{F})$.

Παρατήρηση 3.7.3. *Έστω $\phi : Y \to X$ ένας μορφισμός. Αφού ο ϕ^* είναι ακριβής (παρατήρηση 3.6.7(ii)), από την βραχεία ακριβή ακολουθία*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

δεματιών στο X_{et} παίρνουμε μια μακρά ακριβή ακολουθία

$$0 \to H^0(Y_{et}, \phi^*\mathcal{F}') \to \cdots \to H^r(Y_{et}, \phi^*\mathcal{F}') \to H^r(Y_{et}, \phi^*\mathcal{F}) \to H^r(Y_{et}, \phi^*\mathcal{F}'') \to \cdots$$

ομάδων συνομολογίας. Από την καθολική ιδιότητα των παραγόμενων συναρτητών (βλ. τον ορισμό 2.2.1 στο [12]), η φυσική απεικόνιση $H^0(X_{et}, \mathcal{F}) \to H^0(Y_{et}, \phi^*\mathcal{F})$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια οικογένεια φυσικών απεικονίσεων $H^r(X_{et}, \mathcal{F}) \to H^r(Y_{et}, \phi^*\mathcal{F})$ που είναι συμβατές με τις απεικονίσεις συνόρου (τα λεγόμενα και διαφορικά) των συναλυσιδωτών συμπλεγμάτων.

3.8 Συνομολογία Čech στο X_{et}

Υπάρχει μια διαφορά στον τρόπο που θα ορίσουμε το συναλυσιδωτό σύμπλεγμα Čech στο X_{et}, σε σύγκριση με αυτό που ορίσαμε στην ενότητα 2.4, κι αυτή είναι ότι δε θα χρησιμοποιήσουμε τις εναλλάσσουσες συναλυσίδες, αλλά ολόκληρο το γινόμενο των αβελιανών ομάδων που αντιστοιχούν στα ινώδη γινόμενα étale «ανοιχτών». Αυτό ωστόσο δεν αποτελεί σημαντική διαφορά αφού μπορεί να αποδειχθεί στην συνήθη περίπτωση ότι αν δεν χρησιμοποιούσαμε τις εναλλάσσουσες συναλυσίδες θα παίρναμε πάλι τις ίδιες ομάδες συνομολογίας Čech. Επίσης, για κάποιους τεχνικούς λόγους, στο X_{et} οι εναλλάσσουσες συναλυσίδες δεν θα μπορούσαν να μας δώσουν κάποια βασικά αποτελέσματα που θέλουμε να ισχύουν για μια θεωρία συνομολογίας.

Έστω $\mathcal{U} = (U_i \to X)_{i\in I}$ ένα étale κάλυμμα του X, κι έστω $\mathcal{P}$ ένα προδεμάτι αβελιανών ομάδων στο X_{et}. Ορίζουμε

$$C^r(\mathcal{U}, \mathcal{P}) := \prod_{(i_0,\dots,i_r)\in I^{r+1}} \mathcal{P}(U_{i_0\dots i_r}),$$

όπου $U_{i_0\dots i_r} := U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_r}$. Για $s = (s_{i_0\dots i_r}) \in C^r(\mathcal{U}, \mathcal{P})$, ορίζουμε το $d^r s \in C^{r+1}(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ ως εξής

$$(d^r s)_{i_0\dots i_{r+1}} := \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j \rho_j(s_{i_0\dots i_{j-1} i_{j+1}\dots i_{r+1}})$$

όπου ρ_j είναι ο ομομορφισμός περιορισμού που αντιστοιχεί στην προβολή

$$U_{i_0\dots i_{r+1}} \to U_{i_0\dots i_{j-1} i_{j+1}\dots i_{r+1}}.$$

Κάνοντας τον ίδιο ουσιαστικά υπολογισμό με αυτόν του λήμματος 2.4.1, παίρνουμε ότι το

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}) := C^0(\mathcal{U}.\mathcal{P}) \to \cdots \to C^r(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \xrightarrow{d^r} C^{r+1}(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \to \cdots$$

είναι ένα σύμπλεγμα, δηλαδή $d^r \circ d^{r+1} = 0$ για κάθε $r \geq 0$. Ορίζουμε, λοιπόν, για κάθε $r \geq 0$ την *r-οστή ομάδα συνομολογίας Čech ως προς το κάλυμμα $\mathcal{U}$* ως εξής:

$$\check{H}^r(\mathcal{U}, \mathcal{P}) := H^r(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P})) = \mathrm{Ker}(d^r)/\mathrm{Im}(d^{r-1})$$

(όπου $d^{-1} := 0$).

Παρατηρούμε ότι $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = \prod_{i\in I} \mathcal{P}(U_i)$, $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{P}(U_{ij})$, κι ότι

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = \mathrm{Ker}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{P}(U_{ij})\right).$$

Αυτό σημαίνει ότι για ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ ισχύει ότι

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Όπως στην ενότητα 2.4, έτσι κι εδώ, θέλουμε να ορίσουμε και ομάδες συνομολογίας Čech που να μην εξαρτώνται από την επιλογή του étale καλύμματος που κάναμε στην αρχή. Ο τρόπος για να γίνει αυτό είναι ο ίδιος: να πάρουμε το ευθύ όριο των ομάδων συνομολογίας των καλυμμάτων πάνω από ένα κατευθυνόμενο σύνολο καλυμμάτων. Για ένα δεύτερο κάλυμμα $\mathcal{V} = (V_j \to X)_{j\in J}$ του X, θα λέμε ότι είναι *εκλέπτυνση* του $\mathcal{U}$

αν υπάρχει απεικόνιση $\tau : J \to I$ τέτοια ώστε ο μορφισμός $V_j \to X$ να παραγοντοποιείται μέσω του $U_{\tau(j)} \to X$ για όλα τα $j \in J$. Η επιλογή του τ και των X-μορφισμών $\phi_j : V_j \to U_{\tau(j)}$ για κάθε j καθορίζει μια απεικόνιση συμπλεγμάτων

$$\tau^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \to C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{P}), \text{ με } (\tau^r s)_{j_0 \ldots j_r} = s_{\tau(j_0)\ldots\tau(j_r)}|_{V_{j_0\ldots j_r}}.$$

Όπως στην κλασική περίπτωση, έτσι κι εδώ, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο επαγόμενος ομομορφισμός ομάδων συνομολογίας Čech

$$\rho(\mathcal{V}, \mathcal{U}) : \check{H}^r(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \to \check{H}^r(\mathcal{V}, \mathcal{P})$$

είναι ανεξάρτητος από τις επιλογές των τ και $\{\phi_j\}_{j \in J}$. Επομένως μπορούμε να περάσουμε στο ευθύ όριο πάνω απ' όλα τα καλύμματα $\mathcal{U}$ και να πάρουμε τις *ομάδες συνομολογίας Čech*

$$\check{H}^r(X, \mathcal{P}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^r(\mathcal{U}, \mathcal{P}).$$

Επειδή, όπως παρατηρήσαμε, $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ για κάθε δεμάτι $\mathcal{F}$ στο X_{et}, ισχύει ότι $\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Μια ακόμα ιδιότητα των ομάδων συνομολογίας Čech είναι ότι για κάθε ενριπτικό δεμάτι $\mathcal{I}$ ισχύει ότι $\check{H}^r(X, \mathcal{I}) = 0$ για κάθε $r > 0$. Το σχέδιο απόδειξης αυτής της ιδιότητας είναι να δείξουμε ότι για κάθε étale κάλυμμα $\mathcal{U}$ υπάρχει ακριβής ακολουθία προδεματιών αβελιανών ομάδων $\mathcal{Z}_\bullet$ τέτοια ώστε

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{Z}_\bullet, \mathcal{F})$$

για κάθε δεμάτι $\mathcal{F}$. Αυτό σαν ιδέα θυμίζει και την απόδειξη της πρότασης 3.6.12 που για ένα étale «ανοιχτό» U του X βρίσκουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ του $\mathcal{I}(U)$ και του $\mathrm{Hom}_{X_{\text{et}}}(\mathcal{F}^U_{\mathbb{Z}}, \mathcal{I})$. Έχουμε ακόμα ότι αφού το $\mathcal{I}$ είναι ενριπτικό δεμάτι, είναι και ενριπτικό ως προδεμάτι (κάθε ακριβής ακολουθία προδεματιών $0 \to A \to B$, μεταφέρεται σε ακριβή ακολουθία των δεματιοποιήσεών τους, αφού ο συναρτητής δεματιοποίησης είναι ακριβής από το θεώρημα 3.5.11, και λόγω ενριπτικότητας του $\mathcal{I}$ ο ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{I})$ είναι ακριβής, ενώ εξ ορισμού της δεματιοποίησης ισχύει ότι $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{I}) = \mathrm{Hom}(^{\alpha}(-), \mathcal{I})$). Απ' όλα τα παραπάνω παίρνουμε ότι το σύμπλεγμα $\mathrm{Hom}(\mathcal{Z}_\bullet, \mathcal{I})$ είναι ακριβές, απ' όπου προκύπτει η ιδιότητα που αναφέραμε.

Από αυτά που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, συμπεραίνουμε πλέον ότι για οποιοδήποτε δεμάτι $\mathcal{F}$ ο ισομορφισμός $\check{H}^0(X, \mathcal{F}) \cong H^0(X, \mathcal{F})$ επάγει ισομορφισμούς των αντίστοιχων ομάδων συνομολογίας για κάθε r αν και μόνο αν σε κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία δεματιών

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

αντιστοιχεί «συναρτητικά» μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \to \check{H}^r(X\mathcal{F}') \to \check{H}^r(X\mathcal{F}) \to \check{H}^r(X\mathcal{F}'') \to \cdots$$

των ομάδων συνομολογίας Čech.

