Δημητρης Καρδαρης

Αριθμητικη Τοπολογια

Απο την Θεωρια Αριθμων στην Φυσικη

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών
Αθήνα 21 Σεπτεμβρίου 2017

Εισηγητης: Αριστείδης Κοντογεώργης

Επιτροπη

Ιωάννης Εμμανουήλ (ΕΚΠΑ)

Αριστείδης Κοντογεώργης (ΕΚΠΑ)

Σοφία Λαμπροπούλου (ΕΜΠ)

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η πιο ενδελεχής διερεύνηση κάποιων εννοιών από τον κλάδο της Αριθμητικής Τοπολογίας που συνδέει, κάπως απροσδόκητα, βασικά αντικείμενα της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών με αυτά της Τοπολογίας 3-διαστάσεων.

Η εναρκτήρια ιδέα της θεωρίας είναι να εκφράσει αυστηρά τους περίφημους νόμους αντιστροφής με έναν αμιγώς τοπολογικό τρόπο. Η δυνατότητα αυτή επιτυγχάνεται ερμηνεύοντας τα πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου αλγεβρικών ακεραίων ενός αριθμητικού σώματος ως κόμβους. Στο πρώτο κεφάλαιο, αφού γίνει αρχικά η κατάλληλη εισαγωγή στις βασικές έννοιες του λεγόμενου MKR λεξικού, παρουσιάζουμε αναλογίες μεταξύ θεωρημάτων στη θεωρία Alexander-Fox για τις πολυωνυμικές αναλλοίωτες της Θεωρίας Κόμβων και της Θεωρίας Iwasawa στη Θεωρία Κλάσεων Σωμάτων. Οι αναλογίες αυτές θα γίνουν ορατές τόσο σε επίπεδο ασυμπτωτικών τύπων στην ομολογία όσο και συναρτήσεων τύπου ζήτα. Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό εκφράζοντας μια πιθανή μη-αβελιανή γενίκευση του ολοκληρωτικού τύπου του Gauss για τη διασταύρωση κρίκων μέσω ολοκληρωμάτων τροχιάς στη Φυσική. Με βάση τα παραπάνω, η σχέση αυτή αναμένεται να αντιστοιχεί σε μη-μεταθετικούς νόμους αντιστροφής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετάμε ακριβώς μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζοντας τις παρατηρήσεις του Kapranov για την ύπαρξη δομικών αναλογιών μεταξύ της αντιστοιχίας Langlands υψηλοτέρων διαστάσεων και των εκτεταμένων τοπολογικών κβαντικών θεωρίων πεδίου. Η ανάλυση αυτή πραγματοποιείται μέσω μιας πιο φυσικής γλώσσας, αυτή των κατηγοριών Waldhausen, κάνοντας περαιτέρω χρήση εννοιών από το οπλοστάσιο ανωτέρων Κατηγοριών και Ομοτοπικής Άλγεβρας. Ως μια βαθιά εφαρμογή αυτού του κύκλου ιδεών, παρουσιάζεται η αναλογία μεταξύ πολλαπλοτήτων Shimura και ολοκληρωμάτων Feynman. Αναπτύσσονται επίσης παρεμφερείς έννοιες της Κβαντικής Τοπολογίας και συζητάται η σχέση τους με την παραπάνω δυϊκότητα.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος, χρησιμοποιούμε αποτελέσματα από τα δύο προηγούμενα κεφάλαια, προκειμένου να εξετάσουμε την πιθανότητα μιας αντίστροφης κατεύθυνσης και πιο συγκεκριμένα τη μεταφορά ιδεών από τις σύγχρονες κατασκευές της κβαντικής φυσικής στον κλάδο της θεωρίας αριθμών. Ιδιαιτέρως, ενδιαφερόμαστε για τη δυνατότητα ύπαρξης κβαντικών αναλλοιώτων στην αριθμητική που θα κωδικοποιούν σημαντικές επιπρόσθετες πληροφορίες αντικειμένων στην αριθμητική γεωμετρία και δη για την θεωρία τομής αριθμητικών σχημάτων Arakelov που έχουν εξέχον αριθμοθεωρητικό ενδιαφέρον. Ως εκ τούτου, περιγράφουμε μια πρόσφατη προσπάθεια να κατασκευασθεί μια τέτοια θεωρία βαθμίδας για τη θεωρία αριθμών και διατυπώνουμε πιθανές κατευθύνσεις για τη γενίκευση της.

Τέλος, στο Παράρτημα ο αναγνώστης θα βρει χρήσιμες έννοιες που βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των κεφαλαίων.

Σε αυτό το σημείο θεωρώ αναγκαίο να εκφράσω τις βαθύτερες ευχαριστίες μου στα μέλη ΔΕΠ της επιτροπής, την Καθηγήτρια κα. Λαμπροπούλου Σοφία (ΕΜΠ) και τον Καθηγητή κ. Εμμανουήλ Ιωάννη (ΕΚΠΑ), οι οποίοι συνέβαλλαν σημαντικά στη μαθηματική μου εκπαίδευση με τη συνεχόμενη υποστήριξη τους. Η διπλωματική αυτή αποτελεί οργανική συνέχεια της προπτυχιακής μου εργασίας, η οποία υπήρξε για εμένα έναυσμα υπό την καθοδήγηση της κας. Λαμπροπούλου και ως εκ τούτου την ευχαριστώ ιδιαιτέρως. Κλείνοντας, θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή ευγνωμοσύνη μου στον Καθηγητή κ. Κοντογεώργη Αριστείδη του οποίου οι γνώσεις και η μεταδοτικότητα έμελλε να αποτελέσουν για εμένα εφαλτήριο σε νέους μαθηματικούς ορίζοντες. Δεν μπορώ όμως να παραλείψω να αναφερθώ επιπλέον στην ευπροσηγορία και στην κατανόηση που έχει ως δάσκαλος, τα όποια έμελλαν να με εμπνεύσουν και ως άνθρωπο. Χωρίς την πολύτιμη βοήθεια και τον χρόνο του, η εργασία αυτή θα ήταν κυριολεκτικά αδύνατη.

Δ. Κάρδαρης, Αθήνα 2017.

Μέρος I

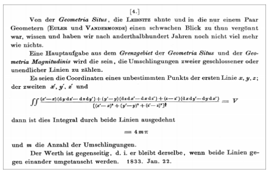
Αριθμητική Τοπολογία

Κεφάλαιο 1

Η αναλογία του Gauss

1.1 Αριθμητική Τοπολογία

Ήταν γνωστό στον ίδιο τον Gauss η σύνδεση του νόμου της τετραγωνικής αντιστροφής με τους λεγόμενους αριθμούς σύνδεσης $lk(L, K)$ οι οποίοι μετρούν τον τρόπο που δύο κόμβοι L, K είναι μπλεγμένοι μεταξύ τους. Μάλιστα, ο ολοκληρωτικός τύπος του Gauss επαναχρησιμοποιήθηκε από τον E. Witten [4], [5] ως ένα Chern-Simons ολοκλήρωμα τροχιάς $\int e^{\frac{-iS}{\hbar}}$, του οποίου το αλγεβρικό ανάλογο πάνω από πεπερασμένα σώματα είναι το (τετραγωνικό) άθροισμα Gauss. Η βαθύτερη διαίσθηση του Gauss, μας προξενεί τόση έκπληξη, όσο θα προξενούσε σε έναν αρχαιολόγο η ανακάλυψη ενός smart phone ανάμεσα στα κτερίσματα ενός ασύλητου αρχαίου τάφου.



[4.]

Von der *Geometria Situs*, die LEIBNITZ ahnte und in die nur einem Paar Geometern (EULER und VANDERMONDE) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts.

Eine Hauptaufgabe aus dem *Grenzgebiet* der *Geometria Situs* und der *Geometria Magnitudinis* wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.

Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der ersten Linie x, y, z; der zweiten x', y', z' und

$$\iint \frac{(x'-x)(dy\,dz'-dz\,dy')+(y'-y)(dz\,dx'-dx\,dz')+(z-z')(dx\,dy'-dy\,dx')}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = V$$

dann ist dies Integral durch beide Linien ausgedehnt

$$= 4m\pi$$

und m die Anzahl der Umschlingungen.

Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegen einander umgetauscht werden. 1833. Jan. 22.

Σχήμα 1.1: Οι σημειώσεις του Gauss

Οι ιδέες αυτές συγκεντρώνονται στο λεξικό MKR (Mazur-Kapranov-Reznikov) το οποίο μεταφέρει έννοιες από την τοπολογία των 3-διάστατων πολλαπλοτήτων σε έννοιες των σωμάτων αριθμών. Ένας κόμβος (αντ. κρίκος, επιφάνεια Seifert) αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες (αντ. ιδεώδες, κύριο ιδεώδες) του δακτυλίου των ακεραίων ενός σώματος αριθμών.

Παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίας σύμφωνα με το λεξικό MKR [8],[7],[6].

Αριθμητική	Τοπολογία
πρώτα ιδεώδη	κόμβοι
ιδεώδη	κρίκοι
ομάδα κλάσεων ζ-συνάρτηση του Riemann	$H_1(M,\mathbb{Z})$ ζ-συνάρτηση του Selberg
$\begin{array}{ccc} K & \mathcal{O}_K & p\mathcal{O}_K = P_1^e \cdots P_r^e \\ \vert & \vert & \vert \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \end{array}$	$\begin{array}{cc} M & L = K_1 \cup \cdots \cup K_r \\ \downarrow & \downarrow \\ S^3 & S^1 \to S^3 \end{array}$
Αυτομορφισμός Frobenius	Περιστροφή γύρω από τον κύκλο

1.2 Κόμβοι και πρώτα ιδεώδη

1.2α΄ Τοπολογία

Ξεκινούμε με τον ορισμό του διακλαδιζόμενου καλύμματος 3-πολλαπλοτήτων [9, 22.1]

Ορισμός 1.2.1. *Μία συνεχής συνάρτηση $f : M \to N$ μεταξύ διαφορισίμων πολλαπλοτήτων διάστασης 3 θα λέγεται ένα διακλαδισμένο τοπολογικό κάλυμμα αν υπάρχει ένα link $R \subset N$, εφοδιασμένο με μια εμφυτευμένη σωληνοειδή περιοχή (tubular neighborhood), ώστε το $f^{-1}(R)$ να είναι ένα link του M, η*

$$f : M \backslash f^{-1}(R) \to N \backslash R,$$

να είναι ένα τοπολογικό κάλυμμα.

Θεωρούμε τον δίσκο $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ και την συνάρτηση $f_e : D^2 \to D^2$, με $f_e(z) = z^e$, όπου έχουμε ταυτίσει τον D^2 με τον μιγαδικό μοναδιαίο δίσκο.

Επίσης απαιτούμε για κάθε $x \in f^{-1}(R)$ να υπάρχει περιοχή V του x και περιοχή U του $f(x)$ και ομοιομορφισμοί $\phi : V \to D^2 \times D^1$ και $\psi : U \to D^2 \times D^1$ ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} x \in U & \xrightarrow{\psi} & D^2 \times D^1 \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow f_e \times \mathrm{Id}_{D^1} \\ f(x) \in V & \xrightarrow{\phi} & D^2 \times D^1 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Θεώρημα 1.2.2 (Alexander Branched Cover)**.** *Έστω M μία συμπαγής προσανατολίσιμη πολλαπλότητα διάστασης 3 χωρίς σύνορο. Τότε αυτή είναι ένα διακλαδιζόμενο κάλυμμα της S^3.*

Απόδειξη. [9, ϑ. 22.2] □

Ας σημειωθεί ότι στην παραπάνω κατασκευή οι εμφυτευμένοι κόμβοι $S^1 \hookrightarrow S^3$, οι οποίοι θα παίξουν ρόλο ανάλογο με των πρώτων αριθμών, σηκώνονται σε links του M.

$$\begin{array}{ccc} M & & L = K_1 \cup \cdots \cup K_r \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ S^3 & & S^1 \to S^3 \end{array}$$

Μάλιστα αξίζει να παρατηρηθεί ότι η «αδράνεια» δίνεται από την θεμελιώδη ομάδα του κύκλου: $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$.

Το κάλυμμα X_∞

Θεωρούμε ένα κόμβο $K \subset S^3$, και μία σωληνοειδή περιοχή του $V_K \cong D^2 \times K$ με $X_K := S^3 \backslash \mathrm{int}(V_K)$ θεωρούμε το εξωτερικό του και με G_K την ομάδα κόμβου, δηλαδή την

$$\pi_1(S^3 \backslash \mathrm{int}(V_K), x_0).$$

Θα ονομάζουμε *μεσημβρινό του K μια κλειστή καμπύλη στο σύνορο του V_K η οποία περικλείει ένα δίσκο D^2 του V_K. Θα ονομάζουμε* παράλληλο μια κλειστή καμπύλη στο ∂X_K η οποία τέμνει τον μεσημβρινό σε ένα μοναδικό σημείο και είναι ομολογιακά μηδέν στον X_K.

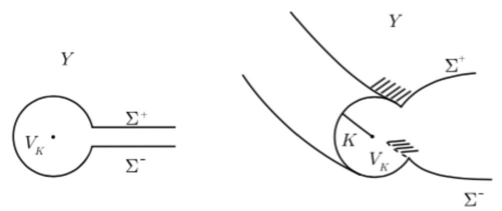
Έστω α ένας μεσημβρινός του K. Η ομάδα $G_K/[G_K, G_K]$ είναι αβελιανή άπειρη κυκλική ομάδα που παράγεται από το α οπότε η συνάρτηση $\psi_\infty : G_K \to \mathbb{Z}$ είναι ένας ισομορφισμός. Θεωρούμε το κάλυμμα $X_\infty \to X_K$ το οποίο αντιστοιχεί στην ομάδα $\ker(y_\infty)$. Το κάλυμμα αυτό είναι ανεξάρτητο της επιλογής του μεσημβρινού α και θα λέγεται το άπειρο κυκλικό κάλυμμα του X_K.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\psi_n : G_K \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, οι οποίες προκύπτουν ως συνθέσεις της ψ_∞ με τον φυσιολογικό ομομορφισμό $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Οι πυρήνες αυτών αντιστοιχούν σε χώρους X_n οι οποίοι αποτελούν $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-καλύμματα του X_K:

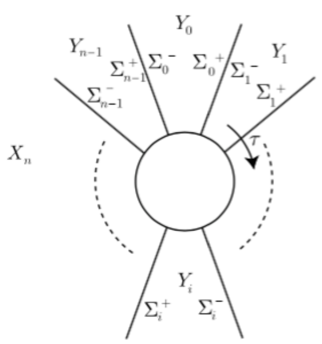
$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_K \arrow[d, "{[G_K,G_K]}"] \arrow[dr, bend left, "\ker\psi_n"] \arrow[dd, bend right=60, "G_K"'] & \\
X_\infty \arrow[r, "n\mathbb{Z}"] \arrow[d, "\mathbb{Z}"] & X_n \arrow[dl, "\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}"] \\
X_K &
\end{tikzcd}$$

Γεωμετρικά τα καλύμματα X_n μπορούν να κατασκευαστούν ως εξής: Θεωρούμε μια επιφάνεια Seifert η οποία είναι μια προσανατολισμένη συνεκτική επιφάνεια Σ_K η οποία έχει σύνορο τον κόμβο K.

Στην συνέχεια θεωρούμε τον χώρο Y που παίρνουμε αν κόψουμε τον X_K κατά μήκος της επιφάνειας Σ_K. Με αυτό τον τρόπο η αρχική επιφάνεια Seifert διαχωρίζεται σε δύο επιφάνειες Σ_+, Σ_-, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχηματίζουμε n πολλά αντίγραφα $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ του χώρου Y τα οποία τα κολάμε καταμήκος των επιφανειών, ταυτίζοντας την Σ_0^+ με την Σ_1^- και τελικά την Σ_{n-1}^+ με την Σ_0^-, όπως στο παρακάτω σχήμα



1.2β′ Θεωρία Αριθμών

Στην θεωρία αριθμών τον ρόλο των 3-πολλαπλοτήτων τον παίζουν τα σώματα αριθμών τα οποία είναι (διακλαδιζόμενες) επεκτάσεις του σώματος των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$. Στο παρακάτω σχήμα με $\mathcal{O}_K$ συμβολίζουμε τον δακτύλιο των ακεραίων αλγεβρικών του K και με $p\mathcal{O}_K$ το σύνολο

$$
\begin{tikzcd}
K = \mathbb{Q}(\theta) \arrow[d, dash] & \mathcal{O}_K \arrow[d, dash] & p\mathcal{O}_K = Q_1^{e_1} \cdots Q_r^{e_r} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q} & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

Σε αυτή την περίπτωση η αδράνεια μετριέται από την απόλυτη ομάδα Galois του πεπερασμένου σώματος πηλίκου η οποία δεν είναι άλλη από την προπεπερασμένη κλειστότητα $\hat{\mathbb{Z}}$ του $\mathbb{Z}$.

Στην γλώσσα των etale θεμελιωδών ομάδων αυτό εκφράζεται ως: $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)) \cong \hat{\mathbb{Z}}$.

1.3 Απόλυτη ομάδα Galois και ομάδα κρίκου

1.3α′ Τοπολογική προσέγγιση

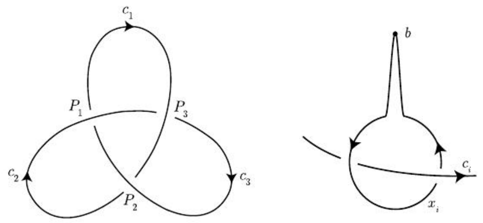
Θεωρούμε ένα κρίκο L στην S^3 δηλαδή μία εμφύτευση $(S^1)^r \hookrightarrow S^3$. Θεωρούμε την σωληνοειδή περιοχή του L και το συμπλήρωμα της $X_L = S^3 \backslash \mathrm{int}(V_L)$. Είναι μια συμπαγής 3-πολλαπλότητα με σύνορο μια ένωση από διδιάστατους τόρους. Η θεμελιώδης ομάδα

$$\pi_1(X_L) = \pi_1(S^3 \backslash L),$$

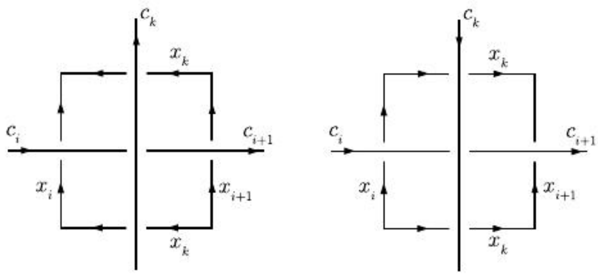
θα λέγεται η ομάδα κρίκου θα συμβολίζεται με G_L. Είναι σαφές ότι κάθε διακλαδισμένο κάλυμμα του S^3 με διακλάδωση στο L, είναι ένα τοπολογικό κάλυμμα του $S^3 \backslash L$ και συνεπώς αντιστοιχεί σε μια υποομάδα $H < G_L$. Αν $\tilde{X}_L$ είναι το universal covering space του X_L έχουμε το αριστερό διάγραμμα της εξίσωσης (1.1).

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{X}_L \arrow[d, "H"] \arrow[dd, bend right=60, "G_L"'] & \bar{\mathbb{Q}} \arrow[d, dash, "H"] \arrow[dd, dash, bend right=60, "G_{\mathbb{Q}}"'] \\
M = X_L/H \arrow[d] & \bar{\mathbb{Q}}^H \arrow[d, dash] \\
X_L & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}
\tag{1.1}
$$

Από το επίπεδο σχεδιάγραμμα του κρίκου μπορούμε να ανακτήσουμε μια παράσταση της ομάδας G_L με γεννήτορες και σχέσεις, την αναπαράσταση Wirtinger. Περισσότερο αναλυτικά θεωρούμε το επίπεδο διάγραμμα ενός κρίκου και αριθμούμε τα συνεκτικά τόξα $c_1, \ldots, c_n$ όπως το αριστερό κομμάτι στο παρακάτω σχήμα.



Στην συνέχεια θεωρούμε ένα σημείο βάσης πάνω από το διάγραμμα και σχηματίζουμε την θηλιά x_i η οποία τυλίγει μια φορά το τόξο c_i από δεξιά προς τα αριστερά όπως στο δεξί κομμάτι στο παραπάνω σχήμα. Γενικά σε κάθε διασταύρωση του επίπεδου σχεδιαγράμματος υπάρχουν δύο τρόποι διασταύρωσης των τόξων c_i, c_{i+1} οι οποίοι οδηγούν σε σχέσεις ανάμεσα στις θηλειές x_i, x_{i+1}.



$R_i = x_i x_k^{-1} x_{i+1}^{-1} x_k = 1$ $\qquad$ $R_i = x_i x_k x_{i+1}^{-1} x_k^{-1} = 1$

Η ομάδα κρίκου δέχεται την παρακάτω αναπαράσταση (με δεφιςιενςψ 1):

$$G_L = \langle x_1, \ldots, x_n | R_1 = \cdots R_{n-1} = 1 \rangle.$$

όπου σε κάθε διασταύρωση επιλέγω μια από τις δύο σχέσεις του παραπάνω σχήματος.

Θα χρειαστούμε στην συνέχεια ότι η αβελιανοποίηση

$$\frac{G_L}{[G_L, G_L]} \cong H_1(X_L)$$

είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από τις κλάσεις των μεσημβρινών των κόμβων που αποτελούν τον κρίκο L.

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύτηκε από τον Milnor [12α] στο

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $L = K_1 \cup \cdots K_r$ ένας κρίκος που αποτελείται από r κόμβους. Θεωρούμε την ελεύθερη ομάδα στους γεννήτορες $x_1, \ldots, x_r$ όπου κάθε x_i αντιστοιχεί σε ένα μεσημβρινό του κόμβου K_i. Για κάθε $d \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα $y_i^d \in F$ ώστε*

$$G_L/G_L^{(d)} = \langle x_1, \ldots, x_r | [x_1, y_1^{(d)}] = \cdots = [x_r, y_r^{(d)}] = 1, F^{(d)} = 1 \rangle,$$

και

$$y_i^{(d)} = y_i^{(d+1)} \mod F^{(d)},$$

όπου

$$G^{(d)} = [G^{(d-1)}, G^{(d-1)}].$$

1.3β′ Αριθμητική προσέγγιση

Έστω k ένα σώμα, η απόλυτη ομάδα Galois G_k του k είναι η ομάδα Galois της επέκτασης $\bar{k}/k$, η οποία ορίζεται ως το αντίστροφο όριο

$$G_k := \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \lim_{\leftarrow} \mathrm{Gal}(K/k),$$

όπου το K διατρέχει τις πεπερασμένες επεκτάσεις Galois του k.

Παρατήρηση 1.3.2. *Στην περίπτωση $k = \mathbb{Q}$ η απόλυτη ομάδα Galois είναι ένα από τα περισσότερο ενδιαφέροντα αντικείμενα της θεωρίας αριθμών, για παράδειγμα δεν γνωρίζουμε καν ποιες πεπερασμένες ομάδες υπεισέρχονται στον ορισμό, αυτό είναι το γνωστό ανοιχτό αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας Galois [1], [2], [3].*

Το τυχαίο σώμα αριθμών αντιστοιχεί σε μια κλειστή υποομάδα H της απόλυτης ομάδας Galois G_Q και απεικονίζεται στο δεξί διάγραμμα της εξίσωσης (1.1).

1.3γ′ Η τοπολογική θεμελιώδης ομάδα

Έστω X ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι κατά τόξα συνεκτικός και ημιτοπικά απλά συνεκτικός (δηλαδή κάθε $P \in X$ έχει μια περιοχή U στην οποία κάθε θηλιά μπορεί να συρρικνωθεί).

Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, x)$ ορίζεται ως η ομάδα των ομοτοπικών κλάσεων καμπυλών με αφετηρία το σημείο $x \in X$. Μία συνεχής συνάρτηση $\pi : Y \to X$ είναι ένα τοπολογικό κάλυμμα αν κάθε $P \in X$ έχει μία περιοχή U ώστε $\pi^{-1}(U)$ να είναι ξένη ένωση ανοιχτών συνόλων U_i και κάθε ένα από αυτά απεικονίζεται ομοιομορφικά μέσω της π στο U.

Μία συνάρτηση ανάμεσα σε καλύμματα του X (Y, π) και (Y', π') είναι μία συνεχής συνάρτηση $f : Y \to Y'$, ώστε $\pi' \circ f = \pi$.

Υπάρχει ένας απλά συνεκτικός χώρος ο universal covering space $\tilde{X}$ ο οποίος αποτελεί ένα κάλυμμα $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to X$. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $\tilde{x} \in \tilde{X}$ το οποίο απεικονίζεται στο $x \in X$. Τότε το $(\tilde{X}, \tilde{x})$ έχει την παρακάτω universal ιδιότητα: Για κάθε κάλυμμα $Y \to X$ και κάθε $y \in Y$ που απεικονίζεται στο x υπάρχει μοναδική απεικόνιση καλυμμάτων: $\tilde{X} \to Y$, η οποία επιπλέον στέλνει το $\tilde{x}$ στο y. Ο universal covering space $(\tilde{X}, \tilde{x})$ είναι μοναδικός μέχρι μοναδικού ισομορφισμού.

Θεωρούμε την ομάδα $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ η οποία αποτελείται από τις αντιστρέψιμες απεικονίσεις καλυμμάτων $\tilde{X} \to \tilde{X}$. Η ομάδα αυτή είναι ισόμορφη με την $\pi_1(X, x)$.

Θεωρούμε την κατηγορία $\mathrm{Cov}(X)$ των καλυμμάτων του X με πεπερασμένες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες και συναρτήσεις τις συναρτήσεις καλυμμάτων. Ορίζεται συναρτητής

$$F : \mathrm{Cov}(X) \to \mathrm{Sets}$$

ο οποίος στο κάλυμμα $\pi : Y \to X \in \mathrm{Cov}(X)$ στέλνει το σύνολο $F(Y) = \pi^{-1}(x)$. Ο συναρτητής F είναι αναπαραστίσιμος από τον χώρο $\tilde{X}$, δηλαδή

$$F(Y) \cong \mathrm{Hom}_X(\tilde{X}, Y).$$

Πράγματι παρατηρήσαμε ότι το να περιγράψουμε ένα κάλυμμα είναι το ίδιο με το να δώσουμε ένα σημείο $y \in \pi^{-1}(x)$.

Επίσης η ομάδα $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ δρα στο $\tilde{X}$ από δεξιά και συνεπώς δρα στο $\mathrm{Hom}_X(\tilde{X}, Y)$ από αριστερά:

$$\alpha f := f \circ \alpha, \alpha \in \mathrm{Aut}_X(\tilde{X}), f : \tilde{X} \to Y.$$

Συνεπώς ο F είναι ένας συναρτητής από $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \cong \pi^1(X, x)$-σύνολα.

1.3δ′ Η étale θεμελιώδης ομάδα

Ορισμός 1.3.3. *Ένας ομομορφισμός δακτυλίων $A \to B$ θα λέγεται flat αν ο συναρτητής $M \mapsto B \otimes_A M$ είναι ακριβής. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το B είναι μία flat A-άλγεβρα*

Ορισμός 1.3.4. *Ένας τοπικός ομομορφισμός $f : A \to B$ μεταξύ τοπικών δακτυλίων θα λέγεται αδιακλάδιστος αν*

(i) $f(m_A)B = m_B$

(ii) *Το σώμα $B/f(m_A)$ είναι πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του σώματος A/m_A.*

Ορισμός 1.3.5. *Ένας μορφισμός $\phi : Y \to X$ σχημάτων θα λέγεται αδιακλάδιστος αν είναι πεπερασμένου τύπου και οι επαγώμενες απεικονίσεις μεταξύ τοπικών δακτυλίων $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ είναι αδιακλάδιστες για κάθε $y \in Y$.*

Ορισμός 1.3.6. *Ένας μορφισμός $\phi : Y \to X$ σχημάτων θα λέγεται étale αν είναι flat και αδιακλάδιστος.*

Ένας ομομορφισμός δακτυλίων $f : A \to B$ θα λέγεται étale αν ο επαγώμενος $\mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ είναι étale. Ισοδύναμα είναι étale αν

(i) *B είναι πεπερασμένα παραγόμενη A-άλγεβρα*

(ii) *B είναι flat A-άλγεβρα*

(iii) *Για όλα τα μέγιστα ιδεώδη m του B, η $B_m/f(p)B_m$ είναι μία πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση του A_p/pA_p, όπου $p = f^{-1}(m)$.*

Παρατήρηση 1.3.7. *Η συνθήκη (iii) στον παραπάνω ορισμό είναι εντοπισμένη (localized). Θα μπορούσαμε αντί αυτής να θεωρήσουμε την συνθήκη*

$$B \otimes_A \kappa(p) \cong K_1 \times \cdots \times K_r,$$

ότι δηλαδή το $B \otimes A\kappa(p) \cong B/pB$ είναι ισόμορφο ως $\kappa(p)$-άλγεβρα με ένα γινόμενο από K_i διαχωρίσιμες επεκτάσεις του $\kappa(p)$.

Ορισμός 1.3.8. *Μια A-άλγεβρα B θα λέγεται επιπλέον συνεκτική πεπερασμένη étale αν επιπλέον υπάρχει μια μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση K του $\mathrm{Quot}(A)$, ώστε B να είναι η ακέραια κλειστότητα του A στο K.*

Ορισμός 1.3.9. *Μία A-άλγεβρα B θα λέγεται πεπερασμένη Galois άλγεβρα αν η B είναι συνεκτική πεπερασμένη étale και για κάθε $p \in \mathrm{Spec}(A)$ και κάθε αλγεβρική κλειστότητα Ω του $\kappa(p)$ η δράση του*

$$\mathrm{Aut}(B/A) := \{\sigma : A\text{-ομορφισμός του } B\},$$

στο

$$\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(B, \Omega) := \{i : A\text{-ομομορφισμός αλγεβρών} B \to A\}$$

που ορίζεται από το

$$\mathrm{Aut}(B/A) \times \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(B, \Omega) \to \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(B, \Omega)$$

$$(\sigma, i) \mapsto i \circ \sigma$$

είναι απλά μεταβατική.

Η παραπάνω συνθήκη είναι ανεξάρτητη της επιλογής του p και του Ω. Στην περίπτωση που το B είναι μια πεπερασμένη Galois άλγεβρα υπέρ του A, γράφουμε $\mathrm{Gal}(B/A)$ και την ονομάζουμε την ομάδα Galois του B υπέρ του A. Αν $K = \mathrm{Quot}(B)$ το B είναι πεπερασμένη Galois επέκταση υπέρ του A αν και μόνο αν $K/\mathrm{Quot}(A)$ είναι πεπερασμένη επέκταση Galois και σε αυτή την περίπτωση $\mathrm{Gal}(B/A) = \mathrm{Gal}(K/\mathrm{Quot}(A))$.

Θεωρούμε ένα συνεκτικό σχήμα X και ένα γεωμετρικό σημείο $\bar{x} \to X$, δηλαδή ένα σημείο με συντεταγμένες σε ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα ή διαφορετικά επιλέγουμε μια διαχωρίσιμη αλγεβρική κλειστότητα του σώματος $k(x)$.

Θεωρούμε την κατηγορία FEt/X της οποίας αντικείμενα είναι οι πεπερασμένες étale συναρτήσεις $\pi : Y \to X$ και τα βέλη είναι οι συναρτήσεις που κάνουν αντιμεταθετικό το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ορίζουμε ένα συναρτητή:

$$F : \mathrm{FEt/X} \to \mathrm{Sets}$$

ο οποίος στέλνει το (Y, π) στο σύνολο των $\bar{x}$-valued σημείων του Y τα οποία βρίσκονται υπέρ του x, δηλαδή $F(Y) = \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, Y)$. Στην περίπτωση που το X είναι ένα αλγεβρικό σύνολο ορισμένο επί ενός αλγεβρικά κλειστού σώματος το $F(Y) = \pi^{-1}(\bar{x})$.

Θα θέλαμε να ορίζουμε τον universal covering space ως το αντικείμενο που αναπαριστά τον F αλλά δυστυχώς δεν υπάρχει τέτοιο αντικείμενο. Όμως ο συναρτητής F είναι pro-representable. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα προβολικό σύστημα $\tilde{X} = (X_i)_{i \in I}$ από πεπερασμένα étale καλύμματα παραμετρικοποιημένο από ένα κατευθυνόμενο σύνολο I ώστε

$$F(Y) = \mathrm{Hom}(\tilde{X}, Y) := \lim_{\to i \in I} \mathrm{Hom}(X_i, Y).$$

Το $\tilde{X}$ θα το ονομάζουμε universal covering space του X. Επιπλέον μπορούμε να επιλέξουμε το $\tilde{X}$ ώστε κάθε X_i να είναι Galois υπέρ του X, δηλαδή να έχει βαθμό υπέρ του X ίσο με την τάξη της ομάδας $\mathrm{Aut}_X(X_i)$. Μία συνάρτηση $X_j \to X_i$ για $i \leq j$ επάγει ένα ομομορφισμό $\mathrm{Aut}_X(X_j) \to \mathrm{Aut}_X(X_i)$ και τελικά ορίζουμε την

$$\pi_1(X, \bar{x}) = \mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) = \lim_{\leftarrow i} \mathrm{Aut}_X(X_i).$$

Παραδείγματα:

1. Το φάσμα ενός σώματος. Θεωρούμε ένα σώμα k και θέτουμε $X = \mathrm{Spec}(k)$. Οι μορφισμοί étale $Y \to X$ είναι τα φάσματα étale k-αλγεβρών A πεπερασμένα παραγόμενων. Αντί να εργαστούμε με την κατηγορία FEt/X μπορούμε να εργαστούμε με την αντίθετη κατηγορία Et/k των étale k-αλγεβρών.

Η επιλογή ενός γεωμετρικού σημείου στο X καταλήγει στην επιλογή ενός διαχωρίσιμου αλγεβρικά κλειστού σώματος Ω που να περιέχει το k. Ορίζουμε συναρτητή

$$F : \mathrm{Et}/k \to \mathrm{Sets}$$

$$F(A) = \mathrm{Hom}_k(A, \Omega).$$

Θεωρούμε το $\tilde{k} = (k_i)_{i\in I}$ να είναι το προβολικό σύστημα που αποτελείται από όλες τις επεκτάσεις Galois του k που περιέχονται στο Ω. Τότε το $\tilde{k}$ προ-αναπαριστά τον F , δηλαδή

$$F(A) \cong \mathrm{Hom}_k(A, \tilde{k}) := \lim_{\to i\in I} \mathrm{Hom}_k(A, k_i).$$

Τέλος ορίζουμε

$$\mathrm{Aut}_k(\tilde{k}) = \lim_{\leftarrow i\in I} \mathrm{Aut}_{k-alg}(k_i) = \lim_{\leftarrow i} \mathrm{Gal}(k_i/k) = \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),$$

όπου k^{sep} είναι η διαχωρίσιμη αλγεβρική κλειστότητα του k στο Ω.

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση ενός πεπερασμένου σώματος $\mathbb{F}_p$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα μοναδικό σώμα $\mathbb{F}_{p^n} \subset \bar{\mathbb{F}}_p$ που να είναι επέκταση βαθμού n υπέρ το σώμα $\mathbb{F}_p$. Το σώμα $\bar{\mathbb{F}}_p$ είναι το $\bar{\mathbb{F}}_p = \lim_{\to n} \mathbb{F}_{p^n}$.

Θεωρούμε τον αυτομορφισμό του Frobenius $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ με

$$\sigma(x) = x^p, \qquad x \in \bar{\mathbb{F}}_p.$$

Για την ομάδα Galois έχουμε

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)) = \lim_{\leftarrow n} \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) = \lim_{\leftarrow n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \hat{\mathbb{Z}}.$$

2. Ένας πλήρης διακριτής εκτίμησης δακτύλιος Υποθέτουμε ότι ο A είναι ένας πλήρης διακριτής εκτίμησης δακτύλιος με σώμα πηλίκων το F. Διαλέγουμε ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα Ω που να περιέχει το F το οποίο ορίζει ένα σημείο βάσης $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathrm{Spec}A$. Στην συνέχεια θεωρούμε όλεςτις πεπερασμένες Galois άλγεβρες B_i υπέρ του A που περιέχονται στο Ω οι οποίες είναι επαγωγικά διατεταγμένες. Θέτουμε $K_i = \mathrm{Quot}B_i$ και $\tilde{F} = \lim_{\to i} K_i$ την σύνθεση των K_i. Το σώμα $\tilde{F}$ λέγεται η μέγιστη αδιακλάδιστη επέκταση του F στο Ω. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(A), \bar{x}) = \lim_{\leftarrow i} \mathrm{Gal}(B_i/A) = \lim_{\leftarrow i} \mathrm{Gal}(K_i/F) = \mathrm{Gal}(\tilde{F}/F).$$

Έστω p το μέγιστο ιδεώδες του A. Στον φυσικό επιμορφισμό $A \to \kappa(p)$ αντιστοιχούμε τον $f : \mathrm{Spec}(\kappa(p)) \to \mathrm{Spec}(A)$. Διαλέγουμεμ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα Ω' το οποίο περιέχει το $\kappa(p)$. Θεωρούμε το γεωμετρικό σημείο $\bar{x}' : \mathrm{Spec}(\Omega') \to \mathrm{Spec}(\kappa(p))$ και θέτουμε $\bar{x} := f \circ \bar{x}'$.

Υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία ανάμεσα στις $\kappa(p)$-κλάσεις ισομορφισμού των πεπερασμένων διαχωρίσιμων επεκτάσεων του $\kappa(p)$ και του συνόλου των F-κλάσεων ισομορφισμού πεπερασμένων αδιακλάδιστων επεκτάσεων του F, το f επάγει ένα ισομορφισμό

$$f_* : \pi_1(\mathrm{Spec}(\kappa(p)), \bar{x}') \cong \pi_1(\mathrm{Spec}(A), \bar{x}).$$

Ας είναι $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ο δακτύλιος των $\mathfrak{p}$-αδικών και $k_{\mathfrak{p}}$ το σώμα πηλίκου του. Είναι σαφές ότι

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})) \cong \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})) \cong \hat{\mathbb{Z}}.$$

Προκειμένου να πάρουμε μια διαχωρίσιμη κλειστότητα του σώματος $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ επισυνάπτουμε όλες τις n-ιοστές ρίζες της μονάδας για $(n, \mathrm{Norm}(\mathfrak{p}))$, η μέγιστη αδιακλάδιστη επέκταση $\tilde{k}_{\mathfrak{p}}$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$\tilde{k}_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}(\zeta_n | (n, \mathrm{Norm}(\mathfrak{p}) = 1),$$

όπου ζ_n είναι μια πρωταρχική n-ιοστή ρίζα της μονάδας στο $\bar{k}_{\mathfrak{p}}$. Το στοιχείο της $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O})_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Gal}(\tilde{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ που αντιστοιχεί στον αυτομορφισμό του Frobenius $\sigma \in \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})) = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$, θα λέγεται επίσης ο αυτομορφισμός του Frobenius, θα τον συμβολίζουμε και πάλι με σ και θα δρα ως $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{\mathrm{Norm}(\mathfrak{p})}$.

3. Το φάσμα $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$. Είναι γνωστό ότι δεν υπάρχουν αδιακλάδιστα καλύμματα του $\mathbb{Z}$ (κάθε πρώτος που διαιρεί την διακρίνουσα ενός σώματος αριθμών διακλαδίζεται), με άλλα λόγια το $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = \{1\}$, ή με άλλα λόγια το $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ είναι απλά συνεκτικό.

4. Ένας τρυπημένος δακτύλιος Dedekind. Έστω K ένα σώμα αριθμών και $\mathcal{O}_K$ ο δακτύλιος των ακεραίων του K. Θεωρούμε ένα σύνολο μεγίστων ιδεωδών $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ του $\mathcal{O}_K$. Αφού η ομάδα κλάσεων είναι πεπερασμένη υπάρχουν φυσικοί αριθμοί n_i ώστε $P_i^{n_i} = (a_i)$, με $a_i \in K$.

Θεωρούμε τον δακτύλιο $A = \mathcal{O}_K[a_1^{-1} \cdots a_n^{-1}]$, ο οποίος είναι επίσης δακτύλιος του Dedekind. Ισχύει

$$\mathrm{Spec}A = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K \backslash S.$$

Διαλέγουμε ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα Ω που να περιέχει το K και το οποίο ορίζει ένα σημείο βάσης $\bar{x} : \mathrm{Spec}\Omega \to \mathrm{Spec}A$. Για μια τυχαία πεπερασμένη επέκταση $K \subset L \subset \Omega$ της οποίας κάθε μέγιστο ιδεώδες που δεν περιέχεται στο S είναι αδιακλάδιστο λέμε ότι είναι αδιακλάδιστη εκτός του $S \cap S_K^\infty$, οπου S_K^∞ είναι το σύνολο των απείρων πρώτων του K.

Θέτουμε $K_S = \lim_{\to_i} K_i$ την σύνθεση όλων των αδιακλάδιστων στο S Galois επεκτάσεων του K. Το σώμα K_S ονομάζεται «η μέγιστη αδιακλάδιστη εκτός του S επέκταση» του K. Ισχύει:

$$\pi_1(\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K, \backslash S, \bar{x}) = \mathrm{Gal}(K_S/K) = \lim_{\leftarrow_i} \mathrm{Gal}(K_i/K).$$

Θα συμβολίζουμε αυτή την προπεπερασμένη ομάδα με $G_S(K)$. Αν περιορίσουμε το αντίστροφο όριο μόνο στις ℓ ομάδες τότε έχουμε την $G_S(K)(\ell)$.

5. Η ήμερη θεμελιώδης ομάδα Θα ονομάζουμε μια Galois επέκταση σωμάτων L/K ήμερη αν για κάθε διακλαδιζόμενο πρώτο των δακτυλίων ακεραίων, η ομάδα ανάλυσης $G(P)$ έχει τάξη πρώτη προς την χαρακτηριστική του σώματος $k(P) = \mathcal{O}_K/P$. Ας σταθεροποιήσουμε μία αλγεβρική κλειστότητα Ω του K και ας θεωρήσουμε την επέκταση Galois K^t που προκύπτει ως η σύνθεση όλων των ήμερων επεκτάσεων του K μέσα στο Ω. Η ήμερη θεμελιώδης ομάδα είναι η

$$\pi_1^t(X, \bar{x}) = \lim_{\leftarrow_i} \mathrm{Gal}(K_i/K) = \mathrm{Gal}(\mathrm{K^t}/\mathrm{K}).$$

Θεωρούμε το $\mathfrak{p}$-αδικό σώμα $k_{\mathfrak{p}}$, και θέτουμε $q = \mathrm{Norm}(\mathfrak{p})$ και $X = \mathrm{Spek}(k_{\mathfrak{p}})$. Έχουμε ήδη δει ότι η μέγιστη αδιακλάδιστη επέκταση του $k_{\mathfrak{p}}$ δίνεται από το

$$\tilde{k}_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}(\zeta_n | (n, \mathrm{Norm}(\mathfrak{p}) = 1).$$

Ο πυρήνας του φυσικού ομομορφισμού

$$\pi_1(X) = \mathrm{Gal}(\bar{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}) \to \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})) \cong \mathrm{Gal}(\tilde{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$$

που επάγεται από τον εγκλεισμό $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow k_{\mathfrak{p}}$, είναι η ομάδα αδρανείας την οποία θα την συμβολίζουμε με $I_{\mathfrak{p}}$.