Θεώρημα 3.8.1. *Έστω ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X περιέχεται σε ένα ανοιχτό αφινικό κι έστω ότι το X είναι σχεδόν-συμπαγές σχήμα (για παράδειγμα μια προβολική πολλαπλότητα). Τότε, για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία δεματιών*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0,$$

το ευθύ όριο των συμπλεγμάτων

$$0 \to C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \to 0$$

πάνω από τα étale καλύμματα του X είναι ακριβές, κι αυτό (όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 2.4.2) συνεπάγεται την ύπαρξη μιας μακράς ακριβούς ακολουθίας ομάδων συνομολογίας Čech (κι αντιστοιχία αυτή είναι «συναρτητική»). Επομένως

$$\check{H}^r(X, \mathcal{F}) \cong H^r(X, \mathcal{F})$$

για κάθε r και κάθε δεμάτι $\mathcal{F}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι αρκετά τεχνική, παραπέμπουμε στο [11], σελ.104 , θεώρημα III 2.17. □

Παρατήρηση 3.8.2. *Υπενθυμίζουμε ότι στην Zariski τοπολογία η αντίστοιχη σύγκριση μεταξύ των ομάδων συνομολογίας μέσω παραγόμενων συναρτητών και των ομάδων συνομολογίας Čech έδινε ένα λιγότερο ισχυρό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα για να πάρουμε τον επιθυμητό ισομορφισμό, έπρεπε το σχήμα να είναι διαχωρισμένο και το δεμάτι να είναι σχεδόν-συναφές (βλ. πόρισμα 2.4.4).*

Κεφάλαιο 4

Οι εικασίες του Weil

Σε όλο το κεφάλαιο θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}_q$ ένα σώμα με $q = p^m, m \in \{1, 2, \dots\}$, στοιχεία και με $\mathbb{F}$ την αλγεβρική κλειστότητα του $\mathbb{F}_q$. Για μια πολλαπλότητα X πάνω από το $\mathbb{F}_q$, με $\overline{X}$ συμβολίζουμε την αλλαγή βάσης $X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spec}(\mathbb{F})$ που είναι πολλαπλότητα πάνω από το $\mathbb{F}$. Υποθέτουμε επίσης ότι όλες οι πολλαπλότητες που θα ασχοληθούμε είναι *απολύτως ανάγωγες* (εκτός αν αναφέρουμε ρητά κάτι άλλο), δηλαδή είναι ανάγωγες ακόμα κι αν θεωρηθούν ορισμένες πάνω από τις αλγεβρικές κλειστότητες των σωμάτων υπεράνω των οποίων ορίζονται. Αυτό σημαίνει ότι για μια μη-ιδιόμορφη πολλαπλότητα X πάνω από το $\mathbb{F}_q$, η X είναι συνεκτική. Τέλος, με ℓ (αν δεν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό) θα συμβολίζουμε έναν πρώτο αριθμό διαφορετικό από τον p.

4.1 Διατύπωση των εικασιών

Έστω X μια μη-ιδιόμορφη προβολική πολλαπλότητα διάστασης d πάνω από το $\mathbb{F}_q$. Για κάθε $m \in \{1, 2, \dots\}$ συμβολίζουμε με N_m το πλήθος των σημείων της $\overline{X}$ με συντεταγμένες στο $\mathbb{F}_{q^m}$ (δηλαδή τα $\mathbb{F}_{q^m}$-ρητά σημεία της X), κι ορίζουμε την συνάρτηση ζήτα της X να είναι η

$$\begin{aligned} Z(X,t) &\coloneqq \exp\left(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m}\right) \\ &= 1 + \sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m} + \frac{1}{2!}\left(\sum_{m\geq 1} N_m \frac{t^m}{m}\right)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $Z(X,t) \in \mathbb{Q}[[t]]$ και ότι

$$\frac{d}{dt}\log Z(X,t) = \sum_{m\geq 1} N_m t^{m-1},$$

δηλαδή η συνάρτηση $\frac{d}{dt}\log Z(X,t)$ είναι ουσιαστικά η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $N_1, N_2, N_3, \dots$.

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τις εικασίες του Weil που μπορούν να βρεθούν στην αρχική τους μορφή στο [13].

(I) ***Ρητότητα:*** Η $Z(X,t)$ είναι ρητή συνάρτηση. Συγκεκριμένα, η $Z(X,t)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2d}(t)}$$

όπου $P_0(t) = 1 - t, P_{2d}(t) = 1 - q^d t$ και γενικά $P_i(t) \in \mathbb{Q}_\ell[t]$ για οποιονδήποτε πρώτο $\ell \neq p$.

(II) ***Συναρτησιακή εξίσωση:*** Η $Z(X,t)$ ικανοποιεί μια συναρτησιακή εξίσωση:

$$Z(X, q^{-d}t^{-1}) = \pm q^{d\chi/2}t^{\chi}Z(X,t),$$

όπου το $\chi := \sum_{i=0}^{2d}(-1)^i\beta_i$ ονομάζεται *χαρακτηριστική Euler-Poincaré* της X, και οι $\beta_i := \deg P_i(t)$ ονομάζονται *αριθμοί Betti* της πολλαπλότητας X.

(III) ***Αριθμοί Betti:*** Αν η X προκύπτει ως αναγωγή modulo ένα πρώτο ιδεώδες p του δακτύλιου ακεραίων, $\mathcal{O}_K$, ενός σώματος αριθμών K, από μια μη-ιδιάζουσα προβολική πολλαπλότητα X_1 πάνω από το K, τότε οι αριθμοί Betti της X, β_i, ταυτίζονται με τους αριθμούς Betti της X_1, όταν αυτή θεωρείται ως μιγαδική πολλαπλότητα. Επίσης ισχύει ότι $\chi = (\Delta \cdot \Delta)$, δηλαδή η χαρακτηριστική Euler-Poincaré της X ισούται με τον αριθμό αυτοτομής της διαγωνίου Δ στο γινόμενο $\overline{X} \times \overline{X}$.

(IV) ***Εικασία Riemann:*** Για $1 \leq i \leq 2d-1$, $P_i(t) = \prod_{j=1}^{\beta_i}(1-\alpha_{i,j}t) \in \mathbb{Z}[t]$, όπου οι $\alpha_{i,j}$ είναι αλγεβρικοί ακέραιοι με απόλυτη τιμή $q^{i/2}$.

Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον να αναφέρουμε ποια είναι η σχέση της συνάρτησης ζήτα που ορίσαμε για την X και της συνάρτησης ζήτα Riemann. Οι ιδιότητες της συνάρτησης ζήτα Riemann είναι αυτές που έδωσαν την ιδέα στον Weil να διατυπώσει τις εικασίες του με τον τρόπο που το έκανε βασιζόμενος στη σχέση που θα περιγράψουμε.

Η συνάρτηση ζήτα Riemann ορίζεται να είναι η σειρά

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

η οποία συγκλίνει για $\Re(s) > 1$. Γνωρίζουμε ότι αυτή η σειρά γράφεται και σαν γινόμενο Euler πάνω από τους (φυσικούς) πρώτους αριθμούς:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Γενικότερα μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις ζήτα για σώματα αριθμών (στα αγγλικά number fields) ως εξής:

$$\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_K}\frac{1}{N_{\mathfrak{a}}^s} = \prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-N_{\mathfrak{p}}^{-s}},$$

όπου K είναι ένα σώμα αριθμών, δηλαδή μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$, το $\mathfrak{a}$ «τρέχει» πάνω από τα μη-μηδενικά ιδεώδη του δακτύλιου ακεραίων του K, $\mathcal{O}_K$, το $\mathfrak{p}$ «τρέχει» πάνω από τα πρώτα ιδεώδη του $\mathcal{O}_K$ και $N_{\mathfrak{a}} := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$, όπου με $|S|$ συμβολίζουμε την πληθικότητα ενός πεπερασμένου συνόλου S. Αυτές λέγονται και συναρτήσεις ζήτα Dedekind.

Για να ορίσουμε ζήτα συναρτήσεις και στην περίπτωση των ολικών σωμάτων συναρτήσεων (στα αγγλικά global function fields) μπορούμε να εργαστούμε ως εξής: Αν $\mathbb{F}_q$ είναι ένα πεπερασμένο σώμα με $q = p^m$ στοιχεία, τότε μπορούμε να ορίσουμε (κατ' αναλογία με τα σώματα αριθμών)

$$\zeta_{\mathbb{F}_q(t)} := \sum_{\mathfrak{a}\subseteq\mathbb{F}_q[t]}\frac{1}{N_{\mathfrak{a}}^s} = \prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-N_{\mathfrak{p}}^{-s}},$$

όπου πάλι τα $\mathfrak{a}$ και $\mathfrak{p}$ «τρέχουν» πάνω από τα μη-μηδενικά και πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{F}_q[t]$ αντίστοιχα, και $N_{\mathfrak{a}} := |\mathbb{F}_q[t]/\mathfrak{a}|$. Ωστόσο εδώ προκύπτει το ζήτημα ότι ο δακτύλιος $\mathbb{F}_q[t]$

δεν καθορίζεται από το σώμα $\mathbb{F}_q(t)$ (σε αντίθεση με την περίπτωση των σωμάτων αριθμών που αναφέραμε), αφού, για παράδειγμα, δεν υπάρχει κανονικός τρόπος να τον διαλέξουμε αντί του δακτύλιου $\mathbb{F}_q\left[\frac{1}{t}\right]$. Μάλιστα, για γενικότερα ολικά σώματα συναρτήσεων K, δηλαδή πεπερασμένες επεκτάσεις του $\mathbb{F}_q(t)$, εμφανίζεται το επιπλέον πρόβλημα ότι δεν υπάρχει καν κάποιος κανονικός τρόπος να εμφυτεύσουμε το $\mathbb{F}_q(t)$ στο K. Η λύση έρχεται γεωμετρικά: Για δοσμένο ολικό σώμα συναρτήσεων K, θεωρούμε την μη-ιδιόμορφη προβολική πολλαπλότητα X πάνω από το $\mathbb{F}_q$ με σώμα συναρτήσεων K και ορίζουμε

$$\zeta_K(s) := \zeta(X,s) := \prod_{x\in(X)_{\mathrm{cl}}} \frac{1}{1-N_x^{-s}} = \prod_{x\in(X)_{\mathrm{cl}}} \frac{1}{1-q^{\deg(x)s}},$$

όπου $(X)_{\mathrm{cl}}$ είναι το σύνολο των κλειστών σημείων της X, για κάθε $x\in(X)_{\mathrm{cl}}$ έχουμε $N_x := |\kappa(x)|$, όπου $\kappa(x)$ είναι το (πεπερασμένο) σώμα υπολοίπων του x, κι επιπλέον $\deg(x) := [\kappa(x):\mathbb{F}_q]$ (οπότε $N_x = q^{\deg(x)}$).

Παρατηρούμε εδώ ότι $\zeta(X,s) = \tilde{Z}(X,q^{-s})$, όπου

$$\tilde{Z}(X,t) := \prod_{x\in(X)_{\mathrm{cl}}} \frac{1}{1-t^{\deg(x)}} \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Από τις ιδιότητες των τυπικών σειρών παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\log\tilde{Z}(X,t) &= \sum_{x\in(X)_{\mathrm{cl}}} -\log(1-t^{\deg(x)}) &&= \sum_{x\in(X)_{\mathrm{cl}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{\deg(x)\cdot n}}{n}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{\deg(x)|m}\deg(x)\right)\frac{t^m}{m} &&= \sum_{m=1}^{\infty}|X(\mathbb{F}_{q^m})|\frac{t^m}{m}\end{aligned}$$

όπου $X(\mathbb{F}_{q^m})$ είναι το σύνολο των $\mathbb{F}_{q^m}$-ρητών σημείων της X πάνω από το $\mathbb{F}_q$. Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι για κάθε $x\in(X)_{\mathrm{cl}}$ με $\deg(x)|m$ υπάρχουν τόσα $\mathbb{F}_{q^m}$-ρητά σημεία της X πάνω από το $\mathbb{F}_q$ όσες είναι οι $\mathbb{F}_q$-γραμμικές εμφυτεύσεις που είναι και ομομορφισμοί σωμάτων $\kappa(x)\hookrightarrow\mathbb{F}_{q^m}$, και το πλήθος αυτών είναι ίσο με $\deg(x)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι $\tilde{Z}(X,t) = Z(X,t)$, κι αυτό φανερώνει πως σχετίζονται οι δύο συναρτήσεις ζήτα $\zeta(s)$ και $Z(X,t)$.

Παράδειγμα 4.1.1. *Θα ελέγξουμε τις εικασίες του Weil στην περίπτωση του d-διάστατου προβολικού χώρου πάνω από το $\mathbb{F}_q$, δηλαδή του $X = \mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_q}$. Γνωρίζουμε ότι $X = \cup_{i=0}^d U_i$, όπου*

$$U_i = \mathit{Spec}\left(\mathbb{F}_q\left[\frac{t_0}{t_i},\dots,\frac{t_{i-1}}{t_i},\frac{t_{i+1}}{t_i},\dots,\frac{t_d}{t_i}\right]\right) \cong \mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q}.$$

Επίσης

$$U_0 \cap U_1 \cong \mathit{Spec}\left(\mathbb{F}_q\left[\tilde{t_0}^{-1},\tilde{t_0},\tilde{t_2},\dots,\tilde{t_d}\right]\right) \cong \mathit{Spec}\left(\mathbb{F}_q\left[\tilde{t_1},\tilde{t_1}^{-1},\tilde{t_2},\dots,\tilde{t_d}\right]\right) \cong \mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q}\setminus\mathbb{A}^{d-1}_{\mathbb{F}_q},$$

και ως σύνολα ισχύει ότι $X = U_0 \sqcup (U_1\setminus U_0)\sqcup(U_2\setminus(U_0\cup U_1))\sqcup\cdots\sqcup(U_d\setminus(\cup_{i=0}^{d-1}U_i))$. Έχουμε:

$$U_1\setminus U_0 \cong \mathbb{A}^{d-1}_{\mathbb{F}_q} \cong \mathit{Spec}\left(\mathbb{F}_q\left[\tilde{t_2},\dots,\tilde{t_d}\right]\right).$$

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι

$$(U_1\setminus U_0)\cap U_2 \cong \mathbb{A}^{d-1}_{\mathbb{F}_q}\setminus\mathbb{A}^{d-2}_{\mathbb{F}_q} \cong \mathit{Spec}\left(\mathbb{F}_q\left[\tilde{t_2},\tilde{t_2}^{-1},\tilde{t_3},\dots,\tilde{t_d}\right]\right),$$

οπότε παίρνουμε

$$U_2 \setminus (U_0 \cup U_1) \cong \mathbb{A}^{d-2}_{\mathbb{F}_q} \cong Spec\left(\mathbb{F}_q\left[\tilde{t_3}, \ldots, \tilde{t_d}\right]\right).$$

Επαγωγικά, λοιπόν, παίρνουμε ότι σαν σύνολα ισχύει ότι

$$X = \mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q} \sqcup \mathbb{A}^{d-1}_{\mathbb{F}_q} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} \sqcup \mathbb{A}^0_{\mathbb{F}_q}$$

οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε το N_m υπολογίζοντας τις πληθικότητες $|\mathbb{A}^i_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m})|$ και αθροίζοντας για κάθε $i \in \{0, \ldots, d\}$. Ισχύει ότι:

$$\mathbb{A}^i_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m}) = Hom_{Spec(\mathbb{F}_q)}(Spec(\mathbb{F}_{q^m}), \mathbb{A}^i_{\mathbb{F}_q}) = Hom_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q\left[t_0, \ldots, t_{i-1}\right], \mathbb{F}_{q^m})$$

οπότε $|\mathbb{A}^i_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m})| = q^{im}$ κι έτσι καταλήγουμε στο ότι $N_m = 1 + q^m + \cdots + q^{dm}$.

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση ζήτα (χρησιμοποιώντας και ιδιότητες των τυπικών σειρών)

$$\begin{aligned} Z(X,t) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}(1 + q^m + \cdots + q^{dm})\frac{t^m}{m}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m}\right)\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(qt)^m}{m}\right)\cdots\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(q^dt)^m}{m}\right) = \prod_{i=0}^{d}\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(q^it)^m}{m}\right) \\ &= \prod_{i=0}^{d}\exp(-\log(1-q^it)) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\cdots(1-q^dt)}. \end{aligned}$$

Από τον υπολογισμό φαίνεται ξεκάθαρα ότι η $Z(X,t)$ είναι ρητή συνάρτηση, όπως ισχυρίζεται η πρώτη εικασία του Weil. Θεωρούμε γνωστό ότι ο X ανυψώνεται στον $\mathbb{CP}^d$ σε χαρακτηριστική μηδέν και θεωρούμε γνωστό ότι οι αριθμοί Betti των μιγαδικών προβολικών χώρων είναι 0 στους άρτιους δείκτες και 1 στους περιττούς. Αυτά επιβεβαιώνουν την τρίτη εικασία του Weil για τον X, και με απλή αντικατάσταση των β_i και πράξεις μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύουν και οι υπόλοιπες εικασίες.

4.2 Σχέδιο απόδειξης των εικασιών

4.2α΄ ℓ-αδική συνομολογία

Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την απόδειξη των εικασιών του Weil είναι η λεγόμενη ℓ-αδική συνομολογία. Στη συνέχεια, κάνοντας κατάχρηση συμβολισμού, θα γράφουμε $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ή $\mathbb{Z}/m$ και θα εννοούμε τη δεματιοποίηση του σταθερού προδεματιού (σε κάποιο étale site) αβελιανών ομάδων που σε κάθε αντικείμενο αντιστοιχίζει την ομάδα $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Με $H^i(S, \mathcal{F})$ θα συμβολίζουμε ως γνωστόν την i-οστή ομάδα συνομολογίας του δεματιού $\mathcal{F}$ στο étale site S. Υπενθυμίζουμε ότι για το étale site μιας προβολικής πολλαπλότητας X_{et} γνωρίζουμε ότι αυτές οι ομάδες συνομολογίας είναι ισόμορφες με τις αντίστοιχες ομάδες Čech συνομολογίας $\check{H}^i(X_{\text{et}}, \mathcal{F})$ (βλ. θεώρημα 3.8.1).