Η ήμερη θεμελιώδης ομάδα $\pi_1^t(X)$ περιγράφεται ως μια επέκταση της ομάδας $\mathrm{Gal}(\tilde{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ με το μέγιστο ήμερο πηλίκο $I_{\mathfrak{p}}t$ της $I_{\mathfrak{p}}$. Έστω π ένας uniformizer της $k_{\mathfrak{p}}$. Η μέγιστη ήμερα διακλαδιζόμενη επέκταση $k_{\mathfrak{p}}^t$ περιγράφεται από

$$k_{\mathfrak{p}}^t = \tilde{k}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{\pi}, (n,q)=1).$$

Ορίζουμε την μονοδρομία $\tau \in \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^t/\tilde{k}_{\mathfrak{p}})$ με

$$\tau(\zeta_n) = \zeta_n, \qquad \tau(\sqrt[n]{\pi}) = \zeta_n \sqrt[n]{\pi}.$$

Ο τ είναι ένας τοπολογικός γεννήτορας του $I_{\mathfrak{p}}^t := \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^t/k_{\mathfrak{p}})$, του μέγιστου ήμερου πηλίκου της $I_{\mathfrak{p}}$ και επάγει ισομορφισμό:

$$\mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^t/\tilde{k}_{\mathfrak{p}}) \cong \varprojlim_{(n,q)=1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =: \hat{\mathbb{Z}}^{q'},$$

όπου ο τ αντιστοιχεί στο $1 \in \hat{\mathbb{Z}}^{(q')}$. Δηλαδή έχουμε την μικρή ακριβή ακολουθία:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^t/\tilde{k}_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] \arrow[d, no head, "\cong"] & \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^t/k_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\tilde{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] \arrow[d, no head, "\cong"] & 1 \\
& \hat{\mathbb{Z}}^{(q')} & & \hat{\mathbb{Z}} &
\end{tikzcd}$$

Μπορούμε να ορίσουμε μια επέκταση του ομομορφισμού του Frobenius $\sigma \in \mathrm{Gal}(\tilde{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ στο $\mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^t/k_{\mathfrak{p}})$, ως

$$\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^q, \qquad \sigma(\sqrt[n]{\pi}) = \sqrt[n]{\pi}.$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση:

$$\sigma\tau = \tau^q\sigma$$

και συνεπώς

$$\pi_1^t(X) = \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^t/k_{\mathfrak{p}}) = \langle \tau, \sigma | \tau^{q-1}[\tau,\sigma] = 1\rangle.$$

5. Το θεώρημα σύγκρισης του Grothendieck

Ας θεωρήσουμε μία αλγεβρική μη ιδιόμορφη πολλαπλότητα X υπέρ το $\mathbb{C}$. Αν το $Y \to X$ είναι ένα πεπερασμένο étale κάλυμμα τότε και το Y είναι μη ιδιόμορφο και αν τα σύνολα των σημείων $X(\mathbb{C}), Y(\mathbb{C})$ εφοδιαστούν με τις μιγαδικές τους τοπολογίες έχουμε ότι το $Y(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ είναι ένα πεπερασμένο τοπολογικό κάλυμμα. Ισχύει το

Θεώρημα 1.3.10 (Θεώρημα ύπαρξης του Riemann). *Ο συναρτητής που στέλνει ένα πεπερασμένο étale κάλυμμα (Y,π) στο τοπολογικό κάλυμμα $Y(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών.*

Ειδικότερα ισχύει ότι

$$\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x_0) = \pi_1\widehat{(X, x_0)}$$

δηλαδή η étale θεμελιώδης ομάδα είναι η προπεπερασμένη κλειστότητα της τοπολογικής θεμελιώδους ομάδας όταν η δεύτερη ορίζεται.

6. Το αδιαμφισβήτητα περισσότερο ενδιαφέρον αντικείμενο στα Μαθηματικά

Θεωρούμε την μέγιστη επέκταση Galois του σώματος M $\mathbb{Q}(x)$ η οποία παραμένει αδιακλάδιστη σε ένα σύνολο θέσεων που αντιστοιχούν στους ρητούς αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dash, "\hat{F}_n"'] \\ \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] \\ \mathbb{Q}[x] \end{tikzcd}$$

Για ευκολία θα περιοριστούμε σε «pure braids»: $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$. Θεωρούμε το σώμα $\bar{\mathbb{Q}}(x)$ και την μέγιστη (pro-ℓ) $M/\bar{\mathbb{Q}}(x)$ επέκταση που είναι αδιακλάδιστη στις θέσεις $x - a_i$.
Η επέκταση $M/\bar{\mathbb{Q}}$ είναι «γεωμετρική» ενώ η επέκταση $M/\bar{\mathbb{Q}}$ «αριθμητική».

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widehat{F_n} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, dash] & \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}[t]/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] \arrow[d, squiggly, dash] & 0 \\ & \pi_1^{\mathrm{et}}(D - \{a_i\}) & & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) & \end{tikzcd} \quad (1.2)$$

Η ομάδα $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ δρα δια συζυγίας στην $\hat{F}_n$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται αναπαράσταση:

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to Br_n \subset \mathrm{Aut}(\hat{F}_r).$$

$$Br_n := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\hat{F}_r) : \sigma(x_i) \sim x_i^{\ell},\ \text{με } \ell \in \hat{\mathbb{Z}}\}.$$

Η προσέγγιση αυτή η οποία οφείλεται στους Belyi, Grothendick, Ihara, Deligne μπορεί να δει την απόλυτη ομάδα Galois ως μία γενίκευση της ομάδας των Braids ή μιας Maping class group.

1.4 Ο τετραγωνικός νόμος αντιστροφής

Τι σημαίνει επέκταση Kummer;

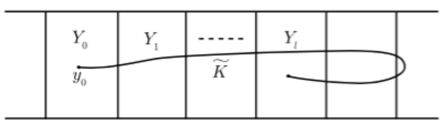
1.4α′ Γεωμετρική αναπαράσταση

Γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathrm{lk}(L, K)$

Ας είναι $G_L = \pi_1(X_L)$. Ο κρίκος K μπορεί να ειδωθεί ως στοιχείο της G_L. Ας είναι $X_\infty \to X$ το άπειρο κυκλικό κάλυμμα που περιγράψαμε προηγουμένως, και $\rho_\infty : G_L \to \mathrm{Gal}(X_\infty/X_L)$, αναπαράσταση μετάθεσης, και έστω τ ο γεννήτορας της κυκλικής ομάδας $\mathrm{Gal}(X_\infty/X_L)$.

Πρόταση 1.4.1. *Ισχύει* $\rho_\infty([K]) = \tau^{\mathrm{lk}(L,K)}$.

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε το X_∞ κολώντας αντίγραφα της του Y κατά μήκος της επιφάνειας Seifert Σ_L όπως κάναμε στην παράγραφο 1.2α′ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Θεωρούμε μία ανύψωση του $\tilde{K}$ του K στο X_∞. Το K τέμνει την επιφάνεια Σ_L με αριθμό διατομής $+1$ (αντ. -1) αν το $\tilde{K}$ περνάει από το Y_i στο Y_{i+1} (αντ. από το Y_{i+1} στο Y_i). Συνεπώς αν το αρχικό σημείο y_0 του $\tilde{K}$ είναι στο Y_0 το τελικό είναι στο Y_ℓ με $\ell = \mathrm{lk}(L, K)$. □

1.4β′ Τοπολογική Τετραγωνική Αντιστροφή

Θα δούμε καλύμματα βαθμού 2, $h_2 : X_2 \to X_L$ με ομάδα $\mathrm{Gal}(X_2/X_L) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G_L \xrightarrow{\rho_2} \mathrm{Gal}(X_2/X_L) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$[K] \mapsto \mathrm{lk}(L, K) \mod 2.$$

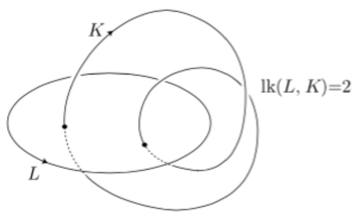
Αν $y \in h_2^{-1}(x)$, τότε $\rho_2([K])(y) = y \cdot [K]$, η τελική τιμή της ανύψωσης του K με αφετηρία το y. Συνεπώς έχουμε τις δύο περιπτώσεις:

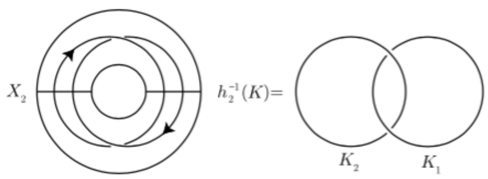
- $\rho([K]) = \mathrm{id}_{X_2} \Leftrightarrow h^{-1} = K_1 \cup K_2$
- $\rho([K]) = \tau \Leftrightarrow h^{-1} = \mathfrak{K}$

Δηλαδή

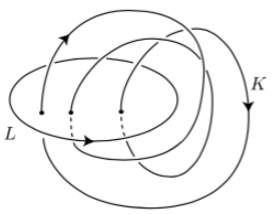
$$h_2^{-1}(K) = \begin{cases} K_1 \cup K_2 & \text{αν } \mathrm{lk}(L, K) \equiv 0 \mod 2 \\ \mathfrak{K} & \text{αν } \mathrm{lk}(L, K) \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

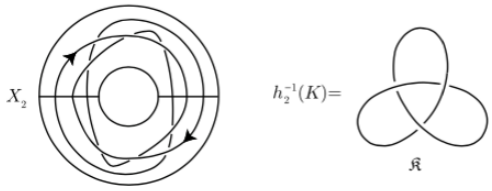
Σχηματικά η πρώτη περίπωση είναι ως εξής:





Ενώ η δεύτερη περίπτωση είναι ως εξής:





1.5 Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών

$$\begin{array}{ccccc} K=\mathbb{Q}(\sqrt{q}) & \qquad & \mathcal{O}_K & \qquad & p\mathcal{O}_K = Q_1^{e_1}\cdots Q_r^{e_r} \\ \Big| & & \Big| & & \Big| \\ \mathbb{Q} & & \mathbb{Z} & & p\mathbb{Z} \end{array}$$

Θέτουμε $X_{\{q\}} = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}\backslash\{q\} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/q])$. $X_2 = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K\backslash R$.

Ορίζουμε τον mod 2 linking number $\mathrm{lk}_2(p,q)$ ως την εικόνα του Frobenius σ_p υπέρ του πρώτου p.

$$G_{\{q\}} \xrightarrow{\rho_2} \mathrm{Gal}(X_2/X_{\{q\}}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Ισχύει ότι

$$(-1)^{\mathrm{lk}_2(p,q)} = \left(\frac{q^*}{p}\right),$$

όπου $q^* = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$.

Όπως και στην τοπολογική περίπτωση το linking number σχετίζεται με την γραφή του ιδεώδους $p\mathcal{O}_K$ σε γινόμενο πρώτων ιδεωδών.

$$p\mathcal{O}_K = \begin{cases} P_1\cdot P_2 & \text{αν } q^* \text{ τετ. υπόλ.} \mod p \\ P & \text{αν } q^* \text{ μη τετ. υπόλ.} \mod p \end{cases}$$

Ισοδύναμα

$$h_2^{-1}(p) = \begin{cases} \{P_1, P_2\} & \text{αν } \mathrm{lk}_2(p,q)=0 \\ \{P\} & \text{αν } \mathrm{lk}_2(p,q)=1 \end{cases}$$

1.5α′ Ο τύπος του Gauss

Ο Gauss εξέφρασε τον linking number ως ένα ολοκλήρωμα

$$\mathrm{lk}(L,K) = \int_{K_1}\int_{K_2} \omega(x-y)dxdy,$$

για μια συγκεκριμμένη 2-μορφή ω στον $\mathbb{R}^3\backslash 0$, όπου

$$\omega = \frac{1}{4\pi||x||^3}\left(x_1dx_2\wedge dx_3 + x_2dx_3\wedge dx_1 + x_3dx_1\wedge dx_2\right).$$

Ο E. Witten είδε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως ένα $U(1)$ Chern-Simons path integral το οποίο είναι το ανάλογο της έκφρασης του $\left(\frac{a}{p}\right)$ ως άθροισμα Gauss:

$$g(a;p) = \sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi i a n^2/p} = \sum_{n=0}^{p-1} \zeta_p^{an^2}, \quad \zeta_p = e^{2\pi i/p}.$$

$$g(a;p) = \left(\frac{a}{p}\right) g(1;p).$$

Κεφάλαιο 2

Αναλογίες μεταξύ των θεωριών Alexander-Fox και Iwasawa

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε αρχικά τα πρότυπα κόμβου και Iwasawa για μία άπειρη κυκλική επικάλυψη X_∞ του συμπληρώματος ενός κόμβου $X_K = S^3 \backslash \mathrm{int} V_K$ και μιας κυκλοτομικής $\mathbb{Z}_p$-επέκτασης ενός αλγεβρικού σώματος αριθμών, αντιστοίχως. Έπειτα, θα περιγράψουμε διάφορες ομαδοθεωρητικές αναλογίες που αναδύονται μεταξύ της θεωρίας Alexander-Fox στην τοπολογία χαμηλών διαστάσεων και της θεωρίας Iwasawa στη θεωρία αριθμών.

2.1 Διαφορικά πρότυπα

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια εισαγωγή στην έννοια του διαφορικού προτύπου για έναν ομομορφισμό ομάδας και θα δείξουμε ότι υπάρχει μια ακριβής ακολουθία Crowell που αντιστοιχείται σε μια βραχεία ακριβής ακολουθία ομάδων. Έπειτα, θα δούμε πως η εφαρμογή αυτής της κατασκευής στην απεικόνιση της αβελιανοποίησης στην ομάδα κρίκου $G_L = \pi_1(S^3 \backslash L)$ οδηγεί στο πρότυπο Alexander ενός κρίκου L και στην ακριβή ακολουθία που το σχετίζει με το λεγόμενο πρότυπο κρίκου. Καθώς το επιχείρημα αυτό είναι αμιγώς ομαδοθεωρητικό, μπορεί να εφαρμοσθεί σε μια l-προπεπερασμένη ομάδα και να πάρουμε την πλήρωση ενός διαφορικού προτύπου μέσω της πλήρωσης της ακριβής ακολουθίας Crowell. Μια άμεση εφαρμογή όλων των παραπάνω είναι στις ομάδες Galois με περιορισμένη διακλάδωση έτσι ώστε να προκύψει το πλήρες πρότυπο Alexander για ένα σύνολο πρώτων και η ακριβής ακολουθία που το συνδέει με το Galois πρότυπο Iwasawa.

2.1α΄ Πρότυπο Alexander

Έστω G, H δύο ομάδες και $\psi : G \to H$ ομομορφισμός. Στο εξής θα συμβολίζουμε επίσης με $\psi : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[H]$ τον επαγόμενο ισομορφισμό μεταξύ των αντιστοίχων αλγεβρών ομάδος.

Ορισμός 2.1.1. *Ένα ψ-διαφορίσιμο πρότυπο A_ψ ορίζεται να είναι το πρότυπο πηλίκο του αριστερού ελεύθερου $\mathbb{Z}[H]$-προτύπου $\bigoplus_{g\in G} \mathbb{Z}[H]dg$ με το αριστερό*

$\mathbb{Z}[H]$*-υποπρότυπο που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής* $d(g_1g_2)-d(g_1)-\psi(g_1)d(g_2)$*, δηλαδή:*

$$A_\psi := \left(\bigoplus_{g\in G}\mathbb{Z}[H]dg\right)/\langle d(g_1g_2)-d(g_1)-\psi(g_1)d(g_2), \forall g_1,g_2\in G\rangle_{\mathbb{Z}[H]}$$

Εξ'ορισμού, η απεικόνιση $d: G\to A_\psi$ που ορίζεται μέσω της $g\mapsto dg$ είναι ένα τέτοιο ψ-διαφορικό δηλαδή για κάθε $g_1,g_2\in G$ ισχύει

$$d(g_1,g_2)=d(g_1)+\psi(g_1)d(g_2).$$

Μάλιστα ισχύει η παρακάτω καθολική ιδιότητα:
Για κάθε αριστερό $\mathbb{Z}[H]$-πρότυπο A και για κάθε ψ-διαφορικό $\partial: G\to A$, υπάρχει μοναδικός $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμός $\phi: A_\psi\to A$ έτσι ώστε $\phi\circ d=\partial$.

Παρατήρηση 2.1.2. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Ένας ομομορφισμός $\psi: G\to H$, επάγει έναν ομομορφισμό:*

$$\psi: R[G]\to R[H]: \psi\left(\sum a_g g\right)=\sum a_g\psi_g.$$

Στην περίπτωση που $H=\{e\}$ είναι η τετριμμένη ομάδα και ψ ο τετριμμένος ομομορφισμός $G\to\{e\}$, έχουμε την augmentation συνάρτηση:

$$\epsilon_{R[G]}: R[G]\to\{e\}: \sum a_g g\xrightarrow{\epsilon_{R[G]}}\sum a_g.$$

Ο πυρήνας της θα ονομάζεται το augmentation ιδεώδες:

$$\ker\epsilon_{R[G]}=I_{R[G]}.$$

Παράδειγμα 2.1.3. *Έστω $H=G$, $\psi=\mathrm{id}_G$ και $I_{\mathbb{Z}[G]}$ το augmentation ιδεώδες. Τότε, η απεικόνιση $\delta: G\to I_{\mathbb{Z}[G]}$ που ορίζεται ως $\delta(g):=g-1$ είναι ένα id_G-διαφορικό αφού:*

$$g_1g_2-1=g_1-1+g_1(g_2-1).$$

Επιπλέον, η δ ικανοποιεί την παραπάνω καθολική ιδιότητα (π.χ για φ έτσι ώστε $\phi(dg):=g-1$). Επομένως, $A_{\mathrm{id}_G}=I_{\mathbb{Z}[G]}$.

Θέτουμε τώρα $N:=\ker(\psi: G\to H)$.

Λήμμα 2.1.4. *Έχουμε ότι*

$$\ker(\psi:\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}[H])=I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G].$$

Εάν επιπλέον η ψ είναι επί, τότε έχουμε έναν ισομορφισμό από δεξιά $\mathbb{Z}[G]$-πρότυπα:

$$\mathbb{Z}[G]/I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G]\simeq\mathbb{Z}[H],$$

όπου εδώ η $\mathbb{Z}[G]$ δρα στην $\mathbb{Z}[H]$ με δεξί πολλαπλασιασμό μέσω της ψ.

Απόδειξη. Αφού $\psi(I_{\mathbb{Z}[N]}) = 0$ έχουμε ότι $I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G] \subset \ker(\psi)$. Έστω $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g \in \ker(\psi)$. Τότε,

$$0 = \psi(\alpha) = \sum_{g\in G} a_g \psi(g) = \sum_{h\in\psi(G)} \left(\sum_{\psi(g)=h} a_g \right) h$$

και άρα $\sum_{\psi(g)=h} a_g = 0$ για κάθε $h \in \psi(G)$. Έστω N_{g_h} το στοιχείο του $N\backslash G$ που αντιστοιχεί στο $h \in \psi(G)$ ως προς τον ισομορφισμό $N\backslash G \simeq \psi(G)$. Τότε, θα έχουμε διαδοχικά ότι:

$$\sum_{\psi(g)=h} a_g g = \sum_{g\in N_{g_h}} a_g(g-1) = \sum_{n\in N} a_{ng_h}(ng_h - 1)$$

$$= \sum_{n\in N} a_{ng_h}[(n-1)g_h + (g_h - 1)] = \sum_{n\in N} a_{ng_h}(n-1)g_h \in I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G]$$

Άρα, $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g = \sum_{h\in\psi(G)} \left(\sum_{\psi(g)=h} a_g g\right) \in I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G]$. □

Στο εξής θα υποθέτουμε ότι η ψ είναι επί, δηλαδή η παρακάτω βραχεία ακολουθία είναι ακριβής.

$$1 \to N \to G \xrightarrow{\psi} H \to 1.$$

Πρόταση 2.1.5. *Η αντιστοιχία $dg \mapsto g - 1$ επάγει ισομορφισμό αριστερών $\mathbb{Z}[H]$-προτύπων:*

$$A_\psi \simeq I_{\mathbb{Z}[G]}/I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G],$$

όπου το $\beta \in \mathbb{Z}[H]$ δρα στο δεξί μέλος μέσω πολλαπλασιασμού για κάθε $\alpha \in \psi^{-1}(\beta)$.

Απόδειξη. Μέσω της ψ θεωρούμε το $\mathbb{Z}[H]$ ως δεξί $\mathbb{Z}[G]$-πρότυπο. Από τον ορισμό 2.1.1 θα έχουμε ότι: $A_\psi = \mathbb{Z}[H] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A_{\mathrm{id}_G}$. Επομένως, από το παράδειγμα 2.1.3 και το Λήμμα 2.1.4 θα έχουμε τον εξής ισομορφισμό αριστερών $\mathbb{Z}[H]$-προτύπων:

$$A_\psi \simeq (\mathbb{Z}[G]/I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_{\mathbb{Z}[G]} \simeq I_{\mathbb{Z}[G]}/I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G].$$

□

Τώρα, υποθέτουμε ότι η G είναι πεπερασμένα παριστώμενη και επιλέγουμε μια παράσταση της:

$$G = \langle x_1, \dots x_r | R_1 = \dots = R_s = 1\rangle.$$

Θα περιγράφουμε το ψ-διαφορικό πρότυπο A_ψ χρησιμοποιώντας τον διαφορικό λογισμό του Fox για τις ελεύθερες ομάδες.

Έστω $F = F(x_1, \dots, x_r)$ ελεύθερη και $\pi : F \to G$ ο φυσικός ομομορφισμός. Θεωρούμε τον $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμό:

$$d_2 : \mathbb{Z}[H]^s \to \mathbb{Z}[H]^r,$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_s) \mapsto \left(\sum_{i=1}^s \beta_i(\psi\circ\pi)\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_1}\right), \dots, \sum_{i=1}^s \beta_i(\psi\circ\pi)\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_r}\right) \right).$$

Θεώρημα 2.1.6. *Η αντιστοιχία* $dg \mapsto ((\psi \circ \pi)(\frac{\partial f}{\partial x_j}))$ *επάγει ισομορφισμό αριστερών* $\mathbb{Z}[H]$*-προτύπων:*

$$A_\psi \simeq \operatorname{coker}(d_2),$$

όπου $f \in F$ *είναι κάθε στοιχείο έτσι ώστε* $\pi(f) = g$.

Απόδειξη. Ορίζουμε έναν $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμό

$$\xi : \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}[H] dg \to \operatorname{coker}(d_2)$$

ως εξής:

$$\xi(dg) := \left((\psi \circ \pi) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right) \bmod \operatorname{im}(d_2)$$

Αφού, για κάθε $k \in \ker(\pi)$ έχουμε ότι

$$\psi \left(\pi \left(\frac{\partial f k}{\partial x_j} \right) \right) = \psi \left(\pi \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + f \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \right) \equiv \psi \left(\pi \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right) \bmod \operatorname{im}(d_2)$$

έπεται ότι το ξ είναι ανεξάρτητο της επιλογής της f έτσι ώστε $\pi(f) = g$. Για $g_1 = \pi(f_1)$, $g_2 = \pi(f_2) \in G$ από τις ιδιότητες της παραγώγου Fox θα έχουμε ότι:

$$\xi \left(d(g_1 g_2) - d(g_1) - \psi(g_1) d(g_2) \right)$$

$$= \psi \left(\pi \left(\frac{\partial f_1 f_2}{\partial x_j} \right) \right) - \psi \left(\pi \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j} \right) \right) - \psi(g_1) \psi \left(\pi \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_j} \right) \right) = 0$$

και άρα το ξ επάγει $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμό:

$$\xi : A_\psi \to \operatorname{coker}(d_2).$$

Από την άλλη πλευρά, ορίζουμε $\eta : \mathbb{Z}[H]^r \to A_\psi$ ως εξής:

$$\eta((a_j)) := \left[\sum_{j=1}^{r} a_j d\pi(x_j) \right]$$

Τότε, έχουμε ότι:

$$\eta \left(\psi \left(\pi \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) \right) \right) = \left[\sum_{j=1}^{r} \psi \left(\pi \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) \right) d\pi(x_j) \right].$$

Έστω μ ο $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμός $I_{\mathbb{Z}[G]} \to A_\psi$ που επάγεται από τον ισομορφισμό της Πρότασης 2.1.5. Παρατηρώντας ότι $d\pi(x_j) = \mu(\pi(x_j) - 1)$ θα έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{r} \psi \left(\pi \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) \right) d\pi(x_j) = \sum_{j=1}^{r} \psi(\pi(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}))(\mu(\pi(x_j) - 1)) = \mu \left(\sum_{j=1}^{r} \pi(\frac{\partial R_i}{\partial x_j})(\pi(x_j) - 1) \right)$$

$$= \mu \left(\pi \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial R_i}{\partial x_j}(x_j - 1) \right) \right) = \mu(\pi(R_i - 1)) = 0.$$

Άρα, η η επάγει $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμό

$$\eta : \mathrm{coker}(d_2) \to A_\psi$$

και έχουμε ότι

$$(\eta \circ \xi)(dg) = \eta\left(\psi\left(\pi\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right)\right) = \psi\left(\sum_{j=1}^{r} \pi\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right) d\pi(x_j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \psi\left(\pi\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right)\right) \mu(\pi(x_j) - 1) = \mu(\pi(f-1)) = \mu(g-1) = dg$$

Επομένως, $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_{A_\psi}$. Όμοια, αποδεικνύουμε ότι ισχύει $\xi \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathrm{coker}(d_2)}$ □

Πόρισμα 2.1.7. *Το ψ-διαφορικό πρότυπο A_ψ έχει μια ελεύθερη ανάλυση πάνω από το $\mathbb{Z}[H]$:*

$$\mathbb{Z}[H]^s \xrightarrow{Q_\psi} \mathbb{Z}[H]^r \to A_\psi \to 0$$

όπου ο πίνακας παράστασης Alexander Q_ψ είναι ένας πίνακας $r \times s$ δίνεται ως:

$$Q_\psi := \left((\psi \circ \pi)\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right)\right).$$

Αν επιπλέον η G είναι ελεύθερη ομάδα, θα έχουμε $A_\psi \simeq \mathbb{Z}[H]^r$, αφού δεν υπάρχουν σχέσεις και $s = 0$.

Για έναν μεταθετικό δακτύλιο Z και ένα πεπερασμένα-παραγόμενο Z-πρότυπο M έστω

$$Z^s \xrightarrow{Q} M \to 0$$

να είναι μια ελεύθερη ανάλυση του M επί του Z με πίνακα παράστασης Q. Για κάθε $d \geq 0$, ορίζουμε $E_d(M)$ να είναι το ιδεώδες του Z που παράγεται από τις $(r-d)$-ελάσσονες ορίζουσες του Q εάν $0 < r-d \leq s$ και θέτουμε $E_d(M) := Z$ εάν $r-d \leq 0$ και $E_d(M) := 0$ εάν $r-d > s$. Το $E_d(M)$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της ελεύθερης ανάλυσης του M και καλείται d-οστό Fitting ιδεώδες. Στην παραπάνω περίπτωση, όπου $Z = \mathbb{Z}[H]$ και $M = A_\psi$, το $E_d(A_\psi)$ ορίζεται μόνο αν η H είναι αβελιανή. Επιπρόσθετα, αν Z είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης και της Noether, ένας γεννήτορας της τομής όλων των κυρίων ιδεωδών που περιέχουν το $E_d(M)$ ορίζεται μέχρι πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο του $Z^\times$.

Παράδειγμα 2.1.8. *Έστω $L = K_1 \cup \ldots \cup K_r$ ένας κρίκος με r-συνιστώσες και έστω μια παράσταση Wirtinger της ομάδας του κρίκου $G_L = \pi_1(S^3 \backslash L)$. Έστω H ένα πηλίκο της G_L και $\psi : G_L \to H$ ο φυσικός ομομορφισμός. Καλούμε το ψ-διαφορικό πρότυπο A_ψ πρότυπο Alexander του L. Ειδικότερα, θεωρούμε την απεικόνιση αβελιανοποίησης $G_L^{ab} = G_L/[G_L, G_L]$. Αφού η H είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από τις κλάσεις ομολογίας των μεσημβρινών a_i του K_i, $i \in [1, r]$ το $\mathbb{Z}[H]$ ταυτίζεται με τον πολυωνυμικό δακτύλιο Laurent $\Lambda_r := \mathbb{Z}[t_i^{\pm 1}, \ldots, t_r^{\pm 1}]$, όπου κάθε t_i αντιστοιχεί στο a_i. Το Λ_r-πρότυπο A_ψ ονομάζεται Alexander πρότυπο του L και συμβολίζεται με A_L, ενώ ο $(n-1) \times n$ πίνακας παράστασης Q_L του A_L πάνω από τον Λ_r όπως ορίστηκε στο 2.1.7 ονομάζεται πίνακας Alexander του L και φυσικά εξαρτάται από την παράσταση Wirtinger. Αφού ο Λ_r είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης και της Noether, ορίζονται* *με βάση τα παραπάνω τα $E_d(A_L)$ και $\Delta_d(A_L), \forall d \geq 1$ και καλούνται d-οστό ιδεώδες και d-οστό πολυώνυμο Alexander του L αντίστοιχα. Έστω τώρα ότι $H = \mathbb{Z}$ που ορίζεται από τον ομομορφισμό $\psi(a_i) = 1, i \in [1, r]$. Τότε, το $\mathbb{Z}[H]$ ταυτίζεται με τον πολυωνυμικό δακτύλιο Laurent $\Lambda := \Lambda_1 = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ με $t \leftrightarrow 1 \in \mathbb{Z}$ και άρα το A_ψ γίνεται Λ-πρότυπο που ονομάζεται περιορισμένο πρότυπο Alexander του L και συμβολίζεται με A_L^{red} με πίνακα παράστασης πάνω από το Q_L^{red} αντίστοιχα. Στην ειδική περίπτωση όπου το L είναι ένας κόμβος K θα έχουμε ότι $A_K = A_K^{red}$.*

Ας υποθέσουμε όπως προηγουμένως πως έχουμε μια βραχεία ακριβής ακολουθία ομάδων:

$$1 \to N \to G \xrightarrow{\psi} H \to 1. \tag{2.1}$$

Τότε, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε αυτήν την λεγόμενη ακριβή ακολουθία Crowell της οποίας την ύπαρξη εξασφαλίζει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.9. *Υπάρχει μια ακριβής ακολουθία από αριστερά $\mathbb{Z}[H]$-πρότυπα*

$$0 \to N^{ab} \xrightarrow{\theta_1} A_\psi \xrightarrow{\theta_2} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{Z}[H]}} \mathbb{Z} \to 0$$

όπου N^{ab} είναι η αβελιανοποίηση $N/N^{(2)}$, θ_1 είναι ο ομομορφισμός που επάγεται από την $n \mapsto dn, n \in N$ και θ_2 ο ομομορφισμός που επάγεται από την $dg \mapsto \psi(g) - 1, g \in G$.

Απόδειξη. Μέσω zig-zag στη βραχεία ακριβή ακολουθία από αριστερά $\mathbb{Z}[N]$-πρότυπα:

$$0 \to I_{\mathbb{Z}[G]} \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{Z}[G]}} \mathbb{Z} \to 0$$

καταλήγουμε στην ακριβή ακολουθία στην ομολογία:

$$H_1(N, \mathbb{Z}[G]) \to H_1(N, \mathbb{Z}) \to H_0(N, I_{\mathbb{Z}[G]}) \to H_0(N, \mathbb{Z}[G]) \to H_0(N, \mathbb{Z})$$

Όμως, έχουμε ότι $H_0(N, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_0(N, \mathbb{Z}[G]) = \mathbb{Z}[G]/I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G] \simeq \mathbb{Z}[H]$ (Λήμμα 2.1.4), $H_0(N, I_{\mathbb{Z}[G]}) = I_{\mathbb{Z}[G]}/I_{\mathbb{Z}[N]}\mathbb{Z}[G] \simeq A_\psi$ (Πρόταση 2.1.5), $H_1(N, \mathbb{Z}) = N^{ab}$ και $H_1(N, \mathbb{Z}[G]) = 0$. Από το Λήμμα Shapiro θα έχουμε ότι:

$$H_1(N, \mathbb{Z}[G]) = H_1(G, \mathbb{Z}[G/N]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G],$$

άρα το $\mathbb{Z}[G/N] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}[G]$-πρότυπο και έτσι έχουμε τη ζητούμενη ακολουθία. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $G = \langle x_1, \ldots, x_r | R_1 = \ldots = R_s = 1 \rangle$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη. Θα περιγράψουμε την ακριβή ακολουθία Crowell με όρους παραγώγων Fox. Έστω ο $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμός:

$$d_1 : \mathbb{Z}[H]^r \to \mathbb{Z}[H]; (a_j) \mapsto \sum_{j=1}^{r} a_j \left((\psi \circ \pi)(x_j) - 1 \right).$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\mathrm{im}(d_1) = I_{\mathbb{Z}[H]}$. Και αφού,

$$(d_1 \circ d_2)((\beta_i)) = d_1 \left(\sum_{i=1}^{s} \beta_i \psi \left(\pi \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) \right) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{s} \beta_i \psi \left(\pi \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) \right) \right) ((\psi \circ \pi)(x_j) - 1) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \psi(\pi(R_i - 1)) = 0$$

ϑα έχουμε το σύμπλοκο:

$$\mathbb{Z}[H]^s \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}[H]^r \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[H]$$

από το οποίο παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία από αριστερά $\mathbb{Z}[H]$-πρότυπα:

$$0 \to \ker(d_1) \Big/ \mathrm{im}(d_2) \to \mathrm{coker}(d_2) \xrightarrow{\bar{d_1}} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{Z}[H]}} \mathbb{Z} \to 0$$

Μέσω του ισομορφισμού στο Θεώρημα 2.1.6, ταυτοποιούμε το $\mathrm{coker}(d_2)$ με το A_ψ και αφού:

$$d_1 \left(\psi \left(\pi (\frac{\partial f}{\partial x_i}) \right) \right) = \sum_{j=1}^{r} \psi \left(\pi \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right) d\pi(x_j) = \psi(\pi(f) - 1)$$

το $\bar{d_1}$ ϑα συμπίπτει με το θ_2. Επομένως, έχουμε:

$$N^{ab} \simeq \ker(\theta_2) \simeq \ker(\bar{d_1}) \simeq \ker(d_1)/\mathrm{im}(d_2),$$

όπου το $n \mathrm{mod} N^{(2)}$ απεικονίζεται στο $\psi(\pi(\frac{\partial f}{\partial x_j})) \mathrm{mod} \mathrm{im}(d_2), \pi(f) = g$. Όταν η G είναι ελεύϑερη ομάδα, η ακριβής ακολουϑία Crowell γίνεται ουσιαστικά η ακριβής ακολουϑία Blanchfield-Lyndon [2] (Πρόταση 1.1) και [3] (Θεώρημα 5.6.6):

$$0 \to N^{ab} \to \mathbb{Z}[H]^r \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{Z}[H]}} \mathbb{Z} \to 0.$$

Έστω $L = K_1 \cup \ldots \cup K_r \subset S^3$ κρίκος με r-συνιστώσες, X_L το συμπλήρωμα του και $G_L = \pi_1(X_L)$. Τότε, στην περίπτωση όπου $G = G_L$, η ακριβής ακολουϑία Crowell έχει την ακόλουϑη τοπολογική ερμηνεία: Έστω $h : X_H \to X_L$ η απεικόνιση επικάλυψης που αντιστοιχεί στην $N = \mathrm{Gal}(X_H/X_L) = H$. Σταϑεροποιούμε ένα σημείο αναφοράς $x_0 \in X_L$ έτσι ώστε $G_L = \pi_1(X_L; x_0)$. Έστω επίσης $y_0 \in h^{-1}(x_0)$ έτσι ώστε $N = \pi_1(X_H; y_0)$.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_L \arrow[d, "N"] & & \{1\} \arrow[d, dash] \\
X_H \arrow[d, "H", "h"'] & y_0 \arrow[d] & \pi_1(X_L, y_0) = N \arrow[d, dash] \\
X_L & x_0 & \pi_1(X_L, x_0)
\end{tikzcd}$$

Τότε στην ακριβή ακολουϑία:

$$1 \to N \xrightarrow{h_*} G_L \xrightarrow{\psi} H \to 1$$

ϑα αντιστοιχείται η ακριβής ακολουϑία Crowell:

$$0 \to N^{ab} \xrightarrow{\theta_1} A_\psi \xrightarrow{\theta_2} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{Z}[H]}} \mathbb{Z} \to 0.$$

Από την άλλη πλευρά, για το τοπολογικό ζεύγος $(X_H, h^{-1}(x_0))$ θα έχουμε την εξής ακολουθία στην σχετική ομολογία:

$$0 \to H_1(X_H) \xrightarrow{j} H_1(X_H; h^{-1}(x_0)) \xrightarrow{\delta} H_0(h^{-1}(x_0)) \xrightarrow{i} H_0(X_H) \to 0.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία αυτή είναι ισοδύναμη με την ακριβή ακολουθία Crowell παραπάνω. Πράγματι,

- Η αντιστοιχία $1 \mapsto [y_0]$ δίνει $\mathbb{Z}$-ισομορφισμό $\phi_0 : \mathbb{Z} \simeq H_0(X_H)$. Ο X_H είναι κατά τόξα συνεκτικός, $\sigma(y_0) = [y_0], \forall \sigma \in H$. Επομένως, η ϕ_0 είναι $\mathbb{Z}[H]$-ισομορφισμός.

- Αφού $H_0(h^{-1}(x_0)) = \bigoplus_{y \in h^{-1}(x_0)} H_0(y) = \bigoplus_{y \in h^{-1}(x_0)} \mathbb{Z}$ και η αντιστοιχία $\sigma \mapsto \sigma(y_0)$ επάγει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $H \to h^{-1}(x_0)$, θα έχουμε $\mathbb{Z}$-ισομορφισμό $\phi_1 : \mathbb{Z}[H] \simeq H_0(h^{-1}(x_0)); \sigma \mapsto [\sigma(y_0)]$. Και αφού, για κάθε $\sigma_1, \sigma_2 \in H$ έχουμε $\phi_1(\sigma_1\sigma_2) = [\sigma_1\sigma_2(y_0)] = \sigma_1([\sigma_2(y_0)]) = \sigma_1\phi_1(\sigma_2)$, έπεται ότι η ϕ_1 είναι $\mathbb{Z}[H]$-ισομορφισμός.

- Για $g = [l] \in G$, έστω $\tilde{l}$ μία ανύψωση της l που ξεκινά από το y_0. Τότε, $\tilde{l} \in C_1(X_H; h^{-1}(x_0))$ και έχουμε την απεικόνιση:

  $$\partial : G_L \to H_1(X_H; h^{-1}(x_0)); \partial(g) := [\tilde{l}]$$

  Ισχυρίζομαστε ότι η ∂ είναι ένα ψ-διαφορικό: Πράγματι, για $g_1 = [l_1], g_2 = [l_2] \in G_L$, έστω $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ και $\tilde{m}(m = l_1 \vee l_2)$ να είναι οι ανυψώσεις των l_1, l_2 και $l_1 \vee l_2$ που ξεκινούν από το y_0 αντίστοιχα. Έστω επίσης $\tilde{l}'_2$ η ανύψωση του l_2 που ξεκινά από το $\tilde{l}_1(1)$.

  Τότε θα έχουμε $\partial(g_1g_2) = [m] = [\tilde{l}_1] + [\tilde{l}_2]$ και $\partial(g_1) + \psi(g_1)\partial g_2 = [\tilde{l}_1] + \psi(g_1)[\tilde{l}_2] = [\tilde{l}_1] + [\tilde{l}'_2]$. Άρα, $\partial(g_1g_2) = \partial(g_1) + \psi(g_1)\partial g_2$. Και από την καθολική ιδιότητα του ψ-διαφορικού προτύπου, θα έχουμε έναν $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμό: $\phi_2 : A_\psi \to H_1(X_H; h^{-1}(x_0)); dg \mapsto [\tilde{l}]$.

- Από το Θεώρημα Hurewicz, θα έχουμε τον $\mathbb{Z}[H]$-ισομορφισμό $\phi_3 : N^{ab} \simeq H_1(X_H)$. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N^{ab} \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\phi_3"'] & A_\psi \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[d, "\phi_2"'] & \mathbb{Z}[H] \arrow[r, "\epsilon_{\mathbb{Z}[H]}"] \arrow[d, "\phi_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_1(X_H) \arrow[r] & H_1(X_H; h^{-1}(x_0)) \arrow[r] & H_0(h^{-1}(x_0)) \arrow[r] & H_0(X_H) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Πράγματι:

Για το δεξί τετράγωνο θα έχουμε ότι: $\forall \sigma \in H$, $(i \circ \phi_1)(\sigma) = i([\sigma(y_0)]) = [y_0]$ και $(\phi_0 \circ \epsilon_{\mathbb{Z}[H]})(\sigma) = \phi_0(1) = [y_0]$. Επομένως, $i \circ \phi_1 = \phi_0 \circ \epsilon_{\mathbb{Z}[H]}$.

Για το μεσαίο τετράγωνο: Αφού όλες οι απεικονίσεις είναι $\mathbb{Z}[H]$-ομομορφισμοί αρκεί να ελέγξουμε τις εικόνες των $[dg] \in A_\psi$. Έχουμε ότι $(\delta \circ \phi_2)([dg]) = \delta([\tilde{l}]) = [\tilde{l}(1)] - [\tilde{l}(0)] = [\tilde{l}(1)] - [y_0]$ και $(\phi \circ \theta_2)([dg]) = \phi_1(\psi(g) - 1) = [(\psi(g) - 1)(y_0)] = [\tilde{l}(1)] - [y_0]$. Επομένως, $\delta \circ \phi_2 = \phi_1 \circ \theta_2$.

Τέλος, για το αριστερό τετράγωνο: Έστω $n = [\tilde{l}] \in N$. Τότε θα έχουμε $(\phi_2 \circ \theta_1)(n) = \phi_2[dn] = [\tilde{l}]$ και $(j \circ \phi_3)(n) = j([\tilde{l}]) = [\tilde{l}]$. Επομένως, $\phi_2 \circ \theta_1 = j \circ \phi_3$. Αφού λοιπόν ϕ_0, ϕ_1, ϕ_3 ισομορφισμοί, άρα και ϕ_2 ισομορφισμός.

Παράδειγμα 2.1.10. *Έστω $\psi : G_L \to H = G_L^{ab}$ η απεικόνιση αβελιανοποίησης. Τότε, το X_H θα είναι το μέγιστο, αβελιανό, κάλυμμα του X_L και το Λ_r-πρότυπο $N^{ab} = H_1(X_L^{ab})$ θα καλείται πρότυπο κρίκου (link module) του L. Στην ειδική περίπτωση όπου η $\psi : G_L \to H = \langle t \rangle = \mathbb{Z}$ ορίζεται σαν την απεικόνιση που στέλνει κάθε μεσημβρινό K_i στο t, τότε το X_H θα είναι ο συνολικός αριθμός περιέλιξης (linking number) της απεικόνισης επικάλυψης $X_\infty \to X_L$ και τότε το Λ-πρότυπο $N^{ab} = H_1(X_\infty)$ καλείται περιορισμένο πρότυπο κρίκου του L. Τέλος, αν το L είναι ένας κόμβος K $(r = 1)$ το πρότυπο κρίκου ταυτίζεται με το περιορισμένο πρότυπο κρίκου και ονομάζεται πρότυπο κόμβου (knot module). Από το Θεώρημα 2.1.9 και το γεγονός ότι $I_\Lambda \simeq \Lambda$ θα έχουμε έναν Λ-ισομορφισμό $A_L^{red} \simeq H_1(X_\infty) \oplus \Lambda$. Επομένως, για κάθε $d \geq 0$ θα έχουμε ότι: $E_d(H_1(X_\infty)) = E_{d+1}(A_L^{red})$ και $\Delta_d(H_1(X_\infty)) = \Delta_{d+1}(A_L^{red})$.*

2.1β′ Πρότυπο Iwasawa

Περνάμε τώρα στην αριθμητική πλευρά. Έστω $\mathfrak{G}$ και $\mathfrak{H}$ προπεπερασμένες ομάδες και έστω $\psi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ συνεχής ομομορφισμός. Έστω ακόμα l ένας πρώτος αριθμός. Χάριν απλότητος, συμβολίζουμε ξανά με $\psi : \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]] \to \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$ τον επαγόμενο ομομορφισμό αλγεβρών μεταξύ πλήρη αλγεβρών ομάδος επί του $\mathbb{Z}_l$.

Ορισμός 2.1.11. *Ένα πλήρες ψ-διαφορικό πρότυπο $\mathfrak{A}_\psi$ ορίζεται να είναι το πρότυπο πηλίκο του αριστερού ελεύθερου $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$-προτύπου $\bigoplus_{g\in\mathfrak{G}} \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]dg$ με το αριστερό $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$-υποπρότυπο που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής $d(g_1g_2) - d(g_1) - \psi(g_1)d(g_2)$, δηλαδή:*

$$\mathfrak{A}_\psi := \left(\bigoplus_{g\in\mathfrak{G}} \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]dg \right) / \langle d(g_1g_2) - d(g_1) - \psi(g_1)d(g_2), \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{G} \rangle_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]}$$

Εξ′ ορισμού, η απεικόνιση $d : \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}_\psi$ μέσω της $g \mapsto dg$ είναι ένα τέτοιο ψ-διαφορικό και μάλιστα ισχύει η παρακάτω καθολική ιδιότητα:
Για κάθε αριστερό $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$-πρότυπο $\mathfrak{A}$ και για κάθε ψ-διαφορικό $\partial : \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}$, υπάρχει μοναδικός $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$-ομομορφισμός $\phi : \mathfrak{A}_\psi \to \mathfrak{A}$ έτσι ώστε $\phi \circ d = \partial$.

Παράδειγμα 2.1.12. *Έστω $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ και $\psi = \mathrm{id}_\mathfrak{G}$. Έστω επίσης $\mathfrak{G} = \varprojlim_i G_i$ με $|G_i| < +\infty$. Τότε, η απεικόνιση $\delta_i : G_i \to I_{\mathbb{Z}_l[G_i]}$ που ορίζεται ως $\delta_i(g) := g - 1$ είναι ένα id_{G_i}-διαφορικό (Παράδειγμα 2.1.3). Παίρνοντας αντίστροφο όριο, παρατηρούμε ότι η $\delta : \mathfrak{G} \to I_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]}$ είναι ένα $\mathrm{id}_\mathfrak{G}$-διαφορικό. Επιπλέον, η δ ικανοποιεί την παραπάνω καθολική ιδιότητα ($\phi(dg) := g - 1$).*

Θέτουμε τώρα $\mathfrak{N} := \ker(\psi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H})$.