Ορισμός 4.2.1. *Έστω ένα site S κι ένα δεμάτι $\mathcal{F}$ πάνω σε αυτό το site. Οι* ομάδες της ℓ-αδικής συνομολογίας με συντελεστές στους ℓ-αδικούς ακέραιους $\mathbb{Z}_\ell$ *ορίζονται ως εξής:*

$$H^i(S, \mathbb{Z}_\ell) := \varprojlim_n H^i(S, \mathbb{Z}/\ell^n).$$

Οι ομάδες της ℓ-αδικής συνομολογίας με συντελεστές στους ℓ-αδικούς αριθμούς $\mathbb{Q}_\ell$ *ορίζονται ως εξής:*

$$H^i(S, \mathbb{Q}_\ell) := H^i(S, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

Παρατηρούμε ότι οι ομάδες $H^i(S, \mathbb{Z}/\ell^n)$ είναι $\mathbb{Z}/\ell^n$-πρότυπα, οπότε οι ομάδες που ορίσαμε $H^i(S, \mathbb{Z}_\ell)$ είναι $\mathbb{Z}_\ell$-πρότυπα και οι ομάδες $H^i(S, \mathbb{Q}_\ell)$ είναι $\mathbb{Q}_\ell$-διανυσματικοί χώροι. Επίσης πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τον συμβολισμό και να μην θεωρούμε ότι οι ομάδες $H^i(S, \mathbb{Z}_\ell)$ είναι οι ομάδες συνομολογίας του δεματιού που προκύπτει ως δεματιοποίηση του σταθερού δεματιού που αντιστοιχίζει όλα τα αντικείμενα στην ομάδα των ℓ-αδικών ακεραίων $\mathbb{Z}_\ell$, και το ίδιο πρέπει να προσέχουμε και για τις ομάδες $H^i(S, \mathbb{Q}_\ell)$. Προφανώς ορίζονται οι ομάδες συνομολογίας τέτοιων σταθερών δεματιών, αλλά δεν είναι αυτές που θέλουμε, δεν έχουν τις κατάλληλες ιδιότητες που αναζητούμε (και αναφέρουμε στη συνέχεια). «Συνθηματικά» αυτήν την παρατήρηση θα μπορούσαμε να την εκφράσουμε κι ως εξής: «Η συνομολογία δεν αντιμετατίθεται με αντίστροφα όρια».

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες επιθυμητές ιδιότητες που όντως έχουν οι ομάδες ℓ-αδικής συνομολογίας, χωρίς απόδειξη (για όλες μπορεί κανείς να βρει αποδείξεις στις σημειώσεις του Milne, [8]). Όταν θα γράφουμε A, θα εννοούμε οποιοδήποτε από τα $\mathbb{Z}/m$, $\mathbb{Z}_\ell$, ή $\mathbb{Q}_\ell$.

(ℓ-1) *Συναρτητικότητα:* Ένας μορφισμός σχημάτων $f : S \to S'$ επάγει έναν ομομορφισμό A-προτύπων

$$f^* : H^i(S', A) \to H^i(S, A).$$

Για έναν δεύτερο μορφισμό σχημάτων $g : S' \to S''$ ισχύει ότι $(gf)^* = f^* g^*$. Επίσης, αν X είναι σχήμα πάνω από ένα σώμα k με διαχωρίσιμη κλειστότητα k_s, τότε για κάθε $\sigma \in \mathrm{Gal}(k_s/k)$ ορίζεται μορφισμός

$$\mathrm{id} \times \mathrm{Spec}(\sigma) : X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k_s) \to X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k_s)$$

ο οποίος επάγει ενδομορφισμό του A-πρότυπου $H^i(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k_s), A)$. Έτσι ορίζεται μια δράση της απόλυτης ομάδας Galois, $\mathrm{Gal}(k_s/k)$, στις ομάδες συνομολογίας $H^i(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k_s), A)$.

(ℓ-2) *Συνομολογιακή διάσταση:* Έστω X μια μη-ιδιόμορφη προβολική πολλαπλότητα πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής p (ενδεχομένως και $p = 0$), καθαρής διάστασης d (δηλαδή κάθε ανάγωγη συνιστώσα της έχει διάσταση d). Για κάθε πρώτο $\ell \neq p$ και για κάθε $i > 2d$ έχουμε

$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) = 0.$$

Αν η X είναι αφινική, τότε και για κάθε $i > d$ έχουμε μηδενικές ομάδες $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

(ℓ-3) *Γινόμενο-κούπα (στα αγγλικά cup product):* Για κάθε σχήμα S και για κάθε i, j, υπάρχουν A-διγραμμικά ταιριάσματα

$$H^i(S, A) \times H^j(S, A) \to H^{i+j}(S, A), \quad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

Τα ταιριάσματα είναι προσεταιριστικά κι επίσης ισχύει ότι $y \cdot x = (-1)^{ij} x \cdot y$.

(ℓ-4) *Τύπος Künneth:* Αν X και Y είναι πολλαπλότητες λείες και γνήσιες (στα αγγλικά proper) πάνω από ένα διαχωρίσιμα κλειστό σώμα L[1], κι αν $\ell \neq \mathrm{char}(L)$, τότε παίρνουμε ισομορφισμούς

$$\bigoplus_{i+j=k} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^j(Y, \mathbb{Q}_\ell) \to H^k(X \times_{\mathrm{Spec}(L)} Y, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$x \otimes y \mapsto p_1^* x \cdot p_2^* y,$$

όπου $p_1 : X \times_{\mathrm{Spec}(L)} Y \to X$ και $p_2 : X \times_{\mathrm{Spec}(L)} Y \to Y$ είναι οι προβολές.

[1] Ένας μορφισμός σχημάτων $f : X \to Y$ καλείται *γνήσιος* αν είναι διαχωρισμένος, πεπερασμένου τύπου και καθολικά κλειστός (αυτό σημαίνει ότι για κάθε μορφισμό σχημάτων $h : Z \to Y$ η αλλαγή βάσης $f_Z : Z \times_Y X \to Z$ είναι κλειστός μορφισμός - δηλαδή η επαγόμενη απεικόνιση στους τοπολογικούς χώρους είναι κλειστή).

(ℓ-5) *Δυϊκότητα Poincaré:* Αν X είναι λεία, γνήσια και καθαρά d-διάστατη πολλαπλότητα πάνω από σώμα k, κι αν $\overline{X}_s = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k_s)$ για μια διαχωρίσιμη κλειστότητα k_s του k, τότε υπάρχει ένας κανονικός Galois-ισομεταβαλόμενος (στα αγγλικά Galois-equivariant) $\mathbb{Z}/\ell^n$-ομομορφισμός για κάθε $\ell \neq \mathrm{char}(k)$

$$\mathrm{tr} : H^{2d}(\overline{X}_s, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \to \mathbb{Z}/\ell^n,$$

όπου η δράση της ομάδας Galois στα δεξιά είναι η τετριμμένη, και το ταίριασμα

$$H^i(\overline{X}_s, \mathbb{Z}/\ell^n)(j) \times H^{2d-i}(\overline{X}_s, \mathbb{Z}/\ell^n)(d-j) \to H^{2d}(\overline{X}_s, \mathbb{Z}/\ell^n)(d) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{Z}/\ell^n$$

είναι ένα τέλειο ταίριασμα-δυϊκότητα[2] (στα αγγλικά perfect duality pairing). Οι παραπάνω συμβολισμοί είναι οι εξής: Αν M είναι ένα $\mathbb{Z}/\ell^n$-$\mathrm{Gal}(k_s/k)$-πρότυπο, τότε $M(m) = M \otimes \mathbb{Z}/\ell^n(m)$, όπου αν μ_{ℓ^n} είναι το Galois $\mathbb{Z}/\ell^n$-πρότυπο των ℓ^n-οστών ριζών της μονάδας στο $k_s^\times$, $\mu_{\ell^n}^{-1} := \mathrm{Hom}(\mu_{\ell^n}, \mathbb{Z}/\ell^n)$ και $M^\vee := \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}/\ell^n)$, τότε

$$\mathbb{Z}/\ell^n(m) := \begin{cases} \mu_{\ell^n}^{\otimes m} & \text{αν } m \geq 0 \\ (\mu_{\ell^n}^{\otimes -m})^\vee & \text{αν } m < 0. \end{cases}$$

Επιπλέον αν στα παραπάνω αντικαταστήσουμε το $\mathbb{Z}/\ell^n$ με το $\mathbb{Q}_\ell$ και θέσουμε $j = 0$, όπου για έναν Galois $\mathbb{Q}_\ell$-διανυσματικό χώρο N ορίζουμε με παρόμοιο τρόπο τον $N(m) := N \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(m)$, όπου $\mathbb{Q}_\ell(m) := \varprojlim_n \mathbb{Z}/\ell^n(m) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, τότε πάλι υπάρχει η αντίστοιχη $\mathbb{Q}_\ell$-γραμμική απεικόνιση και το αντίστοιχο ταίριασμα είναι κι αυτό τέλειο ταίριασμα-δυϊκότητα.

(ℓ-6) *Περατότητα:* Αν η πολλαπλότητα X είναι γνήσια πάνω από ένα διαχωρίσιμα κλειστό σώμα L, τότε οι ομάδες $H^i(X, A)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα A-πρότυπα για κάθε $i \geq 0$.

(ℓ-7) *Ενδομορφισμός Frobenius:* Έστω X μια πολλαπλότητα που είναι πεπερασμένου τύπου πάνω από το $\mathbb{F}_q$. Ο $\mathbb{F}_q$-γραμμικός ενδομορφισμός Frobenius $F : X \to X$ ορίζεται ως ο ταυτοτικός πάνω στον τοπολογικό χώρο της X και η απεικόνιση q-οστής δύναμης στο δεμάτι δομής. Αν $\varphi \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ είναι ο αριθμητικός ενδομορφισμός Frobenius

$$\varphi(\alpha) = \alpha^q \text{ για } \alpha \in \overline{\mathbb{F}_q},$$

τότε έχουμε έναν επαγόμενο μορφισμό

$$\mathrm{id} \times \varphi : \overline{X} := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spec}\left(\overline{\mathbb{F}_q}\right) \to \overline{X}.$$

Αυτός επάγει έναν ομομορφισμό στις ομάδες συνομολογίας τον οποίο καταχρηστικά θα συμβολίζουμε επίσης με φ. Αν ορίσουμε F^* την απεικόνιση που επάγεται από τον μορφισμό

$$F \times \mathrm{id} : \overline{X} = X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spec}\left(\overline{\mathbb{F}_q}\right) \to \overline{X}$$

στις ομάδες συνομολογίας, τότε ισχύει ότι

$$F^* = \varphi^{-1} \text{ στην } H^i(\overline{X}, A).$$

[2]Ένα A-διγραμμικό ταίριασμα-δυϊκότητα $X \times Y \to A$ είναι τέλειο αν ο επαγόμενος A-ομομορφισμός $X \to \mathrm{Hom}(Y, A) = Y^\vee$ είναι ισομορφισμός.