Λήμμα 2.1.13. *Έχουμε ότι*

$$\ker(\psi : \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]] \to \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]) = I_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{N}]]}\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]$$

Εάν επιπλέον η ψ είναι επί, τότε έχουμε έναν ισομορφισμό από δεξιά $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]$-πρότυπα:

$$\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]/I_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{N}]]}\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]] \simeq \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$$

όπου εδώ η $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]$ δρα στην $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$ με δεξί πολλαπλασιασμό μέσω της ψ.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{G} = \varprojlim_i G_i$ και $\mathfrak{H} = \varprojlim_j H_j$ με G_i, H_i πεπερασμένες. Έστω επίσης ψ_{ij} η σύνθεση $G_i \to \mathfrak{G} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{H} \to H_j$ και $N_{ij} := \ker(\psi_{ij})$. Από Λήμμα 2.1.4 θα έχουμε ότι $\ker(\psi_{ij} : \mathbb{Z}_l[G_i] \to \mathbb{Z}_l[H_j]) = I_{\mathbb{Z}_l[N_{ij}]}\mathbb{Z}_l[G_i]$. Παίρνοντας λοιπόν αντίστροφο όριο καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Στο εξής θα υποθέτουμε ότι η ψ είναι επί, δηλαδή η παρακάτω βραχεία ακολουθία είναι ακριβής:

$$1 \to \mathfrak{N} \to \mathfrak{G} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{H} \to 1$$

Πρόταση 2.1.14. *Η αντιστοιχία $dg \mapsto g-1$ επάγει ισομορφισμό αριστερών $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$-προτύπων:*

$$\mathfrak{A}_\psi \simeq I_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]}/I_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{N}]]}\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]$$

όπου το $\beta \in \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$ δρα στο δεξί μέλος μέσω πολλαπλασιασμού για κάθε $\alpha \in \psi^{-1}(\beta)$.

Απόδειξη. Εντελώς όμοια με την Πρόταση 2.1.5. □

Τώρα, υποθέτουμε ότι η $\mathfrak{G}$ είναι πεπερασμένα παριστώμενη, προπεπερασμένη-l ομάδα και επιλέγουμε μια παράσταση της:

$$\mathfrak{G} = \langle x_1, \dots x_r | R_1 = \dots R_s = 1 \rangle$$

Θα περιγράφουμε το πλήρες ψ-διαφορικό πρότυπο $\mathfrak{A}_\psi$ χρησιμοποιώντας τον προπεπερασμένο-l διαφορικό λογισμό του Fox για τις ελεύθερες ομάδες. Έστω $\hat{F}(l) = \hat{F}(x_1, \dots, x_r)$ η ελεύθερη, προπεπερασμένη-l ομάδα και $\pi : \hat{F}(l) \to \mathfrak{G}$ ο φυσικός ομομορφισμός. Θεωρούμε τον $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$-ομομορφισμό:

$$d_2 : \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]^s \to \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]^r; (\beta_i)_{i=1,\dots,s} \mapsto \left(\sum_{i=1}^{s} \beta_i (\psi \circ \pi)(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}) \right)_{j=1,\dots,r}$$

Και σε αναλογία με το Θεώρημα 2.1.6 έχουμε το εξής:

Θεώρημα 2.1.15. *(Morishita, 2002) Η αντιστοιχία $dg \mapsto ((\psi \circ \pi)(\frac{\partial f}{\partial x_j})$ επάγει ισομορφισμό αριστερών $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$-προτύπων:*

$$\mathfrak{A}_\psi \simeq \operatorname{coker}(d_2)$$

όπου $f \in \hat{F}(l)$ είναι κάθε στοιχείο έτσι ώστε $\pi(f) = g$.

Πόρισμα 2.1.16. *Το πλήρες ψ-διαφορικό πρότυπο $\mathfrak{A}_\psi$ έχει μια ελεύθερη ανάλυση πάνω από το $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$:*

$$\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]^s \xrightarrow{\mathfrak{Q}_\psi} \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]^r \to \mathfrak{A}_\psi \to 0$$

όπου ο πίνακας παράστασης $\mathfrak{Q}_\psi$ δίνεται ως:

$$\mathfrak{Q}_\psi := \left((\psi \circ \pi)(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}) \right)$$

Αν επιπλέον η G είναι ελεύθερη, προπεπερασμένη-l ομάδα, θα έχουμε $\mathfrak{A}_\psi \simeq \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]^r$

Όταν η $\mathfrak{H}$ είναι αβελιανή ομάδα, για κάθε $d \geq 0$ ορίζεται ξανά το *Fitting* ιδεώδες του $\mathfrak{A}_\psi$ και συμβολίζεται με $E_d(\mathfrak{A}_\psi)$.

Παράδειγμα 2.1.17. *Έστω k αλγεβρικό σώμα αριθμών και S ένα (πεπερασμένο) σύνολο από τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathcal{O}_K$. Θεωρούμε ως $\mathfrak{G}$ την*

$$G_S(k) = \pi_1^{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O})\backslash S,$$

ως $\mathfrak{H}$ ένα πηλίκο της και $\psi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$. Τότε, το πλήρες ψ-διαφορικό πρότυπο $\mathfrak{A}_\psi$ θα ονομάζεται πλήρες ψ-Alexander πρότυπο του S. Αν η $\mathfrak{H}$ είναι αβελιανή ομάδα, το $E_d(\mathfrak{A}_\psi)$ θα ονομάζεται d-οστό πλήρες ψ-Alexander ιδεώδες του S.

Παρατήρηση 2.1.18. *Η επιλογή του πηλίκου $\mathfrak{H}$ εξαρτάται κάθε φορά από την περίπτωση που επιθυμούμε να μελετήσουμε. Για παράδειγμα, αν η $\mathfrak{G}$ είναι η ομάδα Galois $G_S(l)$ με $k = \mathbb{Q}, S = \{p_1, ..., p_r\}$ και $p_i \equiv 1mod(l)$ τότε παίρνουμε $\mathfrak{H} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ όπου $m = l^e, p_i \equiv 1modm$ και ψ τέτοιο ώστε $\psi(\tau_i) = 1modm$. Σε αυτήν την περίπτωση, το $\mathfrak{A}_\psi$ είναι ένα πρότυπο πάνω από τον $\mathbb{Z}_l[[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]] = \mathbb{Z}_l[[X]]/((1+X)^m - 1)$. Όταν το S περιέχει το σύνολο των πρώτων του k επί του l μπορούμε να πάρουμε ως $\mathfrak{H}$ οποιαδήποτε $\mathbb{Z}_p$-επέκταση $\mathrm{Gal}(k_\infty/k) = \mathbb{Z}_l$. Σε αυτή την περίπτωση, το $\mathfrak{A}_\psi$ θα είναι λόγω του προπεπερασμένου-l ισομορφισμού του Magnus (άρα η ταυτοποίηση δε γίνεται με κανονικό τρόπο) ένα πρότυπο πάνω από τον $\hat{\Lambda} := \mathbb{Z}_l[[T]] \simeq \mathbb{Z}_l[[Gal(k_\infty/k)]]$. Η $\hat{\Lambda}$ καλείται άλγεβρα Iwasawa και είναι ένας δακτύλιος μοναδικής παραγοντοποίησης της Noether. Επομένως, ορίζεται καλώς το $\Delta_d(\mathfrak{A}_\psi)$ και μάλιστα είναι ένα πολυώνυμο πάνω από το $\mathbb{Z}_l$ όπως θα δούμε αργότερα.*

Έστω τώρα ότι έχουμε μία βραχεία ακριβή ακολουθία από προπεπερασμένες ομάδες:

$$1 \to \mathfrak{N} \to \mathfrak{G} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{H} \to 1$$

Τότε, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε αυτήν, την πλήρωση της ακριβής ακολουθίας Crowell, την ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.19. *Υπάρχει μια βραχεία ακριβής ακολουθία από αριστερά $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]$-πρότυπα:*

$$0 \to \mathfrak{N}^{ab}(l) \xrightarrow{\theta_1} \mathfrak{A}_\psi \xrightarrow{\theta_2} \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]] \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{H}]]}} \mathbb{Z}_l \to 0$$

όπου $\mathfrak{N}^{ab}(l)$ είναι ένα μεγιστικό l-προπεπερασμένο πηλίκο της αβελιανοποίησης $\mathfrak{N}/\mathfrak{R}^{(2)}$ του $\mathfrak{N}$, θ_1 ο ομομορφισμός που επάγεται από την $n \mapsto dn (n \in \mathfrak{N})$ και θ_2 ο ομομορφισμός που επάγεται από την $dg \mapsto \psi(g) - 1 (g \in \mathfrak{G})$.

Απόδειξη. Παίρνοντας $\mathfrak{N}$-ομολογία στη βραχεία ακριβή ακολουθία των αριστερών $\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{N}]$-προτύπων:

$$0 \to I_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]} \to \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}] \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]}} \mathbb{Z}_l \to 0$$

θα έχουμε την ακριβή ακολουθία:

$$H_1(\mathfrak{N}; \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]) \to H_1(\mathfrak{N}; \mathbb{Z}_l) \to H_0(\mathfrak{N}; I_{\mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]}) \to H_0(\mathfrak{N}; \mathbb{Z}_l[[\mathfrak{G}]]) \to H_0(\mathfrak{N}; \mathbb{Z}_l)$$

Εδώ θα ισχύει ότι: $H_1(\mathfrak{N}; \mathbb{Z}_l) = \mathfrak{N}^{ab}(l)$ ενώ οι υπόλοιποι όροι θα περιγράφονται από το Θεώρημα 2.1.9 χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.13 και την Πρόταση 2.1.14. Έτσι, έχουμε την ζητούμενη ακριβή ακολουθία. □

Παρατήρηση 2.1.20. *Αν η $\mathfrak{G}$ είναι μία πεπερασμένα παριστώμενη, l-προπεπερασμένη ομάδα μπορούμε να περιγράψουμε την πλήρη ακριβή ακολουθία Crowell με όρους l-προπεπερασμένων παραγώγων Fox χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.15.*

Παράδειγμα 2.1.21. *Έστω k αλγεβρικό σώμα αριθμών και S ένα (πεπερασμένο) σύνολο από τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathcal{O}_K$. Έστω $\mathfrak{G}$ ένα πηλίκο της $G_S(k) = \pi_1^{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O})\backslash S)$ και αντίστοιχα $\mathfrak{H}$ ένα πηλίκο της $\mathfrak{G}$. Ας είναι επίσης $\psi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ ο φυσικός ομομορφισμός. Τότε η $\mathfrak{N}^{ab}(l)$ καλείται ψ-Galois πρότυπο. Ιδιαιτέρως, όταν το S περιέχει το σύνολο των πρώτων επί του l και $\mathfrak{H} = \mathbb{Z}_l$, το ψ-Galois πρότυπο $\mathfrak{N}^{ab}(l)$ καλείται πρότυπο Iwasawa. Αφού $I_{\hat{\Lambda}} \simeq \hat{\Lambda}$, λόγω του Θεωρήματος 2.1.19 θα έχουμε έναν $\hat{\Lambda}$-ισομορφισμό: $\mathfrak{A}_\psi \simeq \mathfrak{N}^{ab}(l) \oplus \hat{\Lambda}$. Επομένως, θα έχουμε ότι: $E_d(\mathfrak{N}^{ab}(l)) = E_{d+1}(\mathfrak{A}_\psi)$ και $\Delta_d(\mathfrak{N}^{ab}(l)) = \Delta_{d+1}(\mathfrak{A}_\psi)$ για κάθε $d \geq 0$. Ουσιαστικά, το $\Delta_0(\mathfrak{N}^{ab}(l))$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα αριθμητικό ανάλογο του πολυωνύμου Alexander στα πλαίσια της θεωρίας Iwasawa. Όπως θα δούμε παρακάτω όμως, θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο πολυώνυμο Iwasawa για το $\hat{\Lambda}$-πρότυπο $\mathfrak{N}^{ab}(l)$ με ελαφρώς διαφορετική έννοια.*

Παρατήρηση 2.1.22. *Είναι γνωστό ([4] § 13.6, Παράδειγμα 3 και [5], Appendix) πως αν το $\mathfrak{N}^{ab}(l)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο, $\hat{\Lambda}$-πρότυπο στρέψης και δεν έχει μη-τετριμμένο, πεπερασμένο $\hat{\Lambda}$-υποπρότυπο, τότε το $\Delta_0(\mathfrak{N}^{ab}(l))$ ταυτίζεται με το πολυώνυμο Iwasawa του $\mathfrak{N}^{ab}(l)$. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ([6] Θεώρημα 18, [4] Θεώρημα 13.31) πως η συνθήκη αυτή ικανοποιείται στο $\mathfrak{N}^{ab}(l)$ εάν το k είναι ολικά πραγματικό (π.χ κάθε άπειρος πρώτος του k είναι πραγματικός πρώτος) και το $\mathfrak{H}$ είναι η ομάδα Galois της κυκλοτομικής $\mathbb{Z}_p$-επέκτασης του k. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής αποτέλεσμα:*

Θεώρημα 2.1.23. *Έστω $X_S = Gal^{ab}(k_S(p)/k_\infty)$. Τότε,*
(i) Αν k_∞/k κυκλοτομική $\mathbb{Z}_p$-επέκταση, τότε ισχύει η ασθενής εικασία Leopoldt:

$$H^2(G(k_S/k_\infty); \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$$

(ii) Η ασθενής εικασία Leopoldt ισχύει αν και μόνο εάν $p.d_{\hat{\Lambda}} \leq 1$ και $rank_{\hat{\Lambda}} X_S = r_2$, όπου $r_2 : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Ειδικότερα, το X_S είναι ένα $\hat{\Lambda}$-πρότυπο στρέψης.

Απόδειξη. Πρβλ. [3] (Θεώρημα 11.3.2) □

2.2 Πολυωνυμικές αναλλοίωτες στην ομολογία και ομάδες κλάσεων ιδεωδών

Στην ενότητα αυτή, συνεχίζοντας την παραπάνω αναλογία, θα δείξουμε πως υπάρχουν ασυμπτωτικοί τύποι για την τάξη των ομάδων ομολογίας των κυκλικών διακλαδισμένων επικαλύψεων και των p-ομάδων κλάσεων ιδεωδών κυκλοτομικών επεκτάσεων.

2.2α′ Τύποι ορίζουσας

Μία ρητή ομολογική σφαίρα είναι μία 3-πολλαπλότητα η οποία έχει τις ρητές ομάδες ομολογίες της 3-σφαίρας, δηλαδή $H_0(M, \mathbb{Q}) = H_3(M, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ και $H_1(M, \mathbb{Q}) = H_2(M, \mathbb{Q}) = 0$.

Έστω K ένας κόμβος στη ρητή ομολογική 3-σφαίρα M και έστω α ένας μεσημβρινός του K, $X_K := M\backslash \mathrm{int}V_K$ το συμπλήρωμα του και $G_K = \pi_1(X_K)$.

Υποθέτουμε επίσης πως υπάρχει μια προσανατολίσιμη επιφάνεια (Seifert) $\Sigma \subset M$ έτσι ώστε $\partial \Sigma = K$. Τότε έχουμε:

$$H_1(X_K) \simeq \langle [\alpha] \rangle \oplus H_1(M), \langle [\alpha] \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

Στην πραγματικότητα, αν συμβολίσουμε με $\phi(c)$ τον αριθμό τομής (με υπογραφή) της Σ με έναν 1-κύκλο $c \in Z_1(X_K)$, η ϕ θα ορίζει έναν επιμορφισμό $H_1(X_K) \to \mathbb{Z}$ με $\phi(\alpha) = 1$. Επομένως, θα έχουμε: $H_1(X_K) \simeq \langle [\alpha] \rangle \oplus \ker(\phi), \langle [\alpha] \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Από την ακριβή ακολουθία στη σχετική ομολογία και την ιδιότητα εκτομής, θα έχουμε: $H_1(X_K) \simeq \langle [\alpha] \rangle \oplus H_1(X_K; \partial V_K) \simeq \langle [\alpha] \rangle \simeq H_1(X_K; V_K) \simeq \langle [\alpha] \rangle \simeq H_1(M)$. Άρα, $\ker(\phi) \simeq H_1(M)$.

Έστω τώρα η φυσική προβολή $\psi : G_K \to H_1(X_K) \to \langle [\alpha] \rangle \simeq \mathbb{Z}$, X_∞ η άπειρη κυκλική επικάλυψη του X_K που αντιστοιχεί στο $\ker(\psi)$, τ ένας γεννήτορας της $\mathrm{Gal}(X_\infty/X_K)$ που αντιστοιχεί στο $1 \in \mathbb{Z}$ και $\Lambda := \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] = \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(X_\infty/X_K)](t \leftrightarrow \tau)$. Ορίζουμε επίσης X_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να είναι η κυκλική υπο-επικάλυψη του $X_\infty \to X_K$ βαθμού n και M_n η πλήρωση Fox αυτής.

$$\begin{tikzcd}
X_\infty \arrow[d] & \\
X_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}"'] & M_n \arrow[d] \\
X_K \arrow[r, hook] & M
\end{tikzcd}$$

Τότε έχουμε τον εξής ισομορφισμό:

Πρόταση 2.2.1.

$$H_1(M_n) \simeq H_1(X_\infty)/(t^n - 1)H_1(X_\infty), \forall n \geq 1$$

Απόδειξη. Έστω η ακριβής ακολουθία Wang:

$$H_1(X_\infty) \xrightarrow{t^n-1} H_1(X_\infty) \to H_1(X_n) \to \mathbb{Z} \to 0$$

Τότε θα έχουμε ότι,

$$H_1(X_n) \simeq H_1(X_\infty)/(t^n - 1)H_1(X_\infty) \oplus \mathbb{Z}$$

Αφού η εικόνα του α^n στην $\mathrm{Gal}(X_n/X_K) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ είναι 0, το a^n μπορεί να ανυψωθεί στο X_n. Έστω λοιπόν ότι το $1 \in \mathbb{Z}$ αντιστοιχεί στην ανύψωση $[\tilde{\alpha}^n]$ του $[\alpha^n]$. Τότε, αφού $H_1(M_n) = H_1(M_n)/\langle [\tilde{\alpha}^n] \rangle$, έχουμε το ζητούμενο. □

Έστω $G_K = \langle x_1, \ldots, x_m | R_1 = \ldots = R_{m-1} = 1 \rangle$ μια παράσταση Wirtinger της G_K και $\pi : F(x_1, \ldots, x_m) \to G_K$ ο φυσικός ομομορφισμός. Συμβολίζουμε με A_K το πρότυπο Alexander του K που ορίζεται από το ψ-διαφορικό πρότυπο. Τότε, το $Q_K := \left((\psi \circ \pi)(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}) \right)$ είναι ένας πίνακας παράστασης του Λ-προτύπου A_K (Πόρισμα 2.1.7). Αφού, από την ακριβή ακολουθία Crowell έχουμε έναν Λ-ισομορφισμό $A_K \simeq H_1(X_\infty)$ (Θεώρημα 2.1.9), μπορούμε να υποθέσουμε (ως προς κάποιες στοιχειώδεις γραμμοπράξεις) ότι $Q_K = (Q_1|0)$, όπου το Q_1 είναι ο τετραγωνικός πίνακας παράστασης του Λ-προτύπου $H_1(X_\infty)$.

Πρόταση 2.2.2. *Το $H_1(X_\infty)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο, Λ-πρότυπο στρέψης ενώ έχουμε $E_0(H_1(X_\infty)) = (\det(Q_1))$ και $\Delta_0(H_1(X_\infty)) = \det(Q_1) \neq 0$.*

Απόδειξη. Αφού, $H_1(X_\infty) = \Lambda^{m-1}/Q_1(\Lambda^{m-1})$ το $H_1(X_\infty)$ θα είναι πεπερασμένα παραγόμενο επί του Λ. Αν $\mathrm{rank}_\Lambda H_1(X_\infty) \geq 1$ από Πρόταση 2.2.1 και το γεγονός ότι $\Lambda/(t-1)\Lambda \simeq \mathbb{Z}$ προκύπτει ότι $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H_1(M) \geq 1$, άτοπο. □

Ορισμός 2.2.3. *Ονομάζουμε ως πολυώνυμο Alexander του K το*

$$\Delta_K(t) := \Delta_0(H_1(X_\infty)) = \det(Q_1)$$

.

Παρατηρούμε ότι το $\Delta_K(t)$ καθορίζεται πλήρως μέχρι την πράξη του πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο του $\Lambda^\times = \{\pm t^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Επίσης, αφού το $\Lambda_{\mathbb{Q}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών, θα έχουμε από το Θεώρημα Δομής έναν $\Lambda_{\mathbb{Q}}$-ισομορφισμό:

$$H_1(X_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda_{\mathbb{Q}}/(f_i), f_i \in \Lambda_{\mathbb{Q}}$$

Αφού το τ δρα στο δεξί μέλος με πολλαπλασιασμό κατά t, προκύπτει ότι:

$$\Delta_K(t) = \prod_{i=1}^{s} f_i = \det(t \cdot \mathrm{id} - \tau|_{H_1(X_\infty)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}}) \mathrm{mod} \Lambda_{\mathbb{Q}}^\times$$

Ας υποθέσουμε τώρα πως η M είναι η ομολογική 3-σφαίρα με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$. Τότε, το ακόλουθο αλγεβρικό Λήμμα σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.2.1 μας εξασφαλίζει ότι $\Delta_K(1) = \pm 1$ και επομένως το $\Delta_K(t)$ συμπίπτει με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(t \cdot \mathrm{id} - \tau|_{H_1(X_\infty)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}})$ μέχρι την πράξη του πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο του $\Lambda^\times$.

Λήμμα 2.2.4. *Έστω N πεπερασμένα παραγόμενο, Λ-πρότυπο στρέψης και υποθέτουμε ότι $E_0(N) = (\Delta)$. Τότε, για κάθε μη-σταθερή $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ το $N/f(t)N$ είναι πεπερασμένη αβελιανή ομάδα στρέψης αν και μόνο εάν $\Delta(\xi) \neq 0$ για κάθε ρίζα $\xi \in \bar{\mathbb{Q}}$ της $f(t) = 0$. Επιπλέον, αν $f(t) = \pm \prod_{j=1}^{n}(t - \xi_j)$ τότε ισχύει ότι:*

$$|N/f(t)N| = \prod_{j=1}^{n} |\Delta(\xi_j)|$$

Απόδειξη. Πρβλ. [7], Θεώρημα 3.13. □

Παρατήρηση 2.2.5. *Έστω $g(t) = a\prod_{j=1}^{n}(z - a_j) \in C[z]$ μη-σταθερό πολυώνυμο. Τότε, αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τον τύπο του Jensen στην μιγαδική ανάλυση, πως το μέτρο Mahler $m(g) = |a| \prod_{j=1}^{n} max\{1, |a_j|\}$ γράφεται στη μορφή:*

$$m(g) = exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})| d\theta\right)$$

Θεώρημα 2.2.6. *Ας υποθέσουμε πως δεν υπάρχει ρίζα του $\Delta_K(t) = 0$ που να είναι n-οστή ρίζα της μονάδας για κάποιο n. Τότε, όλα τα M_n είναι ρητές ομολογικές 3-σφαίρες και ισχύει ότι:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \# H_1(M_n) = \log\ m(\Delta_K)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση αφού, από Πρόταση 2.2.2 και Λήμμα 2.2.4 προκύπτει ότι η $H_1(M_n)$ είναι πεπερασμένη και μάλιστα ισχύει ότι:

$$\#H_1(M_n) = \prod_{j=0}^{n-1} |\Delta_K(\zeta_n^j)|$$

Επομένως, θα έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#H_1(M_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \prod_{j=0}^{n-1} |\Delta_K(\zeta_n^j)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |\Delta_K(\zeta_n^j)|$$

$$= \int_0^1 \log |\Delta_K(e^{2\pi i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \log |\Delta_K(e^{i\theta})| d\theta = \log m(\Delta_K)$$

□

Παρατήρηση 2.2.7. *Μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία του ρυθμού αύξησης της ομολογικής ομάδας στο Θεώρημα 2.2.6 που οφείλεται στη βαθιά σχέση που υπάρχει μεταξύ μέτρου Mahler και δυναμικών συστημάτων, είναι η ενσάρκωση του ως τοπολογική εντροπία της φυσιολογικής $\mathbb{Z}$-δράσης στον συμπαγή Pontryagin-δυϊκό της $H_1(X_\infty;\mathbb{Z})^*$ (Για περισσότερα πρβλ. [9], [10], [11]).*

Παράδειγμα 2.2.8. *Έστω ο κόμβος $K = 4_1 = B(5,3) \in S^3$. Τότε, χρησιμοποιώντας την παράσταση $G_K = \langle x_1, x_2 | x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} = x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1 \rangle$ παίρνουμε $\Delta_K = t^2 - 3t + 1$. Επομένως,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#H_1(M_n) = \log m(\Delta_K) = \log \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$$

Έστω τώρα k αλγεβρικό σώμα αριθμών, p πρώτος αριθμός και k_∞ η κυκλοτομική $\mathbb{Z}_p$-επέκταση του k. Υποθέτουμε επίσης πως μόνο ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ του k διακλαδίζεται στο k_∞/k και (εντελώς ανάλογα με την περίπτωση των κόμβων) είναι ολικά-διακλαδιζόμενο. Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ ας είναι k_n το κυκλικό υπόσωμα του k_∞/k βαθμού p^n και H_n η p-Sylow υποομάδα της ομάδας κλάσεων ιδεωδών του k_n, δηλαδή: $H_n := H(k_n)(p)$. Τέλος, συμβολίζουμε με L_n τη μέγιστη, αδιακλάδιστη, αβελιανή p-επέκταση του k_n (σώμα p-κλάσεων Hilbert). Τότε, από θεωρία κλάσεων σωμάτων (βλ. Παράρτημα, Α΄.1.4), θα έχουμε ότι υπάρχει κανονικός ισομορφισμός για κάθε n:

$$\phi_n : H_n \simeq \mathrm{Gal}(L_n/k_n); [\mathfrak{a}] \mapsto \sigma_{\mathfrak{a}}$$

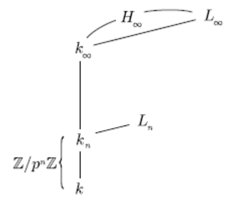
Άρα, αν για κάθε $n \geq m$, η $N_{n/m} : H_n \to H_m$ είναι η συνάρτηση νόρμας και ρ η απεικόνιση περιορισμού, θα έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
H_n \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d, "N_{n/m}"'] & Gal(L_n/k_n) \arrow[d, "\rho"] \\
H_m \arrow[r, "\phi_m"] & Gal(L_m/k_m)
\end{tikzcd}$$

Επομένως, το $\{H_n\}_{n\geq 0}$ αποτελεί ένα προβολικό σύστημα ως προς τις νόρμες. Έστω λοιπόν $H_\infty := \varprojlim_n H_n$ και $L_\infty := \bigcup_{n\geq 0} L_n$. Λόγω του διαγράμματος θα έχουμε έναν ισομορφισμό p-προπεπερασμένων αβελιανών ομάδων:

$$\phi_\infty : H_\infty \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Gal}(L_\infty/k_\infty)$$

Καθώς η L_n είναι η μέγιστη, αδιακλάδιστη, αβελιανή p-επέκταση του k_n, έπεται ότι η L_n θα είναι μια Galois επέκταση του k και επομένως η L_∞/k είναι μία p-προπεπερασμένη επέκταση Galois.



Έστω $\tilde{\mathfrak{p}}$ ένας πρώτος του L_∞ πάνω από το $\mathfrak{p}$ και $I_\mathfrak{p}$ η ομάδα αδρανείας του $\tilde{\mathfrak{p}}$. Από υπόθεση, θα έχουμε ότι: $I_\mathfrak{p} \simeq \mathrm{Gal}(L_\infty/k)/Gal(L_\infty/k_\infty) \simeq \mathrm{Gal}(k_\infty/k)$. Σταθεροποιώντας έναν τοπολογικό γεννήτορα γ της $\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ και απεικονίζοντας το στο $1+T$, θα έχουμε ξανά λόγω του p-προπεπερασμένου ισομορφισμού Magnus ότι: $\mathbb{Z}_p[[Gal(k_\infty/k]] \simeq \hat{\Lambda} := \mathbb{Z}[[T]]$. Λόγω του Παραδείγματος 2.1.21, παρατηρούμε πως για τον φυσικό ομομορφισμό $\psi : Gal(L_\infty/k) \to \mathrm{Gal}(k_\infty/k) \simeq \mathbb{Z}_p$ η ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(L_\infty/k_\infty)$ θα είναι ένα ψ-Galois πρότυπο Iwasawa. Επίσης, το $g \in \mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ δρα στην $\mathrm{Gal}(L_\infty/k_\infty)$ μέσω του εσωτερικού ισομορφισμού $g(x) = \tilde{g}\circ x \circ \tilde{g}^{-1}$, όπου $\tilde{g}$ μια επέκταση του g στην $\mathrm{Gal}(L_\infty/k)$ και κατά συνέπεια αφού η ϕ_∞ μετατίθεται με όλες αυτές τις δράσεις, το $\hat{\Lambda}$ θα δρα κατά φυσικό τρόπο στην H_∞. Έχουμε λοιπόν ως ανάλογο της Πρότασης 2.2.1, τον εξής ισομορφισμό:

Πρόταση 2.2.9.

$$H_n \simeq H_\infty \Big/ \big((1+T)^{p^n}-1\big)\, H_\infty \,, \forall n \geq 0$$

Απόδειξη. Αφού $H_n \simeq \mathrm{Gal}(L_n/k_n) \simeq \mathrm{Gal}(L_\infty/k_n)/Gal(L_\infty/L_n)$ και $I_\mathfrak{p}^{p^n} \simeq \mathrm{Gal}(k_\infty/k_n)$, έπεται ότι: $\mathrm{Gal}(L_\infty/k_n) = Gal(L_\infty/k_\infty)\cdot I_\mathfrak{p}^{p^n}$ και $\mathrm{Gal}(L_\infty/L_n) = \langle \mathrm{Gal}(L_\infty/k_n)^{(2)}, I_\mathfrak{p}^{p^n}\rangle$ και αφού $\mathrm{Gal}(L_\infty/k_n)^{(2)} = (\gamma^{p^n}-1)Gal(L_\infty/k_\infty)$ θα έχουμε διαδοχικά ότι:

$$H_n \simeq Gal(L_\infty/k_\infty)I_\mathfrak{p}^{p^n} \Big/ \langle(\gamma^{p^n}-1)Gal(L_\infty/k_\infty), I_\mathfrak{p}^{p^n}\rangle$$

$$\simeq Gal(L_\infty/k_\infty) \Big/ (\gamma^{p^n}-1)Gal(L_\infty/k_\infty) \simeq H_\infty \Big/ \big((1+T)^{p^n}-1\big)\, H_\infty$$

□

Ας δούμε τώρα κάποια αλγεβρικά λήμματα, που αφορούν τη δομή της άλγεβρας Iwasawa $\hat{\Lambda}$.

Λήμμα 2.2.10. (i) *Έστω g πολύωνυμο Weierstrass βαθμού $\lambda \geq 1$. Τότε, κάθε στοιχείο $f \in \hat{\Lambda}$ γράφεται μοναδικά ως:*

$$f = qg + r, q \in \hat{\Lambda}, r \in \mathbb{Z}_p[T], deg(r) \leq \lambda - 1$$

(ii) *(p-αδικό ανάλογο Θεωρήματος Weierstrass για δυναμοσειρές με άτυπη σύγκλιση, preparation theorem): Για κάθε μη-μηδενικό $f(T) \in \hat{\Lambda}$ υπάρχει πολυώνυμο Weierstrass $g(T)$ και $u(T) \in \hat{\Lambda}^{\times}$ έτσι ώστε να υπάρχει μοναδική γραφή ως:*

$$f(T) = p^{\mu} g(T) u(T), \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Οι ποσότητες $\mu = \mu(f), \lambda = \lambda(f) := deg(g)$, ονομάζονται μ-αναλλοίωτη και λ-αναλλοίωτη του πολυωνύμου f αντιστοίχως.

Απόδειξη. Πρβλ. [3] Λήμμα 5.3.4 □

Ορισμός 2.2.11. *Έστω $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ δύο $\hat{\Lambda}$-πρότυπα. Τότε αυτά θα καλούνται ψευδο-ισομορφικά ($\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}'$) αν υπάρχει $\hat{\Lambda}$-ομομορφισμός $\phi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$ έτσι ώστε αμφότερα τα $\ker(\phi)$ και $\operatorname{coker}(\phi)$ να είναι πεπερασμένα.*

Λήμμα 2.2.12. (i) *(Λήμμα Nakayama) Το $\mathfrak{N}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\hat{\Lambda}$-πρότυπο αν και μόνο εάν το $\mathfrak{N} \big/ (p,T)\mathfrak{N}$ είναι πεπερασμένο.*

(ii) *(Θεώρημα δομής για πρότυπα Iwasawa) Έστω $\mathfrak{N}$ ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\hat{\Lambda}$-πρότυπο. Τότε,*

$$\mathfrak{N} \sim \hat{\Lambda}^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} \hat{\Lambda}/(p^{m_i}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{t} \hat{\Lambda}/(f_i^{e_i})$$

όπου $r \geq 0$ ακέραιος, $m_i, e_i \in \mathbb{N}$ και f_i ένα ανάγωγο πολύωνυμο Weierstrass.

Απόδειξη. Πρβλ. [3] Λήμμα 5.2.18 και 5.3.8 □

Έστω λοιπόν $\mathfrak{N}$ ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\hat{\Lambda}$-πρότυπο στρέψης. Τότε, θα έχουμε ότι $\mathfrak{N} \sim \bigoplus_{i=1}^{s} \hat{\Lambda}/(p^{m_i}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{t} \hat{\Lambda}/(f_i^{e_i})$. Το ιδεώδες που παράγεται από το $f := \prod_{i=1}^{s} p^{m_i} \prod_{i=1}^{t} f_i^{e_i}$ και καθορίζεται από το $\hat{\Lambda}$-πρότυπο $\mathfrak{N}$ θα ονομάζεται *χαρακτηριστικό ιδεώδες* του $\mathfrak{N}$ (0-στό Fitting ιδεώδες) ενώ το ίδιο το f θα καθορίζεται μέχρι την πράξη του πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο του $\hat{\Lambda}^{\times}$ και θα ονομάζεται *πολύωνυμο Iwasawa* του $\mathfrak{N}$. Όταν το $\mathfrak{N}$ δεν έχει μη-τετριμμένο, πεπερασμένο $\hat{\Lambda}$-υποπρότυπο, αποδεικνύεται πως το χαρακτηριστικό ιδεώδες του $\mathfrak{N}$ συμπίπτει με το $E_0(\mathfrak{N})$ και $f = \Delta_0(\mathfrak{N})$. Επίσης, αφού $\hat{\Lambda}_{\mathbb{Q}_p} := \hat{\Lambda} \otimes_{\mathbb{Z}p} \mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p[[T]]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών, θα έχουμε $\hat{\Lambda}_{\mathbb{Q}_p}$-ισομορφισμό:

$$\mathfrak{N} \otimes_{\mathbb{Z}p} \mathbb{Q}_p \simeq \bigoplus_{i=1}^{t} \hat{\Lambda}_{\mathbb{Q}_p}/(f_i^{e_i})$$

Επειδή το $\gamma - 1$ δρα στο δεξί μέλος με πολλαπλασιασμό κατά T, προκύπτει ότι:

$$f(T) = det(T \cdot \mathrm{id} - (\gamma - 1)|_{\mathfrak{N} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p}) \mathrm{mod} (\hat{\Lambda}_{\mathbb{Q}_p})^{\times}$$

Οι ποσότητες $\mu(f) := \sum_{i=1}^{t} m_i, \lambda(f) := \sum_{i=1}^{s} deg(f_i^{e_i})$ που καθορίζονται μοναδικά από το $\mathfrak{N}$, θα αποτελούν εδώ την μ-αναλλοίωτη $\mu(\mathfrak{N})$ και λ-αναλλοίωτη $\lambda(\mathfrak{N})$ του $\mathfrak{N}$ αντιστοίχως. Τέλος, αν $\mu(\mathfrak{N}) = 0$ τότε θα έχουμε ότι το f ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $det(T \cdot \mathrm{id} - (\gamma - 1)|_{\mathfrak{N} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p}) \mathrm{mod} \hat{\Lambda}^{\times}$.

Πρόταση 2.2.13. *Η H_{∞} είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο, $\hat{\Lambda}$-πρότυπο στρέψης.*

Απόδειξη. Αφού η H_n είναι πεπερασμένη, από Πρόταση 2.2.9 και το Λήμμα 2.2.12 (1) προκύπτει ότι η H_∞ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\hat{\Lambda}$-πρότυπο. Έστω ότι δεν είναι στρέψης επί του $\hat{\Lambda}$, $H_\infty \approx \hat{\Lambda}^r \oplus \ldots, r \geq 1$. Άρα το $\hat{\Lambda}/T \simeq \mathbb{Z}_p$ είναι άπειρο, το οποίο είναι άτοπο από την Πρόταση 2.2.9. $\square$

Ως αριθμητικό ανάλογο του Θεωρήματος 2.2.6, αποδεικνύουμε τον ακόλουθο ασυμπτωτικό τύπο για την $\#H_n$:

Θεώρημα 2.2.14. *(Τύπος κλάσεων ιδεωδών Iwasawa) Έστω $\mu = \mu(H_\infty), \lambda = \lambda(H_\infty)$. Τότε, για επαρκούντως μεγάλα n, θα έχουμε:*

$$log_p \# H_n = \mu p^n + \lambda n + \nu$$

όπου ν μια σταθερά ανεξάρτητη του n.

Απόδειξη. Από Λήμμα 2.2.12 (2) και Πρόταση 2.2.13 θα έχουμε ότι:

$$H_\infty \sim E := \bigoplus_{i=1}^{s} \hat{\Lambda}/(p^{m_i}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{t} \hat{\Lambda}/(f_i^{e_i})$$

όπου $m_i, e_i \in \mathbb{N}$ και f_i ανάγωγο πολυώνυμο Weierstrass. Αποδεικνύεται ότι ([4], Πρόταση 13.19) ότι υπάρχει σταθερά c ανεξάρτητη του n έτσι ώστε:

$$\#\Big(H_\infty/((1+T)^{p^n}-1)H_\infty\Big) = p^c \#\Big(E/((1+T)^{p^n}-1)E\Big)$$

Για $E = \hat{\Lambda}/(p^m)$:

$$\#\Big(E/((1+T)^{p^n}-1)E\Big) = \#\Big(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}[T]/((1+T)^{p^n}-1)\Big)$$
$$= (p^m)^{deg((1+T)^{p^n}-1)} = p^{mp^n}$$

Για $E = \hat{\Lambda}/(g)$, όπου g πολυώνυμο Weierstrass βαθμού $deg(g) \geq 1$:

$$\#\Big(E/((1+T)^{p^n}-1)E\Big) = \#\Big(\mathbb{Z}[T]/(g,(1+T)^{p^n}-1)\Big)$$
$$= \prod_{\zeta^{p^n}=1} |g(\zeta-1)|_p^{-1}$$

Παρατηρούμε ότι αφού $\#\big(E/((1+T)^{p^n}-1)E\big) < +\infty$ θα έχουμε $g(\zeta-1) \neq 0$ για κάθε p^n-στη ρίζα ζ της μονάδας. Έστω τώρα v_p μια p-αδική, προσθετική εκτίμηση ($|x|_p = p^{-v_p(x)}$) και έστω $g(T) = T^d + a_1 T^{d-1} + \ldots + a_d, a_i \equiv 0 mod p$. Τότε, για n επαρκούντως μεγάλο θα έχουμε για μια πρωτογενή p^n-στη ρίζα ζ της μονάδας ότι $v_p((\zeta-1)^d) \langle v_p(p)$ και άρα $v_p(g(\zeta-1)) = v_p((\zeta-1)^d)$. Οπότε, για μεγάλα n θα έχουμε ότι:

$$v_p\left(\prod_{\zeta^{p^n}=1} g(\zeta-1)\right) = v_p\left(\prod_{\zeta^{p^n}=1,\zeta\neq 1} (\zeta-1)^d\right) + C$$
$$= v_p(p^{nd}) + C = nd + C$$

όπου C είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του n. Επομένως, έχουμε

$$\#\Big(E/((1+T)^{p^n}-1)E\Big) = p^{nd+C}$$

Με βάση τα παραπάνω και το γεγονός ότι $\mu = \sum_{i=1}^{s} m_i$ και $\lambda = \sum_{i=1}^{t} deg(f_i^{e_i})$ έχουμε τον ζητούμενο τύπο. $\square$

Παρατήρηση 2.2.15. (i) *Το $\hat{\Lambda}$-πρότυπο H_∞ (και κατ'επέκταση οι αναλλοίωτες Iwasawa $\mu(H_\infty), \lambda(H_\infty)$) εξαρτώνται μόνο από τα k και p. Είναι γνωστό ([4], 7.5) πως αν το $k/\mathbb{Q}$ είναι αβελιανή επέκταση, τότε $\mu(H_\infty) = 0$ ενώ εικάζεται πως αυτό συμβαίνει και στη γενική περίπτωση.*

(ii) *Όπως και στην περίπτωση των κόμβων (Παρατήρηση 2.2.7) θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς την αριθμητική ερμηνεία της εντροπίας της δράσης του $\mathbb{Z} = \{\gamma^n | n \in \mathbb{Z}\}$ στο πρότυπο Iwasawa H_∞.*

Παράδειγμα 2.2.16. *Έστω $k = \mathbb{Q}(\mu_p)$. Τότε, θα έχουμε $k_\infty = \mathbb{Q}(\mu_p^\infty)$, όπου $\mu_p^\infty = \cup_{d\geq 1}\mu_{p^d}$, οπότε ικανοποιείται η υπόθεση. Από την προηγούμενη Παρατήρηση θα έχουμε ότι:*

$$log_p \# H_n = \lambda n + \nu, (n \gg 0)$$

Αν υποθέσουμε την ισχύ της εικασίας Kummer-Vandiver ($p \neq h_{\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})}$) τότε θα έχουμε για κάθε $n \geq 1$ ([4] 10.16):

$$\# H_n = \prod_{\zeta^{p^n}=1} |f(\zeta - 1)|_p^{-1}$$

όπου $f(T)$ το πολυώνυμο Iwasawa της H_∞.

2.3 Στρέψεις και Βασική Εικασία Iwasawa

Είναι γνωστή η βαθιά σχέση που διέπει τους αριθμούς Bernoulli B_n με τη θεωρία αριθμών. Για παράδειγμα εμφανίζονται στον κλειστό τύπο του Faulhaber που δίνει την έκφραση για το άθροισμα των s-δυνάμεων των πρώτων n θετικών ακεραίων.

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{s} \binom{s+1}{k} B_k n^{s+1-k}$$

Για το άθροισμα των αντιστρόφων δυνάμεων, έχουμε φυσικά τη συνάρτηση ζήτα $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, Re(s) > 1$ για την οποία ο Euler υπολόγισε τον τύπο για τους άρτιους θετικούς ακεραίους:

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$$

Δεν έχει βρεθεί ακόμα ένας κλειστός τύπος για τις τιμές της ζήτα στους θετικούς περιττούς ακεραίους. Παρ'όλα αυτά φαίνεται πως υπάρχει μία σχέση με τις ανώτερες ομάδες της αλγεβρικής K-θεωρίας, όπου έχουμε τον εξής μυστηριώδη κανονικό ισομορφισμό:

$$r : K_{4n-1}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

και αν $R_{2n} \in \mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ είναι ο $2n$-οστός higher regulator του Beilinson θα έχουμε ότι: $\zeta(2n-1) \equiv R_{2n} \text{mod} \mathbb{Q}^*$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι: $\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$. Θεωρώντας τώρα πιο γενικά την L-συνάρτηση Dirichlet $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$ η οποία επίσης επιδέχεται αναλυτική συνέχιση σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο ως μία μερόμορφη συνάρτηση με μοναδικό απλό πόλο στην τιμή $s = 1$ (Hecke) θα έχουμε αντίστοιχα ότι $L(1-n,\chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n}$, όπου $\frac{t}{e^{Nt}-1} \sum_{a=1}^{N} \chi(a) e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n}$ για $|t| \langle \frac{2\pi}{N}$. Υπενθυμίζουμε τώρα σε απλή μορφή δύο πολύ αξιοσημείωτες παρατηρήσεις στη θεωρία αριθμών:

Θεώρημα 2.3.1. *(Κριτήριο Kummer) Ένας πρώτος αριθμός p δεν είναι κανονικός (δηλαδή $p \mid h_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$) αν και μόνο εάν ο p διαιρεί τον αριθμητή ενός τουλάχιστον από τους αριθμούς $\zeta(-1), \zeta(-3), \ldots, \zeta(4-p)$.*

Θεώρημα 2.3.2. *(Ισοδυναμία Kummer): Αν r περιττός ακέραιος έτσι ώστε $r \not\equiv -1 mod \phi(p)$ τότε $\zeta(-r) = -\frac{B_{r+1}}{r+1} \in \mathbb{Z}_(p) = \{\frac{m}{n} : p \nmid n\}$. Επιπρόσθετα, έστω $r \equiv r' \not\equiv -1 mod \phi(p^{a+1})$. Τότε,*

$$(1-p^{r-1})\frac{B_r}{r} \equiv (1-p^{r'-1})\frac{B_{r'}}{r'} mod(p^{a+1})$$

Τα παραπάνω δύο θεωρήματα ήταν και η απαρχή για την κλασική θεωρία Iwasawa, όπου η διατύπωση της Κεντρικής Εικασίας (που απέδειξαν οι Mazur-Wiles), αποτελεί την καλύτερη γνώση μας μέχρι στιγμής για τα κυκλοτομικά σώματα. Αν πάλι γενικεύσουμε τη συνάρτηση ζήτα προς μία άλλη κατεύθυνση, θεωρώντας τη συνάρτηση Dedekind $\zeta_K(s) = \sum_{(0)\neq I \in O_K} \frac{1}{N(I)^s} = \prod_{P \in \mathrm{Spec}(O_K)} \frac{1}{1-N(P)^{-s}}, Re(s) > 1$ για ένα αριθμητικό σώμα $K/\mathbb{Q}$ όπου $N(I) = |O_K : I|$ αποδεικνύεται ότι επιδέχεται αναλυτική συνέχιση σε μια μερόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}\backslash\{s = 1\}$ όπου ο Dedekind απέδειξε ότι:

Θεώρημα 2.3.3. *(Analytic class number formula)*

$$Res(\zeta_K(s), s = 1) := \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_K R_K}{w_K |D_K|^{\frac{1}{2}}}$$

Έτσι, οι Kubota-Leopoldt ορίζοντας την p-αδική L-συνάρτηση με παρεμβολή στη συνήθη L-συνάρτηση κάνοντας ένα twist μέσω του χαρακτήρα Teichmüller ω:

$$L_p(1-n,\chi) = \begin{cases} (1-\chi(p)p^{n-1})L(1-n,\chi) & \text{αν } p-1 \mid n \\ (1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})L(1-n,\chi\omega^{-n}) & \text{αν } p-1 \nmid n \end{cases}$$

απέδειξαν ότι είναι συνεχής στους αρνητικούς ακεραίους και επομένως μπορεί να επεκταθεί σε όλο το $\mathbb{Z}_p$.

Θεώρημα 2.3.4. *Για κάθε άρτιο $j mod(p-1)$ υπάρχει μια p-αδική αναλυτική συνάρτηση $\zeta_p(\omega^j, \cdot) : \mathbb{Z}_p\{1\} \to \mathbb{Q}_p$ έτσι ώστε για κάθε $n \equiv j-1 \mod (p-1)$ να ισχύει:*

$$\zeta_p(\omega^j, -n) = (1-p^n)\zeta_{\mathbb{Q}}(-n)$$

Η Βασική Εικασία Iwasawa ισχυρίζεται ότι το πολυώνυμο Iwasawa (που είναι αλγεβρικό αντικείμενο) συμπίπτει με την p-αδική L-συνάρτηση των Kubota-Leopoldt (που είναι αναλυτικό αντικείμενο). Η ύπαρξη ενός τύπου ορίζουσας για την p-αδική ζήτα συνάρτηση μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα ανάλογο του τύπου Weil-Grothendieck:

$$Z(X,t) = \prod_{i=0}^{2n} det(1 - t \cdot Frob_q|_{H^i_c(\bar{X},\mathbb{Q}_l)})^{(-1)^{i+1}}$$

για την τοπική ζήτα συνάρτηση μιας λείας, προβολικής, n-διάστατης αλγεβρικής πολλαπλότητας πάνω από το $\mathbb{F}_q$, που προκύπτει για τον αυτομορφισμό Frobenius στο θεώρημα σταθερού σημείου του Lefschetz. Από την αναλογία που περιγράφηκε στις δύο προηγούμενες ενότητες, θα ανέμενε κανείς πως υπάρχει μια αναλογία της

Βασικής Εικασίας στην θεωρία κόμβων, που θα σχετίζει το πολυώνυμο Alexander με κάποια πολύ συγκεκριμένη, αναλυτικά-ορισμένη, ζήτα συνάρτηση. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο Milnor έδειξε πως πράγματι, υπάρχει μια τέτοια σύνδεση μεταξύ της στρέψης Reidemeister-Milnor και της ζήτα συνάρτησης του Lefschetz που αντιστοιχεί στην άπειρη κυκλική επικάλυψη του συμπληρώματος ενός κόμβου. Επιπρόσθετα, αν κάποιος θεωρήσει ως αναλυτική ζήτα τη φασματική ζήτα συνάρτηση των Ray-Singer, η σύνδεση αυτή θα εκφράζεται μέσω μιας σχέσης μεταξύ της στρέψης Reidemeister και της αναλυτικής στρέψης (Θεώρημα Cheeger–Müller).

2.3α΄ Στρέψεις και συναρτήσεις ζήτα

Έστω V ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα F. Για δύο διατεταγμένες βάσεις $\boldsymbol{\beta} = (b_1, \dots, b_n)$ και $\boldsymbol{\varsigma} = (c_1, \dots, c_n)$, έστω $[\boldsymbol{\beta}/\boldsymbol{\varsigma}] := det(a_{ij}) \in F^\times$, όπου $\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j$. Έστω,

$$C : 0 \to C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

ένα ακυκλικό σύμπλοκο πεπερασμένης διάστασης F-διανυσματικών χώρων C_i, $\boldsymbol{\varsigma}_i$ μια δοθείσα (διακεκριμμένη) βάση του C_i και επιλέγουμε μια βάση $\boldsymbol{\beta}_i$ του $B_i := \mathrm{im}(\partial_{i+1}) = \ker(\partial_i)$. Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \to B_i \to C_i \xrightarrow{\partial_i} B_{i-1} \to 0$$

και επιλέγοντας μια ανύψωση $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{i-1}$ του b_{i-1} στο C_i, το ζεύγος $(\boldsymbol{\beta}_i, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{i-1})$ θα αποτελεί μία βάση του $C_i(\boldsymbol{\beta}_{-1} =)$.

Ορισμός 2.3.5. *Ορίζουμε ως στρέψη του C να είναι:*

$$\tau(C) := \prod_{i=0}^{m} [(\boldsymbol{\beta}_i, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{i-1})/\varsigma_i]^{(-1)^{i+1}}$$

Είναι άμεσο πως το $\tau(C)$ εξαρτάται από τα C_i, $\boldsymbol{\varsigma}_i$, αλλά όχι από τις επιλογές των $\boldsymbol{\beta}_i, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$. Υποθέτουμε τώρα ότι ο R είναι μια περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης της Noether και έστω

$$D : 0 \to D_m \xrightarrow{\partial_m} D_{m-1} \xrightarrow{\partial m-1} \dots \xrightarrow{\partial_2} D_1 \xrightarrow{\partial_1} D_0 \to 0$$

να είναι ένα σύμπλοκο από ελεύθερα R-πρότυπα πεπερασμένης τάξης, έτσι ώστε η ομάδα ομολογίας $H_i(D)$ να είναι ένα R-πρότυπο στρέψης, για κάθε i. Έστω $\Delta_i := \Delta_0(H_i(D))$ και F να είναι το σώμα πηλίκων του R.

Ορισμός 2.3.6. *Ορίζουμε ως ομολογική στρέψη του D να είναι:*

$$\tau^h(D) := \prod_{i=0}^{m} \Delta_i^{(-1)^{i+1}} (\in F)$$

που ορίζεται μέχρι την πράξη του πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο του $R^\times$. Ας επιλέξουμε τώρα μια R-βάση $\mathbf{d}_i$ για κάθε D_i και θέτουμε $C := D \otimes_R F$. Αφού το C είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο πεπερασμένης διάστασης F-διανυσματικών χώρων με διακεκριμμένη βάση, η στρέψη $\tau(C)$ είναι καλά ορισμένη. Έχουμε λοιπόν, το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 2.3.7.

$$\tau(C) = \tau^h(D) mod R^\times$$

Απόδειξη. Ακολουθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.15 στο [7], κάνοντας επαγωγή στο μήκος m του D. Η περίπτωση $m = 1$ είναι άμεση, επομένως υποθέτουμε ότι $m > 1$ και ότι η υπόθεση ισχύει για κάθε σύμπλοκο επί του R μήκους μικρότερου του m. Έστω $Z_{m-2} = \ker(\partial_{m-2})$ τάξης r και επιλέγουμε $d'_1, \ldots, d'_r \in D_{m-1}$ των οποίων οι εικόνες υπό την $\partial m - 1$ παράγουν ένα ελεύθερο υποπρότυπο D'_{m-1} του D_{m-1} τάξης r. Έστω $j : D'_{m-1} \hookrightarrow D_{m-1}$ η εμφύτευση. Έστω D' το υποσύμπλοκο του D έτσι ώστε $(D')_i = D_i$ αν $i < m-1$, $(D')_{m-1} = D'_{m-1}$ και $(D')_i = 0$ αν $i \geq m$. Ας είναι επίσης E το σύμπλοκο $\ldots \to D'_{m-1} \xrightarrow{\text{id}} D'_{m-1} \to \ldots$ στους βαθμούς m και $m-1$ ενώ θέτουμε $D'' := D \oplus E$. Ορίζουμε επίσης έναν ομομορφισμός αλυσίδας $\alpha : D' \to D''$ μέσω της $\alpha_i := \text{id}_{D_i}$ εάν $i\langle m-1$ και $\alpha_{m-1} := j \oplus \text{id}_{D'_{m-1}}$. Τότε, η α είναι 1-1 και το $A = \text{coker}(\alpha)$ είναι το σύμπλοκο $\ldots D_m \oplus D'_{m-1} \xrightarrow{(\partial_m, j)} D_{m-1} \ldots$ στους βαθμούς m και $m-1$ ενώ θέτουμε $C' := D' \otimes_R F, C'' := D'' \otimes_R F$ και $B := A \otimes_R F$. Παρατηρούμε ότι τα σύμπλοκα D, D'', A είναι όλα ελεύθερα πάνω από το R και τα C', C'', B είναι ακυκλικά. Εφοδιάζοντας τα D', D'', A με τις συνήθεις βάσεις και καθώς οι στρέψεις είναι πολλαπλασιαστικές ως προς μία ακριβή ακολουθία συμπλόκων, προκύπτει ότι: $\tau(C) = \tau(C'') = \tau(C')\tau(B)$. Άρα η $D \hookrightarrow D''$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία αλυσίδων και θα έχουμε $H_i(D) \simeq H_i(D'')$ για κάθε i. Επομένως, η μακρά ακριβή ακολουθία $0 \to D' \to_\alpha D'' \to A \to 0$ διασπάται σε ισομορφισμούς $H_i(D') = H_i(D)$ αν $i\langle m-2$ και σε μία ακριβή ακολουθία $0 \to H_{m-1}(D) \to H_{m-1}(A) \to H_{m-2}(D') \to H_{m-2}(D) \to 0$. Τα πρότυπα αυτά είναι όλα R-στρέψης και άρα $\Delta_0(H_{m-1}(A))\Delta_0(H_{m-2}(D'))^{-1} = \Delta_0(H_{m-1}(D))\Delta_0(H_{m-2}(D))^{-1}$. Αφού αμφότερα τα D' και A είναι μήκους $\leq m-1$, από επαγωγική υπόθεση έχουμε το ζητούμενο. □

Έστω τώρα κόμβος $K \subset S^3$, $X_K = S^3 \backslash int(V_K)$ το συμπλήρωμα, $G_K = \pi_1(X_K)$ η ομάδα κόμβου, $\psi : G_K \to G_K^{ab} = \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$ η απεικόνιση αβελιανοποίησης, X_∞ η άπειρη κυκλική επικάλυψη του X_K που αντιστοιχεί στο $\ker(\psi)$ και $\Lambda := \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] = \mathbb{Z}[\langle \alpha \rangle](t \leftrightarrow \alpha)$. Έστω επίσης $G_K = \langle x_1, \ldots, x_n | R_1 = \ldots = R_{n-1} = 1 \rangle$ μια παράσταση Wirtinger και $\pi : F = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \to G_K$ ο φυσικός ομομορφισμός. Τότε, αντιστοιχούμε στην παράσταση της G_K ένα σύμπλοκο από Λ-πρότυπα:

$$D : 0 \to D_2 = \Lambda^{n-1} \xrightarrow{\partial_2} D_1 = \Lambda^n \xrightarrow{\partial_1} D_0 = \Lambda \to 0$$

όπου $\theta_2 = \left((\psi \circ \pi)(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}) \right)$ ο πίνακας Alexander και $\theta_1 = ((\psi \circ \pi)(x_i - 1))$. Αφού το X_K είναι συμπτύξιμο σε ένα 2-διάστατο CW-σύμπλοκο που προκύπτει από την παράσταση της G_K, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύμπλοκο D παραπάνω ως $C_*(X_\infty) = C_*(X_K, \Lambda)$ και κατ'επέκταση η ομάδα ομολογίας $H_i(X_\infty) = H_i(X_K, \Lambda)$ θα δίνεται από την $H_i(D)$.

Πρόταση 2.3.8. *Για κάθε $i \geq 0$, η $H_i(X_\infty)$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο, Λ-πρότυπο στρέψης. Επιπλέον, θα έχουμε $H_i(X_\infty) = 0 (i \geq 2), E_0(H_1(X_\infty)) = (\Delta_K(t)), E_0(H_0(X_\infty)) = (t-1)$, όπου $\Delta_K(t)$ το πολυώνυμο Alexander του K.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι $H_i(X_\infty) = 0$, για $i \geq 3$ και $E_0(H_0(X_\infty)) = (t-1)$. Επίσης, ο ισχυρισμός για την $H_1(X_\infty)$ προκύπτει από την Πρόταση 2.2.2. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $H_2(X_\infty) = 0$. Αντιστοιχώντας μια ακριβή ακολουθία από Λ-πρότυπα:

$$0 \to H_2(X_\infty) \to \Lambda^{n-1} \xrightarrow{\theta_2} \Lambda^n \to A_K \to 0$$

όπου A_K το πρότυπο Alexander του K. Αφού η $H_2(X_\infty)$ είναι ένα Λ-υποπρότυπο του ελεύθερου Λ-προτύπου Λ^{n-1}, δε θα έχει στρέψη. Επιπλέον, αφού το A_K έχει Λ-τάξη 1 η Λ-τάξη του $H_2(X_\infty)$ θα είναι 0. □

Έστω k μία επέκταση του $\mathbb{Q}$ και $F = k(t)$. Επιλέγουμε μια συνήθη βάση του D_i. Τότε, από Πρόταση 2.3.8, το σύμπλοκο $C_*(X_K, F) = C_*(X_K, \Lambda) \otimes_\Lambda F = C_*(X_\infty) \otimes_\Lambda F$ γίνεται ένα ακυκλικό σύμπλοκο πεπερασμένης διάστασης F-διανυσματικών χώρων διακεκριμμένης βάσης. Επομένως, από Λήμμα 2.3.7 και Πρόταση 2.3.8, θα έχουμε το εξής:

Πρόταση 2.3.9.

$$\tau(C_*(X_K, F)) = t^h(C_*(X_\infty)) = \frac{\Delta_K(t)}{t-1} mod \Lambda^\times$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται στρέψη Reidemeister-Milnor του X_K και θα συμβολίζεται στο εξής ως $\tau(X_K, \Lambda)$.

Παρατήρηση 2.3.10. (i) *Η στρέψη $\tau(X_K, \Lambda)$ μπορεί να περιγραφεί ως εξής ([13], [14]): Παίρνοντας τανυστικό γινόμενο ως προς $\mathbb{Z}$ στην ακριβή ακολουθία*

$$0 \to C_*(X_\infty) \xrightarrow{\alpha-1} C_*(X_\infty) \to C_*(X_K) \to 0$$

προκύπτει μία ακριβής ακολουθία από Λ-πρότυπα

$$0 \to C_*(X_\infty, \Lambda) \xrightarrow{\alpha-1} C_*(X_\infty, \Lambda) \to C_*(X_K, \Lambda) \to 0$$

Επομένως, θα έχουμε τους εξής Λ-ισομορφισμούς (ισομορφισμός Euler):

$$\Lambda \simeq det_\Lambda C_*(X_\infty, \Lambda) \otimes_\Lambda det_\Lambda C_*(X_\infty, \Lambda)^{-1} \simeq det_\Lambda C_*(X_K, \Lambda) \simeq det_\Lambda H_*(X_K, \Lambda)$$

Έστω τώρα $\zeta(X_K, \Lambda)$ η εικόνα του $1 \in \Lambda$ στην $det_\Lambda H_*(X_K, \Lambda)$ κάτω από τον παραπάνω ισομορφισμό. Τότε, η στρέψη $\tau(X_K, \Lambda)$ δε θα είναι παρά η εικόνα της $\zeta(X_K, \Lambda)$ στο F κάτω από τον ισομορφισμό $det_\Lambda H_*(X_K, \Lambda) \otimes_\Lambda F \simeq det_F H_*(X_K, F) = det_F(0) = F$. Υπό αυτήν την έννοια, η $\zeta(X_K, \Lambda)$ είναι ένα ανάλογο της θεωρίας Kato [15] για τα στοιχεία ζήτα $z_K = \{(z_K)_n\}_{n \geq 0} \in H^1_{glob} = \varprojlim H^1(\mathbb{Q}_n; T)$ (όπου $\mathbb{Q}_n$ ενδιάμεσο σώμα του $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ βαθμού p^n) στη θεωρία κόμβων!

(ii) *Πιο γενικά [16], μπορούμε να θεωρήσουμε τη στρέψη Reidemeister-Milnor που αντιστοιχεί σε μια αναπαράσταση της ομάδος κόμβου $\rho : G_K \to GL(V)$, όπου V πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος επί του k. Έστω $\Lambda_K := \Lambda \otimes_\mathbb{Z} k, V[t^{\pm1}] := V \otimes_k \Lambda_k$ και $V(t) := V \otimes_k F$. Θεωρούμε το $V[t^{\pm1}]$ ως αριστερό $k[G_K]$-πρότυπο μέσω της αναπαράστασης $\rho \otimes \psi : G_K \to GL(V[t^{\pm1}])$ και έστω $C_*(X_K, V[t^{\pm1}]) = C_*(\tilde{X}_K, k) \otimes_{k[G_K]} V[t^{\pm1}]$. Αφού, $C_*(X_K, V[t^{\pm1}]) = C_*(\tilde{X}_K, k) \otimes_k V$, από Πρόταση 2.3.8, η $H_i(X_K, V[t^{\pm1}]) = H_i(X_K, \Lambda_K)$ θα είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο, Λ_K-πρότυπο στρέψης για κάθε i. Επομένως, επιλέγοντας μια βάση του V επί του k, το $C_*(X_K, V(t)) :=$*

$C_*(X_K, \Lambda_K) \otimes_{\Lambda_k} F$ γίνεται ένα ακυκλικό σύμπλοκο πεπερασμένης διάστασης F-διανυσματικών χώρων διακεκριμμένης βάσης. Θέτοντας $\Delta_{i,\rho}(t) := \Delta_0(H_i(X_K, V[t^{\pm 1}]))$, θα έχουμε από το Λήμμα 2.3.7 ότι:

$$\tau(C_*(X_K, V(t))) = t^h(C_*(X_K, V[t^{\pm 1}])) = \frac{\Delta_{1,\rho}(t)}{\Delta_{0,\rho}(t)} mod(\Lambda_k)^\times$$

Το $\Delta_{1,\rho}$ καλείται συνεστραμμένο πολυώνυμο Alexander του K, που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση ρ.

Ας δούμε τώρα μία ερμηνεία της στρέψης $\tau(X_K, \Lambda_K)$ μέσω δυναμικών συστημάτων [12]. Η δράση μονοδρομίας του μεσημβρινού $\alpha : X_\infty \to X_\infty$ ορίζει ένα διακριτό δυναμικό σύστημα στον X_∞. Τότε η στρέψη $\tau(X_K, \Lambda_K)$ εκφράζεται από την συνάρτηση ζήτα του Lefschetz γι'αυτό το δυναμικό σύστημα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός Lefschetz του α^n δίνεται από τον τύπο:

$$L(\alpha^n) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i Tr((a_*)^n|_{H_i(X_\infty, k)})$$

Τότε, η συνάρτηση ζήτα του Lefschetz ορίζεται να είναι:

$$\zeta_K(t) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} L(a^n)\frac{t^n}{n}\right) \in k[[t]]$$

Θεώρημα 2.3.11. *(Milnor, [8], [12])*

$$\zeta_K(t) = \tau(X_K, \Lambda_k) mod(\Lambda_k)^\times$$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι για κάθε πίνακα $A \in M_N(k)$ έχουμε ότι:

$$det(I - tA)^{-1} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} Tr(A^n)\frac{t^n}{n}\right) \in k[[t]]$$

θα έχουμε,

$$\zeta_K(t) = \prod_{i \geq 1} \det(I - t\alpha_*|_{H_i(X_\infty, k)})^{(-1)^{i+1}} = \tau(X_K, \Lambda_K)\mathrm{mod}(\Lambda_k)^\times$$

□

Υπάρχει επίσης μια ερμηνεία της στρέψης Reidemeister ως προς την φασματική ζήτα συνάρτηση μέσω της θεωρίας Hodge. Έστω $\rho : G_K \to O(V)$ ορθογώνια αναπαράσταση, όπου V πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος εσωτερικού γινομένου. Θεωρούμε το αλυσιδωτό σύμπλοκο στη σχετική ομολογία $C_*(X_K, \partial X_K, V) := C_*(X_K, \partial X_K) \otimes_{\mathbb{Z}[G_K]} V$. Επιλέγουμε τώρα μια ορθοκανονική βάση του V και μια ανάλυση του X_K σε CW-κελιά. Τότε, η στρέψη Reidemeister $\tau(X_K, \partial X_K, V)$ θα ορίζεται μέχρι ενός προσήμου ± 1. Εφοδιάζουμε τώρα το X_K με μία μετρική Riemann (η οποία δύναται να εκφραστεί ως γινόμενο κοντά στο ∂X_K). Τότε, ο χώρος $\Omega^i(X_K, V)$ όλων των i-διαφορικών μορφών που παίρνουν τιμές στο V εφοδιάζεται με ένα εσωτερικό γινόμενο. Έτσι, ορίζονται καλώς ο τελεστής άστρο του Hodge $* : \Omega^i(X_K, V) \to \Omega^{3-i}(X_K, V)$ και ο συζυγής του διαφορικού τελεστή $\delta := - * d^{3-i} * : \Omega^i(X_K, V) \to \Omega^{i-1}(X_K, V)$, αντίστοιχα. Αν τώρα θέσουμε $\Omega^i(X_K, \partial X_K, V) := \{\omega \in \Omega^i(X_K, V) : \omega|_{\partial X_K} = \delta\omega|_{\partial X_K} = 0\}$ παρατηρούμε ότι ο διαφορικός τελεστής Laplace-Beltrami: $\Delta^i := d^{i-1} \circ \delta^i + \delta^{i+1} \circ d^i$ δρα σε αυτό το σύνολο ως ένας αυτοσυζυγής τελεστής.

Ορισμός 2.3.12. *Ορίζουμε ως φασματική συνάρτηση ζήτα των Ray-Singer:*

$$\zeta_\Delta := \sum_{i=0}^{3} (-1)^i i \zeta_{\Delta^i}(s)$$

όπου, $\zeta_{\Delta^i}(s) := \sum_{\lambda>0} \lambda^{-s}$ η συνάρτηση ζήτα των Minakshisundaram–Pleijel με το λ να διατρέχει το σύνολο των θετικών ιδιοτιμών του Δ^i.

Αποδεικνύεται πως η $\zeta_\Delta(s)$ επιδέχεται αναλυτική συνέχιση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο και είναι αναλυτική στο $s = 0$. Το $exp(\zeta'_\Delta(0))$ ονομάζεται *αναλυτική στρέψη* του $(X_K, \partial X_K, V)$ και το ακόλουθο Θεώρημα μας εξασφαλίζει τη σχέση της με τη στρέψη Reidemeister:

Θεώρημα 2.3.13.

$$exp(\zeta'_\Delta(0)) = \pm\tau(X_K, \partial X_K, V)$$

Ειδικότερα, η αναλυτική στρέψη είναι ανεξάρτητη της μετρικής Riemann.

Απόδειξη. Πρβλ. [17] □

Παρατήρηση 2.3.14. *Υπάρχει μία βαθύτερη αναλογία με τη θεωρία αριθμών, στην περίπτωση που η M είναι πλήρης, κλειστή (ή πεπερασμένου όγκου), υπερβολική 3-πολλαπλότητα. Πράγματι, έστω μια ορθοκανονική αναπαράσταση $\rho : \pi_1(M) \to O(V)$. Θεωρώντας, τη συνάρτηση ζήτα του Selberg:*

$$Z(s) := \prod_{\mathfrak{p}} det(I - \rho(\mathfrak{p})e^{sl(\mathfrak{p})})^{-1}$$

όπου το $\mathfrak{p}$ διατρέχει όλες τις πρώτες, κλειστές γεωδαισιακές της M και $l(\mathfrak{p})$ είναι το μήκος του $\mathfrak{p}$, παρατηρούμε πως η $Z(s)$ θα αποτελεί ένα γεωμετρικό ανάλογο της ζήτα συνάρτησης Dedekind ενός αριθμητικού σώματος (Artin motive). Αποδεικνύεται [18] πως η αναλυτική στρέψη $exp(\zeta'_\Delta(0))$ ταυτίζεται (μέχρι κάποιον παράγοντα στο $Q^\times$) με τον κυρίαρχο συντελεστή $Z_M(0)^*$ της $Z_M(s)$ για $s = 0$. Έτσι, το $Z_M(0)^*$ εκφράζεται ουσιαστικά από τη στρέψη Reidemeister $\tau(M, V)$. Ο τύπος αυτός, μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα γεωμετρικό ανάλογο του αναλυτικού τύπου κλάσεων σωμάτων του Dedekind για ένα αριθμητικό σώμα. Αποδεικνύεται επίσης [19], πως αν η M επιδέχεται μια άπειρη κυκλική επικάλυψη, τότε η τάξη της $Z(s)$ στο $s = 0$ και η τάξη της στρέψης Milnor στο $t = 1$, σχετίζονται.

2.3β′ Βασική Εικασία

Έστω τώρα p περιττός πρώτος, $X_{\{p\}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ και $G_p := \pi_1^{ét}(X_{\{p\}})$ η ομάδα πρώτου. Έστω επίσης $\psi : G_p \to G_p^{ab}$ η απεικόνιση αβελιανοποίησης και $\mathfrak{X}_\infty$ η προ-étale η επικάλυψη του $X_{\{p\}}$ που αντιστοιχεί στο $\ker(\psi)$. Από τη θεωρία κλάσεων σωμάτων, έχουμε ότι $G_p^{ab} = Gal(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$, όπου $\mu_{p^\infty} := \bigcup_{n\geq 1} \mu_{p^n}$, με μ_{p^n} η ομάδα των p^n-στων ριζών της μονάδας. Συμβολίζουμε με $\mathbb{Q}_\infty$ την κυκλοτομική $\mathbb{Z}_p$-επέκταση του $\mathbb{Q}$ και $\mathfrak{X}_\infty$ την ακέραιη κλειστότητα του $X_{\{p\}}$ στην $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$. Τότε λόγω της ανάλυσης $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{F}_p^\times \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$, η G_p^{ab} θα αναλύεται ως: $G_p^{ab} = H \times \Gamma$, όπου $H = Gal(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}/\mathbb{Q}_\infty) = Gal(\mathbb{Q}(\mu_{p^n})/\mathbb{Q}) = \mathbb{F}_p^\times$ και $\Gamma = Gal(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}/\mathbb{Q}(\mu_{p^n})) = Gal(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) = 1 + p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p$. Θέτουμε $\mathfrak{X}_p := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\mu_p, 1/p])$ και έστω X_∞ η ακέραιη κλειστότητα του $X_{\{p\}}$ στην $\mathbb{Q}_\infty$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_\infty \arrow[r, dash] \arrow[r, dash, bend left, "H"] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}) \arrow[d, dash] \arrow[d, dash, bend left, "\Gamma"] \\
\mathbb{Q} \arrow[r, dash] & \mathbb{Q}(\mu_p)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_\infty \arrow[r, dash] \arrow[r, dash, bend left, "H"] \arrow[d, dash] & \mathfrak{X}_\infty \arrow[d, dash] \arrow[d, dash, bend left, "\Gamma"] \\
X_{\{p\}} \arrow[r, dash] & \mathfrak{X}_p
\end{tikzcd}
$$

Ορίζουμε τώρα για κάθε $g \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ τον κυκλοτομικό χαρακτήρα $\kappa(g) \in \mathbb{Z}_p^\times$ μέσω της $g(\zeta) = \zeta^{\kappa(g)} (\zeta \in \mu_{p^\infty})$, ο οποίος δίνει τον ισομορφισμό $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$. Θέτουμε $\omega := \kappa|_H : H \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$. Σταθεροποιούμε ένα γεννήτορα δ της H, έναν τοπολογικό γεννήτορα γ της Γ και θέτουμε $\hat{\Lambda} := \mathbb{Z}_p[[T]] = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]](1+T \leftrightarrow \gamma)$ ενώ $\tilde{\Lambda} := \mathbb{Z}_p[[G_p^{ab}]] = \mathbb{Z}_p[H][\Gamma]$. Για κάθε $j \mathrm{mod}(p-1)$ ορίζουμε H-πρότυπο $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[j](n \geq 1)$ σαν την αβελιανή ομάδα στην οποία δρα το $\delta \in H$ ως πολλαπλασιασμός με το $\omega(\delta)^j$ και έστω $\mathbb{Z}_p[j] := \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[j]$. Τότε, θα έχουμε $\mathbb{Z}_p[H] = \bigoplus_j \mathbb{Z}_p[j]$. Ας είναι τώρα $\tilde{\Lambda}^{(j)} := \mathbb{Z}_p[j][[\Gamma]]$ έτσι ώστε $\tilde{\Lambda} = \bigoplus_j \tilde{\Lambda}^{(j)}$ ενώ για κάθε $\tilde{\Lambda}$-πρότυπο M, θέτουμε $M^{(j)} := M \otimes_{\tilde{\Lambda}} \tilde{\Lambda}^{(j)}$. Εδώ η $M^{(j)}$ θα είναι το μέγιστο πηλίκο της M στο οποίο δρα το $\delta \in H$ ως πολλαπλασιασμός με το $\omega(\delta)^j$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε το $\tilde{\Lambda}$-πρότυπο $\mathbb{Z}_p(n)$ σαν την αβελιανή ομάδα στην οποία δρα το $\gamma \in \Gamma$ ως πολλαπλασιασμός με το $\kappa(\gamma)^n$ και $A(n) := A \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(n)$ η συστροφή Tate για το $\tilde{\Lambda}$-πρότυπο A. Ταυτοποιούμε επίσης το H-πρότυπο με ένα πεπερασμένο étale δράγμα στον $X_{\{p\}}$ το οποίο γίνεται το σταθερό δράγμα στον $\mathfrak{X}_p$ και ορίζουμε, μέσω του δυϊκού Pontryagin:

$$H_i(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) \equiv H_i(X_{\{p\}}, \tilde{\Lambda}^{(j)}) := (\varinjlim_n H^i(X_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[-j]))^*$$

Και τέλος, θέτουμε $\mathfrak{M} := \pi_1^{ab}(\mathfrak{X}_\infty)(p) = Gal(M/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$, όπου M η μέγιστη, αβελιανή επέκταση του $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ που είναι αδιακλάδιστη εκτός του p. Τότε, η ομάδα Galois $G_{\{p\}}^{ab}$ δρα στην $\mathfrak{M}$ μέσω των εσωτερικών αυτομορφισμών και επομένως η $\mathfrak{M}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αλγεβρικά συμπαγές $\tilde{\Lambda}$-πρότυπο.

Πρόταση 2.3.15. *Για κάθε i και κάθε άρτιο j, η $H_i(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j])$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\tilde{\Lambda}$-πρότυπο στρέψης. Ειδικότερα, ισχύει ότι:*

$$H_i(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) = 0$$

$$H_1(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) = \mathfrak{M}^{(j)}$$

$$H_0(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & αν\ j = 0 \\ 0 & αν\ j \neq 0 \end{cases}$$

$$E_0(H_0(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j])) = \begin{cases} (T) & αν\ j = 0 \\ (1) & αν\ j \neq 0 \end{cases}$$

ενώ, το $E_0(H_1(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]))$ συμπίπτει με το χαρακτηριστικό ιδεώδες του $H_1(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j])$ και παράγεται από το $\Delta_p^{(j)} := \Delta_0(H_1(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]))$. Επιπρόσθετα, το $\Delta_p^{(j)}$ ικανοποιεί την:

$$\Delta_p^{(j)} = det(T \cdot \mathrm{id} - (\gamma - 1)|_{H_1(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p} mod \hat{\Lambda}^\times$$

Απόδειξη. Ακολουθούμε την απόδειξη της Πρότασης 5.5 στο [20], για τον υπολογισμό της $H^i(X_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[-j])$. Η φασματική ακολουθία Hochschild-Serre

$$H^k(H, H^i(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[-j])) \Rightarrow H^{k+i}(X_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[-j]))$$

εκφυλίζεται και δίνει:

$$H^i(X_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[-j]) = H^0(H, H^i(X_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[-j]))$$

$$= H^0(H, H^i(X_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(j)}) = H^i(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(-j)}$$

Αφού το $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$ είναι περιοχή Dedekind που περιέχει το μ_{p^∞}, η συνομολογική διάσταση του $\mathfrak{X}_\infty = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}])$ θα είναι 2. Επομένως, για κάθε $i \geq 3$ θα έχουμε $H^i(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[-j]) = 0$ και άρα $H_i(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) = 0$. Για να δείξουμε ότι $H_2(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) = 0$, παρατηρούμε πως:

$$H^2(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(-j)} = (H^2(\mathfrak{X}_\infty, \mu_{p^n})(-1))^{(-j)}$$

$$= ((\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\infty) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(-1))^{(-j)} = (\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\infty) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(1-j)}(-1)$$

όπου $\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\infty)$ η ομάδα κλάσεων ιδεωδών της $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$. Έστω $\mathfrak{X}_k := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\mu_{p^k}, \frac{1}{p}])$. Αφού, η $\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_k)$ είναι πεπερασμένη, αβελιανή ομάδα έπεται ότι η $\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\infty) = \varinjlim_k \mathrm{cl}(\mathfrak{X}_k)$ είναι αβελιανή ομάδα στρέψης. Επομένως, $\varinjlim_n H^2(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(-j)} = (\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\infty) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{(1-j)}(-1) = 0$. Δηλαδή, $H_2(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}[j]) = 0$. Έπειτα έχουμε:

$$H^1(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(-j)} = \mathrm{Hom}_c(\mathfrak{M}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(-j)} = \mathrm{Hom}_c(\mathfrak{M}^{(j)}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

όπου, Hom_c η ομάδα των συνεχών ομομορφισμών. Επομένως, $H_1(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) = \mathrm{Hom}_c(\mathfrak{M}^{(j)}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^* = \mathfrak{M}^{(j)}$. Αν j άρτιος, αποδεικνύεται ότι (Πρόταση 13.32 [4]) το $\mathfrak{M}^{(j)}$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\tilde{\Lambda}$-πρότυπο που δεν περιέχει μη-τετριμμένο πεπερασμένο $\tilde{\Lambda}$-υποπρότυπο και ότι (Λήμμα 5.3 [20]) $\mu(\mathfrak{M}^{(j)}) = 0$. Άρα, το το $E_0(H_1(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]))$ συμπίπτει με το χαρακτηριστικό ιδεώδες του $H_1(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j])$ και το $\Delta_p^{(j)}$ ισούται $(\mathrm{mod}\hat{\Lambda}^\times)$ με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Τέλος, είναι άμεσο ότι:

$$H^0(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(-j)} = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(-j)} = \begin{cases} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \text{αν } j = 0 \\ 0 & \text{αν } j \neq 0 \end{cases}$$

και κατ'επέκταση $H_0(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}_p[j]) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & \text{αν } j = 0 \\ 0 & \text{αν } j \neq 0 \end{cases}$. Ομοίως για το $E_0(H_0(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j]))$.

□

Από Πρόταση 2.3.15, για έναν άρτιο ακέραιο $j\mathrm{mod}(p-1)$, προκύπτει φυσιολογικά μέχρι την πράξη πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο του $\hat{\Lambda}^\times$ ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 2.3.16. *Ορίζουμε ομολογία στρέψης της $H_*(X_\infty, \mathbb{Z}_p[j])$:*

$$\tau(X_{\{p\}}, \tilde{\Lambda}^{(j)}) := \begin{cases} \Delta_p^{(j)}/T & \text{αν } j = 0 \\ \Delta_p^{(j)} & \text{αν } j \neq 0 \end{cases}$$

Η Βασική Εικασία Iwasawa συνδέει τότε τη στρέψη $\tau(X_{\{p\}}, \tilde{\Lambda}^{(j)})$ με την p-αδική ζήτα συνάρτηση των Kubota-Leopoldt:

Θεώρημα 2.3.17. *(Mazur-Wiles, 1984) Για κάθε άρτιο j, υπάρχει γεννήτορας $\Delta_p^{(j)}$ του ιδεώδους $E_0(H_1(X_\infty, \mathbb{Z}^{(j)}))$ έτσι ώστε να ισχύει:*

$$\zeta_p(\omega^j, s) = \tau(X_{\{p\}}, \tilde{\Lambda}^{(j)})|_{T=q^{1-s}-1}$$

όπου $q := \kappa(\gamma)$.

Απόδειξη. Πρβλ. [5], [21], [22]. □

Όπως και στην περίπτωση των κόμβων, μπορούμε να θεωρήσουμε μια γενίκευση του προτύπου Iwasawa όπου θα αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη p-αδική αναπαράσταση $\rho : G_{\{p\}} \to Aut(L)$, με L ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}_p$-πρότυπο πεπερασμένης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, θα ορίζεται ως ο Pontryagin δυϊκός της υποομάδας Selmer $Sel(X_\infty, \rho)$ της $H^1(X_\infty, V/L)$, για $V = L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$. Ένας γεννήτορας του χαρακτηριστικού ιδεώδους της $Sel(X_\infty, \rho)^*$ θα καλείται τότε συνεστραμμένο πολυώνυμο Iwasawa και ουσιαστικά θα αποτελεί ένα αριθμητικό ανάλογο του συνεστραμμένου πολυωνύμου Alexander.

Παρατήρηση 2.3.18. *Έστω Y λεία, προβολική, αλγεβρική πολλαπλότητα πάνω από το $\mathbb{Q}$. Τότε, αν η ρ προέρχεται από ένα motive $H^m(Y)(n)$, η γενικευμένη Εικασία Iwasawa [15], [23] ισχυρίζεται ότι η p-αδική L συνάρτηση που αντιστοιχεί στην ρ στην πραγματικότητα ταυτίζεται με το συνεστραμμένο πολυώνυμο Iwasawa.*

2.4 Moduli χώροι αναπαραστάσεων

Με βάση τις αναλογίες που περιγράφηκαν παραπάνω, οι θεωρίες Alexander-Fox και Iwasawa αφορούν moduli χώρους 1-διάστατων αναπαραστάσεων της ομάδας κόμβου και της ομάδας πρώτου, αντίστοιχα. Αυτό μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε τοπολογικές και αριθμητικές αναλλοίωτες αλλά και να αναζητήσουμε μια γενίκευση των θεωριών μέσω αναπαραστάσεων υψηλότερης διάστασης. [24]

2.4α′ Πολλαπλότητες χαρακτήρων και καθολικοί χώροι παμορφώσεων

Έστω $K \subset S^3$ κόμβος, $N \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{R}_{K,N}$ το σύνολο όλων των N-διάστατων μιγαδικών αναπαραστάσεων της G_K: $\mathcal{R}_{K,N} := Hom(G_K, GL(N,\mathbb{C}))$ Έστω $G_K = \langle x_1, \ldots, x_n | r_1 = \ldots = r_{n-1} = 1 \rangle$ μια παράσταση Wirtinger για την G_K. Τότε, από την αντιστοιχία $\rho \mapsto (\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n))$ μπορούμε να ταυτοποιήσουμε το $\mathcal{R}_{K,N}$ με το αφινικό αλγεβρικό υποσύνολο του $GL(N,\mathbb{C})^n$:

$$\mathcal{R}_{K,N} = \{(X_1, \ldots, X_n) \in GL(N,\mathbb{C})^n | r_1(X_1, \ldots, X_n) = \ldots = r_{n-1}(X_1, \ldots, X_n) = I\}$$

Έστω $R_{K,N}$ ο δακτύλιος συντεταγμένων του $\mathcal{R}_{K,N}$ και θεωρούμε την ταυτολογική αναπαράσταση: $\rho_{K,N} : G_K \to GL(N, R_{K,N}); x_k \mapsto X_K (1 \leq k \leq n)$ η οποία έχει την εξής καθολική ιδιότητα: Για κάθε αναπαράσταση $\rho : G_K \to GL(N, A)$ όπου A μία $\mathbb{C}$-άλγεβρα, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{C}$-αλγεβρών $\phi : R_{K_N} \to A$ έτσι ώστε $\phi \circ \rho_{K,N} = \rho$. Παρατηρούμε ότι η ομάδα $GL(N,\mathbb{C})$ δρα στον δακτύλιο $R_{K,N}$ μέσω συζυγίας: $(g, X_k) \mapsto g X_k g^{-1} (1 \leq k \leq n)$. Έστω λοιπόν $R_{K,N}^{GL(N,\mathbb{C})}$ ο δακτύλιος όλων των στοιχείων που παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από αυτήν τη δράση. Τότε, ορίζουμε ως *πολλαπλότητα χαρακτήρων* $\mathcal{X}_{K,N} = \mathcal{R}_{K,N}//GL(N,\mathbb{C})$

όλων των N-διάστατων μιγαδικών αναπαραστάσεων της G_K, μέσω των αφινικών αλγεβρικών συνόλων που έχουν δακτύλιο συντεταγμένων το $R_{K,N}^{GL(N,\mathbb{C})}$, δηλαδή:

$$\mathcal{X}_{K,N} := \left(\mathrm{Spec}(R_{K,N}^{GL(N,\mathbb{C})})\right)(\mathbb{C}) = Hom_{\mathbb{C}-\mathrm{alg}}(R_{K,N}^{GL(N,\mathbb{C})}, \mathbb{C})$$

Η εμφύτευση $R_{K,N}^{GL(N,\mathbb{C})} \hookrightarrow R_{K,N}$ επάγει τον μορφισμό $\mathcal{R}_{K,N} \to \mathcal{X}_{K,N}$. Συμβολίζουμε με $[\rho] \in \mathcal{X}_{K,N}$ την εικόνα της $\rho \in \mathcal{R}_{K,N}$ κάτω από αυτόν τον μορφισμό. Τότε, για $\rho, \rho' \in \mathcal{R}_{K,N}$ θα έχουμε $[\rho] = [\rho']$ αν και μόνο εάν $Tr(\rho) = Tr(\rho')$. [25]

Σταθεροποιούμε τώρα έναν μεσημβρινό α του K. Θέτουμε $\Lambda := \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] = \mathbb{Z}[G_K^{ab}]([\alpha] \leftrightarrow t)$. Καθώς κάθε 1-διάστατη αναπαράσταση της G_K αναλύεται μέσω της αβελιανοποίησης G_K^{ab} η οποία είναι άπειρη κυκλική ομάδα που παράγεται από την κλάση του α, θα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα για την $\mathcal{X}_{K,1}$ και την $\rho_{K,1}$.

Θεώρημα 2.4.1. *Η αντιστοιχία $\rho \mapsto \rho(\alpha)$ επάγει ισομορφισμό:*

$$\mathcal{X}_{K,1} \simeq \mathbb{C}^{\times}$$

Επομένως, ο δακτύλιος συντεταγμένων $R_{K,1}$ της $\mathcal{X}_{K,1}$ είναι η μιγαδοποίηση του δακτυλίου των πολυωνύμων Laurent $\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ ενώ η ταυτολογική αναπαράσταση $\rho_{K,1} : G_K \to \Lambda_{\mathbb{C}}^{\times}$ δίνεται από τη σύνθεση της απεικόνισης αβελιανοποίησης $G_K \to G_K^{ab}$ και της εμφύτευσης $G_K^{ab} \subset \Lambda_{\mathbb{C}}^{\times}$.