(ℓ-8) *Τύπος ίχνους Lefschetz:* Έστω X μια μη-ιδιόμορφη προβολική πολλαπλότητα καθαρής διάστασης d πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p (ενδεχομένως και $p = 0$). Αν $\phi : X \to X$ μια κανονική απεικόνιση, τότε:

$$(\Gamma_\phi \cdot \Delta) = \sum_i (-1)^i \mathrm{tr}(\phi^* | H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)),$$

όπου ϕ^* είναι η επαγόμενη απεικόνιση στις ομάδες συνομολογίας, Γ_ϕ είναι το γράφημα της ϕ, Δ είναι η διαγώνιος του γινομένου $X \times X$ και $(\Gamma_\phi \cdot \Delta)$ είναι ο αριθμός τομής (κάποιες βασικές αναφορές που μπορούμε να δώσουμε για τη Θεωρία Τομής - στα αγγλικά Interesection Theory - είναι τα αντίστοιχα κεφάλαια του [2] και το βιβλίο του Fulton [14]) των πολλαπλοτήτων Γ_ϕ και Δ εντός του γινομένου $X \times X$ (στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ο αριθμός των σταθερών σημείων της απεικόνισης ϕ λαμβάνοντας υπόψιν και την πολλαπλότητά τομής τους στο μέτρημα).

(ℓ-9) *Θεώρημα σύγκρισης:* Αν X είναι μια μη-ιδιόμορφη πολλαπλότητα πάνω από το $\mathbb{C}$, τότε

$$H^i(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C} \cong H^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$$

όπου οι ομάδες συνομολογίας στο δεξί μέρος είναι οι συνήθεις ομάδες συνομολογίας του τοπολογικού χώρου $X_{\mathbb{C}}$, ο οποίος έχει το ίδιο σύνολο σημείων με την X, αλλά είναι εφοδιασμένος με την μιγαδική τοπολογία.

(ℓ-10) *Ανύψωση σε χαρακτηριστική μηδέν:* Έστω ότι η $\overline{X}$ ικανοποιεί τις συνήθεις υποθέσεις αυτού του κεφαλαίου κι έστω ότι μπορεί να ανυψωθεί σε μια πολλαπλότητα X_1 πάνω από σώμα K χαρακτηριστικής 0. Έστω $\overline{K}$ η αλγεβρική κλειστότητα του K, κι έστω $\overline{X_1}$ η αντίστοιχη πολλαπλότητα πάνω από το $\overline{K}$. Τότε:

$$H^i(\overline{X}_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(\overline{X_1}_{,\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

4.2β΄ Οι τρεις πρώτες εικασίες

Στόχος μας είναι να περιγράψουμε, όσο πιο λεπτομερώς μπορούμε με τα εργαλεία που έχουμε, την απόδειξη των δύο πρώτων εικασιών του Weil, δηλαδή την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 4.2.2. *(Grothendieck) Έστω X μια (απολύτως ανάγωγη) λεία προβολική πολλαπλότητα διάστασης d πάνω από το σώμα $\mathbb{F}_q$.*

(i) *Για κάθε πρώτο $\ell \neq p = char(\mathbb{F}_q)$ έχουμε*

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2d}(t)},$$

όπου $P_0(t) = 1 - t, P_{2d}(t) = 1 - q^d t$ και γενικά

$$P_i(t) = \det(1 - F^* t | H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)),$$

*όπου $\overline{X} = X \times_{Spec(\mathbb{F}_q)} Spec(\mathbb{F})$ για μια αλγεβρική κλειστότητα $\mathbb{F}$ του $\mathbb{F}_q$, $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ είναι η i-οστή ομάδα ℓ-αδικής συνομολογίας και F^* είναι ο ενδομορφισμός που περιγράψαμε στην ιδιότητα **(ℓ-7)**.*

(ii) *Η $Z(X,t)$ είναι ρητή, δηλαδή ανήκει στο $\mathbb{Q}(t)$.*

(iii) *Ικανοποιείται η συναρτησιακή εξίσωση*

$$Z(X, q^{-d}t^{-1}) = \pm q^{d\chi/2} t^{\chi} Z(X, t),$$

όπου χ *είναι η χαρακτηριστική Euler-Poincaré*

$$\chi(X, \mathbb{Q}_\ell) := \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε τα ζητούμενα με την εξής σειρά: Πρώτα δείχνουμε ότι το (i) συνεπάγεται τα (ii) και (iii) και μετά δείχνουμε ότι ισχύει το (i).

$\boxed{\textbf{(i)}\Rightarrow\textbf{(ii)}}$ Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.2.3. *Έστω* $u(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ *μια τυπική δυναμοσειρά πάνω από ένα σώμα* K. *Τότε η* $u(T)$ *αντιστοιχεί σε ανάπτυγμα Taylor στοιχείου στο* $K(T)$ *αν και μόνο αν υπάρχει φυσικός αριθμός* $N > 0$ *τέτοιος ώστε οι ορίζουσες Hankel*

$$\det(H_M^{(N+1)}) := \det(a_{i+j+M})_{0\leq i,j\leq N} = \det \begin{pmatrix} a_M & a_{M+1} & \cdots & a_{M+N} \\ a_{M+1} & a_{M+2} & \cdots & a_{M+N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M+N} & a_{M+N+1} & \cdots & a_{M+2N} \end{pmatrix}$$

μηδενίζονται για κάθε $M >> 0$.

Απόδειξη. Αν $u(T) = 0$, τότε το αποτέλεσμα ισχύει τετριμμένα. Έστω $u(T) \neq 0$. Ισχύει ότι η $u(T)$ είναι τυπικό ανάπτυγμα Taylor ενός στοιχείου του $K(T)$ αν και μόνο αν υπάρχουν $p(T), q(T) \in K[T]$, με $q(T) \neq 0$, τέτοια ώστε $u(T) = \frac{p(T)}{q(T)}$, ή ισοδύναμα $u(T)q(T) = p(T)$.

Αν η $u(T)$ είναι αυτής της μορφής, τότε έστω $q(T) = q_0 + q_1 T + \cdots + q_m T^m$ και $p(T) = p_0 + p_1 T + \cdots + p_k T^k$. Κάνουμε πράξεις:

$$u(T)q(T) = a_0 q_0 + (a_0 q_1 + a_1 q_0)T + \cdots + (a_0 q_l + a_1 q_{l-1} + \cdots + a_l q_0)T^l + \cdots$$

και βλέπουμε ότι για $l > \max\{m, k\}$ ισχύει ότι

$$a_{l-m} q_m + a_{l-m+1} q_{m-1} + \cdots + a_l q_0 = 0.$$

Αντίστροφα, αν υπάρχουν συντελεστές $q_0, \ldots, q_m$ τέτοιοι ώστε να υπάρχει κάποιο N για το οποίο να ισχύει ότι για κάθε $n > N$, $a_n q_m + a_{n+1} q_{m-1} + \cdots + a_{n+m} q_0 = 0$, τότε θέτοντας $p(T) = a_0 q_0 + (a_0 q_1 + a_1 q_0)T + \cdots + (a_N q_m + a_{N+1} q_{m-1} + \cdots + a_{N+m} q_0)T^{N+M}$ (όπου μπορεί να είναι και βαθμού μικρότερου από $N + M$) παίρνουμε ότι $u(T)q(T) = p(T)$, δηλαδή η $u(T)$ είναι τυπικό ανάπτυγμα Taylor της ρητής συνάρτησης $\frac{p(T)}{q(T)}$.

Από τα παραπάνω παίρνουμε ότι αν η $u(T)$ είναι ανάπτυγμα Taylor στοιχείου $\frac{p(T)}{q(T)}$ στο $K(T)$, τότε για $N = m$ (όπου $m = \deg(q(T))$) ισχύει ότι οι ορίζουσες Hankel $\det(H_M^{(N+1)})$ μηδενίζονται για κάθε $M > \max\{m, k\}$, όπου $k = \deg(p(T))$. Πράγματι, αν υπάρχει $M > \max\{m, k\}$ ώστε η ορίζουσα $\det(H_M^{(N+1)})$ να μη μηδενίζεται, τότε το ομογενές γραμμικό σύστημα στο οποίο αντιστοιχεί έχει μοναδική λύση την $(q_m, q_{m-1}, \ldots, q_0)$ η οποία θα πρέπει να είναι η μηδενική λύση, δηλαδή $q(T) = 0$, που είναι άτοπο.