Έστω A_K το πρότυπο Alexander του K και $E_d(A_K)$ το d-οστό ιδεώδες Alexander για κάθε $d \in \mathbb{N}$. Από Πρόταση 2.2.2 το $E_d(A_K)$ συμπίπτει με το $E_{d-1}(X_1(X_\infty))$ όπου X_∞ η άπειρη κυκλική επικάλυψη του $X_K = S^3 \backslash int(V_K)$ ενώ το $E_0(X_1(X_\infty))$ παράγεται από το πολυώνυμο Alexander $\Delta_K(t)$. Ορίζουμε τώρα d-οστό σύνολο Alexander στην $\mathcal{X}_{K,1}$ ως:

$$\mathcal{A}(d) := \{\rho \in \mathcal{X}_{K,1} | f(\rho(\alpha)) = 0, \forall f \in E_d(A_K)\}$$

Επομένως έχουμε μία φθίνουσα ακολουθία:

$$\mathcal{X}_{K,1} \supset \mathcal{A}(1) \supset \ldots \subset A_K(d) \supset \ldots$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $\rho \in \mathcal{X}_{K,1}$ ορίζουμε ένα G_K-πρότυπο $\mathbb{C}(\rho)$ εφοδιασμένο με μία G_K-δράση που δίνεται ως $g.z = \rho(g)z$, όπου $g \in G_K, z \in \mathbb{C}$). Ορίζουμε τώρα ως d-οστό *σύνολο συνομολογικών αλμάτων* στην $\mathcal{X}_{K,1}$ το εξής:

$$\mathcal{C}(d) := \{\rho \in \mathcal{X}_{K,1} | dim_{\mathbb{C}} H^1(G_K, \mathbb{C}(\rho)) \geq d\}$$

όπου θα έχουμε μια ακόμη φθίνουσα ακολουθία:

$$\mathcal{X}_{K,1} \supset \mathcal{C}_K(1) \supset \ldots \supset \mathcal{C}_K(d) \supset \ldots$$

Πριν διατυπώσουμε το ακόλουθο Λήμμα, θεωρούμε το $\mathbb{C}(\rho)$ ως ένα Λ-πρότυπο μέσω της δράσης $t.z = \rho(\alpha)z$, όπου $t \in \Lambda, z \in \mathbb{C}(\rho)$) και θέτουμε $A_K(\rho) := A_K \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}(\rho)$.

Λήμμα 2.4.2. (i) *Έχουμε τον ακόλουθο ισομορφισμό:*

$$Hom_{\mathbb{C}}(A_K(\rho), \mathbb{C}) \simeq Z^1(G_K, \mathbb{C}(\rho))$$

όπου $Z^1(G_K, \mathbb{C}(\rho))$ η ομάδα των 1-συν-κύκλων.

(ii) *Ισχύει ότι:*

$$dimH^1(G_K, \mathbb{C}(\rho)) = \begin{cases} dimA_K(\rho) - 1 & \text{αν } \rho \neq \mathbf{1} \\ 1 & \text{αν } \rho = \mathbf{1} \end{cases}$$

Απόδειξη. (i) Από τον Ορισμό 2.1.1 και το Παράδειγμα 2.1.8 θα έχουμε:

$$A_K(\rho) = \left(\bigoplus_{g \in G_K} \mathbb{C}(\rho) dg\right) \Big/ \langle d(g_1 g_2) - dg_1 - \rho(g_1) dg_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}}(A_K(\rho), \mathbb{C}) &\simeq \{c : G_K \to \mathbb{C} | c(g_1 g_2) - c(g_1) - \rho(g_1) c(g_2) = 0\} \\ &= Z^1(G_K, \mathbb{C}(\rho)) \end{aligned}$$

(ii) Παρατηρώντας ότι $\rho(g)z = z$ αν και μόνο εάν $\rho(g) = 1$ ή $z = 0$, έπεται ότι η ομάδα των 1-συν-κύκλων $B^1(G_K, \mathbb{C}(\rho))$ θα δίνεται ως:

$$B^1(G_K, \mathbb{C}(\rho)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{αν } \rho \neq \mathbf{1} \\ \{0\} & \text{αν } \rho = \mathbf{1} \end{cases}$$

Και από τον προηγούμενο ισχυρισμό, έχουμε το συμπέρασμα.

□

Θεώρημα 2.4.3. *([26], [27]) Ισχύει ότι:*

$$\mathcal{A}_K(d) = \mathcal{C}_K(d), d > 1$$

$$\mathcal{A}_K(1) \cup \{\mathbf{1}\} = \mathcal{C}_K(1)$$

*όπου **1** η τετριμμένη αναπαράσταση της G_K.*

Απόδειξη. Έστω Q_K ο πίνακας αναπαράστασης για το Λ-πρότυπο A_K και η κάτωθι βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$\Lambda^{n-1} \xrightarrow{Q_K} \Lambda^n \to A_K \to 0$$

Το ιδεώδες $E_d(A_K)$ παράγεται από τις $(n-d)$-ελάσσονες ορίζουσες του Q_K εάν $d \langle n$ ενώ ισούται με Λ εάν $d \geq n$. Παίρνοντας λοιπόν τανυστικό γινόμενο με $\mathbb{C}(\rho)$ επί του Λ προκύπτει η εξής ακριβή ακολουθία:

$$\mathbb{C}(\rho)^{n-1} \xrightarrow{\rho(Q_K)} \mathbb{C}(\rho)^n \to A_K(\rho) \to 0$$

όπου $\rho(Q_K)$ είναι ο πίνακας επί του $\mathbb{C}$ που προκύπτει από την απεικόνιση $\Lambda \ni t \mapsto \rho(\alpha) \in \mathbb{C}$. Επομένως, $dimA_K(\rho) = n - rank(\rho(Q_K))$. Άρα, για κάθε $d > 1$ θα έχουμε ότι:

$$dimH^1(G_K, \mathbb{C}(\rho)) \geq d$$

Οπότε, από το (ii) του Λήμματος 2.4.2:

$$dimA_K(\rho) \geq d+1 \Leftrightarrow rank(\rho(Q_K)) \leq n-(d+1) \Leftrightarrow f(\rho(\alpha)) = 0, \forall f \in E_d(A_K)$$

Ειδικότερα για $d = 1$, $dimH^1(G_K, \mathbb{C}(\rho)) \geq 1$. Οπότε πάλι από το Λήμμα $\rho \neq \mathbf{1}$ και $dim_{\mathbb{C}} A_K(\rho) \geq 2$ ή $\rho = \mathbf{1}$. Ισοδύναμα, $\rho \neq \mathbf{1}$ και $f(\rho(\alpha)) = 0$, για κάθε $f \in E_1(A_K)$ ή $\rho = \mathbf{1}$. Και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.4.4. *Έστω ότι $\rho \neq \mathbf{1}$. Τότε,*

$$\Delta_K(\rho(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow H^1(G_K, \mathbb{C}(\rho)) \neq 0$$

Απόδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 2.4.3, αφού $E_1(A_K) = (\Delta_K(t))$ και $\Delta_K(1) = \pm 1$. □

Έστω τώρα p πρώτος και $G_{\{p\}} = \pi_1^{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])) = Gal(\mathbb{Q}_{\{p\}}/\mathbb{Q})$ η ομάδα πρώτου, όπου $\mathbb{Q}_{\{p\}}$ η μέγιστη επέκταση Galois του $\mathbb{Q}$ που παραμένει αδιακλάδιστη έξω από το $\{p, \infty\}$. Επειδή η $\mathbb{Q}_{\{p\}}$ είναι μια πολύ μεγάλη προπεπερασμένη ομάδα (δεν γνωρίζουμε καν αν είναι πεπερασμένα παραγόμενη) η συγκέντρωση όλων των N-διάστατων αναπαραστάσεων της $\mathbb{Q}_{\{p\}}$ πάνω από ένα δακτύλιο με σκοπό την δημιουργία ενός moduli χώρου, παύει να λειτουργεί. Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε την πολύ σημαντική έννοια των p-αδικών παραμορφώσεων αναπαραστάσεων Galois που εισήγαγε ο Mazur.

Ορισμός 2.4.5. *Έστω $\bar{\rho} : G_{\{p\}} \to GL(N, \mathbb{F}_p)$ μία N-διάστατη, συνεχής modp αναπαράσταση. Τότε, ένα ζεύγος (A, ρ) καλείται παραμόρφωση της $\bar{\rho}$ εάν:*

(i) *Η A είναι μια πλήρης, τοπική, $\mathbb{Z}_p$-άλγεβρα της Noether με σώμα υπολοίπων $A/\mathfrak{m}_A = \mathbb{F}_p$*

(ii) *Η $\rho : G_{\{p\}} \to GL(N, A)$ είναι μία συνεχής αναπαράσταση έτσι ώστε $\rho mod \mathfrak{m}_A = \bar{\rho}$*

Αν η $\bar{\rho} \circ i$ (όπου $i : GL(N, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow GL(N, \bar{\mathbb{F}}_p)$) είναι ανάγωγη αναπαράσταση, τότε η $\bar{\rho}$ καλείται *απόλυτα ανάγωγη* (αυτό είναι ανεξάρτητο της επιλογής του $\bar{\mathbb{F}}_p$. Θεωρούμε επίσης πως δύο παραμορφώσεις (A, ρ) και (A, ρ') θα είναι ισοδύναμες $\rho \sim \rho'$ αν και μόνο εάν υπάρχει $P \in I + M_N(\mathfrak{m}_A)$ έτσι ώστε $\rho'(g) = P\rho(g)P^{-1}$ για κάθε $g \in \mathbb{Q}_{\{p\}}$. Τότε, έχουμε το εξής θεμελιώδες θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.6. *(Mazur, [28] 1.2) Έστω $\bar{\rho}$ όπως παραπάνω, απόλυτα ανάγωγη. Τότε, υπάρχει παραμόρφωση της $\bar{\rho}$:*

$$\rho_{p,N} : G_{\{p\}} \to GL(N, R_{p,N})$$

με την εξής καθολική ιδιότητα: Για κάθε άλλη παραμόρφωση $\rho : G_{\{p\}} \to GL(N, A)$ της $\bar{\rho}$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{Z}_p$-αλγεβρών $\phi : R_{p,N} \to A$ έτσι ώστε $\phi \circ \rho_{p,N} \sim \rho$. Φυσικά, η $R_{p,N}(\bar{\rho})$ εξαρτάται από την $\bar{\rho}$, αλλά στο εξής θα γράφουμε χάριν απλότητας, απλά $R_{p,N}$.

Έτσι, αν δύο παραμορφώσεις (A, ρ) και (A', ρ') της $\bar{\rho}$ ικανοποιούν την παραπάνω καθολική ιδιότητα, θα έχουμε έναν ισομορφισμό $\mathbb{Z}_p$-αλγεβρών $\phi : A \xrightarrow{\simeq} A'$ έτσι ώστε $\phi \circ \rho \sim \rho'$. Επομένως, με αυτή την έννοια το ζεύγος $(R_{p,N}, \rho_{p,N})$ θα είναι μοναδικό μέχρι ισοδυναμίας και καλείται *καθολική παραμόρφωση* της $\bar{\rho}$. Οπότε, μπορούμε πλέον να ορίσουμε ως *καθολικό χώρο παραμορφώσεων* της $\bar{\rho}$:

$$\mathcal{X}_{p,N}(\bar{\rho}) := \left(\mathrm{Spec}(R_{p,N})\right)(\bar{\mathbb{Q}}_p) = Hom_{\mathbb{Z}_p-\mathrm{alg}}(R_{p,N}, \bar{\mathbb{Q}}_p)$$

όπου ο $\mathcal{X}_{p,N}(\bar{\rho})$ θεωρείται ως p-αδικός αναλυτικός χώρος. Συμβολίζουμε με $\rho_\phi := \phi \circ \rho_{p,N}$ για κάθε $\phi \in \mathcal{X}_{p,N}(\bar{\rho})$.

Έστω p περιττός πρώτος. Παρατηρούμε ότι η 1-διάστατη αναπαράσταση της $G_{\{p\}}$ αναλύεται μέσω της αβελιανοποίησης $G_{\{p\}}^{ab}$. Από θεωρία κλάσεων σωμάτων έχουμε $G_{\{p\}}^{ab} = Gal(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) = H \times \Gamma$ όπου $H := Gal(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}) = \mathbb{F}_p^\times$ και $\Gamma := Gal(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) = 1 + p\mathbb{Z}_p$. Συμβολίζουμε με $[g] = (g^{(p)}, g_p)$ την εικόνα του $g \in G_{\{p\}}$ κάτω από την απεικόνιση αβελιανοποίησης $G_{\{p\}} \to G_{\{p\}}^{ab} = \mathbb{F}_p^\times \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$. Σταθεροποιώντας έναν τοπολογικό γεννήτορα γ της $\Gamma = 1 + p\mathbb{Z}_p$, ταυτοποιούμε την $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ με την $\hat{\Lambda} := \mathbb{Z}_p[[T]]$ μέσω της αντιστοιχίας $\gamma \leftrightarrow 1 + T$. Έστω τώρα $\bar{\rho} : G_{\{p\}} \to \mathbb{F}_p^\times$ μία 1-διάστατη, συνεχής, $\mathrm{mod}p$ αναπαράσταση και ας ταυτοποιήσουμε το $\mathbb{F}_p^\times$ με την ομάδα των $(p-1)$-στων ριζών της μονάδας στο $\mathbb{Z}_p^\times$. Τότε, η *ανύψωση Teichmüller* $\tilde{\rho}$ της $\bar{\rho}$ ορίζεται να είναι η σύνθεση της $\bar{\rho}$ με την εμφύτευση $\mathbb{F}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$. Με τα δεδομένα αυτά, θα έχουμε το εξής αριθμητικό ανάλογο του Θεωρήματος 2.4.1.

Θεώρημα 2.4.7. *([28] 1.4) Ορίζουμε $\rho_{p,1} : G_{\{p\}} \to \hat{\Lambda}^\times$ ως:*

$$\rho_{p,1}(g) := \tilde{\rho}(g) g_p$$

Τότε, το ζεύγος $(\hat{\Lambda}, \rho_{p,1})$ είναι η καθολική παραμόρφωση της $\bar{\rho}$. Ειδικότερα, ο $\mathcal{X}_{p,1}(\bar{\rho})$ μπορεί να ταυτοποιηθεί με τον p-αδικό μοναδιαίο δίσκο $\mathcal{D}_p := \{x \in \bar{\mathbb{Q}}_p : |x|_p < 1\}$:

$$\mathcal{X}_{p,1}(\bar{\rho}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{D}_p; \phi \mapsto \phi(T)$$

Απόδειξη. Αφού $\rho_{p,1}(g)\mathrm{mod}\mathfrak{m}_{\hat{\Lambda}} = \tilde{\rho}(g)\mathrm{mod}p = \bar{\rho}(g)$, η $\rho_{p,1}$ θα είναι μία παραμόρφωση της $\bar{\rho}$. Ας είναι (A, ρ) μία οποιαδήποτε παραμόρφωση της $\bar{\rho}$ με $A/\mathfrak{m}_A = \mathbb{F}_p$ και $\mathrm{mod}\mathfrak{m}_A = \bar{\rho}(g)$. Ορίζουμε έναν ομομορφισμό $\mathbb{Z}_p$-αλγεβρών $\phi : \hat{\Lambda} \to A$ μέσω της $\phi(g_p) := \rho((1, g_p))$ όπου $g_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$. Τότε, για κάθε $g \in G_{\{p\}}$ θα έχουμε:

$$(\phi \circ \rho_{p,1})(g) = \phi(\tilde{\rho}(g) g_p) = \tilde{\rho}(g)\rho((1, g_p)) = \rho((g^{(p)}, 1))\rho((1, g_p)) = \rho(g)$$

Η μοναδικότητα της ϕ είναι άμεση και επομένως το ζεύγος $(\hat{\Lambda}, \rho_{p,1})$ είναι πράγματι η καθολική παραμόρφωση της $\bar{\rho}$. $\square$

Θα δούμε τώρα πως εντελώς όμοια με την περίπτωση του πολυωνύμου Alexander $\Delta_K(t)$, οι ρίζες του πολυωνύμου Iwasawa $\Delta_p^{(j)}(T)$ μπορεί να περιγραφούν μέσω των διαφόρων μεταβολών της συνομολογίας Galois της $G_{\{p\}}$ στον καθολικό χώρο παραμορφώσων $\mathcal{X}_{p,1}(\bar{\rho})$.

Έστω $\bar{\omega} : G_{\{p\}} \to H = Gal(\mathbb{Q}_{\mu_p}/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{F}_p^\times$ ο φυσικός ομομορφισμός και συμβολίζουμε με το ίδιο ω, την σύνθεση του με την *ανύψωση Teichmüller* $\omega : H \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$. Θεωρούμε για κάθε $j\mathrm{mod}(p-1)$, $\rho^{(j)} : G_{\{p\}} \to \hat{\Lambda}^\times$ να είναι η καθολική παραμόρφωση της $\bar{\omega}^j$ και $\mathcal{X}_p^{(j)} := \mathcal{X}_{p,1}(\bar{\omega}^j)$ ο καθολικός χώρος παραμορφώσεων της $\bar{\omega}^{(j)}$. Θέτουμε επίσης $\rho_\phi^{(j)} := \phi \circ \rho^{(j)}$ για κάθε $\phi \in \mathcal{X}_p^{(j)}$. Έστω $\phi : G_{\{p\}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mu_{p^\infty}}/\mathbb{Q}) = H \times \Gamma$ η απεικόνιση αβελιανοποίησης και $\mathfrak{A}_p$ ένα πλήρες ψ-διαφορικό πρότυπο. Θέτοντας $\tilde{\Lambda} := \mathbb{Z}_p[[H \times \Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[H][[\Gamma]]$ παρατηρούμε πως το $\mathfrak{A}_p$ είναι ένα $\tilde{\Lambda}$-πρότυπο. Τέλος, θέτουμε $\mathfrak{A}_p^{(j)} := \mathfrak{A}_p \otimes_{\tilde{\Lambda}} \tilde{\Lambda}^{(j)}$. Παίρνοντας τανυστικό γινόμενο με $\tilde{\Lambda}^{(j)}$ στην πλήρη, βραχεία, ακριβή ακολουθία Crowell (Θεώρημα 2.1.19): $0 \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}_p \to I_{\tilde{\Lambda}} \to 0$ επί του $\tilde{\Lambda}$ θα έχουμε μια ακριβή ακολουθία από $\tilde{\Lambda}^{(j)}$-πρότυπα για κάθε $j\mathrm{mod}(p-1)$:

$$0 \to \mathfrak{M}^{(j)} \to \mathfrak{A}_p^{(j)} \to I_{\tilde{\Lambda}^{(j)}} \to 0$$

Επομένως, θα έχουμε για κάθε $d \geq 1$ ότι: $E_{d-1}(\mathfrak{M}^{(j)}) = E_d(\mathfrak{A}_p^{(j)})$. Όταν το j είναι άρτιος, το $E_0(\mathfrak{M}^{(j)}) = E_1(\mathfrak{A}_p^{(j)})$ παράγεται από το πολυώνυμο Iwasawa $\Delta_p^{(j)}(T)$ (Πρόταση 2.3.15).

Ορίζουμε τώρα το d-οστό σύνολο Iwasawa στην $\mathcal{X}_p^{(j)}$ ως:

$$\mathcal{A}_p^{(j)}(d) := \{\phi : \mathcal{X}_p^{(j)} | f(\phi(\gamma) - 1) = 0, \forall f \in E_d(\mathfrak{A}_p^{(j)}\}$$

Επομένως έχουμε μία φθίνουσα ακολουθία:

$$\mathcal{X}_p^{(j)} \supset \mathfrak{A}_p^{(j)}(1) \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_p^{(j)}(d) \supset \ldots$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $\phi \in \mathcal{X}_p^{(j)}$ ορίζουμε ένα $G_{\{p\}}$-πρότυπο $\bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)})$ της προσθετικής ομάδας $\bar{\mathbb{Q}}_p$ εφοδιασμένη με μία $G_{\{p\}}$-δράση που δίνεται ως $g.z = \rho_\phi^{(j)}(g)z$, για κάθε $g \in G_{\{p\}}, z \in \bar{\mathbb{Q}}_p$. Ορίζουμε τώρα d-οστό *σύνολο συνομολογικών αλμάτων* στην $\mathcal{X}_p^{(j)}$ το εξής:

$$\mathcal{C}_p^{(j)}(d) := \{\rho \in \mathcal{X}_p^{(j)} | dim_{\bar{\mathbb{Q}}_p} H^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)})) \geq d\}$$

όπου θα έχουμε μια ακόμη φθίνουσα ακολουθία:

$$\mathcal{X}_p^{(j)} \supset \mathcal{C}_p^{(j)}(1) \supset \ldots \supset \mathcal{C}_p^{(j)}(d) \supset \ldots$$

Πριν διατυπώσουμε το ακόλουθο Λήμμα, θεωρούμε το $\bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)})$ ως ένα $\tilde{\Lambda}$-πρότυπο και θέτουμε $\mathfrak{A}_p(\rho_\phi^{(j)}) := \mathfrak{A}_p \otimes_{\tilde{\Lambda}} \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)})$. Επομένως αν $\bar{\mathbb{Q}}_p(\phi)$ είναι η προσθετική ομάδα $\bar{\mathbb{Q}}_p$ με την Γ-δράση να ορίζεται ως $\gamma.z := \phi(\gamma)z$ θα έχουμε $\mathfrak{A}_p(\rho_\phi^{(j)}) = \mathfrak{A}_p^{(j)} \otimes_{\hat{\Lambda}} \bar{\mathbb{Q}}_p(\phi)$.

Λήμμα 2.4.8. (i) *Έχουμε τον ακόλουθο ισομορφισμό:*

$$Hom_{\bar{\mathbb{Q}}_p}(\mathfrak{A}_p(\rho_\phi^{(j)}), \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq Z^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)}))$$

όπου $Z^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)}))$ *η ομάδα των συνεχών 1-συν-κύκλων.*

(ii) *Ισχύει ότι:*

$$dimH^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)})) \begin{cases} dim\mathfrak{A}_p(\rho_\phi^{(j)}) - 1 & \text{αν } (j,\phi) \neq (0,\mathbf{1}) \\ 1 & \text{αν } (j,\phi) = (0,\mathbf{1}) \end{cases}$$

Απόδειξη. (i) Από τον Ορισμό 2.1.11 θα έχουμε:

$$\mathfrak{A}_p(\rho_\phi^{(j)})) = \left(\bigoplus\nolimits_{g \in G_{\{p\}}} \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)}) dg\right) \Big/ \langle d(g_1 g_2) - dg_1 - \rho_\phi^{(j)}(g_1) dg_2 \rangle_{\bar{\mathbb{Q}}_p}$$

Οπότε,

$$Hom_{\bar{\mathbb{Q}}_p}(\mathfrak{A}_p(\rho_\phi^{(j)})), \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \{c : G_{\{p\}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p | c(g_1 g_2) - c(g_1) - \rho_\phi^{(j)}(g_1) c(g_2) = 0\}$$

$$= Z^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_\phi^{(j)}))$$

(ii) Εξ′ορισμού $\rho_{\phi}^{(j)} = \mathbf{1} \leftrightarrow (i, \phi) = (0, \mathbf{1})$. Επομένως, η ομάδα των 1-συνσυνόρων $B^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_{\phi}^{(j)}))$ θα δίνεται ως:

$$B^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_{\phi}^{(j)})) \begin{cases} \bar{\mathbb{Q}}_p & \text{αν } (j,\phi) \neq (0,\mathbf{1}) \\ \{0\} & \text{αν } (j,\phi) = (0,\mathbf{1}) \end{cases}$$

Και από τον προηγούμενο ισχυρισμό, έχουμε το συμπέρασμα.

□

Θεώρημα 2.4.9. *([30]) Για κάθε $j mod(p-1)$, ισχύει ότι:*

$$\mathcal{A}_p^{(j)}(d) = \mathcal{C}_p^{(j)}(d), d > 1$$

$$\mathcal{A}_p^{(j)}(1) = \mathcal{C}_p^{(j)}(1)$$

$$\mathcal{A}_p^{(0)}(1) \cup \{\mathbf{1}\} = \mathcal{C}_p^{(0)}(1)$$

*όπου **1** η τετριμμένη αναπαράσταση της $G_{\{p\}}$.*

Απόδειξη. Έστω j άρτιος. Τότε, από Πρόταση 2.3.15, το $\mathfrak{M}^{(j)}$ θα είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\hat{\Lambda}$-πρότυπο στρέψης. Έστω $\mathfrak{Q}_p^{(j)}$ ένας πίνακας αναπαράστασης για το $\hat{\Lambda}$-πρότυπο $\mathfrak{A}_p^{(j)}$ και η κάτωθι βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$\hat{\Lambda}^m \xrightarrow{\mathfrak{Q}_p^{(j)}} \hat{\Lambda}^n \to \mathfrak{A}_p^{(j)} \to 0$$

Το ιδεώδες $E_d(\mathfrak{A}_p^{(j)})$ παράγεται από τις $(n-d)$-ελάσσονες ορίζουσες του $\mathfrak{Q}_p^{(j)}$ εάν $d \langle n$ ενώ ισούται με $\hat{\Lambda}$ εάν $d \geq n$. Παίρνοντας λοιπόν τανυστικό γινόμενο με $\bar{\mathbb{Q}}_p(\phi)$ επί του $\hat{\Lambda}$ προκύπτει η εξής ακριβή ακολουθία:

$$\bar{\mathbb{Q}}_p(\phi)^m \xrightarrow{\phi(\mathfrak{Q}_p^{(j)})} \bar{\mathbb{Q}}_p(\phi)^n \to \mathfrak{A}_p(\rho_{\phi}^{(j)}) \to 0$$

όπου $\phi(\mathfrak{Q}_p^{(j)})$ είναι ο πίνακας επί του $\bar{\mathbb{Q}}_p$ που προκύπτει από την απεικόνιση $\hat{\Lambda} \ni T \mapsto \phi(T) \in \bar{\mathbb{Q}}_p$. Επομένως, $dim\mathfrak{A}_p(\rho_{\phi}^{(j)}) = n - rank(\phi(\mathfrak{Q}_p^{(j)}))$. Άρα, για κάθε $d > 1$ θα έχουμε ότι:

$$dimH^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_{\phi}^{(j)})) \geq d$$

Οπότε, από το (ii) του Λήμματος 2.4.8:

$$dim\mathfrak{A}_p(\rho_{\phi}^{(j)})) \geq d+1 \Leftrightarrow rank(\phi(\mathfrak{Q}_p^{(j)})) \leq n-(d+1) \Leftrightarrow f(\phi(\gamma)-1) = 0, \forall f \in E_d(\mathfrak{A}_p(\rho_{\phi}^{(j)}))$$

Ειδικότερα για $d = 1$, $dimH^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_{\phi}^{(j)})) \geq 1$. Οπότε πάλι από το Λήμμα, $\rho_{\phi}^{(j)} \neq \mathbf{1}$ και $dim\mathfrak{A}_p(\rho_{\phi}^{(i)})$ ή $\rho_{\phi}^{(j)} = \mathbf{1}$. Ισοδύναμα, $(j, \phi) \neq (0, \mathbf{1})$ και $f(\phi(\gamma)-1) = 0$, για κάθε $f \in E_1(\mathfrak{A}_p(\rho_{\phi}^{(j)}))$ ή $(j, \phi) = (0, \mathbf{1})$ Και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.4.10. *Για κάθε $j mod(p-1)$, θα έχουμε:*

$$\Delta_p^j(\phi(\gamma) - 1) = 0 \Leftrightarrow dimH^1(G_{\{p\}}, \bar{\mathbb{Q}}_p(\rho_{\phi}^{(j)})) \neq 0$$

Απόδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 2.4.9, αφού $E_1(\mathcal{A}_p^{(j)}) = (\Delta_p^{(j)})$. □

Παρατήρηση 2.4.11. *Είναι γνωστό πως το πρότυπο Alexander A_K (ή το πρότυπο κόμβου $H_1(X_\infty)$) επιδέχεται μια ανάλυση ως προς τον πίνακα Seifert [29]. Αποδεικνύεται πως το ίδιο συμβαίνει και για το πρότυπο Iwasawa $H_\infty^{(i)}$ ως προς ένα συγκεκριμένο σύστημα Euler-Kolyvagin που συνδέει ιδεώδη Iwasawa ανωτέρας τάξης με την p-αδική L-συνάρτηση, [31], [32].*

2.5 Γενίκευση των δύο θεωριών

Όπως είδαμε στις προηγούμενες υποενότητες, τόσο η θεωρία Alexander-Fox όσο και η θεωρία Iwasawa μπορούν να ιδωθούν ως θεωρίες στους moduli χώρους 1-διάστατων μιγαδικών και p-αδικών αναπαραστάσεων, αντίστοιχα. Οι Hida-Mazur κατάφεραν να γενικεύσουν τη θεωρία Iwasawa σε μια μη-αβελιανή θεωρία από τη σκοπιά των παραμορφώσεων υψηλότερης-διάστασης αναπαραστάσεων. Δεδομένης της βαθιάς αναλογίας που έχουμε σκιαγραφήσει, θα ήταν λογικό να αναζητήσει κανείς μια μη-αβελιανή γενίκευση της θεωρίας Alexander-Fox μέσω του moduli χώρου υψηλότερης-διάστασης αναπαραστάσεων της ομάδας κόμβου. Πράγματι, για 2-διάστατες αναπαραστάσεις βρίσκει κανείς ενδιαφέρουσες αναλογίες μεταξύ της οικογένειας των αναπαραστάσεων ολονομίας που αντιστοιχούν σε παραμορφώσεις της υπερβολικής δομής 3-διάστατων πολλαπλοτήτων και της οικογένειας αναπαραστάσεων Galois που αντιστοιχούν σε παραμορφώσεις p-αδικών συνήθων (ordinary) modular μορφών.

2.5α′ Παραμόρφωση υπερβολικών δομών

Έστω K ένας υπερβολικός κόμβος στην S^3 (δηλαδή $S^3\backslash K$ πλήρης, υπερβολική 3-πολλαπλότητα πεπερασμένου όγκου με cusps). Επομένως, η G_K θα είναι μια διακριτή υποομάδα της $Aut(\mathbb{H}^3) = PSL(2,\mathbb{C})$. Έστω V_K μία σωληνοειδής περιοχή του K, $X_K := S^3\backslash int(V_K)$ και όπως πάντα $\alpha, \beta \subset \partial X_K$ ένας μεσημβρινός και ένας παράλληλος κύκλος αντίστοιχα. Θέτουμε $\bar{\rho}_h : G_K \to PSL(2,\mathbb{C})$ να είναι η αναπαράσταση ολονομίας που αντιστοιχεί στην πλήρη, υπερβολική δομή της $S^3\backslash K$. Αφού, $H^2(G_K, \mathbb{F}_2) = H^2(X_K, \mathbb{F}_2) = 0$, παρατηρούμε (θεωρώντας την ακριβή ακολουθία στην συνομολογία ομάδων με μη-μεταθετικούς συντελεστές που αντιστοιχεί στην $1 \to \{\pm I\} \to SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C}) \to 1$) ότι η $\bar{\rho}_h \in H^1(G_K, PSL(2,\mathbb{C}))$ δύναται να ανυψωθεί σε μία $\rho_h \in H^1(G_K, SL(2,\mathbb{C}))$. Στο εξής θα μας απασχολήσουν αναπαραστάσεις της G_K που αντιστοιχούν σε (μη-πλήρεις), υπερβολικές δομές και κατ'επέκταση θα θεωρήσουμε $SL(2,\mathbb{C})$-αναπαραστάσεις της G_K θέτοντας: $\mathcal{X}_K := \mathcal{R}_K//GL(2,\mathbb{C})$ όπου $\mathcal{R}_K := Hom(G_K, SL(2,\mathbb{C}))$. Αφού, η $D_K = \pi_1(\partial X_K)$ είναι αβελιανή, ο περιορισμός της $\rho \in Hom(G_K, GL(2,\mathbb{C}))$ στο D_K θα είναι ισοδύναμος με μία αναπαράσταση άνω-τριγωνικού πίνακα:

$$\rho|_{D_K} \simeq \begin{pmatrix} \chi_\rho & * \\ 0 & \chi_\rho^{-1} \end{pmatrix}$$

όπου $\chi_\rho : G_K \to \mathbb{C}^\times$ μία 1-διάστατη αναπαράσταση. Έστω τώρα $\mathcal{X}_K^o(\rho_h)$ η συνεκτική συνιστώσα του $\mathcal{X}_K$ που περιέχει την ρ_h. Τότε, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα του Thurston [36]:

Θεώρημα 2.5.1. *(Hyperbolic Dehn surgery) Η απεικόνιση*

$$\Psi_K : \mathcal{X}_K^o(\rho_h) \to \mathbb{C}; [\rho] \mapsto Tr(\rho(\alpha))$$

είναι αμφιολόμορφη σε μια γειτονιά W της $[\rho_h]$. Ειδικότερα, η $\mathcal{X}_K^o(\rho_h)$ είναι μια μιγαδική αλγεβρική καμπύλη.

Απόδειξη. Πρβλ. [37], Appendix B. □

Η καμπύλη χαρακτήρας $\mathcal{X}_K^o(\rho_h)$ σχετίζεται με τον χώρο παραμόρφωσης των υπερβολικών δομών στην $S^3\backslash K$ ως εξής: Έστω $S(z)$ το ιδεώδες τετράεδρο στον $\mathbb{H}^3$ με σημεία $\{0, 1, z, \infty\}$ όπου $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$. Σταθεροποιούμε μια τριγωνοποίηση

$S^3 \backslash K = S(rz_1) \cup \ldots \cup S(rz_n)$. Σε κάθε ακμή, το άθροισμα των διεδρικών γωνιών του τετραέδρου πέριξ της ακμής ισούται με 2π. Οι παράμετροι $rz_1, \ldots, rz_n$ ικανοποιούν ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής:

$$\prod_{i=1}^{n} z_i^{r'_{ij}} (1 - z_i)^{r'_{ij}} = \pm 1, (j = 1, \ldots, n)$$

Έστω $\mathcal{Y}$ το αφινικό αλγεβρικό σύνολο στο $(\mathbb{C} \backslash \{0, 1\})^n$ που ορίζει η λύση του παραπάνω συστήματος. Οι W. Neumann - Zagier έδειξαν πως η ανάγωγη συνιστώσα $\mathcal{X}_K^H(rz)$ του $\mathcal{Y}$ που περιέχει το $rz := (rz_1, \ldots, rz_n)$ είναι μια μιγαδική αλγεβρική καμπύλη που καλείται *καμπύλη παραμόρφωσης των υπερβολικών δομών*. Τότε, η $\mathcal{X}_K^H(rz)$ είναι ένα διπλό κάλυμμα επί του $W \subset \mathcal{X}_K^o(\rho_h)$. Δηλαδή, υπάρχει περιοχή U του rz στην $\mathcal{X}_K^H(rz)$ και ολόμορφη τοπική συντεταγμένη $x_K \in U$ με $x_K(rz) = 0$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "x_K"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[r, "\Psi_K"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

όπου $h(x) := e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ και π ένα διπλό κάλυμμα διακλαδιζόμενο πάνω από το rz. Έτσι, για κάθε $z \in U$ κατασκευάζουμε την απεικόνιση $\widetilde{S^3 \backslash K} \to \mathbb{H}^3$ με αναπαράσταση ολονομίας $\bar{\rho}_z$ και να εκφράσουμε την ανύψωση της ρ_z ως μια $SL(2, \mathbb{Z})$-αναπαράσταση ως $\rho_z = t(\pi(z))$ μέσω μιας τοπικής τομής $t : W \to \mathcal{R}_K$. Τότε, θα έχουμε:

$$\rho_z(\alpha) \simeq \begin{pmatrix} e^{\frac{x_K(z)}{2}} & * \\ 0 & e^{-\frac{x_K(z)}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\rho_z(\beta) \simeq \begin{pmatrix} e^{\frac{y_K(z)}{2}} & * \\ 0 & e^{-\frac{y_K(z)}{2}} \end{pmatrix}$$

Επομένως, χρησιμοποίωντας την χ_ρ της $\rho|D_K$ θα έχουμε για κάθε $z \in U$: $x_K(z) = 2log\chi_{\rho_z}(\alpha)$ και $y_K(z) = 2log\chi_{\rho_z}(\beta)$. Ορίζουμε τώρα, $(q, p) \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = S^2$ μέσω της $(q, p) := \infty$ αν $z = rz$ και $qx_K(z) + py_K(z) = 2\pi i$ αν $z \neq rz$. Τότε, η αντιστοιχία $z \mapsto (q, p)$ επάγει ομοιομορφισμό από το U σε μια γειτονιά του απείρου στην S^2. Αν $(p, q) = 1$ ως ακέραιοι, προκύπτει μία κλειστή, υπερβολική 3-πολλαπλότητα $M(q, p)$ μέσω χειρουργικής Dehn κατά μήκος του K με συντελεστή $\frac{q}{p}$ (π.χ για τον $V = D^2 \times S^1$ με μεσημβρινό $m \in \partial V$ η $M(q, p)$ προκύπτει με συγκόλληση του X_K και του V μέσω του ομοιομορφισμού $f : \partial V \xrightarrow{\approx} \partial V_K = \partial X_K$ έτσι ώστε $[f_*(m)] = q[\alpha] + p[\beta]$). Ένα σημείο $z \in U$ που αντιστοιχεί σε ένα τέτοιο ζεύγος (q, p) ή rz θα καλείται *χειρουργικό σημείο Dehn με ακέραιους συντελεστές*. Καθώς το x_K είναι μια τοπική συντεταγμένη για το U, το y_K μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση του x_K. Μάλιστα, το ακόλουθο Θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει μια ολόμορφη συνάρτηση $\tau(x_K)$ έτσι ώστε $y_K = x_K \tau(x_K)$ και το $\tau(0)$ να είναι ένα modulus για τον 2-διάστατο τόρο ∂X_K του οποίου η μιγαδική δομή επάγεται από την πλήρη, υπερβολική δομή του $S^3 \backslash K$.

Θεώρημα 2.5.2. *(Neumann-Zagier) Έστω $q_K := exp(2\pi i \tau(0))$. Τότε, το q_K δίνει μία πολλαπλασιαστική περίοδο του $\partial X_K = \mathbb{C}^\times / (q_K)^{\mathbb{Z}}$ και ισχύει ότι:*

$$\frac{dy_K}{dx_K}|_{x_K=0} = \frac{1}{2\pi i} log q_K$$

Απόδειξη. Πρβλ. [38], Λήμμα 4.1 □

Το ολοκλήρωμα του y_K ως προς το x_K σχετίζεται με το $SL(2,\mathbb{Z})$-συναρτησοειδές της θεωρίας βαθμίδος Chern-Simons ως εξής: Για κάθε $A \in \Omega^1(X_K)$ που παίρνει τιμές στην $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, ορίζουμε:

$$CS(A) := \frac{1}{8\pi^2}\int_{X_K} Tr(dA \wedge A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A)$$

Αν τώρα για κάθε $\mathcal{X}_K^H(rz)$ ορίζουμε $CS(\rho_z)$ μέσω του $CS(A_{\rho_z})$, όπου A_{ρ_z} είναι η 1-μορφή συνοχής της επίπεδης συνοχής που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση ρ_z, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 2.5.3.

$$\int_0^{x_K(z)} y_K dx_K - \frac{1}{2}x_K y_K = 8\pi^2 CS(\rho_z)$$

Απόδειξη. Πρβλ. [39] □

2.5β′ Παραμόρφωση p-αδικών συνήθων modular αναπαραστάσεων Galois

Έστω p περιττός πρώτος, $G_{\{p\}}$ η ομάδα πρώτου και $D_{\{p\}}, I_{\{p\}}$ οι ομάδες ανάλυσης και αδράνειας της θεωρίας Hilbert για το p, αντίστοιχα. Ενδιαφερόμαστε για τις 2-διάστατες p-αδικές αναπαραστάσεις της $G_{\{p\}}$. Αρχικά, για να βρούμε ένα αριθμητικό ανάλογο της συνοριακής συνθήκης της προηγούμενης παραγράφου (η οποία στην περίπτωση των κόμβων ικανοποιούνταν αυτομάτως) εισάγουμε την παρακάτω έννοια για τις αναπαραστάσεις της $G_{\{p\}}$.

Ορισμός 2.5.4. *Μια αναπαράσταση $\rho : G_{\{p\}} \to GL(2,A)$ θα καλείται p-συνήθης εάν η $\rho|_{D_{\{p\}}}$ είναι ισοδύναμη με μία άνω-τριγωνική αναπαράσταση του τύπου:*

$$\rho|_{D_{\{p\}}} \simeq \left(\begin{smallmatrix}\chi_1 & * \\ 0 & \chi_2\end{smallmatrix}\right), \chi_2|_{I_{\{p\}}} = \boldsymbol{1}$$

όπου η $\chi_i : D_{\{p\}} \to A^\times$ είναι μια 1-διάστατη αναπαράσταση για κάθε $i = 1, 2$.

Σταθεροποιώντας τώρα μια απόλυτα ανάγωγη, συνεχή και p-συνήθη, mod$p$ αναπαράσταση $\bar{\rho} : G_{\{p\}} \to GL(2,\mathbb{F}_p)$, έχουμε το εξής Θεώρημα:

Θεώρημα 2.5.5. *Υπάρχει μια p-συνήθης παραμόρφωση της $\bar{\rho}$:*

$$\rho_p^o : G_{\{p\}} \to GL(2, R_p^o)$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξής καθολική ιδιότητα: για κάθε άλλη p-συνήθη παραμόρφωση $\rho : G_{\{p\}} \to GL(N,A)$ της $\bar{\rho}$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{Z}_p$-αλγεβρών $\phi : R_p^o \to A$ με $\phi \circ \rho_p^o \approx \rho$.

Απόδειξη. Πρβλ. [28], 1.7 □

Το ζεύγος (R_p^o, ρ_p^o) είναι μοναδικό μέχρι ισοδυναμίας και καλείται *καθολική p-συνήθης παραμόρφωση* της $\bar{\rho}$. Έτσι, ορίζουμε ως *καθολικό p-συνήθη χώρο παραμορφώσεων* της $\bar{\rho}$ τον:

$$\mathcal{X}_p^o(\bar{\rho}) := \big(\mathrm{Spec}(R_p^o)\big)(\bar{\mathbb{Q}}_p) = Hom_{\mathbb{Z}_p-alg}(R_p^o, \bar{\mathbb{Q}}_p)$$

και θεωρούμε τον $\mathcal{X}_p^o(\bar{\rho})$ ως ένα αριθμητικό ανάλογο του $\mathcal{X}_K$. Παρατηρεί κανείς πως αφού η $det : \rho_p^o : G_{\{p\}} \to (R_p^o)^\times$ είναι μία παραμόρφωση της $det : \bar{\rho} : G_{\{p\}} \to \mathbb{F}_p^\times$ από το Θεώρημα 2.4.7 θα υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{Z}_p$-αλγεβρών $\iota^o : \hat{\Lambda} \to R_p^o$ έτσι ώστε $\iota^o \circ \rho_{p,1} = det\rho_p^o$ (θεωρούμε το R_p^o ως μία $\hat{\Lambda}$-άλγεβρα μέσω της ι^o). Αυτός ο χώρος παραμορφώσεων $\mathcal{X}_p^o(\bar{\rho})$ σχετίζεται με την οικογένεια των αναπαραστάσεων Galois στη θεωρία Hida [35] για την καθολική, p-αδική συνήθη άλγεβρα Hecke.

Παρατήρηση 2.5.6. *Έστω f μία cuspidal ιδιομορφή (ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Hecke T_l για κάθε πρώτο $l \neq p$ και του τελεστή Atkin-Lehner U_p) επιπέδου $N = p^m, (m \geq 1)$ στην $\Gamma_0(N)$, βάρους $w_f \geq 2$ και χαρακτήρα ϵ_f. Επίσης, για το ανάπτυγμα Fourier $f = \sum_{n\geq 1} a_n(f)q^n, q = e^{2\pi i z}$ στο ∞, οι συντελεστές Fourier $a_l(f), (l \neq p)$ και $a_p(f)$ είναι ιδιοτιμές του T_l και U_p αντίστοιχα.*

Έστω τώρα $\mathcal{O}_f$ η ακέραιη κλειστότητα του δακτυλίου $\mathbb{Z}[a_n(f)], (n \geq 1)$ στο $\mathbb{C}$. Τότε, το $\mathcal{O}_f$ θα είναι ο ακέραιος των αλγεβρικών ακεραίων σε ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών k_f. Για ένα $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\mathcal{O}_f$, θέτουμε $k_{f,\mathfrak{p}}$ να είναι η $\mathfrak{p}$-αδική πλήρωση του k_f και $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$ ο δακτύλιος αλγεβρικών ακεραίων του $k_{f,\mathfrak{p}}$ αντίστοιχα. Τότε, έχουμε τα ακόλουθα Θεωρήματα:

Θεώρημα 2.5.7. *Υπάρχει (μοναδική μέχρι ισοδυναμίας) απόλυτα ανάγωγη αναπαράσταση πάνω από το $k_{f,\mathfrak{p}}$*

$$\rho_{f,\mathfrak{p}} : G_{\{p\}} \to GL(2, \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$$

έτσι ώστε για κάθε πρώτο $l \neq p$ να ισχύει:

$$Tr(\rho_{f,\mathfrak{p}}(\sigma_l)) = a_l(f)$$

$$det(\rho_{f,\mathfrak{p}}(\sigma_l)) = \epsilon_f(l)l^{w_f-1}$$

όπου $\sigma_l \in G_{\{p\}}$ ο αυτομορφισμός Frobenius πάνω από το l.

Απόδειξη. Πρβλ. [40] □

Θεώρημα 2.5.8. *Έστω f όπως παραπάνω και p-συνήθης. Αν $a_p(f) \in \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}^\times$ τότε η $\rho_{f,\mathfrak{p}}$ είναι επίσης p-συνήθης και ισχύει:*

$$\rho_{f,\mathfrak{p}}|_{D_{\{p\}}} \simeq \left(\begin{smallmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{smallmatrix}\right), \chi_2|_{I_{\{p\}}} = \mathbf{1}$$

Απόδειξη. Πρβλ. [41] □

Έστω τώρα μια απόλυτα ανάγωγη αναπαράσταση $\bar{\rho} = \rho_{f^o,\mathfrak{p}} mod\mathfrak{p} : G_{\{p\}} \to GL(2, \mathbb{F}_p)$ η οποία θα αντιστοιχεί σε μία p-συνήθη cuspidal ιδιομορφή f^o με $\mathcal{O}_{f^o}/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_p$. Ο Hida κατάφερε να κατασκευάσει μια 'μεγάλη' αναπαράσταση Galois από μία συγκεκριμένη άλγεβρα Hecke:

Θεώρημα 2.5.9. *Υπάρχει μία p-συνήθης παραμόρφωση της $\bar{\rho}$:*

$$\rho_p^H : G_{\{p\}} \to GL(2, R_p^H)$$

με την ακόλουθη καθολική ιδιότητα: αν $\rho_{f,\mathfrak{p}} : G_{\{p\}} \to GL(2, \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$ είναι μία παραμόρφωση της $\bar{\rho}$ που αντιστοιχεί σε μία p-συνήθη cuspidal ιδιομορφή f επιπέδου $N = p^m, (m \geq 1)$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{Z}_p$-αλγεβρών $\phi : R_p^H \to \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$ έτσι ώστε $\phi \circ \rho_p^H \approx \rho_{f,\mathfrak{p}}$.

Απόδειξη. Πρβλ. [33], [34] □

Το ζεύγος (R_p^H, ρ_p^H) είναι μοναδικό μέχρι ισοδυναμίας και καλείται *καθολική* p-συνήθης modular αναπαράσταση της $\bar{\rho}$. Έτσι, ορίζουμε ως *καθολικό p-συνήθη χώρο παραμορφώσων* τον:

$$\mathcal{X}_p^H(\bar{\rho}) = \big(\mathrm{Spec}(R_p^H)\big)(\bar{\mathbb{Q}}_p) = Hom_{\mathbb{Z}_p-alg}(R_p^H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$$

Για κάθε $\phi \in \mathcal{X}_p^H(\bar{\rho})$ συμβολίζουμε με $\rho_\phi^H = \phi \circ \rho_p^H$. Έστω $(R_{p,1} = \hat{\Lambda}, \rho_{p,1})$ η καθολική παραμόρφωση της $det\bar{\rho}$. Τότε, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{Z}_p$-αλγεβρών $\iota^H : \hat{\Lambda} \to R_p^H$ έτσι ώστε $\iota^H \circ \rho_{p,1} = det\rho_p^H$. Αν μέσω της ι^H θεωρήσουμε τον R_p^H ως $\hat{\Lambda}$-άλγεβρα, τότε η ι^H επάγει μια p-αδική αναλυτική απεικόνιση:

$$x_p : \mathcal{X}_p^H(\bar{\rho}) \to \mathcal{D}_p; \phi \mapsto (\phi \circ \iota^H)(T)$$

Ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{B} \in \mathrm{Spec}(R_p^H)$ με ύψος 1 θα καλείται *αριθμητικό σημείο* εάν υπάρχει ακέραιος $w \geq 0$ και χαρακτήρας Dirichlet ϵ modp^m έτσι ώστε η εικόνα του $1 + T$ κάτω από τον φυσικό ομομορφισμό $R_{p,2}^H \to R_{p,2}^H/\mathfrak{B}$ να ισούται με $\epsilon(1+p)(1+p)^{w-2}$. Τότε, το σημείο $\mathfrak{B}$ θα αντιστοιχεί σε μία cuspidal ιδιομορφή βάρους w και χαρακτήρα ϵ. Επιπρόσθετα, ένα σημείο $\phi \in \mathcal{X}_p^H(\bar{\rho})$ θα καλείται *αριθμητικό σημείο* εάν το $\mathfrak{B} = \ker(\phi)$ είναι ένα αριθμητικό σημείο. Επομένως, τα αριθμητικά σημεία στον $\mathcal{X}_p^H(\bar{\rho})$ μπορεί να ιδωθούν ως αριθμητικά ανάλογα των χειρουργικών σημείων Dehn με ακέραιους συντελεστές στον χώρο παραμόρφωσης $X_K^H(rz)$ των υπερβολικών δομών. Το επόμενο Θεώρημα οφείλεται στον Hida:

Θεώρημα 2.5.10. *Το R_p^H είναι μία πεπερασμένη, επίπεδη άλγεβρα πάνω από το $\hat{\Lambda}$. Επιπλέον, το $(R_p^H)_{\mathfrak{B}}$ είναι μία étale άλγεβρα πάνω από το $\hat{\Lambda}_{\mathfrak{p}}$, για κάθε αριθμητικό σημείο $\mathfrak{B} \in \mathrm{Spec}(R_p^H)$, όπου $\mathfrak{p} := (\iota^H)^{-1}(\mathfrak{B})$. Ειδικότερα, το x_p δίνει μία p-αδικά αναλυτική τοπική συντεταγμένη γύρω από το ϕ.*

Απόδειξη. Πρβλ. Πόρισμα 1.4 [33] και [34]. □

Έστω $\mathbb{Q}_\infty$ η κυκλοτομική $\mathbb{Z}_p$-επέκταση του $\mathbb{Q}$. Σταθεροποιούμε έναν τοπολογικό γεννήτορα $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) = 1 + p\mathbb{Z}_p$ και ταυτοποιούμε την άλγεβρα $\mathbb{Z}_p[[Gal(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})]]$ με την $\hat{\Lambda}$ μέσω της αντιστοιχίας $\gamma \leftrightarrow 1 + T$. Επιλέγουμε επίσης $\tau \in G_{\{p\}}$ έτσι ώστε να απεικονίζεται μέσω του φυσικού ομομορφισμού $G_{\{p\}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ στον γεννήτορα γ. Τότε, έχουμε το παρακάτω αριθμητικό ανάλογο του Θεωρήματος Thurston για την χειρουργική Dehn ([42]):

Θεώρημα 2.5.11. *Η απεικόνιση*

$$\Psi_p : \mathcal{X}_p^H(\bar{\rho}) \to \bar{\mathbb{Q}}_p; \phi \mapsto tr(\rho_\phi^H(\tau))$$

είναι p-αδικά αμφιαναλυτική σε μια γειτονιά της ϕ^o, όπου η ϕ^o ορίζεται ως $\rho_{\phi^o}^H = \phi^o \circ \rho_p^H \approx \rho_{f^o,\mathfrak{p}}$.

Απόδειξη. Αφού για κάθε $\phi \in \mathcal{X}_p^H(\bar{\rho})$ η ρ_ϕ^H είναι p-συνήθης, θα ισχύει:

$$\rho_\phi^H \simeq \begin{pmatrix} \chi_{1,\phi} & * \\ 0 & \chi_{2,\phi} \end{pmatrix}, \chi_{2,\phi}|_{I_{\{p\}}} = \mathbf{1}$$

Επομένως, θα έχουμε διαδοχικά ότι: $\chi_{1,\phi}(\tau) = det(\rho_\phi^H(\tau)) = \phi(det(\rho_p^H(\tau))) = \phi(\iota^H \circ \rho_{p,1}(\tau)) = \phi(\omega(\tau)\iota^H(\gamma)) = \omega(\tau)\phi(\iota^H(\gamma)) = \omega(\tau)(1 + \chi_p(\phi))$ όπου $\gamma = 1 + T$ και ω η ανύψωση Teichmüller της $det\bar{\rho}$. Άρα, $\Psi_p^H(\rho_\phi^H(\tau)) = tr(\rho_\phi^H(\tau)) = \chi_{1,\phi}(\tau) + 1 = \omega(\tau)(1 + x_p(\phi)) + 1$. Και αφού η x_p είναι μια p-αδικά αμφιαναλυτική συνάρτηση στην ϕ^o, από το Θεώρημα 2.5.10, το ίδιο θα ισχύει και για την Ψ_p^H. □

Από την καθολικότητα του ζεύγους (R_p^o, ρ_p^o), υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{Z}_p$-αλγεβρών $\psi : R_p^o \to R_p^H$ έτσι ώστε $\psi \circ \rho_p^o \approx \rho_p^H$. Αφού, $\iota^H \circ \psi = \iota^o$ παρατηρούμε ότι η ψ είναι ένας ομομορφισμός $\hat{\Lambda}$-αλγεβρών. Ο Mazur [43] διατύπωσε την εικασία πως η ψ είναι στην ουσία ισομορφισμός. Πράγματι, ο ισχυρισμός αυτός αποδείχτηκε από τον Wiles:

Θεώρημα 2.5.12. *Έστω $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$, όπου $p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Υποθέτουμε επίσης ότι το επίπεδο της f^o είναι p και ότι η $\bar{\rho}|_{Gal(\bar{\mathbb{Q}}/k)}$ είναι απόλυτα ανάγωγη. Τότε, η ψ είναι ισομορφισμός. Επομένως, $\mathcal{X}_p^H(\bar{\rho}) = \mathcal{X}_p^o(\bar{\rho})$.*

Απόδειξη. Πρβλ. [44], [45]. □

Παρατήρηση 2.5.13. *Το παραπάνω Θεώρημα μπορεί να ερμηνευθεί ως μία μη-αβελιανή γενίκευση της θεωρίας κλάσεων σωμάτων (βλ. Παράρτημα, Α΄.1.5) με την παρακάτω έννοια: Έστω $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \prod_p' \mathbb{Q}_p$ ο δακτύλιος των adèles του $\mathbb{Q}$, όπου $\prod_p'$ το περιορισμένο γινόμενο των $\mathbb{Q}_p$ ως προς τα $\mathbb{Z}_p$. Η ομάδα των idèles $J_{\mathbb{Q}}$ και η ομάδα κλάσεων των idèles $C_{\mathbb{Q}} = J_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^\times$, γράφονται ως $J_{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times = GL(1, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ και $C_{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times = GL(1, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/GL(1, \mathbb{Q})$ αντίστοιχα. Τότε, μέσω του ομομορφισμού αντιστροφής Artin $\rho_k : C_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$, θα έχουμε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ ενός υποσυνόλου 1-διάστατων αναπαραστάσεων της $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$ και της $GL(1, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/GL(1, \mathbb{Q})$. Από την άλλη πλευρά, παρατηρώντας ότι μία cuspidal ιδιομορφή μπορεί να ιδωθεί ως συνάρτηση στην $GL(2, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/GL(2, \mathbb{Q})$ το Θεώρημα 2.5.12 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (αντιστοιχία Langlands) μεταξύ ενός υποσυνόλου 2-διάστατων αναπαραστάσεων της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ και κάποιων ειδικών συναρτήσεων στην $GL(2, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/GL(2, \mathbb{Q})$. Άρα πράγματι, έχουμε μια (μη-αβελιανή) GL_2-εκδοχή της θεωρίας κλάσεων σωμάτων.*

Ας υποθέσουμε τώρα πως η $\rho_{f^o,\mathfrak{p}}$ προέρχεται από μία ελλειπτική καμπύλη E πάνω από το $\mathbb{Q}$, δηλαδή: $\rho_{f^o,\mathfrak{p}} = \rho_E$. Σε αυτή την περίπτωση, η ρ_E είναι η αναπαράσταση που προκύπτει από τη δράση τους $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ στο πρότυπο Tate $\varprojlim_n E[p^n] = \mathbb{Z}_p^{\oplus 2}$ της E και υποθέτουμε ότι είναι αδιακλάδιστη έξω από το $\{p, \infty\}$. Ειδικότερα, πρέπει $w_{f^o} = 2$ και $\mathcal{O}_{f^o,\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}_p$. Έστω ακόμα ότι η E επιδέχεται split-multiplicative αναγωγή στο p (δηλαδή η E επεκτείνεται σε ένα λείο group scheme $\mathcal{E}$ πάνω από το $\mathbb{Z}_p$ έτσι ώστε για την special fiber του να ισχύει ότι: $\mathcal{E} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \simeq \mathbb{G}_m$, όπου $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[X, Y], (XY - 1))$ η πολλαπλασιαστική ομάδα πάνω από το $\mathbb{F}_p$). Επιπλέον θέτουμε $y_p := \chi_2(\sigma_p)$ και:

$$\rho_p^H \simeq \left(\begin{smallmatrix} \chi_{1,\phi} & * \\ 0 & \chi_{2,\phi} \end{smallmatrix}\right), \chi_{2,\phi}|_{I_{\{p\}}} = \mathbf{1}$$

όπου σ_p ο αυτομορφισμός του Frobenius πάνω από το p. Αν το $\phi^o \in \mathcal{X}_{p,2}^H(\bar{\rho})$ είναι το αριθμητικό σημείο που αντιστοιχεί στην ρ_E τότε, αφού το x_p είναι p-αδικά αμφιαναλυτικό σε μια γειτονιά του ϕ^o και $\phi^o \circ \iota^H(T) = 0$, το y_p μπορεί να θεωρηθεί ως μια p-αδικά αναλυτική συνάρτηση του x_p γύρω από το $0 \in \mathcal{D}_p$. Με τα παραπάνω δεδομένα έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα των Greenberg-Stevens [46] που αποτελεί ένα αριθμητικό ανάλογο του Θεωρήματος Neumann-Zagier:

Θεώρημα 2.5.14. *Έστω q_E η περίοδος Tate της ελλειπτικής καμπύλης E: $E(\bar{\mathbb{Q}}_p) = \bar{\mathbb{Q}}_p^\times/(q_E)^{\mathbb{Z}}$. Τότε, ισχύει ότι:*

$$\frac{dy_p}{dx_p}|_{x_p=0} = -\frac{1}{2log_p(\gamma)} \frac{log_p(q_E)}{ord_p(q_E)}$$

όπου $log_p(z)$ ο p-αδικός λογάριθμος Iwasawa. Η ποσότητα $\frac{log_p(q_E)}{ord_p(q_E)}$ ονομάζεται $\mathfrak{L}$-αναλλοίωτη των Mazur-Tate-Teitelbaum της E.

Απόδειξη. Πρβλ. Πρόταση 1.85 [47]. □

Παρατήρηση 2.5.15. *Σε αναλογία με την τοπολογική περίπτωση (συναρτησοειδές Chern-Simons), θα ήταν ενδιαφέρον να αναρωτηθεί κανείς για το αριθμητικό ανάλογο του p-αδικού ολοκληρώματος $\int_0^{x_p} y_p dx_p$. Ένα αποτέλεσμα του Coleman [48] δείχνει ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των τιμών p-αδικών Dirichlet L-συναρτήσεων και p-αδικών modular L-τιμών, όταν το x_p είναι ένα αριθμητικό σημείο που αντιστοιχεί σε μία modular μορφή.*

Στην αριθμητική περίπτωση, έχουμε ότι μια τυπική αναλλοίωτη στον $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^{2,o}(\bar{\rho})$ είναι μια p-αδική modular L-συνάρτηση $L_{\mathfrak{p}}(\rho, s), \rho \in \mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^{2,o}, s \in \mathbb{Z}_p$ [46]. Μάλιστα, γεωμετρικά η $L_{\mathfrak{p}}(\rho, s)$ θα δίνεται ως τομή μιας rigid, αναλυτικής, δέσμης γραμμών $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}$ από modular symbols: $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}} \to \mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^{2,o}$. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, αυτό αναλογεί στην έννοια μιας 'κυματοσυνάρτησης' στη Φυσική. Παρατηρούμε επίσης ότι, η τιμή $L_{\mathfrak{p}}(\rho, 0) = L_{\mathfrak{p}}(f_\rho, 0)$ στο $s = 0$ (όπου f_ρ η modular μορφή που αντιστοιχεί στην ρ) δίνεται από την $r_{\mathfrak{p}}(\{u, v\})(\omega) \cdot c$, όπου $r_{\mathfrak{p}} : K_2(C_\rho) \to H^1_{dR}(C_\rho/\mathbb{Q}_p)$ ο p-αδικός regulator και C_ρ μια modular καμπύλη.

Αξίζει επίσης να παρατηρήσει κανείς πως η περίπτωση $n = 2$ (η περίπτωση $n = 1$ είναι απλά η αντιστοιχία θεωρίας Alexander-Fox και Iwasawa) της θεωρίας Hida-Mazur που στην αριθμητική πλευρά αφορά μία p-αδική 'θεωρία βαθμίδας', στην τοπολογική πλευρά σχετίζεται με την υπερβολική γεωμετρία και τη θεωρία βαθμίδας Chern-Simons. Πράγματι, έστω K ένας υπερβολικός κόμβος. Τότε, αφού η G_K θα έχει τετριμμένο κέντρο και κάθε αναπαράσταση $G_K \to PGL(2, \mathbb{C}) \simeq PSL(2, \mathbb{C})$ δύναται να ανυψωθεί σε μια $G_K \to SL(2, \mathbb{C})$, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο $SL(2, \mathbb{C})$-αναπαραστάσεις. Θέτουμε λοιπόν:

$$\mathcal{X}_K^2 := Hom(G_K, SL(2, \mathbb{C}))//SL(2, \mathbb{C}))$$

Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός της $[\rho] \in \mathcal{X}_K^2$ στο D_K θα είναι συζυγής με μία άνω-τριγωνική αναπαράσταση

$$\rho|_{D_K} \simeq \begin{pmatrix} \chi_\rho & * \\ 0 & \chi_\rho^{-1} \end{pmatrix}$$

Έστω ρ^o η ανύψωση της αναπαράστασης ολονομίας που αντιστοιχεί στην υπερβολική δομή στην $S^3 \backslash K$ και ας είναι $\mathcal{X}_K^{2,o}$ η ανάγωγη συνιστώσα του $\mathcal{X}_K^2$ ενώ $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_K^{2,o}$ να περιέχει το $[\rho^o]$. Έστω επίσης η Chern-Simons αναλλοίωτη ως προς $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$L_K(\rho) := -2\pi^2 CS(\rho) + ivol(\rho)$$

Τότε, ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.5.16. *([49]) Υπάρχει μία ολόμορφη δέσμη γραμμών $\mathfrak{L}_K$ με ολόμορφη συνοχή στον $\mathcal{X}$ έτσι ώστε η $L_K(\rho)$ να δίνεται από μία επίπεδη τομή $\mathfrak{L}_K \to \mathcal{X}$.*

Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και H η ομάδα 3×3 ομάδα Heisenberg επί του R:

$$H(R) := \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε, η μιγαδική πολλαπλότητα $P := H(\mathbb{Z})\backslash H(\mathbb{C})$ θα είναι μία πρωτεύουσα $\mathbb{C}^\times$-δέσμη πάνω από το $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ μέσω της απεικόνισης:

$$P \to \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times; \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mapsto (e^{2\pi i a}, e^{2\pi i b})$$

ενώ η 1-μορφή $\theta = dc - adb$ θα δίνει μια μορφή συνοχής στην P. Έστω $T(l, m^2) : \mathcal{X} \to \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ μια ολόμορφη απεικόνιση η οποία ορίζεται ως: $\rho \mapsto (l(\rho), m^2(\rho))$ και έστω $\mathfrak{L}_K := T(l, m^2)^*(P, \theta)$. Τότε, η επίπεδη τομή θα δίνεται ως:

$$S(\rho^o) + \log(l(\rho^o)) \int_{\rho^o}^{\rho} d(logm^2) + \int_{\rho^o}^{\rho} d(logl)\ d(logm^2) = L_K(\rho)$$

Για να δείξουμε ότι η $L_K(\rho)$ αποτελεί το ανάλογο της $L_p(\rho, 0)$ χρησιμοποιούμε την συνομολογία Deligne-Beilinson για την παραπάνω κατασκευή. Έστω $r_\infty : K_2(\mathcal{X}) \to H^1(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ να είναι ο Beilinson regulator. Θεωρούμε την φυσική απεικόνιση $\iota : H^2_{DB}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(2)) \to H^2_{DB}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(2)) \hookrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Είναι γνωστό ότι η $H^2_{DB}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(2))$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η ομάδα κλάσεων ισομορφισμού ολόμορφων δεσμών γραμμών στον $\mathcal{X}$ με ολόμορφη μορφή συνοχής και άρα η $\mathfrak{L}_K$ μπορεί να ιδωθεί ως ένα στοιχείο της $H^2_{DB}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(2))$. [51] Επίσης, αποδεικνύεται ότι: $\iota(\mathfrak{L}_K) = r_\infty(\{l, m^2\})$ γεγονός που αντανακλά την σχέση μεταξύ της $L_p(\rho, 0)$ και του p-αδικού regulator. Υπάρχει επίσης η κατασκευή μιας δέσμης γραμμών E_K πάνω από το $\mathcal{X}^{2,o}_K$, χωρίς τη χρησιμοποίηση της συνομολογίας Deligne, έτσι ώστε η $\mathfrak{L}_K(\rho)$ να θεωρείται ως μία τομή [52].

Παρατήρηση 2.5.17. *Το tame σύμβολο $(f, g]$ δύο αντιστρέψιμων ολόμορφων συναρτήσεων ορισμένες σε ένα ανοικτό υποσύνολο U σε μία μιγαδική αναλυτική πολλαπλότητα X είναι ένας $\mathcal{O}^\times_X|_U$-torsor εφοδιασμένος με μια αναλυτική συνοχή και αποτελεί ένα γεωμετρικό ανάλογο του συμβόλου Hilbert [50]. Επίσης, μέσω της συνομολογίας Deligne-Beilinson μπορεί να ιδωθεί ως ένα μιγαδικό αναλυτικό ανάλογο του linking number δύο κόμβων.*

Σε αναλογία με την αριθμητική περίπτωση, θα αναμέναμε να υπάρχει μια L-συνάρτηση 2 μεταβλητών $L_K(\rho, s), \rho \in \mathcal{X}, s \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε η $L_K(\rho)$ να είναι ο κυρίαρχος όρος (special value) της $L_K(\rho, s)$ στο $s = 0$. Μια υποψήφια τέτοια L-συνάρτηση δίνεται ως εξής: Έστω M_ρ η υπερβολική παραμόρφωση της $M = S^3\backslash K$ με ολονομία ρ. Τότε, η M_ρ είναι μία spin πολλαπλότητα με $Spin(3) = SU(2)$-πρωτεύουσα δέσμη $Spin(M_\rho) \to M_\rho$. Έστω D_ρ ο αντίστοιχος τελεστής Dirac που δρα στον δακτύλιο $C^\infty(Spin(M_\rho) \otimes (\mathbb{C}^2)_\rho)$ και ορίζουμε την φασματική ζήτα συνάρτηση μέσω της:

$$L_K(\rho, s) := \sum_\lambda \pm(\pm\lambda)^s$$

όπου $\pm = sgn(Re(\lambda))$, $Res(s) > 0$ και το λ να διατρέχει όλες τις μη-μηδενικές ιδιοτιμές του D_ρ (οι οποίες δύναται να είναι μιγαδικές αφού ο D_ρ δεν είναι εν γένει Ερμιτιανός όπως το σύμβολο του). Μάλιστα, για μια κλειστή, υπερβολική 3-πολλαπλότητα οι Jones-Westbury έδειξαν πως η $L_K(\rho, s)$ επιδέχεται μια αναλυτική συνέχιση σε μερόμορφη συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$ και ισχύει ότι:

$$L_K(\rho) = 2\pi^2 L_K(\rho, 0)$$

Τέλος, αναφέρουμε το εξής ενδιαφέρον αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.5.18. *Η $L_K(\rho)$ δίνει μια μεταβολή από mixed Hodge structure (V, W_*, F^*) στον $\mathcal{X}$ μέσω των:*

$$V = \mathbb{Z}^3$$

$$V = W_0 \supset W_{-1} = \mathbb{Z}u_2 \oplus \mathbb{Z}u_3 \supset W_{-2} = \mathbb{Z}u_3$$

με

$$(u_1, u_2, u_3)^T := \begin{pmatrix} 1 & logl(\rho^0) & S(\rho^0) \\ 0 & 1 & logm^2(\rho^0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \int_{\rho^0}^{\rho} dlogl & \int_{\rho^0}^{\rho} dlogldlogm^2 \\ 0 & 1 & \int_{\rho^0}^{\rho} dlogm^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(e_1, (2\pi i)e_2, (2\pi i)^2 e_3\right)^T$$

όπου $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι η συνήθης βάση του V, $W_0/W_{-1} = \mathbb{Z}(0), W_{-1}/W_{-2} = \mathbb{Z}(1), W_{-2} = \mathbb{Z}(2)$ και

$$V = F^{-2} \supset F^{-1} = \mathbb{Z}e_1 \otimes \mathbb{Z}e_2 \supset F^0 = \mathbb{Z}e_1$$

με $\nabla F^{i-1} \subset \Omega^1 \otimes F^i$ έτσι ώστε $\nabla u := du - u \begin{pmatrix} 1 & dlogl & 0 \\ 0 & 1 & dlogm^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Απόδειξη. Πρβλ. [53] □

Μέρος II

Κβαντική Τοπολογία

Κεφάλαιο 3

Αναλογίες μεταξύ της αντιστοιχίας Langlands και ΤΚΘΠ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε καλύτερα τις γεωμετρικές εκδοχές της θεωρίας κλάσεων σωμάτων (geometric class field theory) με σκοπό να φωτισθούν καλύτερα οι ιδιαίτερες δομές που διέπουν τόσο το Πρόγραμμα Langlands όσο και τις ΤΚΘΠ. Οι δομές αυτές βρίσκονται στη βάση πολλών σύγχρονων κατασκευών (λ.χ στην 4-διάστατη ΤΚΘΠ των Kapustin-Witten).

Η θεωρία κλάσεων σωμάτων η οποία περιγράφει αβελιανές επικαλύψεις 1-διάστατων σχημάτων με όρους των idèles, επιδέχεται γενικεύσεις σε δύο διαφορετικές κατευθύνσεις. Η μία αφορά την θεωρία κλάσεων σωμάτων υψηλοτέρων διαστάσεων (higher local fields) όπως διατυπώθηκε από τους (Parshin, Tate, Kato, Bloch, Saito et. al) που περιγράφει αβελιανές επικαλύψεις σχημάτων απόλυτης διάστασης n εκφρασμένες στην γλώσσα της K-θεωρίας πάνω από το δακτύλιο των adèles (η κλασική περίπτωση των idèles μπορεί να ιδωθεί ως K_1) [59], [60], [61]. Η δεύτερη γενίκευση, είναι το πρόγραμμα Langlands, που αφορά μόνο 1-διάστατα σχήματα αλλά περιγράφει τις υψηλότερης διάστασης αναπαραστάσεις των ομάδων Galois με όρους αναπαραστάσεων των ομάδων από πίνακες πάνω στα adèles. Διεγείρεται έτσι η ανάγκη να υπάρξει μια κοινή γενίκευση των δύο παραπάνω θεωριών που θα περιγράφει με συστηματικό τρόπο τις υψηλότερης διάστασης αναπαραστάσεις των ομάδων Galois για σχήματα υψηλότερης διάστασης. Αν και το ερώτημα αυτό προκύπτει με φυσιολογικό τρόπο, εν πολλοίς είναι άγνωστο ακόμα ποια μαθηματικά αντικείμενα πρέπει να υπάρχουν πίσω από τη θεωρία Langlands για σχήματα υψηλότερης διάστασης. Χονδρικά, οι δύο προαναφερθέντες θεωρίες αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές γενικεύσεις της έννοιας του χαρακτήρα μιας ομάδας G, όπου $G = GL(n, \mathbb{A})$. Από τη σκοπιά του προγράμματος Langlands, οι χαρακτήρες αντικαθίστανται από (ενδεχομένως απειροδιάστατες) γραμμικές αναπαραστάσεις ενώ από την πλευρά της θεωρίας κλάσεων σωμάτων υψηλότερης-διάστασης, οι χαρακτήρες θεωρούνται ως 1-συν-κύκλοι και αντικαθίστανται από τις ανώτερες ομάδες συνομολογίας. Έτσι, φαίνεται φυσικό η ζητούμενη κοινή γενίκευση να αναζητάται σε μια μορφή ανωτέρας μη-αβελιανής συνομολογίας [62], [63], [65].

Δεδομένου ότι οι πρωτεύουσες G-δέσμες ταξινομούνται από τη μη-αβελιανή συνομολογία βαθμού 1 με συντελεστές στην ομάδα G, ο Grothendieck εισήγαγε την έννοια του gerbe προκειμένου να βρεθεί ένα ανάλογο του παραπάνω ισχυρισμού για τη μη-αβελιανή συνομολογία στον βαθμό 2. Αυτομάτως αυτό μας οδηγεί στην θεωρία των n-κατηγοριών και ως εκ τούτου γίνεται πιο εμφανής η σχέση με τις αντίστοιχες κατασκευές στη μαθηματική φυσική, όπου αναζητάται ένας τρόπος επέκτασης των ΤΚΘΠ όπως τις θεμελίωσαν αρχικά οι Atiyah-Segal, σε υποπολλαπλότητες υψηλότερης συνδιάστασης χρησιμοποιώντας εν γένει n-διανυσματικούς χώρους. Τότε, φαίνεται πράγματι πως η τυπική δομή της αντιστοιχίας Langlands δεν διαφέρει πολύ από εκείνη των ΤΚΘΠ. Για παράδειγμα, οι Atiyah-Bott παρατήρησαν αναλογίες μεταξύ των ομάδων βαθμίδας και των ομάδων των adèles, ενώ το Γεωμετρικό Πρόγραμμα Langlands διατυπωμένο από τους Drinfeld-Beilinson έκανε εμφανή τη σύνδεση του με θεωρίες της φυσικής όπως το μοντέλο Wess-Zumino-Witten. Επίσης, οι εργασίες του Deligne για τη δομή του tame symbol [84] είχαν ως αρχικό κίνητρο φυσικές εφαρμογές. Ακόμα και οι πολλαπλότητες Shimura που χρησιμοποιούνται κατά κόρον στο Αριθμητικό Πρόγραμμα Langlands φαίνεται να συμπεριφέρονται ανάλογα με τα διαγράμματα Feynman της κβαντικής θεωρίας πεδίου! Στο ίδιο πνεύμα βρίσκονται και εργασίες [64] που αφορούν κατηγοριο-θεωρητικές προσεγγίσεις των νόμων αντιστροφής.

Ο στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι να ερμηνεύσει την αντιστοιχία ως μία συγκεκριμένη στοίβα πάνω σε ένα αμφιμονόπλοκο (bisimplicial) σύνολο S που αντιστοιχεί στην κατηγορία των motives (S-κατασκευή του Waldhausen) πάνω από το F, μέσω του συναρτητή γεωμετρικής πραγματοποίησης $sSet \to cgHausTop$. Έπειτα, αντικαθιστώντας τις στοίβες κατηγοριών του χώρου Waldhausen S με στοίβες από 2-κατηγορίες (η πιο σημαντική 2-κατηγορία για εμάς θα είναι αυτή των 2-διανυματικών χώρων) θα διατυπωθεί σε μορφή εικασίας η μορφή που πρέπει να παίρνει η αντιστοιχία Langlands για ένα 2-διάστατο, τοπικό, p-αδικό σώμα F. Θα δείξουμε επίσης, πως αυτή η θεώρηση γενικεύει κατά φυσιολογικό τρόπο την θεωρία των Parshin-Kato.

3.1 Η τυπική δομή της αντιστοιχίας Langlands

Ένα *τοπικό σώμα* είναι ένας πλήρες ως προς μία διακριτή εκτίμηση σώμα με πεπερασμένο σώμα υπολοίπων (π.χ μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}_p$ ή το σώμα $\mathbb{F}_q((t))$ των τυπικών σειρών Laurent με συντελεστές στο $\mathbb{F}_q$, όπου $q = p^n$). Ο Parshin εισήγαγε την έννοια των τοπικών σωμάτων αυθαίρετης διάστασης. Εξ'ορισμού, ένα 0-διάστατο τοπικό σώμα είναι απλά ένα πεπερασμένο σώμα. Δεδομένου ότι έχουν οριστεί τα $(n-1)$-διάστατα τοπικά σώματα ορίζουμε αναδρομικά ως ένα n-διάστατο τοπικό σώμα να είναι ένα πλήρες, διακριτό σώμα του οποίου το σώμα υπολοίπων είναι ένα $(n-1)$-διάστατο τοπικό σώμα. Επομένως, τα 1-διάστατα τοπικά σώματα είναι τα τοπικά σώματα (με την συνήθη κλασική έννοια) ενώ παραδείγματα 2-διάστατων τοπικών σωμάτων αποτελούν το σώμα των τυπικών σειρών Laurent $\mathbb{Q}_p((t))$ με συντελεστές στο $\mathbb{Q}_p$ και το σώμα των iterated σειρών Laurent $\mathbb{F}_q((t_1)(t_2))$. Ο Parshin παρατήρησε ότι τα n-διάστατα τοπικά σώματα προκύπτουν με φυσιολογικό τρόπο ως πληρώσεις σωμάτων ρητών συναρτήσεων που δρουν πάνω σε σχήματα απόλυτης διάστασης n. Πιο συγκεκριμένα, έστω X ένα ακέραιο (χωρίς μηδενοδιαιρέτες στον δακτύλιο συναρτήσεων) σχήμα και F το σώμα των ρητών συναρτήσεων στο X. Σε κάθε πλήρης πολλαπλότητα σημαία από ανάγωγα υποσχήματα $X_0 \subset \ldots \subset X_n = X$ με $dim X_i = i$, αντιστοιχούμε μία πλήρωση $F(X_0, \ldots, X_n)$ του σώματος F. Στην περίπτωση που κάθε X_i είναι μη-ιδιάζων, η πλήρωση αυτή θα αποτελεί ένα n-διάστατο τοπικό σώμα του οποίου το σώμα υπολοίπων θα είναι μια πλήρωση του σώματος των ρητών συναρτήσεων στο X_{n-1} ως προς την πολλαπλότητα σημαία $X_0 \subset \ldots X_{n-1}$ [75], [76].

Έστω τώρα F ένα 1-διάστατο τοπικό σώμα, G_F η απόλυτη ομάδα Galois του F, $W(F) \subset G_F$ η ομάδα Weil και $WD(F)$ η ομάδα Weil-Deligne. Η παραδοσιακή εικασία Langlands για το F εκφράζεται ως μια αντιστοιχία μεταξύ των l-αδικών $(l \neq p)$ αναπαραστάσεων π της $W(F)$ (ή αντίστοιχα των μιγαδικών αναπαραστάσεων της $WD(F)$) διάστασης m και των μιγαδικών, admissible αναπαραστάσεων H_π της $GL(m, F)$ [77]. Η αντιστοιχία αυτή χρειάζεται να ικανοποιεί πολλές ιδιότητες εκ των οποίων η πιο μυστηριώδης φαίνεται να είναι αυτή της *παραβολικής επαγωγής*: αν π, ρ είναι δύο αναπαραστάσεις της $W(F)$ διάστασης m, n αντίστοιχα και H_π, H_ρ οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις των $GL(m, F)$ και $GL(n, F)$, τότε η αναπαράσταση $H_{\pi \oplus \rho}$ της $GL(m+n, F)$ προέρχεται ως ένα κατάλληλο υποπηλίκο της επαγόμενης αναπαράστασης $Ind_{P(m,n)}^{GL(m,n)}(\pi \bar{\oplus} \rho)$, όπου $P(m,n) \subset GL(m+n)$ η παραβολική υποομάδα που σχηματίζουν όλοι οι πίνακες της μορφής:

$$g = \left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right), A \in GL(m, F), B \in GL(n, F)$$

και $\pi \bar{\oplus} \rho$ η αναπαράσταση της $P(m,n)$ που επάγεται από την αναπαράσταση τανυστικού γινομένου $\pi \oplus \rho : GL(m, F) \times GL(n, F)$ μέσω της φυσικής προβολής $P(m,n) \to GL(m, F) \times GL(n, F)$.

3.1α′ Τοπολογικές κβαντικές θεωρίες πεδίου

Η ιδιότητα της παραβολικής επαγωγής δείχνει ότι η αντιστοιχία Langlands $\pi \mapsto H_\pi$ έχει κάποια ′πολλαπλαστική′ ή έκθετική′ συμπεριφορά αφού μεταφέρει το ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων της ομάδας Weil σε μια κατασκευή τανυστικού γινομένου. Η παρατήρηση αυτή είναι που την συσχετίζει με τις κβαντικές θεωρίες πεδίου. Υπενθυμίζουμε εδώ επιγραμματικά τα αξιώματα μιας ΤΚΘΠ διάστασης d, όπως ορίσθηκαν από τον Atiyah [78]:

(i) 1α) Σε κάθε συμπαγή, προσανατολίσιμη, d-πολλαπλότητα Σ αντιστοιχεί ένας διανυσματικός χώρος $Z(\Sigma)$.

(ii) 1β) Σε κάθε προσανατολίσιμη, $(d+1)$-πολλαπλότητα M με σύνορο αντιστοιχεί ένας διανυσματικός χώρος $Z(M) \in Z(\partial M)$.

(iii) 2α) Για κάθε διαφορομορφισμό μεταξύ d-διάστατων πολλαπλοτήτων που διατηρεί τον προσανατολισμό $g : \Sigma \to \Sigma^{'}$, υπάρχει ένας ισομορφισμός $Z(g) : Z(\Sigma) \to Z(\Sigma^{'})$ μεταξύ διανυσματικών χώρων.

(iv) 2β) Για κάθε δύο d-διάστατες πολλαπλότητες $\Sigma, \Sigma^{'}$, υπάρχει ισομορφισμός $Z(\Sigma \sqcup \Sigma^{'}) \to Z(\Sigma) \otimes Z(\Sigma^{'})$.

Για μια κενή d-διάστατη πολλαπλότητα Σ, ο αντίστοιχος διανυσματικός χώρος $Z(\Sigma)$ θα είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Επομένως, για κάθε $(d+1)$-διάστατη πολλαπλότητα M χωρίς σύνορο, μία ΤΚΘΠ αντιστοιχεί έναν συγκεκριμένο αριθμό $Z(M)$. Παρατηρεί λοιπόν κανείς την ′πολλαπλασιαστική′ συμπεριφορά του συναρτητή συνορομορφισμού Z (cobordism) στο τελευταίο αξίωμα. Όπως σημειώνει ο Atiyah, αυτή είναι και η κύρια ιδιότητα που διακρίνει νέες ***κβαντικές*** αναλλοίωτες (όπως το $Z(M)$) από παλαιές ***κλασικές*** αναλλοίωτες όπως είναι η ομολογία, οι οποίες είναι προσθετικές ως προς τις ξένες ενώσεις. Επομένως, η δομή που περιγράψαμε παραπάνω έχει δύο επίπεδα: το πρώτο αφορά τα δεδομένα για έναν διανυσματικό χώρο ($Z(\Sigma)$) και το δεύτερο αφορά αριθμητικά δεδομένα ($Z(M)$, $\partial M = \emptyset$). Η διάκριση αυτή είναι εγγενώς παρούσα σε κάθε είδους κβαντική θεωρία, όπου τα αριθμητικά δεδομένα παίζουν το ρόλο των παρατηρησιακών τελεστών ενώ τα δεδομένα για τον διανυσματικό χώρο αντιπροσωπεύουν το σύνολο των δυνατών καταστάσεων. Για παράδειγμα, μια κβαντική θεωρία πεδίου πάνω σε μία χωροχρονική πολλαπλότητα M θα αποτελείται από έναν χώρο Hilbert E και τελεστές πεδίου $\Phi(x) : E \to E$ που συνήθως κατασκευάζονται από τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής $a(x), a^+(x)$ για κάθε $x \in M$. Ειδικότερα, με βάση τα αξιώματα Wightman, τα κβαντικά πεδία θα είναι κατανομές που ανήκουν στον δυϊκό του χώρου Schwartz και λαμβάνουν τιμές σε άλγεβρες τελεστών. Τότε, τα αριθμητικά δεδομένα της θεωρίας θα είναι οι συναρτήσεις συσχετισμού (n-point correlation functions):

$$G(x_1, \dots, x_n) = (u_0, \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) u_0)$$

όπου $u_0 \in E$ το διάνυσμα της κατάστασης του κενού. Για το λόγο αυτό, οι αριθμητικές αναλλοίωτες για κλειστές $(d+1)$-πολλαπλότητες που προκύπτουν από μια ΤΚΘΠ μερικές φορές αναφέρονται και ως *συναρτήσεις Green*.

3.1β′ Motives

Προκειμένου να εκφράσουμε καλύτερα τη σχέση μεταξύ αντιστοιχίας Langlands και ΤΚΘΠ θα ανακαλέσουμε [67] την γλώσσα των motives, που αποτελούν πιο θεμελιώδη αντικείμενα για τις αναπαραστάσεις της ομάδας Weil-Deligne. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς η συνήθης μέθοδος (μέσω πολλαπλοτήτων Shimura) να αντιστοιχίσει κανείς μια αναπαράσταση Galois σε μία αναπαράσταση της $GL(m, F)$, στην πραγματικότητα δίνει περισσότερα, αφού παράγει ένα motive γι'αυτή την αναπαράσταση Galois. Έστω λοιπόν $\mathcal{M}_F$ η αβελιανή κατηγορία των mixed motives πάνω από το F (μπορούμε εναλλακτικά να περιοριστούμε στην κατηγορία των pure motives των λείων προβολικών πολλαπλοτήτων με την έννοια του Grothendieck μέσω του Karoubian envelope, αν επιθυμούμε να αποφύγουμε την εικαζόμενη ύπαρξη της). Τότε για κάθε οιωνεί-προβολική πολλαπλότητα X πάνω από το F θα έχουμε αντικείμενα $h^i(X) \in \mathcal{M}_F$. Υποθέτουμε ότι κάθε αντικείμενο V της $\mathcal{M}_F$ έχει μια καλώς-ορισμένη l-αδική $V_{\mathbb{Q}_l}$ και p-αδική $V_{\mathbb{Q}_p}$ πραγματοποίηση (μια $l-adic$ πραγματοποίηση ενός αβελιανού σχήματος A είναι το l-αδικό πρότυπο Tate του A, με $T_l(M) = \varprojlim_v T_{\mathbb{Z}/l^v}(M)$, όπου από την ακριβή ακολουθία Kummer έχουμε $T_l([0 \to \mathbb{G}_m]) = \mathbb{Z}(1)$). Ειδικότερα, αν $V = h^i(X)$ τότε $V_{\mathbb{Q}_l} = H^i(X; \mathbb{Q}_l)$ στην συνήθη l-αδική συνομολογία του X. Έστω τώρα A ένας μεταθετικός δακτύλιος. Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{M}_F(A)$ των motives πάνω από το F με συντελεστές στο A. Εν γένει, ο A δρα στις πραγματοποιήσεις των motives από την $\mathcal{M}_F(A)$. Για παράδειγμα, μια ελλειπτική καμπύλη πάνω από το F με CM από έναν μεταθετικό δακτύλιο A μπορεί να θεωρηθεί ως αντικείμενο της $\mathcal{M}(A)$. Όπως και προηγουμένως βέβαια, ενώ κάποιος μπορεί να κατασκευάσει την $\mathcal{M}_F(A)$ μέσω μια προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{M}_F \otimes A$ της οποίας τα αντικείμενα είναι τα τυπικά αντικείμενα $V \otimes A, V \in ob\mathcal{M}_F$ και μορφισμοί οι:

$$Hom_{\mathcal{M}_F \otimes A}(V \otimes A, W \otimes A) = Hom_{\mathcal{M}_F}(V, W) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

η πλήρωση της σε μια αβελιανή κατηγορία δεν λειτουργεί, καθώς χρειαζόμαστε πυρήνες και συν-πυρήνες για τους νέους μορφισμούς [83].