Έστω τώρα ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί N, d τέτοιοι ώστε οι ορίζουσες Hankel $\det(H_M^{(N+1)})$ να μηδενίζονται για κάθε $M \geq d$. Για τις ορίζουσες Hankel ισχύει η εξής ταυτότητα (που δεν θα αποδείξουμε):

$$\det(H_M^{(N)}) \det(H_{M+2}^{(N)}) - \det(H_M^{(N+1)}) \det(H_{M+2}^{(N-1)}) = (\det(H_{M+1}^{(N)}))^2.$$

Από αυτήν συμπεραίνουμε ότι αν ισχύει πως $\det(H_M^{(N+1)}) = 0$ για $d \le M \le d+r$, όπου $r \in \mathbb{N}$, τότε για τις ορίζουσες $\det(H_M^{(N)})$ με $d < M \le d+r$ ισχύει ότι είτε όλες μηδενίζονται ή καμία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν, υποθέτουμε ότι για κάθε $r \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\det(H_{d+r}^{(N)}) \neq 0$ (αλλιώς θα αλλάζαμε την επιλογή του N μέχρι να βρούμε κάποιον ώστε να ισχύει αυτή η συνθήκη - αυτό θα συμβεί σίγουρα τελικά γιατί δεν είναι όλοι οι συντελεστές a_n μηδενικοί). Ο πίνακας $H_d^{(N+1)}$ έχει επομένως βαθμό N, οπότε υπάρχει μοναδικό (έως βαθμωτού πολλαπλασιασμού) διάνυσμα $q = (q_0, \dots, q_N)$ τέτοιο ώστε $H_d^{(N+1)} \cdot q = 0$. Αυτό το q όμως, είναι το μοναδικό (έως βαθμωτού πολλαπλασιασμού) διάνυσμα που μηδενίζει τις N πρώτες γραμμές του $H_d^{(N+1)}$ (θεωρούμε την τελευταία στήλη ως στήλη σταθερών συντελεστών του $N \times N$ γραμμικού συστήματος που ορίζουν οι άλλες στήλες, του οποίου η ορίζουσα είναι $\det(H_d^{(N)}) \neq 0$) και το μοναδικό (έως βαθμωτού πολλαπλασιασμού) διάνυσμα που μηδενίζει τις N τελευταίες γραμμές του $H_d^{(N+1)}$ (μιας κι αυτές είναι οι N πρώτες γραμμές του $H_{d+1}^{(N+1)}$). Έπειτα, ο πίνακας $H_{d+1}^{(N+1)}$ έχει επίσης βαθμό N, κι επειδή κάθε στοιχείο στον πυρήνα του πρέπει να μηδενίζει τις N τελευταίες γραμμές του $H_d^{(N+1)}$, συμπεραίνουμε ότι ο πυρήνας του παράγεται από το q. Έτσι αποδεικνύεται επαγωγικά ότι το q μηδενίζει όλους τους πίνακες $H_{d+r}^{(N+1)}, \quad r \in \mathbb{N}$, δηλαδή για κάθε $M \ge d$, $a_M q_0 + a_{M+1} q_1 + \dots + a_{M+N} q_N = 0$, οπότε η $u(T)$ είναι τυπικό ανάπτυγμα Taylor στοιχείου του $K(T)$. □

Από το (i) παίρνουμε ότι η $Z(X,t)$ αντιστοιχεί σε στοιχείο του $\mathbb{Q}_\ell(t)$, άρα από το παραπάνω λήμμα παίρνουμε ότι οι ορίζουσες Hankel των συντελεστών της $Z(X,t)$ «τελικά μηδενίζονται». Όμως οι συντελεστές είναι ήδη εντός του $\mathbb{Q}$ και χρησιμοποιώντας το ίδιο κριτήριο παίρνουμε ότι η $Z(X,t)$ αντιστοιχεί σε στοιχείο του $\mathbb{Q}(t)$ (δείξαμε δηλαδή και κάτι γενικό, ότι $\mathbb{Q}[[t]] \cap \mathbb{Q}_\ell(t) = \mathbb{Q}(t)$ - χωρίς ωστόσο να δείξουμε ότι τα $P_i(t)$ ανήκουν στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[t]$).

$\boxed{\textbf{(i)}\Rightarrow\textbf{(iii)}}$ Για να απλοποιήσουμε λίγο τον συμβολισμό, θα γράφουμε H^i στη θέση του $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ και $\beta_i := \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i$, όπου οι β_i είναι πεπερασμένοι αριθμοί λόγω της περατότητας **(ℓ-6)** κι επίσης $\beta_i = \beta_{2d-i}$ λόγω της δυϊκότητας Poincaré **(ℓ-5)**. Αν ακόμα γράφουμε $< x, y > := \mathrm{tr}(x \cup y)$ για το τέλειο ταίριασμα $H^i \times H^{2d-i}(d) \to \mathbb{Q}_\ell$ που έχουμε από τη δυϊκότητα Poincaré **(ℓ-5)**, τότε για τη δράση, F^*, του Frobenius, F, πάνω σε αυτό το ταίριασμα, έχουμε

$$< F^* x, y >= F < x, (F^*)^{-1} y >=< x, (F^*)^{-1} y >$$

μιας και η δράση του F στο $\mathbb{Q}_\ell$ είναι τετριμμένη. Αυτό είναι το ίδιο με τη μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} H^{2d-1} & \xrightarrow{\cong} & (H^i(d))^\vee \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (F^*)^{-1}} & & \Big\downarrow \\ H^{2d-1} & \xrightarrow{\cong} & (H^i(d))^\vee \end{array}$$

όπου τα οριζόντια βέλη είναι ο ισομορφισμός $y \mapsto (x \mapsto < x, y >)$ και το δεξί κάθετο βέλος είναι η δράση του F στον δυϊκό του $H^i(d)$, που είναι η $f \mapsto f \circ F^*$. Επιπλέον ο F δρα στον $\mathbb{Q}_\ell(d)$ με πολλαπλασιασμό με q^{-d} (πράγματι, δρα σαν τον αντίστροφο του αριθμητικού Frobenius φ και ο φ δρα στις ρίζες της μονάδας $\mu_{\ell^n} \cong \mathbb{Z}_{\ell^n}$ με πολλαπλασιασμό με q).

Αν, λοιπόν, A είναι ο πίνακας της δράσης του F στο H^i, και B είναι ο πίνακας της δράσης του F στο H^{2d-i}, τότε $q^{-d} A^T$ είναι ο πίνακας της δράσης του F στο $(H^i(d))^\vee$ κι άρα (από το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα) ο B είναι όμοιος με τον πίνακα $(q^{-d}A^T)^{-1} = q^d(A^T)^{-1}$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} P_i\left(\frac{1}{q^d t}\right) &= \det\left(1 - F\frac{1}{q^d t}\middle| H^i\right) \\ &= (q^d t)^{-\beta_i}\det(F|H^i)\cdot(-1)^{\beta_i}\det(1 - F^{-1}q^d t|H^i) \\ &= (q^d t)^{-\beta_i}\det(F|H^i)\cdot(-1)^{\beta_i}\det(1 - Ft|H^{2d-i}) \end{aligned}$$

Επίσης βλέπουμε ότι αν οι ιδιοτιμές του A είναι $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\beta_i}$, τότε οι ιδιοτιμές του B είναι $q^d\alpha_1^{-1}, \ldots, q^d\alpha_{\beta_i}^{-1}$. Έτσι

$$\det(F|H^i)\det(F|H^{2d-i}) = q^{d\beta_i}, \quad \text{για } i \neq d.$$

Για $i = d$, συμβολίζουμε με N_+ και N_- το πλήθος των ιδιοτιμών του F στο H^d που ισούνται με $q^{\frac{d}{2}}$ και $-q^{\frac{d}{2}}$ αντίστοιχα. Οι υπόλοιπες ιδιοτιμές σχηματίζουν ζεύγη $\beta \neq q^d\beta^{-1}$. Έτσι:

$$\det(F|H^d) = (-1)^{N_-}q^{\frac{d}{2}(N_+ + N_-)}q^{d(\beta_d - N_+ - N_-)/2} = (-1)^{N_-}q^{d\beta_d/2}.$$

Υπολογίζουμε, χρησιμοποιώντας τον τύπο που έχουμε από το (i):

$$\begin{aligned} Z\left(X, \frac{1}{q^d t}\right) &= \prod_{i=0}^{2d}\det\left(1 - F\frac{1}{q^d t}\middle| H^i\right)^{(-1)^{i+1}} \\ &= (q^d t)^{\chi}q^{-\frac{d\chi}{2}}(-1)^{N_- - \chi}\prod_{i=0}^{2d}\det(1 - Ft|H^{2d-i})^{(-1)^{i+1}} \\ &= (-1)^{N_- - \chi}q^{\frac{d\chi}{2}}t^{\chi}Z(X, t), \end{aligned}$$

όπου $\chi = \sum_{i=0}^{2d}(-1)^i\beta_i$ είναι η χαρακτηριστική Euler-Poincaré.

Απόδειξη του (i) Η απόδειξη αυτή θα γίνει μέσω τριών λημμάτων που θα μας φέρουν έναν υπολογισμό μακριά από το επιθυμητό αποτέλεσμα. Το πρώτο λήμμα δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για την τοπική πολλαπλότητα τομής, συγκεκριμένα για το αν $(\Gamma_\phi \cdot \Delta)_P = 1$, όπου $\phi : X \to X$ είναι μια κανονική απεικόνιση.