Η ομάδα $WD(F)$ και οι μιγαδικές της αναπαραστάσεις αποτελούν τον μηχανισμό που κωδικοποιεί όλες τις σημαντικές ιδιότητες των συνεχών αναπαραστάσεων της $W(F)$ σε διανυσματικούς χώρους πάνω από αυθαίρετες επεκτάσεις E του σώματος $\mathbb{Q}_l$ ($l \neq p$). Οι εικασίες Langlands σχετίζουν r-διάστατες αναπαραστάσεις της $W(F)$ (ή των motives) με αναπαραστάσεις της ομάδας $GL(r, F)$, όπου r η 'διάσταση' του motive λ.χ η διάσταση κάθε F-πραγματοποίησης V_F του V). Προκειμένου η αντιστοιχία αυτή να είναι αμφιμονοσήμαντη, είναι αναγκαίο να επιτραπούν αυθαίρετες επεκτάσεις $E \supset \mathbb{Q}_l$ ως βαθμωτά σώματα για τις αναπαραστάσεις της $W(F)$. Όμως, από τη σκοπιά του categorification θα ήταν πιο φυσικό αντί για μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ κλάσεων ισομορφισμού αναπαραστάσεων να αναζητήσει κανείς μια ισοδυναμία κατηγοριών ή τουλάχιστον κάποιον σχετικό συναρτητή. Την ιδέα αυτή επεξεργάσθηκαν σε βάθος οι Clozel-Langlands προσαρμόζοντας την αντιστοιχία στα πλαίσια των κατηγοριών Tannaka [79], [67]. Αρχικά, θα πρέπει κανείς να αντιστοιχίσει σε ένα motive V μια αλγεβρική ομάδα G_V πάνω από το F (ισομορφική με το $GL(r, F)$) με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η αντιστοιχία Langlands να αντιστοιχεί στο V έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V)$ που είναι εφοδιασμένος με μία δράση από αυτή την συγκεκριμένη ομάδα και όχι από την $GL(r, F)$. Δυστυχώς όμως, φαίνεται να μην υπάρχει φυσική επιλογή για μια τέτοια ομάδα για τις εικασίες Langlands στην πλήρη γενικότητα τους. Παρ'όλα αυτά, υπάρχει μια ενδιαφέρουσα κλάση περιπτώσεων όταν η ομάδα G_V εμφανίζεται με τρόπον τινά φυσιολογικό τρόπο: Έστω F μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}_p$ και $\mathcal{M} = \mathcal{M}_F(F)$ η κατηγορία των motives πάνω από το F με CM από το ίδιο το F. Τότε, για το $V \in \mathcal{M}$, η $\mathbb{Q}_p$-πραγματοποίηση του είναι θα είναι ένας F-διανυσματικός χώρος, έστω V_F. Αν συμβολίσουμε με $Vect_F$ την κατηγορία όλων των F-διανυσματικών χώρων πάνω από το F και με $r : \mathcal{M} \to Vect_F$ τον συναρτητή πραγματοποίησης $V \mapsto V_F$, τότε για την ειδική περίπτωση όπου $F = \mathbb{Q}_p$, η θεώρηση του $\mathcal{M}$ ισοδυναμεί με το να αγνοήσουμε όλες τις άλλες (συνήθεις) πραγματοποιήσεις των motives πάνω από το $\mathbb{Q}_p$, πλην της p-αδικής. Ως ειδική περίπτωση της γενικότερης εικόνας του Langlands, θα πρέπει να αναμένουμε μια αντιστοιχία μεταξύ μιας αναπαράστασης της $GL(r, F)$ (ή της αναζητούμενης ομάδας G_V) και του motive V από την κατηγορία $\mathcal{M}$ (φυσικά, η αντιστοιχία αυτή δεν δύναται να είναι αμφιμονοσήμαντη, καθώς έχουμε περιορίσει τους συντελεστές των motives στο ίδιο το F). Επομένως, έχουμε έναν F-διανυσματικό χώρο V_F που αντιστοιχεί με κανονικό τρόπο στο V και άρα μια ομάδα $GL(V_F)$ που είναι ισομορφική με την $GL(r, F)$ αλλά όχι με κανονικό τρόπο. Αυτή θα είναι και η επιλογή μας για την G_V. Με βάση τα παραπάνω, θα δώσουμε τώρα μια κατηγοριο-θεωρητική αναδιατύπωση των ιδιοτήτων (ενός μόνο μέρους) της αντιστοιχίας Langlands.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $\mathbb{Z}(1) = h^2(\mathbb{P}^1)$ να είναι το Tate motive και $\mathbb{Z}(i) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes i}$, για κάθε $i \geq 0$. Μια βραχεία, ακριβής ακολουθία από motives:*

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

θα ονομάζεται admissible εάν δεν υπάρχουν υποπηλίκα W' του V' και W'' του V'' έτσι ώστε $W' \simeq W'' \otimes \mathbb{Z}(i)$ για $i \rangle 0$.

Ορισμός 3.1.2. *Ένα filtration $V_1 \subset \ldots \subset V_n$ από motives καλείται admissible αν κάθε βραχεία, ακριβής ακολουθία $0 \to V_i \to V_j \to V_j/V_i \to 0$ είναι admissible.*

Από την ταξινόμηση Bernstein-Zelevinsky [80] χρησιμοποιώντας συνεστραμμένες αναπαραστάσεις της $GL(r, \mathbb{Q}_p)$ μέσω του χαρακτήρα $g \mapsto |det(g)|$ που αντιστοιχεί στη συστροφή Tate, μπορεί να φανεί πως ο λόγος για τον οποίο χρειάζεται να εξαιρέσουμε αυτή την κλάση ακριβών ακολουθιών, καθώς γι'αυτές ακριβώς η αναπαράσταση $\mathcal{L}(V)$ που αντιστοιχείται μέσω Langlands στο V είναι στην πραγματικότητα ένα πηλίκο παρά ένα υποπηλίκο της παραβολικά επαγόμενης αναπαράστασης [81].

Ορισμός 3.1.3. *Έστω F μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}_p$ και $\mathcal{M} = \mathcal{M}_F(F)$ η κατηγορία των motives. Τότε ως αντιστοιχία Langlands θα ορίζεται κάθε σύστημα που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) *1) Σε κάθε motive $V \in \mathcal{M}$ αντιστοιχεί ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος.*

(ii) *2) Σε κάθε δύο* ***ισομορφικά*** *motives $V, W \in \mathcal{M}$ και σε κάθε F-γραμμικό ισομορφισμό μεταξύ πραγματοποιήσεων $g : V_F \to W_F$ αντιστοιχεί ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων $\mathcal{L}(g) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(W)$*

(iii) *3) Σε κάθε admissible ακριβή ακολουθία $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ στην $\mathcal{M}$ αντιστοιχεί ένας ομομορφισμός $\mu_{V',V,V''} : \mathcal{L}(V') \otimes \mathcal{L}(V'') \to \mathcal{L}(V)$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

(iv) *3α) Για κάθε τρία motives $U, V, W \in \mathcal{M}$ και κάθε ισομορφισμούς F-διανυσματικών χώρων $U_F \xrightarrow{h} V_F \xrightarrow{g} W_F$ ισχύει ότι: $\mathcal{L}(g \circ h) = \mathcal{L}(g) \circ \mathcal{L}(h)$*

(v) *3β) Για κάθε δύο admissible ακριβείς ακολουθίες στην $\mathcal{M}$:*

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

και κάθε ισομορφισμούς F-διανυσματικών χώρων $g' : V_F^{'} \to W_F^{'}, g : V_F \to W_F, g'' : V_F^{''} \to W_F^{''}$ έτσι ώστε αν το πρώτο διάγραμμα είναι μεταθετικό, τότε και το δεύτερο διάγραμμα είναι επίσης μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_F^{'} \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & V_F \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & V_F^{''} \arrow[r] \arrow[d, "g''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_F^{'} \arrow[r] & W_F \arrow[r] & W_F^{''} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(V') \otimes \mathcal{L}(V'') \arrow[r, "\mu_{V',V,V''}"] \arrow[d, "\mathcal{L}(g')\otimes\mathcal{L}(g'')"'] & \mathcal{L}(V) \arrow[d, "\mathcal{L}(g)"'] \\
\mathcal{L}(W') \otimes \mathcal{L}(W'') \arrow[r, "\mu_{W',W,W''}"'] & \mathcal{L}(W)
\end{tikzcd}$$

(vi) *3γ) Για κάθε admissible filtration $V_1 \subset V_2 \subset V_3$ στην $\mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathcal{L}(V_1), y \in \mathcal{L}(V_2/V_1), z \in \mathcal{L}(V/V_2)$ ισχύει ότι:*

$$\mu_{V_2,V,V/V_2}(\mu_{V_1,V_2,V_2/V_1}(x, y), z)) = \mu_{V_1,V,V/V_1}(x, \mu_{V_2/V_1,V/V_1,V/V_2}(y, z))$$

Ας συγκρίνουμε τώρα τον παραπάνω ορισμό με τον συνήθη φορμαλισμό: Οι συνθήκες 1) και 2) περιγράφουν τις αναπαραστάσεις της GL που αντιστοιχούν στις αναπαραστάσεις Galois (ή εδώ στα motives) ενώ η συνθήκη 3α) μας εξασφαλίζει ότι όντως παίρνουμε αναπαραστάσεις. Η συνθήκη 3) μαζί με την 3β) σημαίνει πως για κάθε βραχεία, ακριβή ακολουθία $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ από motives υπάρχει φυσική απεικόνιση

$$Ind_P^{GL(V_F)}(\mathcal{L}(V') \otimes \mathcal{L}(V'')) \to \mathcal{L}(V)$$

όπου $P \subset GL(V_F)$ η παραβολική υποομάδα που διατηρεί την ακριβή ακολουθία $0 \to V_F^{'} \to V_F \to V_F^{''} \to 0$. Με άλλα λόγια εξασφαλίζουν την ιδιότητα της παραβολικής επαγωγής που είδαμε προηγουμένως. Τέλος, η συνθήκη 3γ) μπορεί να ιδωθεί ως ένα είδος προσεταιριστικότητας για τη διαδικασία της παραβολικής επαγωγής. Έτσι, η αναλογία μεταξύ αντιστοιχίας Langlands και μιας ΤΚΘΠ γίνεται πλέον άμεση.

Παρατήρηση 3.1.4. *Με παρόμοιο functorial τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε την αντιστοιχία Langlands για ένα ολικό σώμα F χαρακτηριστικής 0. Θεωρούμε ξανά την κατηγορία των motives $\mathcal{M}$ πάνω από το F με CM από το ίδιο το F. Για κάθε (πεπερασμένο ή άπειρο) place $\mathfrak{p}$ του F συμβολίζουμε με $F_\mathfrak{p}$ το αντίστοιχο τοπικό σώμα. Κάθε motive $V \in \mathcal{M}$ θα έχει πραγματοποιήσεις $V_\mathfrak{p}$ για κάθε $\mathfrak{p}$ (σε περίπτωση όπου το $\mathfrak{p}$ είναι άπειρο π.χ $F_\mathfrak{p} = \mathbb{C}$) επιλέγουμε το $V_\mathfrak{p}$ να είναι το επαγόμενο από τη συνήθη συνομολογία με μιγαδικούς συντελεστές). Έστω $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ τα adèles πάνω από το F. Τότε, για κάθε motive $V \in \mathcal{M}$ παίρνοντας τανυστικό γινόμενο όλων των πραγματοποιήσεων $V_\mathfrak{p}$ σχηματίζουμε μία (adelic) πραγματοποίηση $V_\mathbb{A}$. Έτσι, η ομάδα της οποίας η αναπαράσταση αντιστοιχεί στην V είναι η $GL(V_\mathbb{A})$.*

Αν και ο απώτερος σκοπός μας είναι να ορίσουμε την αντιστοιχία Langlands για υψηλότερης-διάστασης σχήματα, ας δούμε προκαταρκτικά τι συμβαίνει στην τετριμμένη περίπτωση ενός 0-διάστατου σώματος. Είδαμε πως ένα 0-διάστατο τοπικό (ή ολικό) σώμα είναι απλά ένα πεπερασμένο σώμα $\mathbb{F}_q$, όπου $q = p^m$. Η άντιστοιχία Langlands' σε αυτή την περίπτωση θα αντιστοιχούσε σε ένα motive V πάνω από το $\mathbb{F}_q$ όχι έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V)$ (όπως συμβαίνει στα 1-διάστατα σώματα), αλλά μια αριθμητική τιμή $\mathbf{L}(V)$ που θα είναι στοιχείο κάποιου δακτυλίου R. Επομένως, υπό το πρίσμα της συνθήκης 1) του παραπάνω Ορισμού αντιστοιχούμε σε κάθε V ένα $\mathbf{L}(V) \in R$ ενώ η συνθήκη 2) στερείται νοήματος καθώς δεν υπάρχει ομάδα που να δρα σε ένα μεμονωμένο στοιχείο ενός συνόλου. Η μόνη άλλη συνθήκη η οποία μπορεί ενδεχομένως να έχει μη-τετριμμένο ανάλογο είναι η 3) η οποία λέει πως για κάθε βραχεία, ακριβή ακολουθία $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ από motives πάνω από το $\mathbb{F}_q$ πρέπει να έχουμε την *ισότητα*: $\mathbf{L}(V') \cdot \mathbf{L}(V'') = \mathbf{L}(V)$. Προκειμένου να κατασκευάσουμε το $\mathbf{L}(V)$ με τον πιο γενικό τρόπο δουλεύουμε ως εξής: Θεωρούμε ως πολυωνυμικό δακτύλιο τον $R = \mathbb{Q}[t]$ και ορίζουμε $\mathbf{L}(V) := det(1 - t \cdot Frob|_V)$ να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Frobenius στην l-αδική πραγματοποίηση του V (αποδεικνύεται πως είναι ανεξάρτητο του $l \neq p$). Αν τώρα αντικαταστήσουμε $t = q^{-s}$, παίρνουμε την L-συνάρτηση $L(V, s)$. Έτσι, η άντιστοιχία Langlands' για ένα πεπερασμένο σώμα $\mathbb{F}_q$ είναι η διαδικασία κατά την οποία αντιστοιχείται σε ένα motive πάνω από το $\mathbb{F}_q$ η L-συνάρτηση του. Παρατηρεί κανείς πως το γεγονός ότι σε 0-διάστατα σχήματα αντιστοιχούν αριθμητικές αναλλοίωτες $\mathbf{L}(V)$ ενώ σε motives πάνω από 1-διάστατα σχήματα αντιστοιχούν αναλλοίωτες $\mathcal{L}(V)$ της μορφής διανυσματικών χώρων βρίσκεται σε πλήρη αναλογία με τα δύο επίπεδα στη δομή μιας ΤΚΘΠ, όπου σε d-διάστατες συμπαγείς πολλαπλότητες Σ αντιστοιχούν διανυσματικοί χώροι $Z(\Sigma)$ ενώ σε $(d+1)$-διάστατες συμπαγείς πολλαπλότητες M αντιστοιχούν αριθμοί $Z(M) \in Z(\partial M)$.

Έστω τώρα $X = SpecA$ ένα 1-διάστατο σχήμα, όπου $A = \mathcal{O}_K$ ο δακτύλιος των αλγεβρικών ακεραίων κάποιου σώματος αριθμών F και V ένα motive πάνω από το F. Τότε, σχεδόν για κάθε σημείο $\mathfrak{p} \in X$, το motive είναι ΄αδιακλάδιστο΄ στο $\mathfrak{p}$ (δηλαδή έχει καλή αναγωγή) οπότε μπορούμε να περιορίσουμε το V στο $\mathfrak{p}$ παίρνοντας ένα motive $V|_{\mathfrak{p}}$ πάνω από το $Spec\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$. Τότε, αν σε αυτό το περιορισμένο motive εφαρμόσουμε την ΄0-διάστατη αντιστοιχία Langlands΄, θα πάρουμε μια αριθμητική αναλλοίωτη που θα είναι ένας παράγοντας Euler $L_{\mathfrak{p}}(V, s)$ ενώ σε ολόκληρο το motive V η αντιστοιχία Langlands αντιστοιχεί έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V)$ μαζί με τη δράση της adelic ομάδας. Μάλιστα, με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις είναι φυσικό αντί για μεμονωμένους παράγοντες Euler να θεωρήσει κανείς εδώ το γινόμενο τους π.χ σε μία ολική L-συνάρτηση $L(V, s) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(V, s)$. Η σχέση αυτού του διανυσματικού χώρου με τη συλλογή όλων των αριθμητικών δεδομένων $L_{\mathfrak{p}}(V, s)$ θα είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν του χώρου Hilbert (states) και των συναρτήσεων Green (observables) στην κβαντική θεωρία πεδίου!

3.1γ΄ Πολλαπλότητες Shimura και ολοκληρώματα Feynman

Η συνήθης διαδικασία για να κατασκευάσει κανείς μια ΤΚΘΠ είναι μέσω των ολοκληρωμάτων Feynman. Σε κάθε d-πολλαπλότητα X αντιστοιχούμε έναν χώρο πεδίων C_X στον X (συναρτήσεις, διαφορίσιμες μορφές, τανυστές, κλάσεις ισομορφισμών διανυσματικών δεσμών με συνοχή κ.ο.κ). Αυτός ο χώρος είναι εφοδιασμένος με ένα μέτρο μ_X. Αν Σ είναι το σύνορο μιας $(d+1)$-πολλαπλότητας M τότε έχουμε την απεικόνιση περιορισμού $res : C_M \to C_\Sigma$. Τα μέτρα μ_M και μ_Σ επάγουν για κάθε $\phi \in C_\Sigma$, ένα μέτρο $\mu_{M,\phi}$ στο νήμα $res^{-1}(\phi) \subset C_M$. Έπειτα, ορίζουμε ο $Z(\Sigma)$ να είναι ο χώρος όλων των τετραγωνικώς-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $L^2(C_\Sigma, \mu_\Sigma)$. Σε πιο γενικές περιπτώσεις θα μπορούσε να είναι ο χώρος των ολόμορφων συναρτήσεων ή να μην είναι καν συναρτήσεις αλλά τομές κάποιας δέσμης γραμμών στον C_Σ. Για κάθε $(d+1)$-πολλαπλότητα με M με $\partial M = \Sigma$ ορίζουμε ένα διάνυσμα $Z_M \in Z(\Sigma)$ (π.χ μια συνάρτηση $\phi \to Z_M(\phi)$, όπου $\phi \in C_\Sigma$) ως το ολοκλήρωμα Feynman:

$$Z_M(\phi) = \int_{res^{-1}(\phi) \subset C_M} e^{iS_M(\phi)} d\mu_{M,\phi}$$

όπου S_M είναι η κλασική δράση της θεωρίας.

Σύμφωνα με την αναλογία που περιγράψαμε παραπάνω, είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει παρόμοια μέθοδος για την αντιστοιχία Langlands. Μία τέτοια αναλογία πράγματι υπάρχει και δίνεται από την συνομολογία των πολλαπλοτήτων Shimura. Ο Deligne παρατήρησε [82] πως οι πολλαπλότητες Shimura μπορεί να ιδωθούν ως παραμετροποιήσεις των motives που προέρχονται από τη 1-διάστατη συνομολογία αβελιανών πολλαπλοτήτων με CM). Προκειμένου να εξερευνήσουμε την αναλογία με τις ΤΚΘΠ στην απώτερη γενίκευση της, υποθέτουμε προς στιγμή πως υπάρχει και είναι καλά ορισμένος ο moduli χώρος **όλων** των motives και όχι μόνο αυτός που δίνεται από τις αβελιανές πολλαπλότητες. Πιο συγκεκριμένα: έστω F ένα σώμα αριθμών και $\mathcal{M} = \mathcal{M}_F(F)$ η κατηγορία των motives πάνω από το F με CM από το F. Έστω επίσης $\mathbb{A}_f$ ο δακτύλιος των πεπερασμένων adèles στο F και $V \to V_{\mathbb{A}_f}$ να είναι ο συναρτητής πραγματοποίησης από την M στην κατηγορία των ελεύθερων $\mathbb{A}_f$-προτύπων. Έστω επίσης, για κάθε ελεύθερο $\mathbb{A}_f$-πρότυπο E, $\mathcal{P}(E)$ να είναι ο moduli χώρος όλων των ζευγών (W, ψ), όπου W ένα motive από την $\mathcal{M}$ και $\psi : W_K \to E$ ένας ισομορφισμός $\mathbb{A}_f$-προτύπων. Για παράδειγμα, αν $F = \mathbb{Q}$ και το $E = \mathbb{A}_f^2$ είναι 2-διάστατο, τότε κάθε ελλειπτική καμπύλη πάνω από το $\mathbb{Q}$ δίνει ένα σημείο στον $\mathcal{P}(E)$. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση ο $\mathcal{P}(E)$ περιέχει μια προπεπερασμένη modular καμπύλη $M_\infty = \varprojlim_N M_N$, όπου M_N είναι ο moduli χώρος των ελλειπτικών καμπυλών επιπέδου N. Από την άλλη πλευρά, αν το F είναι φανταστικό, τετραγωνικό σώμα και $E = \mathbb{A}_f$ τότε υπάρχει μια προφανής σχέση μεταξύ του $\mathcal{P}(E)$ και της μέγιστης, αβελιανής επέκτασης του F. Εν γένει όμως, το $\mathcal{P}(E)$ δεν είναι μια καλά ορισμένη πολλαπλότητα πάνω από το F, καθώς περιέχει άπειρες συνιστώσες διαφορετικών διαστάσεων: παίρνοντας κάθε πολλαπλότητα X πάνω από το F με $rankH^i(X, \mathbb{A}_f) = rank(E)$ και κάθε ταυτοποίηση $H^i(X, F) \to E$, παίρνουμε ένα σημείο στον $\mathcal{P}(E)$. Κατά μια έννοια, θεωρούμε τον $\mathcal{P}(E)$ με τον ίδιο τρόπο που θεωρούν οι φυσικοί τα ολοκληρώματα διαδρομής Feynman, αφού δεν υπάρχει ανάλογο του μέτρου Lebesgue σε έναν απειροδιάστατο, Hausdorff, διαχωρίσιμο τοπολογικό διανυσματικό χώρο. Έστω λοιπόν $h^i(\mathcal{P}(E)) \in \mathcal{M}$ το i-motive της 'πολλαπλότητας' $\mathcal{P}(E)$. Τότε, για κάθε motive $V \in \mathcal{M}$ ορίζουμε έναν F-διανυσματικό χώρο:

$$\mathcal{L}_f^i(V) := Hom_{\mathcal{M}}(V, h^i(\mathcal{P}(V_{\mathbb{A}_f})))$$

Καθώς η $GL(V_{\mathbb{A}_f})$ δρα στον χώρο αυτό, θεωρούμε την virtual αναπαράσταση $\mathcal{L}_f(V)$ της $GL(V_{\mathbb{A}_f})$ που θα είναι ένα 'τυπικό εναλλασσόμενο άθροισμα' των $\mathcal{L}_i(V)$. Η μέθοδος αυτή είναι χονδρικά η ίδια που ακολουθεί κανείς στο να κατασκευάσει την αντιστοιχία Langlands, αφού εκεί ο $\mathcal{L}_f(V)$ ορίζεται συνήθως ως ο multiplicity χώρος στην συνομολογία μιας προπεπερασμένης πολλαπλότητας Shimura της αναπαράστασης Galois που αντιστοιχεί στην V [66]. Μάλιστα, η $L_f(V)$ θα είναι ο αναλλοίωτος χώρος $\mathcal{L}(V)^K$, όπου $\mathcal{L}(V)$ μια κατάλληλη αναπαράσταση ολόκληρης της ομάδας των adèles (όχι μόνο των πεπερασμένων) και K μια μέγιστη, συμπαγής υποομάδα του Αρχιμήδειου μέρους της. Έτσι, η αναλογία με την κατασκευή μιας ΤΚΘΠ γίνεται φανερή: η θεώρηση του χώρου των multiplicities (ή του Hom για την κατηγορία των motives) μπορεί να ερμηνευθεί από το Λήμμα Yoneda ως ένα είδος ολοκλήρωσης πάνω από τον απειροδιάστατο χώρο $\mathcal{P}(V_{\mathbb{A}_f})$!

Παρατήρηση 3.1.5. *Στην περίπτωση που το F είναι χαρακτηριστικής $p \rangle 0$, τα (ελλειπτικά) πρότυπα Drinfeld [72] μπορούν να ιδωθούν ως motives πάνω από το F με CM από το F: Πράγματι, έστω F το σώμα συναρτήσεων σε μια καμπύλη $X/\mathbb{F}_q$, $\{\infty\}$ κάποιο σημείο της X και A ο δακτύλιος των κανονικών συναρτήσεων στην $X\backslash\{\infty\}$. Τότε, η πολλαπλότητα που ορίζει κάθε motive που αναπαρίσταται από τα πρότυπα Drinfeld θα είναι ουσιαστικά ο χώρος $\mathbb{A}_F^1$ και ο δακτύλιος A θα δρα μέσω προσθετικών ενδομορφισμών σε αυτόν. Βέβαια, η αφινική ευθεία στην χαρακτηριστική p δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι αναπαριστά ένα τετριμμένο motive, αφού η θεμελιώδης ομάδα της δεν είναι τετριμμένη.*

Ας δούμε τώρα πιο ενδελεχώς την αναλογία που υπάρχει στην αναδόμηση μιας ΤΚΘΠ από τις συναρτήσεις Green με αυτήν της αναδόμησης μιας αυτομορφικής αναπαράστασης από την L-συνάρτηση της. Είναι γνωστό πως σε μια κβαντική θεωρία πεδίου, τα δεδομένα που αφορούν τον διανυσματικό χώρο μπορούν να ανακτηθούν από τα αριθμητικά δεδομένα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία χωροχρονική πολλαπλότητα M και μια συλλογή από συναρτήσεις $G_n(x_1, \ldots, x_n), x_i \in M$ (ενδεχομένως με ανωμαλίες για κάποια τιμές $(x_1, \ldots, x_n)$). Θα θέλαμε να κατασκευάσουμε έναν χώρο Hilbert E, ένα διάνυσμα $u_0 \in E$ και έναν τελεστή πεδίου $\Phi(x) : E \to E$ έτσι ώστε $G_n(x_1, \ldots, x_n) = (u_0, \Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n) u_0)$. Θεωρούμε αρχικά τον χώρο $\tilde{E}$ να είναι η συμμετρική άλγεβρα του χώρου όλων των συναρτήσεων στην M (π.χ ο χώρος όλων των ακολουθιών $\{ = (f_0, f_1(x), f_2(x_1, x_2), \ldots)$, όπου f_i είναι μια συμμετρική συνάρτηση με n μεταβλητές $x_i \in M$). Εφοδιάζουμε τον χώρο αυτό με ένα βαθμωτό γινόμενο B:

$$B(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_{M^{n+m}} G_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) f_n(x_1, \ldots, x_n) g_m(y_1, \ldots, y_m) dxdy$$

Τότε, ορίζουμε ως χώρο Hilbert E την πλήρωση του $\tilde{E}/ker(B)$ και ως διάνυσμα κενού $u_0 \in E$ την εικόνα του $(1, 0, 0, \ldots) \in \tilde{E}$.

Ας υποθέσουμε τώρα, πως έχουμε έναν κανόνα να αντιστοιχίσουμε σε κάθε $(d+1)$-πολλαπλότητα M χωρίς σύνορο έναν αριθμό $Z(M)$. Θα θέλαμε να επεκτείνουμε αυτά τα δεδομένα σε μια ΤΚΘΠ: για παράδειγμα, να αντιστοιχίσουμε σε κάθε d-διάστατη πολλαπλότητα Σ έναν διανυσματικό χώρο $Z(\Sigma)$ και σε κάθε $(d+1)$-διάστατη πολλαπλότητα M με σύνορο Σ, ένα διάνυσμα $Z(M) \in Z(\Sigma)$. Ένας φυσικός τρόπος για να το πετύχουμε αυτό, είναι να ορίσουμε αρχικά τον χώρο $\tilde{Z}(\Sigma)$ που παράγεται ελεύθερα από κλάσεις ισομορφισμού ζευγών (M, g), όπου M είναι μια $(d+1)$-διάστατη πολλαπλότητα και $g : \partial M \to \Sigma$ είναι ένας διαφορομορφισμός. Έστω $e_{M,g} \in \tilde{Z}(\Sigma)$ να είναι ένα διάνυσμα της βάσης που αντιστοιχεί στο (M, g). Τότε, ορίζουμε στον $\tilde{Z}(\Sigma)$ μια διγραμμική μορφή B μέσω της σχέσης:

$$B(e_{M,g}, e_{M',g'}) = Z(M \cup_{g,g'} M')$$

όπου $M \cup_{g,g'} M'$ η πολλαπλότητα που προκύπτει όταν ταυτοποιήσουμε τα σύνορα των M, M' μέσω των απεικονίσεων g, g'. Τέλος, θέτουμε $Z(\Sigma) = \tilde{Z}(\Sigma)/ker(B)$. Από την άλλη πλευρά τώρα, είδαμε ότι η αντιστοιχία Langlands αντιστοιχεί σε ένα motive V πάνω από ένα 1-διάστατο σχήμα X έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V)$ (τον χώρο όλων των αναπαραστάσεων της ομάδας στα adèles) και μια συλλογή αριθμητικών δεδομένων (οι τοπικοί παράγοντες Euler $L_{\mathfrak{p}}(V, s), \mathfrak{p} \in X$). Η αντιστοιχία Jacquet-Langlands [85], ως μια μορφή ΄αντίστροφης΄ θεωρίας Hecke (πρβλ. θεώρημα αντιστροφής Weil [86]) έχει ως στόχο να αναδομήσει από τα αριθμητικά δεδομένα την αναπαράσταση $\mathcal{L}(V)$ αλλά και ταυτόχρονα να εξασφαλίσει ότι εμφανίζεται στον χώρο των αυτομορφικών μορφών. Οι συνθήκες προκειμένου να συμβεί αυτό είναι γνωστές για 2-διάστατα και 3-διάστατα motives (δηλαδή για αυτομορφικές αναπαραστάσεις των $GL(2)$ και $GL(3)$) αλλά όχι γενικά [87]. Στις περιπτώσεις που είναι γνωστές, παίρνουν τη μορφή μιας συναρτησιακής εξίσωσης, στην οποία υπάρχει απουσία πόλων για τη συνεστραμμένη, ολική L-συνάρτηση $L(V \otimes \chi, s)$, όπου χ αυθαίρετος χαρακτήρας της ομάδας κλάσεων των idèles.

3.2 Χώροι Waldhausen

Μέχρι αυτό το σημείο, οι δομές που έχουμε ταυτοποιήσει για την αντιστοιχία Langlands είναι οι ακόλουθες:

(i) α) Η κατηγορία $\mathcal{M} = \mathcal{M}_F(F)$ των motives πάνω από το F με CM από το F (όπου F ένα 1-διάστατο τοπικό ή ολικό σώμα)

(ii) β) Ο συναρτητής F-πραγματοποίησης: $r = r_F : \mathcal{M} \to Vect_F$ (στην περίπτωση που το F είναι τοπικό σώμα) ή ο συναρτητής adelic-πραγματοποίησης: $r_{\mathbb{A}} : \mathcal{M} \to \mathbb{A} - Mod$ (στην περίπτωση που το F είναι ολικό σώμα)

(iii) γ) Η κλάση $\mathcal{E}$ από βραχείς, ακριβείς ακολουθίες στη $\mathcal{M}$ που είναι admissible και ικανοποιεί τις εξής δύο ιδιότητες: 1) κάθε βραχεία, ακριβή ακολουθία της οποίας κάποιος όρος είναι μηδενικός, ανήκει στην $\mathcal{E}$ και 2) κάθε ακολουθία ισομορφική με μία ακολουθία από την $\mathcal{E}$ ανήκει και αυτή στην $\mathcal{E}$.

Επιθυμούμε να γενικεύσουμε την αντιστοιχία Langlands που παρουσιάσαμε παραπάνω:

Ορισμός 3.2.1. *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας ακριβής συναρτητής, $\mathcal{E}$ όπως στο αξίωμα γ) παραπάνω και k ένα σώμα. Τότε, θα ονομάζουμε k-γραμμικό charade πάνω από τον f και ως προς την $\mathcal{E}$ μια συλλογή από τα εξής δεδομένα:*

(i) *1) Σε κάθε $A \in ob\mathcal{A}$ αντιστοιχεί ένας k-διανυσματικός χώρος $\Lambda(\mathcal{A})$.*

(ii) *2) Σε κάθε δύο ισομορφικά αντικείμενα $A, B \in ob\mathcal{A}$ και σε κάθε ισομορφισμό $g : f(A) \to f(B)$ στην $\mathcal{B}$ αντιστοιχεί ένας γραμμικός ισομορφισμός $\Lambda(g) : \Lambda(A) \to \Lambda(B)$.*

(iii) *3) Σε κάθε ακριβή ακολουθία $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ στην $\mathcal{A}$ αντιστοιχεί ένας γραμμικός τελεστής*

$$\mu_{A',A,A''} : \Lambda A' \otimes \Lambda A'' \to \Lambda A$$

με τις ιδιότητες που αναφέραμε στον Ορισμό 3.1.3.

Ένα charade πάνω από τον ταυτοτικό συναρτητή $id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ως προς την κλάση όλων των ακριβή ακολουθιών, θα ονομάζεται απλά charade πάνω από την $\mathcal{A}$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα ενός charade: Έστω $\mathcal{A} = Vect^{fd}_{\mathbb{F}_q}$ η κατηγορία των πεπερασμένης-διάστασης $\mathbb{F}_q$-διανυσματικών χώρων. Για κάθε διανυσματικό χώρο $A \in ob\mathcal{A}$ συμβολίζουμε με $B(A)$ το Bruhat-Tits building του A (χονδρικά ένα μονόπλοκο σύνολο του οποίου τα m-μονόπλοκα είναι σημαίες των υποχώρων $A_0 \subset \ldots \subset A_m \subset A$ έτσι ώστε είτε $A_0 \neq \{\emptyset\}$ είτε $A_m \neq A$). Έστω επίσης $n = dimA$ και k ένα σώμα. Τότε, είναι γνωστό ότι για τις ομάδες ομολογίας ισχύει ότι: $H_i(B(A), k) = 0$ για κάθε $i \neq 0, n-1$. Ο χώρος $St(A) := H_{n-1}(B(A), k)$ ονομάζεται πρότυπο Steinberg του A και έχει διάσταση $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Πρόταση 3.2.2. *Το σύνολο των προτύπων Steinberg $St(A)$ αποτελούν με φυσικό τρόπο ένα k-γραμμικό charade πάνω από την κατηγορία $\mathcal{A} = Vect^{fd}_{\mathbb{F}_q}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε ισομορφισμός $A' \to A$ διανυσματικών χώρων επάγει έναν ισομορφισμό $St(A') \to St(A)$. Επιπλέον, έστω $0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$ μια ακριβής ακολουθία από $\mathbb{F}_q$-διανυσματικούς χώρους. Έστω τώρα $C_\bullet(B(A))$ το αλυσιδωτό σύμπλοκο του $B(A)$ με συντελεστές στο k και όμοια για τα A', A''. Ορίζουμε μια απεικόνιση αλυσιδωτών συμπλόκων:

$$C_\bullet(B(A')) \otimes C_\bullet(B(A'')) \to C_\bullet(B(A))$$

μέσω της:

$$(A_0^{'} \subset \ldots \subset A_{m'}^{'}) \otimes (A_0^{''} \subset \ldots \subset A_{m''}^{''}) \longrightarrow$$
$$(\alpha(A_0^{'}) \subset \ldots \subset \alpha(A_{m'}^{'}) \subset A' \subset \beta^{-1}(A_0^{''}) \subset \ldots \beta^{-1}(A_{m''}^{''}))$$

Έτσι, στην ομολογία θα έχουμε μια απεικόνιση:

$$\mu_{A',A,A''} : St(A') \otimes St(A'') \to St(A)$$

η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα του charade. $\square$

Παρατηρούμε επίσης πως η αντιστοιχία Langlands μπορεί να θεωρηθεί πλέον ως ένα k-γραμμικό charade πάνω από τον συναρτητή πραγματοποίησης $f : \mathcal{M} \to Vect_F$ (όπου $k = \mathbb{C}$ ή $\bar{\mathbb{Q}}_l$) ως προς την κλάση $\mathcal{E}$ των admisible ακριβή ακολουθιών. Μάλιστα, στο όριο $q \to 1$ (με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που για το σώμα με ένα στοιχείο $\mathbb{F}_1$, η $GL(n, \mathbb{F}_q)$ εκφυλίζεται στην S_n) η έννοια του charade πάνω από μια κατηγορία $Vect_{\mathbb{F}_q}$ δίνει την έννοια ενός operad! [88]. Πράγματι, ένα k-γραμμικό operad $\mathcal{P}$ είναι ένας κανόνας που αντιστοιχεί:

(i) 1) Σε κάθε πεπερασμένο σύνολο I αντιστοιχεί ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{P}(I)$

(ii) 2) Σε κάθε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $I' \to I$ πεπερασμένων συνόλων αντιστοιχεί ένας ισομορφισμός $\mathcal{P}(I') \to \mathcal{P}(I)$ (άρα στην ουσία έχουμε συναρτητή)

(iii) 3) Σε κάθε σχέση ισοδυναμίας R σε ένα πεπερασμένο σύνολο I αντιστοιχεί μια απεικόνιση $(\bigotimes_C \mathcal{P}(C)) \otimes \mathcal{P}(I/R) \to \mathcal{P}(I)$ όπου το $\bigotimes_C$ λαμβάνεται πάνω από όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας C του R και η απεικόνιση να διατηρεί την equivariance και την προσεταιριστικότητα.

Επομένως, αφού τα πεπερασμένα σύνολα αποτελούν τυπικά $q \to 1$ ανάλογα των $\mathbb{F}_q$-διανυσματικών χώρων θα έχουμε επιπροσθέτως ότι και οι σχέσεις ισοδυναμίας σε πεπερασμένα σύνολα θα αποτελούν ανάλογα των υποχώρων (π.χ για μια ακριβή ακολουθία $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ θα έχουμε μια προφανή σχέση ισοδυναμίας R στην A της οποίας οι κλάσεις ισοδυναμίας θα είναι σύμπλοκα της A', οπότε $A/R = A''$). Παρατηρούμε επίσης πως η έννοια ενός charade είναι συναφής με εκείνη του ελευθέρου-συντεταγμένων ring spectrum E_∞ του May [89]. Έστω τώρα $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας ακριβής συναρτητής αβελιανών κατηγοριών. Ακολουθώντας την S-κατασκευή του Waldhausen [70], αντιστοιχούμε στον f μία simplicial κατηγορία $S_\bullet(f)$ (π.χ ένα simplicial αντικείμενο στην κατηγορία των κατηγοριών) και επομένως για κάθε m ορίζουμε μία κατηγορία $S_m(f)$. Τα αντικείμενα της θα είναι filtrations μήκους m στην $\mathcal{A}$ (π.χ ακολουθίες από μονομορφισμούς $A_1 \subset \ldots \subset A_m$). Οι μορφισμοί στην $S_m(f)$ μεταξύ δύο filtration $A_1 \subset \ldots \subset A_m$ και $A_1' \subset \ldots \subset A_m'$ μπορούν να υπάρξουν μόνο εάν τα filtration είναι ισομορφικά μεταξύ τους, δηλαδή αν υπάρχει μεταθετικό διάγραμμα ισομορφισμών

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \subset & A_2 & \subset & \ldots & & A_m \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ A_1' & \subset & A_2' & \subset & \ldots & & A_m' \end{array}$$

τότε οι μορφισμοί στην $S_m(f)$ μεταξύ δύο filtration θα είναι εξ'ορισμού μια συλλογή από ισομορφισμούς $f(A_i) \to f(A_i')$ στην $\mathcal{B}$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα ισομορφισμών στις εικόνες να είναι και αυτό μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} f(A_1) & \subset & f(A_2) & \subset & \ldots & & f(A_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ f(A_1') & \subset & f(A_2') & \subset & \ldots & & f(A_m') \end{array}$$

Οι αντίστοιχες πράξεις για τα πρόσωπα θα δίνονται από τους συναρτητές $\partial_i : S_m(f) \to S_{m-1}(f)$, οι οποίοι για $i \neq 0$ αφαιρούν τον i-οστό όρο κατά τα συνήθη και για $i=0$ αντικαθιστούν ένα filtration $A_0 \subset \ldots \subset A_n$ με το $A_1/A_0 \subset \ldots \subset A_n/A_0$. Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathcal{A}=\mathcal{B}$ και f είναι ο ταυτοτικός συναρτητής (όπως και στην αρχική S-κατασκευή του Waldhausen), θα συμβολίζουμε το $S_\bullet(f)$ με $S_\bullet(\mathcal{A})$.

Αν τώρα θεωρήσουμε ως $\mathcal{E}$ να είναι η κλάση των admissible ακριβή ακολουθιών στην $\mathcal{A}$, θα συμβολίζουμε με $S_m(f,\mathcal{E})$ την υποκατηγορία της $S_m(f)$ που παράγεται από τα admissible filtrations, δηλαδή από εκείνα τα $A_1 \subset \ldots \subset A_m$ για τα οποία κάθε ακριβής ακολουθία $0 \to A_i \to A_j \to A_j/A_i$ ανήκει στην $\mathcal{E}$. Επομένως, θα έχουμε μία simplicial κατηγορία $S_\bullet(f,\mathcal{E})$. Η κατηγορία αυτή έχει ένα αμφιμονόπλοκο νεύρο $\mathrm{Nerve}(S_\bullet(f,\mathcal{E}))$, το οποίο προκύπτει ως εξής: αρχικά θεωρούμε το νεύρο κάθε κατηγορίας $S_m(f,\mathcal{E})$ και παίρνουμε ένα μονόπλοκο σύνολο $\mathrm{Nerve}(S_m(f,\mathcal{E}))$. Τότε, μέσω των simplicial πράξεων για πρόσωπα $\partial_i : S_m(f,\mathcal{E}) \to S_{m-1}(f,\mathcal{E})$ μετατρέπουμε την συλλογή από $\mathrm{Nerve}(S_m(f))$ σε ένα αμφιμονόπλοκο σύνολο. Η γεωμετρική πραγματοποίηση αυτού του αμφιμονοπλόκου συνόλου συμβολίζεται απλά με $S(f,\mathcal{E})$ και ονομάζεται *χώρος Waldhausen*. Αυτός θα είναι ένας τοπολογικός χώρος που παράγεται από τη συγκόλληση CW-κελιών που είναι γινομένα μονοπλόκων $\Delta^p \times \Delta^q$. Έχουμε μάλιστα το παρακάτω Θεώρημα για τη στενή σχέση ανάμεσα στις ομάδες ομοτοπίας του χώρου $S(f)$ και τις ανώτερες ομάδες Quillen στη αλγεβρική K-Θεωρία της $\mathcal{B}$:

Θεώρημα 3.2.3. *(Waldhausen) Αν $f = id_{\mathcal{A}}$ και η κλάση $\mathcal{E}$ αποτελείται από όλες τις βραχείς, ακριβείς ακολουθίες, τότε:*

$$K_i(\mathcal{A}) = \pi_{i+1}(S(\mathcal{A}))$$

Απόδειξη. Πρβλ. [70], [71] □

Ας διατρέξουμε τώρα πιο αναλυτικά όλα τα είδη ταυτοποιημένων κελιών μικρής διάστασης:

(i) 0) Υπάρχει μοναδικό 0-κελλί (σημείο) προερχόμενο από την $S_0(f,\mathcal{E})$ που είναι απλά μια κατηγορία με ένα μόνο αντικείμενο και έναν μορφισμό.

(ii) 1) Τα 1-κελλιά της $S(f,\mathcal{E})$ είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Προέρχονται από τα αντικείμενα της $S_1(f,\mathcal{E})$ που είναι ίδια με τα αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Αφού η $S_1(f,\mathcal{E})$ είναι η κατηγορία των 1-μονοπλόκων, κάθε αντικείμενο της (π.χ ένα 0-μονόπλοκο του $\mathrm{Nerve}(S_1(f,\mathcal{E}))$) θα δίνει ένα 1-μονόπλοκο στην $S(f,\mathcal{E})$.

(iii) 2α) Για κάθε δύο ισόμορφα αντικείμενα $A, A' \in \mathcal{A}$ και κάθε ισομορφισμό $g : f(A) \to f(A')$ στην $\mathcal{B}$ θα έχουμε ένα 2-κελλί στην $S(f,\mathcal{E})$ που θα έχει τη μορφή τετραγώνου $\Delta^1 \times \Delta^1$. Πιο συγκεκριμένα, θα έχουμε έναν μορφισμό στην $S_1(f,\mathcal{E})$ (π.χ ένα 1-μονόπλοκο στο νεύρο της $S_1(f,\mathcal{E})$ που δίνει το $\Delta^1 \times \Delta^1$).

(iv) 2β) Για κάθε ακριβή ακολουθία $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{A}$ θα έχουμε ένα 2-κελλί στην $S(f,\mathcal{E})$ που θα έχει μορφή τριγώνου Δ^2. Πιο συγκεκριμένα, θα έχουμε ένα αντικείμενο στην κατηγορία $S_2(f,\mathcal{E})$ που δίνει ένα 2-μονόπλοκο στην $S(f,\mathcal{E})$.

(v) 3α) Για κάθε τρία ισόμορφα αντικείμενα $A, B, C \in ob\mathcal{A}$ και κάθε ζεύγος ισομορφισμών $f(A) \xrightarrow{h} f(B) \xrightarrow{g} f(C)$ στην $\mathcal{B}$, θα έχουμε ένα 3-κελλί στην $S(f,\mathcal{E})$ που θα έχει τη μορφή $\Delta^2 \times \Delta^1$ και προέρχεται από ένα 2-μονόπλοκο στο νεύρο του $S_1(f,\mathcal{E})$.