Λήμμα 4.2.4. *Έστω $\phi : X \to X$ μια κανονική απεικόνιση, κι έστω $P \in X$ ένα σταθερό σημείο της ϕ. Αν το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του διαφορικού $(d\phi)_P : Tgt_P(X) \to Tgt_P(X)$, τότε $(\Gamma_\phi \cdot \Delta)_P = 1$*

Απόδειξη. Έχουμε το εξής γενικότερο κριτήριο ελέγχου: Έστω X μια μη-ιδιόμορφη πολλαπλότητα, κι έστω Y, Z κλειστές υποπολλαπλότητες της X. Έστω ότι το σημείο P είναι μια ανάγωγη συνιστώσα της τομής $Y \cap Z$. Αν

(α΄) Y και Z είναι μη-ιδιόμορφες στο P,

(β΄) $\dim Y + \dim Z = \dim X$ (αυτό σημαίνει ότι οι Y και Z τέμνονται γνήσια στο P, δηλαδή codim$P$ = codim$Y$ + codim$Z$), και

(γ΄) $\mathrm{Tgt}_P(Y) \cap \mathrm{Tgt}_P(Z) = 0$ (αυτό σημαίνει ότι οι Y και Z τέμνονται εγκάρσια στο P),

τότε $(Y \cdot Z)_P = 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το κριτήριο για το σημείο (P, P) που βρίσκεται στην τομή $\Gamma_\phi \cap \Delta$, εντός του γινομένου $X \times X$. Γνωρίζουμε ότι το γράφημα Γ_ϕ και η διαγώνιος Δ είναι ισόμορφες πολλαπλότητες με την X, άρα οι δύο πρώτες συνθήκες του κριτηρίου ικανοποιούνται. Επειδή ο εφαπτόμενος χώρος $\mathrm{Tgt}_{(P,P)}(\Gamma_\phi)$ είναι το γράφημα του διαφορικού $(d\phi)_P : \mathrm{Tgt}_P(X) \to \mathrm{Tgt}_P(X)$ κι ο εφαπτόμενος χώρος $\mathrm{Tgt}_{(P,P)}(\Delta)$ είναι το γράφημα της ταυτοτικής απεικόνισης $\mathrm{id}_{\mathrm{Tgt}_P(X)} : \mathrm{Tgt}_P(X) \to \mathrm{Tgt}_P(X)$, έχουμε ότι η τρίτη συνθήκη του παραπάνω κριτηρίου ικανοποιείται αν και μόνο αν το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του $(d\phi)_P$. □

Το δεύτερο λήμμα δίνει έναν τύπο ίχνους για τους συντελεστές N_m της $Z(X,t)$, όπου κάθε N_m είναι και το πλήθος σταθερών σημείων της m-οστής δύναμης (εδώ ως πολλαπλασιασμό εννοούμε τη σύνθεση ενδομορφισμών), F^m, του μορφισμού Frobenius, F. Πράγματι, ο μορφισμός Frobenius δρα στα σημεία της πολλαπλότητας $\overline{X}$ υψώνοντας στην q-οστή δύναμη τις συντεταγμένες, οπότε τα σταθερά σημεία του μορφισμού είναι ακριβώς αυτά που έχουν συντεταγμένες στο $\mathbb{F}_q$ (τα $\mathbb{F}_q$-ρητά σημεία της X) και τα σταθερά σημεία του F^m είναι ακριβώς αυτά που έχουν συντεταγμένες στο $\mathbb{F}_{q^m}$ (τα $\mathbb{F}_{q^m}$-ρητά σημεία της X).

Λήμμα 4.2.5. *Συμβολίζουμε με $\overline{X}^F$ το σύνολο των σταθερών σημείων της $\overline{X}$ μέσω του F. Ισχύει ότι:*

$$\left|\overline{X}^F\right| = \sum_{i=0}^{2d}(-1)^i tr(F^*|H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell)).$$

Αυτό συνεπάγεται και ότι για κάθε $m \geq 1$

$$N_m = \left|\overline{X}^{F^m}\right| = \sum_{i=0}^{2d}(-1)^i tr(F^{*m}|H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell)), \tag{$\star$}$$

διότι ο F^m είναι ο Frobenius που θα παίρναμε για την $\overline{X}$ αν «ξεκινούσαμε» από την πολλαπλότητα $X(\mathbb{F}_{q^m})$ (δηλαδή αυτήν που έχει ως σημεία τα $\mathbb{F}_{q^m}$-ρητά σημεία της X).

Απόδειξη. Με βάση όσα έχουμε πει για τη σχέση των σταθερών σημείων του Frobenius και των $\mathbb{F}_q$-ρητών σημείων της X, αν δείξουμε ότι τα σταθερά σημεία του Frobenius έχουν τοπική πολλαπλότητα τομής 1, τότε θα ισχύει ότι $\left|\overline{X}^F\right| = |X(\mathbb{F}_q)| = (\Gamma_F \cdot \Delta)$, και το επιθυμητό αποτέλεσμα προκύπτει μέσω του τύπου ίχνους Lefschetz (**ℓ-8**).

Έστω P ένα σταθερό σημείο του F. Για τον υπολογισμό της τοπικής πολλαπλότητας τομής $(\Gamma_F \cdot \Delta)$ μπορούμε να περιοριστούμε σε μια αφινική περιοχή U του P, έστω $U = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_d])$. Για κάθε $i \in \{1,\ldots,d\}$ έχουμε $\mathrm{pr}_i \circ F = \mathrm{pr}_i^q$ (όπου εδώ εννοούμε τον γνωστό πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{F}$, μιας και η προβολή pr_i μας δίνει την i-οστή συντεταγμένη ενός σημείου, δηλαδή ένα στοιχείο του $\mathbb{F}$). Υπολογίζουμε:

$$(d\mathrm{pr}_i)_{F(P)} \circ (dF)_P = (d(\mathrm{pr}_i \circ F))_P = (d\mathrm{pr}_i^q)_P = q\mathrm{pr}_i^{q-1}(d\mathrm{pr}_i)_P = 0,$$

δηλαδή $(dF)_P = 0$. Έτσι, από το λήμμα 4.2.4, συμπεραίνουμε ότι όντως $(\Gamma_F \cdot \Delta)_P = 1$, όπως θέλαμε. □

Το τρίτο λήμμα είναι πιο στοιχειώδες και μετατρέπει εκφράσεις με ορίζουσες σε εκφράσεις με ίχνη, και αντίστροφα.

Λήμμα 4.2.6. *Αν $F : V \to V$ είναι ένας ενδομορφισμός ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου πάνω από το k, ισχύει η ακολουθη ταυτότητα δυναμοσειρών:*

$$\log\left(\frac{1}{\det(1-Ft|V)}\right) = \sum_{m\geq 1} tr(F^m|V)\frac{t^m}{m}. \tag{$\star\star$}$$

Απόδειξη. Αφού πιθανώς επεκτείνουμε το σώμα k, μπορούμε να υποθέσουμε ότι παραγοντοποιείται το πολυώνυμο $S(t) = \det(1 - Ft|V)$ ως $S(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - c_i t)$ κι ότι υπάρχει βάση του V ώστε ο αντίστοιχος πίνακας του F να είναι άνω τριγωνικός με τα c_i στη διαγώνιο. Τότε ο πίνακας του F^m θα είναι επίσης άνω τριγωνικός με τα c_i^m στη διαγώνιο, οπότε έχουμε $\mathrm{tr}(F^m|V) = \sum_{i=1}^{n} c_i^m$. Χρησιμοποιώντας την γνωστή έκφραση του λογαρίθμου ως τυπική δυναμοσειρά παίρνουμε τις ισότητες

$$\log\left(\frac{1}{1 - c_i t}\right) = \sum_{m \geq 1} c_i^m \frac{t^m}{m}, \quad \text{για κάθε } i \in \{1, \ldots, n\},$$

οπότε αν αθροίσουμε πάνω από το i προκύπτει η επιθυμητή ταυτότητα. □

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το (i) απλά με έναν υπολογισμό:

$$\begin{aligned}
Z(X, t) &= \exp\left(\sum_{m \geq 1} N_m \frac{t^m}{m}\right) \overset{(\star)}{=} \exp\left(\sum_{m \geq 1}\left(\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \mathrm{tr}(F^{*m}|H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))\right)\frac{t^m}{m}\right) \\
&= \prod_{i=0}^{2d}\left(\exp\left(\sum_{m \geq 1} \mathrm{tr}(F^{*m}|H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))\frac{t^m}{m}\right)\right)^{(-1)^i} \\
&\overset{(\star\star)}{=} \prod_{i=0}^{2d} \det(1 - F^* t|H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} = \prod_{i=0}^{2d} P_i(t)^{(-1)^{i+1}}
\end{aligned}$$

όπου $P_0(t) = 1 - t$, διότι ο F^* δρα ταυτοτικά στο $H^0(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell$ (από εδώ βλέπουμε κι ότι $\beta_0 = 1$), και $P_{2d}(t) = 1 - q^d t$, διότι ο F^* δρα στο $H^{2d}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \cong (H^0(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(d))^\vee \cong \mathbb{Q}_\ell(-d)$ με πολλαπλασιασμό με q^d (και βέβαια από την δυϊκότητα Poincaré έχουμε επίσης ότι $\beta_{2d} = \beta_0 = 1$). □

Όσον αφορά στην τρίτη εικασία του Weil, θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τα βασικά αποτέλεσματα που οδηγούν στην απόδειξή της.

Αρχικά, σχετικά με το ότι η χαρακτηριστική Euler-Poincaré χ ισούται με τον αριθμό αυτοτομής $(\Delta \cdot \Delta)$ της διαγωνίου Δ του γινομένου $\overline{X} \times \overline{X}$, παίρνουμε το εξής από τον τύπο ίχνους Lefschetz **(ℓ-8)** για την ταυτοτική απεικόνιση της πολλαπλότητας $\overline{X}$:

$$(\Delta \cdot \Delta) = \sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \mathrm{tr}(\mathrm{id}^*|H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)),$$

κι επειδή $\mathrm{tr}(\mathrm{id}^*|H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) = \beta_i$, προκύπτει το ζητούμενο.

Για το βασικό κομμάτι της τρίτης εικασίας που σχετίζεται με τους αριθμούς Betti, σημειώνουμε ότι υπάρχει η εξής ισοδύναμη διατύπωση:

> *Αν η $\overline{X}$ ανυψώνεται σε πολλαπλότητα X_1 χαρακτηριστικής μηδέν, τότε οι αριθμοί Betti της X, β_i, είναι ίσοι με τους αριθμούς Betti της X_1, όταν αυτή θεωρείται ως μιγαδική πολλαπλότητα.*

Όμως αυτό προκύπτει από το συνδυασμό των ιδιοτήτων **(ℓ-9)** και **(ℓ-10)** της ℓ-αδικής συνομολογίας. Το πρώτο αποδεικνύεται πιο γενικά για οποιαδήποτε μη-ιδιόμορφη πολλαπλότητα πάνω από το $\mathbb{C}$ και για ομάδες συνομολογίας με συντελεστές σε οποιαδήποτε πεπερασμένη ομάδα (βλ. [8], κεφάλαιο 21). Το δεύτερο είναι συνέπεια του θεωρήματος λείας αλλαγής βάσης (στα αγγλικά smooth base-change theorem, βλ. [8], κεφάλαιο 20).

4.2γ΄ Περί της εικασίας Riemann πάνω από πεπερασμένα σώματα

Παρατήρηση 4.2.7. *Έστω Y ένα σχήμα πεπερασμένου τύπου πάνω από το $Spec(\mathbb{Z})$. Το σώμα υπολοίπων ενός κλειστού σημείου y του Y είναι πεπερασμένο, έστω τάξης $N(y)$. Η* συνάρτηση ζήτα *του Y ορίζεται να είναι η*

$$\zeta(Y,s) := \prod_y \frac{1}{1-N(y)^{-s}}$$

όπου το y «τρέχει» πάνω από τα κλειστά σημεία του Y. Αποδεικνύεται ότι το γινόμενο συγκλίνει και ορίζει την $\zeta(Y,s)$ ως ολόμορφη συνάρτηση για $\Re(s) > \dim Y$. Για παράδειγμα, αν $Y = Spec(\mathbb{Z})$, τότε η $\zeta(Y,s)$ είναι η αρχική συνάρτηση ζήτα Riemann. Μια πολλαπλότητα X πάνω από το $\mathbb{F}_q$ μπορεί να θεωρηθεί ως σχήμα πεπερασμένου τύπου πάνω από το $Spec(\mathbb{Z})$ μέσω της σύνθεσης

$$X \to Spec(\mathbb{F}_q) \to Spec(\mathbb{Z})$$

όπου ο δεύτερος μορφισμός είναι αυτός που επάγεται από τον ομομορφισμό $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{F}_q$. Είναι σαφές ότι

$$Z(X,t) = \prod_x \frac{1}{1-t^{\deg x}},$$

όπου τα x είναι τα κλειστά σημεία της X, οπότε

$$\zeta(X,s) = Z(X,q^{-s}).$$

Η εικασία Riemann για την X λέει ότι η $\zeta(X,s)$ έχει τους πόλους της στις ευθείες με $\Re(s) \in \{0,1,2,\ldots,\dim X\}$ και μηδενίζεται στις ευθείες με $\Re(s) \in \{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots,\frac{\dim X-1}{2}\}$. Συγκεκριμένα για καμπύλες, που είναι μονοδιάστατες πολλαπλότητες, έχουμε

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

και όλες τις ρίζες της στην ευθεία $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Αυτή η ομοιότητα είναι κι ο λόγος που η τελευταία εικασία του Weil έχει αυτό το όνομα.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι ισχύει το βασικό (και μακράν πιο δύσκολο) κομμάτι της εικασίας, ότι δηλαδή οι αντίστροφοι των ριζών της $Z(X,t)$ είναι αλγεβρικοί ακέραιοι κι έχουν απόλυτες τιμές $q^{i/2}$, για $i \in \{1,3,\ldots,2d-1\}$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι τα πολυώνυμα $P_i(t)$, στην έκφραση της $Z(X,t)$ ως ρητή συνάρτηση, έχουν στην πραγματικότητα ακέραιους συντελεστές. Αυτό θα το κάνουμε σε δύο βήματα:

Λήμμα 4.2.8. *Έστω ℓ οποιοσδήποτε πρώτος αριθμός, κι έστω $f(t) = g(t)/h(t)$, όπου*

$$f(t) \in 1 + t\cdot\mathbb{Z}_\ell[[t]]$$
$$g(t), h(t) \in 1 + t\cdot\mathbb{Q}_\ell[t].$$

Αν τα g και h είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε οι συντελεστές τους ανήκουν στους ℓ-αδικούς ακέραιους $\mathbb{Z}_\ell$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι οι συντελεστές των g και h έχουν ℓ-αδικές απόλυτες τιμές ≤ 1. Αφού ενδεχομένως αντικαταστήσουμε το $\mathbb{Q}_\ell$ με μια πεπερασμένη επέκτασή του, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $h(t)$ διασπάται ως $h(t) = \prod_{i=1}^{\deg(h)}(1-c_i t)$. Αν $|c_i|_\ell > 1$, τότε $\left|c_i^{-1}\right|_\ell < 1$, κι άρα η δυναμοσειρά $f(c_i^{-1})$ συγκλίνει. Τότε όμως

$$f(t)\cdot h(t) = g(t) \Rightarrow f(c_i^{-1})\cdot h(c_i^{-1}) = g(c_i^{-1})$$

με $h(c_i^{-1}) = 0$ και $g(c_i^{-1}) \neq 0$ (αφού τα g και h είναι πρώτα μεταξύ τους), το οποίο είναι άτοπο. Επομένως για κάθε $i \in \{1, \dots, \deg(h)\}$ έχουμε ότι $|c_i|_\ell \leq 1$, οπότε $h(t) \in \mathbb{Z}_\ell[t]$.

Έπειτα έχουμε ότι $f(t)^{-1} \in 1 + t \cdot \mathbb{Z}_\ell[[t]]$, κι εφαρμόζοντας το επιχείρημα της προηγούμενης παραγράφου για το $f(t)^{-1}$ παίρνουμε ότι $g(t) \in \mathbb{Z}_\ell[t]$, όπως θέλαμε. $\square$

Υπενθυμίζουμε ότι στην ενότητα 4.1 μελετήσαμε τη σχέση μεταξύ της συνάρτησης ζήτα Riemann, ζ, και της συνάρτησης ζήτα, $Z(X,t)$, μιας πολλαπλότητας X, ορισμένης πάνω από ένα πεπερασμένο σώμα. Εκεί δείξαμε ότι η $Z(X,t)$ γράφεται ως γινόμενο

$$Z(X,t) = \prod_{x \in (X)_{\mathrm{cl}}} \frac{1}{1 - t^{\deg x}},$$

άρα $Z(X,t) \in 1 + t \cdot \mathbb{Z}[[t]]$ (χρησιμοποιώντας ότι τα κλάσματα που εμφανίζονται στο γινόμενο γράφονται σαν τυπικές δυναμοσειρές, και συγκεκριμένα σαν γεωμετρικές σειρές).

Πρόταση 4.2.9. *Έστω*

$$Z(X,t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

όπου $P(t), Q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ είναι πρώτα μεταξύ τους. Αν επιλέξουμε τα $P(t)$ και $Q(t)$ να έχουμε ως σταθερούς συντελεστές το 1, τότε όλοι οι συντελεστές τους θα είναι στο $\mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Οι υποθέσεις του λήμματος 4.2.8 ικανοποιούνται για όλους τους πρώτους ℓ, ακόμα και για τον p. Επομένως οι συντελεστές των P και Q είναι ℓ-αδικοί ακέραιοι για κάθε ℓ, που σημαίνει ότι είναι στην πραγματικότητα ακέραιοι. $\square$

Δεδομένης της ισχύος της εικασίας Riemann, παίρνουμε ότι τα $P_i(t)$ είναι πρώτα μεταξύ τους. Επομένως από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι τα

$$P(t) = \prod_{i:\text{περιττός}} P_i(t), \quad Q(t) = \prod_{i:\text{άρτιος}} P_i(t),$$

έχουν ακέραιους συντελεστές. Επίσης για κάθε i οι αντίστροφοι των ριζών του $P_i(t)$ είναι αλγεβρικοί ακέραιοι με (μιγαδική) απόλυτη τιμή $q^{i/2}$, άρα τελικά $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$, όπως θέλαμε.

Η περιγραφή της απόδειξης του δυσκολότερου κομματιού της εικασίας Riemann για πεπερασμένα σώματα, όπως αποκαλείται, είναι κάτι που ξεφεύγει αρκετά από το στόχο της παρούσας εργασίας - αρκεί να αναφέρουμε ότι αυτή ήταν που ουσιαστικά έδωσε το μετάλλιο Fields στον Deligne. Μια εκτενής παρουσίση αυτής της απόδειξης μπορεί να βρεθεί φυσικά στα τελευταία κεφάλαια των σημειώσεων του Milne,[8].

Βιβλιογραφία

[1] Kenji Ueno. *Algebraic Geometry 1: From Algebraic Varieties to Schemes*. Vol. 185 Translations of Mathematical Monographs. Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato, Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. xx+154. ISBN: 0-8218-0862-1. URL: https://doi.org/10.1090/mmono/185.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No.52.

[3] Kenji Ueno. *Algebraic Geometry 2: Sheaves and Cohomology*. Vol. 197 Translations of Mathematical Monographs. Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato, Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, pp. xx+184. ISBN: 0-8218-1357-9. URL: https://doi.org/10.1090/mmono/197.

[4] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné): I. Le langage des schémas*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 4 (1960), p. 5–228.

[5] George M. Bergman. *On diagram-chasing in double complexes*. Theory and Applications of Categories 26 (2012), p. 60-96.

[6] Nathan Jacobson. *Basic Algebra II*. W. H. Freeman & Company, San Francisco, 1980.

[7] Kunihiko Kodaira. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*. Springer-Verlag, New York, January 1986.

[8] James S. Milne. *Lectures on Étale Cohomology*(v2.21, 2013). Available at www.jmilne.org/math/. 202 pages.

[9] James S. Milne. *Algebraic Geometry*(v6.02, 2017). Available at www.jmilne.org/math/. 221 pages.

[10] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[11] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton U.P. 1980.

[12] Weibel, Charles A. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Vol. 38. Cambridge University Press, 1994. ISBN 978-0-521-55987-4. MR 1269324. OCLC 36131259.

[13] André Weil. *Numbers of solutions of equations in finite fields*. Bull. AMS 55 (1949), p. 497-508.

[14] William Fulton (1998). *Intersection Theory* (2nd ed.). Springer. ISBN 9780387985497.