(vi) 3β) Για κάθε δύο ισόμορφες ακριβείς ακολουθίες από την $\mathcal{E}$ στην $\mathcal{A}$:

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0$$

και ισομορφισμούς $g' : A' \to B', g : A \to B, g'' : A'' \to B''$ που κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f(A') \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & f(A) \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & f(A'') \arrow[r] \arrow[d, "g''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & f(B') \arrow[r] & f(B) \arrow[r] & f(B'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

θα έχουμε ένα 3-κελλί στην $S(f,\mathcal{E})$ που θα έχει τη μορφή $\Delta^1 \times \Delta^2$ και προέρχεται από ένα 1-μονόπλοκο στο νεύρο του $S_2(f,\mathcal{E})$.

(vii) 3γ) Για κάθε admissible filtration μήκους 2, $A_1 \subset A_2 \subset A$ στην $\mathcal{A}$ θα έχουμε ένα 3-κελί στην $S(f,\mathcal{E})$ που θα έχει τη μορφή Δ^3 και προέρχεται από ένα 0-κελλί στο νεύρο του $S_3(f,\mathcal{E})$.

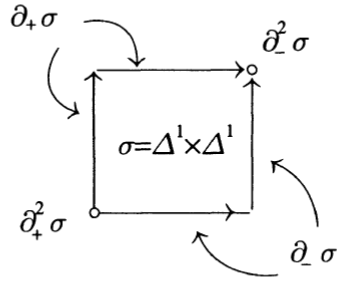
Παρατηρούμε λοιπόν ότι, τα δεδομένα στον ορισμό ενός charade αντιστοιχούν επ'ακριβώς στα 1-κελλιά και 2-κελλιά του $S(f,\mathcal{E})$ και στις συνθήκες των 3-κελλιών. Στην πραγματικότητα, ένα τέτοιο σύστημα δεδομένων και συνθηκών που αντιστοιχούν στα κελλιά ενός CW-complex δεν είναι τίποτε παρά μία στοίβα από κατηγορίες, όπως θα δούμε πιο αυστηρά παρακάτω. Έστω X ένα αμφιμονόπλοκο σύνολο. Η πραγματοποίηση του $|X|$ θα είναι ένα CW-complex του οποίου τα (προσανατολισμένα) κελλιά είναι γινόμενα από μονόπλοκα $\Delta^p \times \Delta^q$. Κάθε 1-κελλί (πλευρά) θα έχει μια αρχή και ένα τέλος ή πιο γενικά, μπορούμε να υποδιαιρέσουμε το σύνορο $\partial\sigma$ κάθε κελλιού $\sigma = \Delta^p \times \Delta^q$ σε ένα θετικό $\partial_+\sigma$ (πρόσωπα του σ συνδιάστασης 1 με προσανατολισμό συμβατό με αυτόν της σ) και σε ένα αρνητικό μέρος $\partial_-\sigma$ (πρόσωπα με μη-συμβατό προσανατολισμό). Πιο αναλυτικά, το διαφορικό του $\sigma = \Delta^p \times \Delta^q$ στο αλγεβρικό αλυσιδωτό σύμπλοκο του X θα έχει τη μορφή:

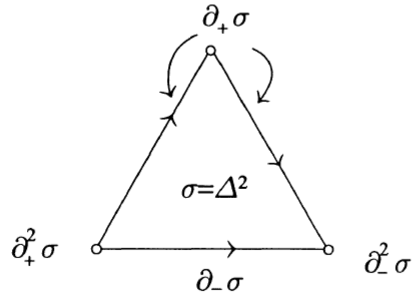
$$d\sigma = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \partial_i(\Delta^p) \times \Delta^q + \sum_{j=0}^{q}(-1)^{j+p}\Delta^p \times \partial_j(\Delta^q)$$

όπου ∂_i το i-στο πρόσωπο του μονοπλόκου ενώ τα υποσύμπλοκα $\partial_\pm(\sigma)$ θα προκύπτουν από τα πρόσωπα του σ συνδιάστασης 1.

Παρατήρηση 3.2.4. *Δεν είναι a priori προφανές πως τα υποσύμπλοκα αυτά στην $\partial\sigma$ (που τοπολογικά είναι σφαίρα) είναι τοπολογικά μπάλες που τέμνονται κατά μήκος ενός υποσυμπλόκου (που τοπολογικά είναι μια σφαίρα διάστασης μικρότερης κατά 1). Η παρατήρηση αυτή οφείλεται στον Street [90].*

Επομένως, όχι μόνο κάθε πλευρά στον $|X|$ είναι προσανατολισμένη αλλά και το σύνορο κάθε 2-προσώπου θα υποδιαιρείται σε δύο πολυγωνικές καμπύλες.





Πριν ορίσουμε τις συνδυαστικές στοίβες, ας δούμε πρώτα τι συμβαίνει με τα δράγματα. Η δομή αυτή θα είναι παρόμοια με το συνδυαστικό ανάλογο ενός δράγματος στον τοπολογικό χώρο $|X|$ [63], [68], [69].

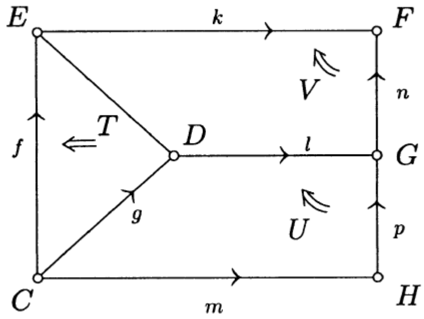
Ορισμός 3.2.5. *Έστω X αμφιμονόπλοκο σύνολο. Ορίζουμε ως συνδυαστικό δράγμα (ή σύστημα συντελεστών) στο Q να είναι ένα σύστημα δεδομένων $\mathcal{F}$ το οποίο αντιστοιχεί:*

(i) *0) Σε κάθε κόμβο (0-κελλί) $x \in X$ έναν διανυσματικό χώρο F_x*

(ii) *1) Σε κάθε ακμή (1-κελλί) $x \xrightarrow{e} y$ έναν γραμμικό τελεστή $F_e : F_x \to F_y$ έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω συνθήκη συμβατότητας: Αν σ ένα 2-κελλί και $\partial_\pm\sigma$ το θετικό και αρνητικό μέρος (προσανατολισμένες πολυγωνικές καμπύλες με κοινή αρχή $\partial^2_+\sigma$ και πέρας $\partial^2_-\sigma$) του συνόρου αντίστοιχα τότε οι παρακάτω δύο τελεστές σύνθεσης να συμπίπτουν.*

$$\prod_{e\in\partial_+\sigma} F_e, \prod_{e\in\partial_+\sigma} F_e : F_{\partial^2_+\sigma} \to F_{\partial^2_-\sigma}$$

Η έννοια της συνδυαστικής στοίβας που θα οριστεί παρακάτω είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν ενός συνδυαστικού 2-δράγματος όπου, αντί για διανυσματικούς χώρους έχουμε κατηγορίες, αντί για γραμμικούς τελεστές έχουμε συναρτητές κ.ο.κ. Η ειδοποιός διαφορά εδώ είναι ότι δουλεύοντας με κατηγορίες θα έχουμε νέες οντότητες όπως είναι οι φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ των συναρτητών για τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε τη γεωμετρική μέθοδο των διαγραμμάτων επικόλλησης (pasting diagrams) για τις 2-κατηγορίες [91]. Για παράδειγμα, εάν C, D, E, F, G, H κατηγορίες, f, g, h, k, l, m, n, p συναρτητές και $T : hg \Rightarrow f, U : pm \Rightarrow lg, V : nl \Rightarrow kh$ φυσικοί μετασχηματισμοί, τότε το παρακάτω διάγραμμα ορίζει με επικόλληση των συνθέσεων έναν νέο φυσικό μετασχηματισμό από $npm \Rightarrow kf$.



Ορισμός 3.2.6. *Μια συνδυαστική στοίβα στο αμφιμονόπλοκο σύνολο* X *θα είναι μια συλλογή* $\mathcal{F}$ *με τα ακόλουθα δεδομένα:*

(i) *0) Σε κάθε 0-κελλί* $x \in X$ *αντιστοιχεί μια κατηγορία* $\mathcal{F}_x$

(ii) *1) Σε κάθε 1-κελλί* $x \xrightarrow{e} y$ *στο* X *αντιστοιχεί ένας συναρτητής* $\mathcal{F}_e : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_y$

(iii) *2) Σε κάθε 2-κελλί* $\sigma \in X$ *αντιστοιχεί ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των συναρτητών:*

$$\mathcal{F}_\sigma : \prod_{e \in \partial_+ \sigma} \mathcal{F}_e \Rightarrow \prod_{e \in \partial_+ \sigma} \mathcal{F}_e$$

έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω συνθήκη συμβατότητας: για κάθε 3-κελλί τ *το γινόμενο (μέσω επικόλλησης) των φυσικών μετασχηματισμών που αντιστοιχεί στα 2-κελλιά από το* $\partial_+ \tau$ *θα ισούται με το αντίστοιχο γινόμενο κατά μήκος του* $\partial_- \tau$.

Ας δούμε τώρα πως σχετίζονται οι στοίβες με τα charades.

Πρόταση 3.2.7. *Έστω* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *ένας ακριβής συναρτητής αβελιανών κατηγοριών,* $\mathcal{E}$ *μια κλάση από admissible ακολουθίες στην* $\mathcal{A}$ *και* $S(f)$ *ο αντίστοιχος χώρος Waldhausen. Τότε, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των* k*-γραμμικών charades επί του συναρτητή* f *και εκείνων των συνδυαστικών στοιβών στον* $S(f)$ *που αντιστοιχούν στο μοναδικό σημείο τους (0-κελλί) την κατηγορία* $Vect_k$*, και στα 1-κελλιά τους συναρτητές* $Vect_k \to Vect_k$ *της μορφής* $V \mapsto X \otimes V$ *που διατηρούν την δομή του* $(Vect_k, \oplus, \otimes)$*-προτύπου κατηγορίας στην* $Vect_k$.

Απόδειξη. Έστω k-γραμμικό charade Λ επί του f. Κατασκευάζουμε τότε την εξής στοίβα στον $S(f)$:

(i) 0) Στο μοναδικό 0-κελλί του $S(f)$ αντιστοιχούμε την $Vect_k$

(ii) 1) Στο 1-κελλί του $S(f)$ που σχετίζεται με ένα αντικείμενο $A \in \mathcal{A}$, αντιστοιχούμε έναν συναρτητή $\Phi_{\Lambda(A)} : Vect_k \to Vect_k$ μέσω τανυστικού γινομένου με το $\Lambda(A)$ από αριστερά.

(iii) 2α) Στο 2-κελλί (τετράγωνο) του $S(f)$ που σχετίζεται με έναν ισομορφισμό $g : f(A) \to f(A')$, όπου $A, A' \in \mathcal{A}$, αντιστοιχούμε έναν φυσικό μετασχηματισμό $\Phi_{\Lambda(A)} \Rightarrow \Phi_{\Lambda(A')}$ που επάγεται από τον τελεστή $\Lambda(g) : \Lambda(A) \to \Lambda(A')$ (Σημείωση: δύο από τα τέσσερα πρόσωπα του τετραγώνου θα είναι εκφυλισμένα)

(iv) 2β) Στο 2-κελλί (τρίγωνο) σ του $S(f)$ που σχετίζεται με την ακριβή ακολουθία $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ στην $\mathcal{A}$, αντιστοιχούμε έναν φυσικό μετασχηματισμό $\Phi_{\Lambda(A')} \circ \Phi_{\Lambda(A'')} \Rightarrow \Phi_{\Lambda(A)}$ που επάγεται από τον τελεστή $\mu_{A',A,A''} : \Lambda(A') \otimes \Lambda(A'') \to \Lambda(A)$

. Από τα αξιώματα στον ορισμό των charades, παρατηρούμε ότι ικανοποιούν αυτομάτως τις συνθήκες συμβατότητας για τα 3-κελλιά, οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.2.8. *Μια συνδυαστική 2-στοίβα στο αμφιμονόπλοκο σύνολο X θα ορίζεται όμοια με την έννοια της συνδυαστικής στοίβας κατηγοριών. Πιο συγκεκριμένα, μία συνδυαστική 2-στοίβα $\mathcal{S}$ θα αποτελείται από τα ακόλουθα δεδομένα:*

(i) *0) Σε κάθε 0-κελλί $x \in X$ αντιστοιχεί μια 2-κατηγορία $\mathcal{S}_x$*

(ii) *1) Σε κάθε 1-κελλί $x \xrightarrow{e} y$ στο X αντιστοιχεί ένας 2-συναρτητής $\mathcal{S}_e : \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}_y$*

(iii) *2) Σε κάθε 2-κελλί $\sigma \in X$ αντιστοιχεί ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των συναρτητών:*

$$\mathcal{S}_\sigma : \prod_{e \in \partial_+ \sigma} \mathcal{S}_e \Rightarrow \prod_{e \in \partial_+ \sigma} \mathcal{S}_e$$

(iv) *3) Σε κάθε 3-κελλί τ αντιστοιχεί μια τροποποίηση (modification) φυσικών μετασχηματισμών*

$$\mathcal{S}_\tau : \prod_{e \in \partial_+ \tau} \mathcal{S}_\sigma \Rrightarrow \prod_{e \in \partial_+ \tau} \mathcal{S}_\sigma$$

έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω συνθήκη συμβατότητας: για κάθε 4-κελλί ρ το γινόμενο (μέσω επικόλλησης) των τροποποιήσεων S_τ για κάθε $\tau \in \partial_+ \rho$ θα ισούται με το αντίστοιχο γινόμενο κατά μήκος του $\tau \in \partial_- \rho$.

3.3 2-διάστατη αντιστοιχία Langlands

Αναζητάμε τώρα ένα ανάλογο της αντιστοιχίας Langlands για ένα 2-διάστατο τοπικό σώμα 2 ως μία συνδυαστική 2-στοίβα στον χώρο Waldhausen $S(f, \mathcal{E})$ που αντιστοιχεί στην κατηγορία των motives $\mathcal{M}$, του συναρτητή πραγματοποίησης $f : \mathcal{M} \to Vect_F$ και της κλάσης των admissible ακριβή ακολουθιών. Έστω λοιπόν F ένα 2-διάστατο τοπικό σώμα, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_F(F)$ η κατηγορία των motives πάνω από το F με CM από το ίδιο το F και $\mathcal{E}$ η κλάση των admissible ακριβή ακολουθιών. Σε αντίθεση τώρα με τον φορμαλισμό στις προηγούμενες υποενότητες, έστω ο ακριβής συναρτητής f να είναι το ευθύ άθροισμα από δύο αντίγραφα του συναρτητή πραγματοποίησης: $f(V) = V_F \oplus V_F$ (ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό θα φανεί παρακάτω). Όπως και πριν, αντιστοιχούμε σε αυτόν τον συναρτητή το αμφιμονόπλοκο σύνολο Waldhausen $S(f,\mathcal{E})$. Έπειτα, αντί να θεωρήσουμε στοίβες από κατηγορίες στο $S(f,\mathcal{E})$ (όπως στη 1-διάστατη αντιστοιχία Langlands) θα θεωρήσουμε *στοίβες από 2-κατηγορίες*, και μάλιστα επαρκεί να περιοριστούμε μόνο σε αυτές τις 2-στοίβες των οποίων η τιμή στο μοναδικό 0-κελλί του $S(f,\mathcal{E})$ είναι η 2-κατηγορία $2-Vect_k$ των 2-διανυσματικών χώρων έτσι όπως ορίσθηκε από τους Kapranov-Voevodsky, όπου k είναι το $\mathbb{C}$ ή η αλγεβρική κλειστότητα κάποιου $\mathbb{Q}_l$. Τα 1-κελλιά του $S(f,\mathcal{E})$ θα αντιστοιχούν στα motives V από την κατηγορία $\mathcal{M}$ (για κάθε τέτοιο V θα αντιστοιχείται ένας 2-συναρτητής $2-Vect \to 2-Vect$ ο οποίος θα δίνεται από το τανυστικό γινόμενο με κάποιον 2-διανυσματικό χώρο $\mathbf{L}(V)$) ενώ στα 2-κελλιά θα αντιστοιχούν φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ των 2-συναρτητών που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

(i) α) Για κάθε δύο ισομόρφα motives $V,V' \in \mathcal{M}$ και κάθε ισομορφισμό $g : V_F \oplus V_F \to V_F^{'} \oplus V_F^{'}$ θα έχουμε έναν συναρτητή Vect-προτύπων $L(g) : \mathbf{L}(V) \to \mathbf{L}(V')$.

(ii) β) Για κάθε admissible ακριβή ακολουθία $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ στην $\mathcal{M}$, έχουμε ένα συναρτητή Vect-προτύπων $\mathbf{L}(V') \otimes \mathbf{L}(V'') \to \mathbf{L}(V)$, όπου $\otimes$ το τανυστικό γινόμενο στην κατηγορία των 2-διανυσματικών χώρων.

Όμοια, οι υπόλοιπες ιδιότητες που περιγράφηκαν στην προηγούμενη υποενότητα θα δίνουν τους κατάλληλους φυσικούς μετασχηματισμούς $L(g)\circ L(h) \to L(gh)$ μεταξύ των συναρτητών (οι οποίοι μπορούν να ιδωθούν ως τροποποιήσεις (modifications) μεταξύ 2-συναρτητών στην $2-Vect_k$ μέσω τανυστικού γινομένου με την $\mathbf{L}(V)$). Επομένως, έχουμε μια 'δράση' της ομάδας $GL(V_F \oplus V_F)$ στην κατηγορία $\mathbf{L}(V)$.

Παρατήρηση 3.3.1. *Πριν όμως περιγράψουμε τη 2-διάστατη αντιστοιχία Langlands, ας δούμε μια σχετική κατασκευή στα πλαίσια μιας ΤΚΘΠ: Μια ΤΚΘΠ διάστασης d, θα πρέπει να θεωρηθεί ως μέρος μιας εκτεταμένης ΤΚΘΠ (extended TQFT) υψηλότερης τάξης που θα περιέχει περισσότερα δεδομένα. Για παράδειγμα μια n-διάστατη k-εκτεταμένη ΤΚΘΠ θα δίνεται ως ένας συμμετρικός μονοειδής συναρτητής $Z : k-Cob(n) \longrightarrow k-Vect_F$ [93]) Χονδρικά δηλαδή, αντί για τη δομή που περιγράψαμε παραπάνω (αντιστοίχιση ενός αριθμού σε μία $d+1$-διάστατη πολλαπλότητα και αντιστοίχιση ενός διανυσματικού χώρου σε μια d-διάστατη πολλαπλότητα) σε μια εκτεταμένη ΤΚΘΠ θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε δεδομένα σε πολλαπλότητες αυθαίρετα μεγάλης διάστασης $d+i, i\rangle 0$ και από κατηγορική σκοπιά, η πιο φυσική επιλογή θα ήταν αντικείμενα i-κατηγοριών, δηλαδή $(i-1)$-κατηγορίες με κάποια δομή όπως για παράδειγμα i-διανυσματικούς χώρους.*

Έστω τώρα Y ένα 2-διάστατο σχήμα και F το σώμα των ρητών συναρτήσεων στον Y. Για κάθε σημαία $\mathfrak{p} \in X \subset Y$ που περιέχει ένα 0-διάστατο, ανάγωγο υποσχήμα (σημείο) $\mathfrak{p}$ και ένα 1-διάστατο, ανάγωγο υποσχήμα X, θα έχουμε σύμφωνα με τα παραπάνω μια πλήρωση $F(\mathfrak{p},X,Y)$. Έστω $\mathcal{A}_Y = \prod_{\mathfrak{p}\in X\subset Y} F(\mathfrak{p},X,Y)$ ο δακτύλιος των adèles του Y και V ένα motive από την κατηγορία $\mathcal{M}_F(F)$ με adelic πραγματοποίηση $V_{\mathbb{A}_Y}$. Για κάθε σημαία $\mathfrak{p} \in X$ περιορίζουμε το V πάνω από το $F(\mathfrak{p},X,Y)$, έστω $V_{\mathfrak{p},X}$. Τότε, υποθέτοντας ότι υπάρχει μία αντιστοιχία Langlands για το $F(\mathfrak{p},X,Y)$, θα έχουμε έναν 2-διανυσματικό χώρο $L(V_{\mathfrak{p},X})$. Οπότε, αντιστοιχούμε με φυσικό τρόπο σε ολόκληρο το motive το άπειρο τανυστικό γινόμενο:

$$\mathbf{L}(V) = \bigotimes_{\mathfrak{p}\in X\subset Y} \mathbf{L}(V_{\mathfrak{p},X})$$

στο οποίο δρα πάνω του η ομάδα $GL(V_{\mathbb{A}_Y} \oplus V_{\mathbb{A}_Y})$.

Παρατήρηση 3.3.2. *Σχεδόν για κάθε 1-διάστατο υποσχήμα $X \subset Y$, το motive V είναι αδιακλάδιστο κατά μήκος του generic σημείου του X, επομένως μπορεί να περιοριστεί σε ένα motive $V|_X$ πάνω από το σώμα συναρτήσεων του X. Σε αυτό το περιορισμένο motive μπορούμε να εφαρμόσουμε τη 1-διάστατη αντιστοιχία Langlands η οποία μας δίνει ένα συνήθη διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V|_X)$. Ο ρόλος του $\boldsymbol{L}(V)$ της 2-διάστατης αντιστοιχίας Langlands είναι να ενώσει όλους αυτούς τους χώρους μαζί.*

Συγκεφαλαιώνοντας, έχουμε τα εξής:

(i) $dim = 0$: Ένα motive V πάνω από ένα 0-διάστατο σχήμα $\mathfrak{p} = Spec\mathbb{F}_q$, αντιστοιχεί σε έναν '0-διανυσματικό χώρο' (στοιχείο κάποιου δακτυλίου)

$$\mathbf{L}(V) = L(V, s) = det(1 - T \cdot Frob|_V) \in \mathbb{Q}[T]$$

όπου $T = q^{-s}$. Καμία ομάδα δε δρα στον $\mathbf{L}(V)$. Για κάθε ακριβή ακολουθία $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ από motives πάνω από το $\mathfrak{p}$ έχουμε την ισότητα: $\mathbf{L}(V') \cdot \mathbf{L}(V'') = \mathbf{L}(V)$.

(ii) $dim = 1$: Ένα motive πάνω από το generic σημείο ενός 1-διάστατου σχήματος X αντιστοιχεί σε έναν (1-)διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V)$. Η ομάδα $GL(V_{\mathbb{A}_X})$ δρα στον $\mathcal{L}(V)$. Για κάθε admissible, ακριβή ακολουθία $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$, υπάρχει μορφισμός $\mathcal{L}(V') \otimes \mathcal{L}(V'') \to \mathcal{L}(V)$ που είναι equivariant ως προς την παραβολική υποομάδα της $GL(V_{\mathbb{A}_X})$. Για κάθε 0-διάστατο υποσχήμα $\mathfrak{p} \in X$ (σημείο) όπου το V είναι αδιακλάδιστο, παίρνουμε τον περιορισμό $V|_{\mathfrak{p}}$ και εφαρμόζουμε την 0-διάστατη αντιστοιχία. Πολλαπλασιάζουμε μαζί όλους τους 0-διάστατους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(V, s)$ που προκύπτουν και σχηματίζουμε την ολική L-συνάρτηση: $L(V, s) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(V, s)$.

(iii) $dim = 2$: Ένα motive πάνω από το generic σημείο ενός 2-διάστατου σχήματος Y αντιστοιχεί σε έναν 2-διανυσματικό χώρο $\mathbf{L}(V)$. Η ομάδα $GL(V_{\mathbb{A}_Y} \oplus V_{\mathbb{A}_Y})$ 'δρα' στον $\mathbf{L}(V)$. Θυμίζουμε εδώ ότι η αναπαράσταση μιας ομάδας G ισοδυναμεί με ένα τοπικά-σταθερό δράγμα στον χώρο ταξινόμησης BG και επομένως η δράση μιας ομάδας σε μια κατηγορία C ορίζεται κατ'αναλογία να είναι ένα combinatorial stack στην BG, που αντιστοιχεί στο μοναδικό κόμβο της (την κατηγορία C) με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε να ικανοποιούνται κάποιες συνθήκες συμβατότητας για τους φυσικούς μετασχηματισμούς. Ένα παράδειγμα τέτοιας δράσης δείχνει η κατηγοριοποίηση του μετασχηματισμού Fourier, όπου έχουμε μια ισοδυναμία κατηγοριών μεταξύ των κατηγοριών στις οποίες δρα μια ομάδα G και των κατηγοριών στις οποίες δρα η Pontryagin δυϊκή της G^*. Οι κατηγορίες με μία G-δράση αποτελούν και αυτές παραδείγματα 2-κατηγοριών και επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια 2-αναπαράσταση μιας ομάδας G ως μια δράση ρ της G σε έναν 2-διανυσματικό χώρο έτσι ώστε οι $\rho(g)$ να είναι συναρτητές $Vect$-προτύπων. Επιστρέφοντας, για κάθε 1-διάστατο υποσχήμα $X \subset Y$ όπου το V είναι αδιακλάδιστο, παίρνουμε τον περιορισμό του V στο generic σημείο του Y και εφαρμόζουμε τη 1-διάστατη αντιστοιχία παίρνοντας έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}(V|_X)$ μαζί με μία δράση της adelic ομάδας του X. Επομένως, $\mathcal{L}(V|_X) = \otimes_{\mathfrak{p} \in X} \mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(V|_X)$. Παίρνοντας τανυστικό γινόμενο, θα έχουμε τον ολικό $\mathcal{L}$-χώρο:

$$\mathcal{L}(V) = \bigotimes_{\mathfrak{p} \in X \subset Y} \mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(V|_X)$$

Για κάθε 0-διάστατο υποσχήμα $\mathfrak{p} \in X$ όπου το V είναι αδιακλάδιστο, παίρνουμε τον περιορισμό του V στο $\mathfrak{p}$ και εφαρμόζουμε την 0-διάστατη αντιστοιχία λαμβάνοντας τους τοπικούς παράγοντες Euler $L_{\mathfrak{p}}(V,s)$. Πολλαπλασιάζοντας τους όλους μαζί, έχουμε φυσικά την ολική L-συνάρτηση: $L(V,s) = \prod L_{\mathfrak{p}}(V,s)$.

Η σχέση του άγνωστου 2-διανυσματικού χώρου $\mathbf{L}(V)$ με τον συνήθη διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(V|_X)$ είναι ανάλογη με τη σχέση που διέπει μια αυτομορφική αναπαράσταση με την L-συνάρτηση της. Για μια ομάδα G που δρα μέσω συναρτητών σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$, των ρόλο των στοιχείων του πίνακα της αναπαράστασης θα παίζουν οι συναρτήσεις που λαμβάνουν τιμές σε διανυσματικούς χώρους:

$$\phi_{AB}(g) = Hom_{\mathcal{C}}(A, g(B)), A, B \in ob\mathcal{C}, g \in G$$

Επομένως, όταν το V είναι ένα motive πάνω από ένα 2-διάστατο, αδιακλάδιστο, τοπικό σώμα F και περιοριστούμε στο σώμα υπολοίπων $\bar{F}$ (που είναι ένα 1-διάστατο, τοπικό σώμα) ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V|_{Spec\bar{F}})$ θα μετρά κατά μία έννοια (σε αναλογία με την L-συνάρτηση μιας αναπαράστασης μιας p-αδικής ομάδας που μετρά την μεταβολή των στοιχείων του πίνακα της αναπαράστασης) τη μεταβολή των διανυσματικών χώρων $\phi_{AB}(g)$, όπου $g \in GL(V_F \oplus V_F)$.

Ας δούμε τώρα πως προκύπτει ως ειδική περίπτωση όλων των παραπάνω, η 2-διάστατη τοπική θεωρία κλάσεων σωμάτων των Parshin-Kato. Έστω F ένα 2-διάστατο τοπικό σώμα, F_1 το σώμα υπολοίπων του F (όπου θα είναι τοπικό σώμα με τη συνήθη έννοια) και F_2 το σώμα υπολοίπων του F_1 (άρα F_2 πεπερασμένο). Τότε, θα έχουμε τους εξής επιμορφισμούς για τις απόλυτες ομάδες Galois:

$$Gal(F) \to Gal(F_1) \to Gal(F_2) = \hat{\mathbb{Z}}$$

Η αντίστροφη εικόνα του $\mathbb{Z} \subset \hat{\mathbb{Z}}$ στην $Gal(F)$ θα είναι ομάδα Weil $W(F)$. Η αλγεβρική K-ομάδα $K_2(F)$ είναι εφοδιασμένη με τη φυσική τοπολογία που επάγεται από τις εκτιμήσεις στα F και F_1, η οποία όμως, δεν είναι Hausdorff. Το μέγιστο Hausdorff πηλίκο της $K_2(F)$ (το πηλίκο της ως προς τις τομές όλων των περιοχών του μηδενός) είναι η $K_2^{top}(F)$. Το κεντρικό αποτέλεσμα της θεωρίας Parshin-Kato ταυτοποιεί την $W(F)$ με την $K_2^{top}(F)$. Η άνταλλοίωτη΄ εκδοχή αυτού του αποτελέσματος δείχνει πως οι συνεχείς χαρακτήρες της $W(F)$ με τιμές στο $\mathbb{C}^*$ ή στο $\mathbb{Q}_l^*$ είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα συνεχή σύμβολα Steinberg (που είναι συνεχείς συναρτήσεις $s : F^* \times F^* \to \mathbb{C}^*$ (ή $\mathbb{Q}_l^*$) οι οποίες είναι πολλαπλασιαστικές σε κάθε όρισμα ικανοποιώντας τη σχέση Steinberg: $s(x, 1-x) = 1$). Και λόγω ενός Θεωρήματος του Suslin [92], όπου για κάθε σώμα F υπάρχει φυσικός ισομορφισμός:

$$K_2(F) \simeq H_2(GL(2,F), \mathbb{Z})/im\{H_2(GL(1,F)) \to H_2(GL(2,F))\}$$

έπεται πως ένας χαρακτήρας της $K_2(F)$ (π.χ ένα σύμβολο Steinberg) μπορεί να ιδωθεί ως ένας 2-συν-κύκλος της $GL(2,F)$ της οποίας ο περιορισμός στο $GL(1,F)$ είναι ένα συν-σύνορο.

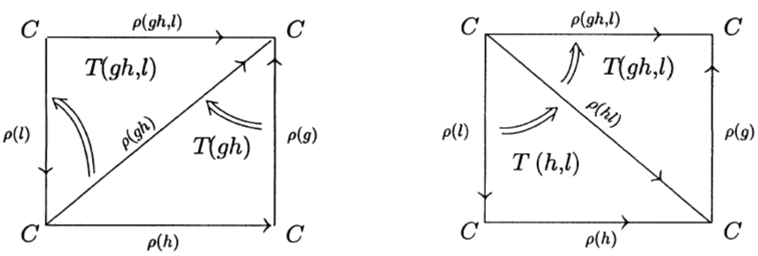
Πριν προχωρήσουμε, χρειάζεται να δούμε πως ΄δρα΄ μια ομάδα σε μία κατηγορία. Αρχικά παρατηρούμε ότι η συνήθης αναπαράσταση μιας ομάδας G είναι το ίδιο με ένα τοπικά-σταθερό δράγμα στον χώρο ταξινόμησης BG. Πράγματι, ο BG έχει ένα κόμβο και επομένως ένα συνδυαστικό δράγμα πρέπει να αντιστοιχεί σε αυτό έναν διανυσματικό χώρο V. Οι ακμές του BG αντιστοιχούν στα στοιχεία του G, επομένως το συνδυαστικό δράγμα δίνει για κάθε $g \in G$ έναν γραμμικό τελεστή $T_g : V \to V$. Τέλος, τα 2-κελλιά θα αντιστοιχούν σε ζεύγη στοιχείων και από τη συνθήκη συμβατότητας έπεται ότι έχουμε αναπαράσταση αφού: $T_{g \circ h} = T_g \circ T_h$. Έστω τώρα C μια κατηγορία. Τότε, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.3.3. *Ονομάζουμε δράση της G στην C να είναι ένα συνδυαστικό δράγμα στον BG που αντιστοιχεί στο μοναδικό κόμβο την κατηγορία C [64]. Πιο αναλυτικά, αυτό σημαίνει ότι:*

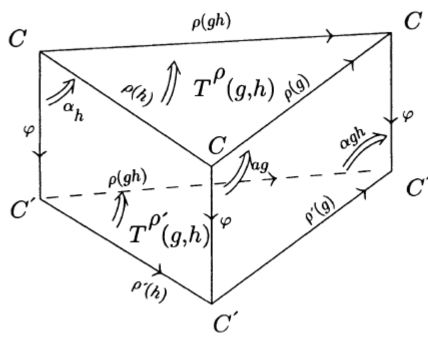
(i) *1) Για κάθε $g \in G$ αντιστοιχείται ένας συναρτητής $\rho(g) : C \to C$*

(ii) *2) Για κάθε $g, h \in G$ αντιστοιχείται ένας φυσικός μετασχηματισμός $T(g,h) = T^{\rho}(g,h) : \rho(g) \circ \rho(h) \Rightarrow \rho(g,h)$*

(iii) *3) Για κάθε $g, h \in G$ οι δύο μετασχηματισμοί $\rho(g) \circ \rho(h) \circ \rho(l) \Rightarrow \rho(ghl)$ που δίνονται από το κάτωθι διάγραμμα επικολλήσεων, συμπίπτουν.*



Κατηγορίες με G-δράση συνιστούν κατά φυσιολογικό τρόπο μία 2-κατηγορία, στην οποία υπάρχει μία κλάση από 1-μορφισμούς που καλούνται ισοδυναμίες [90] και μας δίνουν μία έννοια ισοδυναμίας κατηγοριών με G-δράση. Πιο αναλυτικά, δύο κατηγορίες C, C' με δράσεις ρ, ρ' αντίστοιχα, θα θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ισοδυναμία κατηγοριών $\phi : C \to C'$ και ισομορφισμοί συναρτητών $\alpha_g : \rho'(g) \circ \phi \Rightarrow \phi \circ \rho(g)$ έτσι ώστε το παρακάτω πρίσμα να είναι μεταθετικό.



Έτσι, με τον όρο '2-αναπαράσταση' μιας ομάδας G θα εννοούμε στο εξής μια δράση ρ της G σε μια κατηγορία η οποία είναι ένας 2-διανυσματικός χώρος κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε τα $\rho(g)$ να είναι συναρτητές $Vect$-προτύπων. Όμοια και για την ισοδυναμία 2-αναπαραστάσεων.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις 2-αναπαραστάσεις μιας ομάδας G σε έναν 1-διάστατο 2-διανυσματικό χώρο. Τότε, σε κάθε $g \in G$ αντιστοιχούμε έναν συναρτητή $Vect$-προτύπων $Vect \to Vect$ που δίνεται μέσω τανυστικού γινομένου με κάποιο διανυσματικό χώρο E_g. Από το 2) των αξιωμάτων παραπάνω θα έχουμε τις συνθέσεις: $\mu_{g,h} : E_g \otimes E_h \to E_{gh}$ ενω το 3) εξασφαλίζει την προσεταιριστικότητα τους. Δηλαδή, για κάθε $g, h, l \in G$ και κάθε $x \in E_g, y \in E_h, z \in E_l$ θα ισχύει ότι:

$$\mu_{g,hk}(x, \mu_{h,k}(y,z)) = \mu_{gh,k}(\mu_{g,h}(x,y), z)$$

και άρα το $E = \bigoplus_{g \in G} E_g$ θα είναι μια G-βαθμωτή, προσεταιριστική ἀλγεβρα. Η ισοδυναμία μεταξύ των 2-αναπαραστάσεων προκύπτει ως εξής: Δύο συστήματα με δεδομένα $E = (E_g, \mu_{g,h})$ και $E' = (E_g^{'}, \mu_{g,h}^{'})$ θα δίνουν ισοδύναμες 2-αναπαραστάσεις αν για κάθε $g \in G$ υπάρχουν ισομορφισμοί $c_g : E_g \to E_g^{'}$ έτσι ώστε:

$$\mu_{g,h} = c_{gh} \circ \mu_{g,h} \circ (c_g^{-1} \otimes c_h^{-1})$$

Τέλος, έχουμε την παρακάτω Πρόταση η οποία οφείλεται στους Grothendieck-Giraud:

Πρόταση 3.3.4. *Το σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας 1-διάστατων 2-αναπαραστάσεων E της G για τις οποίες για κάθε $g, h \in G$ έχουμε $dimE_g = 1$ και $\mu_{g,h} : E_g \otimes E_h \to E_{gh}$ αντιστρέψιμη, είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με την $H^2(G, k^*)$.*

Απόδειξη. Πρβλ. [68] □

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε την ειδική περίπτωση όπου $E_g = k$. Τότε, η $\mu_{g,h}$ θα δίνεται μέσω του πολλαπλασιασμού με κάποιο στοιχείο $\mu(g,h) \in k$ και από υπόθεση, τα στοιχεία αυτά θα είναι μη-μηδενικά. Από το 3) των αξιωμάτων, το $\mu(g,h)$ θα είναι ένας 2-συν-κύκλος της G με συντελεστές στο $k*$ (τετριμμένη δράση της G). Αφού ισοδύναμες 2-αναπαραστάσεις δίνουν συνομόλογους συν-κύκλους, έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, η 2-διάστατη αντιστοιχία Langlands που περιγράφηκε παραπάνω αντιστοιχεί σε κάθε motive V πάνω από ένα 2-διάστατο τοπικό σώμα F, μία 2-αναπαράσταση της $GL(V_F \oplus V_F)$ στον 2-διανυσματικό χώρο $\mathbf{L}(V)$. Ειδικότερα, αν το V είναι 1-διάστατο, ο 2-διανυσματικός χώρος $\mathbf{L}(V)$ θα είναι 1-διάστατος και μπορεί να ταυτοποιηθεί με την $Vect$. Επιπλέον οι διανυσματικοί χώροι $E_g, g \in GL(V_F \oplus V_F)$ θα είναι επίσης 1-διάστατοι και άρα ταυτοποιώντας τους με k, έπεται ότι η ο αριθμός $\mu(g,h)$ θα είναι η τιμή του συν-κύκλου της 2-αναπαράστασης της $GL(V_F \oplus V_F) = GL(2,F)$ στο (g,h), που αντιστοιχεί στο V. Έτσι, μέσω του θεωρήματος Suslin ανακτούμε πράγματι τη θεωρία των Parshin-Kato για τη 2-διάστατη αντιστοιχία Langlands.

Κεφάλαιο 4

Κβαντική αριθμητική

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες από τις τεχνικές που αναπτύξαμε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια (αριθμητικής τοπολογίας και κβαντικής τοπολογίας) προκειμένου να προσεγγίσουμε ερωτήματα όπως: Υπάρχει p-αδικό ανάλογο της εικασίας του όγκου στην αριθμητική; Ή ακόμα πιο γενικά: ποιο είναι το ανάλογο των κβαντικών αναλλοιώτων στη θεωρία αριθμών; Η μέθοδος που θα ακολουθηθεί είναι να αναζητήσουμε τις κατηγορικές δομές που οφείλει να έχει μια 3-διάστατη αντιστοιχία Langlands (για σχήματα étale συνομολογικής διάστασης 3) και να προσπαθήσουμε να τις μεταφράσουμε στην ορολογία μιας 7-διάστατης θεωρίας βαθμίδας Chern-Simons. Η ελπίδα είναι πως, το ανάλογο της ολογραφικής αρχής AdS/CFT στο αριθμητικό άπειρο [96] θα δίνεται από μια 6-διάστατη μη-αβελιανή θεωρία βαθμίδας των gerbes (μέσω μη-αβελιανής συνομολογίας) και ενδεχομένως να εξηγεί με φυσιολογικό τρόπο πολλά αριθμητικά φαινόμενα για τις αριθμητικές επιφάνειες Arakelov $\Sigma\pi\varepsilon\varsigma\mathcal{O}_K \otimes_{\Sigma\pi\varepsilon\varsigma_{\mathbb{F}_1}} \Sigma\pi\varepsilon\varsigma\mathcal{O}_K$. Επίσης, με διαδοχική αποκατηγοριοποίηση των σχετικών δομών στην αβελιανή περίπτωση της θεωρίας των Alexander-Fox αναζητάμε τη μορφή που οφείλει να έχει ένα τοπολογικό ανάλογο των νόμων αντιστροφής υψηλοτέρας διάστασης κάνοντας διαδοχικά αποκατηγοριοποίηση των δομών στην αβελιανή περίπτωση.

4.1 Αριθμητική θεωρία βαθμίδας

Έστω R μεταθετικός δακτύλιος. Θεωρούμε το ζεύγος $(X, \mathcal{F})$, όπου X σχήμα πεπερασμένου τύπου πάνω από το $\mathbb{Z}$ και $\mathcal{F}$ δράγμα από πεπερασμένα-παραγόμενα R-πρότυπα στον X. Επιδιώκουμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε τέτοιο ζεύγος μια L-συνάρτηση $L(X, \mathcal{F})$ με έναν κανονικό τρόπο. Στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτήν ως L-πλάτος, με σκοπό να επισημανθεί η σχέση της με τα πλάτη σκέδασης στην κβαντική φυσική. Το πλάτος αυτό αναμένεται να παίρνει τιμές στην determinant δέσμη γραμμών. Ουσιαστικά, το γεγονός ότι μια τέτοια ποσότητα μπορεί να οριστεί πάντοτε (για παράδειγμα με συντελεστές στις p-αδικές επεκτάσεις που μας ενδιαφέρουν) μας το εγγυάται η Κεντρική Εικασία Iwasawa για την p-αδική L-συνάρτηση. Για κάθε ζεύγος $(X, \mathcal{F})$ έχουμε ομάδες συνομολογίας με συμπαγή φορέα $H^i_c(X, \mathcal{F})$ ενώ από τη θεωρία Arakelov έχουμε τον εξής Ορισμό:

Ορισμός 4.1.1. *(Determinant of cohomology) Έστω $p : X \to B$ proper μορφισμός μεταξύ Noetherian σχημάτων. Σε κάθε coherent $\mathcal{O}_X$-πρότυπο F του X το οποίο είναι flat πάνω από το $\mathcal{O}_B$, αντιστοιχούμε μία δέσμη γραμμών $detRp_*F$*

στον B που καλείται ορίζουσα της συνομολογίας του F και η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) *1. Η αντιστοίχιση $F \mapsto detRp_*F$ είναι functorial για τους ισομορφισμούς $F \xrightarrow{\approx} F'$ μεταξύ $\mathcal{O}_X$-προτύπων.*

(ii) *2. (Αλλαγή βάσης) Κάθε Καρτεσιανό τετράγωνο*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "u"] & B \end{tikzcd}$$

επάγει έναν κανονικό ισομορφισμό $u^*(detRp_*F) \xrightarrow{\approx} detRp'_*(u'^*F)$.

(iii) *3. Κάθε ακριβής ακολουθία από flat, coherent $\mathcal{O}_X$-πρότυπα*

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

επάγει ισομορφισμό

$$detRp_*F \xrightarrow{\approx} detRp_*F' \otimes detRp_*F''$$

ο οποίος είναι συμβατός ως προς την αλλαγή βάσης και τους ισομορφισμούς των ακριβή ακολουθιών.

(iv) *4. Έστω $(E) := 0 \to E^0 \to E^1 \to \ldots \to E^n \to 0$ ένα πεπερασμένο σύμπλοκο από τοπικά-ελεύθερα $\mathcal{O}_B$-πρότυπα πεπερασμένης τάξης και έστω ότι δίνεται οιωνεί-ισομορφισμός $E \to Rp_*F$. Τότε, αν συμβολίσουμε με $detE$ τη μέγιστη δύναμη εξωτερικού γινομένου $\bigwedge^n$ ενός τοπικά-ελεύθερου $\mathcal{O}_B$-προτύπου E πεπερασμένης τάξης, θα υπάρχει κανονικός ισομορφισμός:*

$$detRp_*F \xrightarrow{\approx} \bigotimes_{k=0}^{n} (detE^k)^{\otimes(-1)^k}$$

ο οποίος είναι συμβατός ως προς την αλλαγή βάσης. Ειδικότερα, εάν τα $\mathcal{O}_X$-πρότυπα R^kp_*F είναι τοπικά-ελεύθερα, τότε υπάρχει κανονικός ισομορφισμός:

$$detRp_*F \xrightarrow{\approx} \bigotimes_{k=0}^{n} (detR^kp_*F)^{\otimes(-1)^k}$$

συμβατός ως προς την αλλαγή βάσης.

(v) *5. Έστω $\chi_{X/B}(F)$ τοπικά-σταθερή συνάρτηση με $x \mapsto \chi(F_x)$ στο B και $u \in \Gamma(B, \mathcal{O}_B^*)$ ο πολλαπλασιασμός με u στο F (από το (1) θα έχουμε έναν αυτομορφισμό της $detRp_*F$ μέσω πολλαπλασιασμού με $u^{\chi_{X/B}(F)}$). Αν M δέσμη γραμμών στο B, τότε υπάρχει κανονικός ισομορφισμός μεταξύ δεσμών γραμμών στην B:*

$$detRp_*(F \otimes p^*M) \xrightarrow{\approx} (detRp_*F) \otimes M^{\chi_{X/B}(F)}$$

Στο εξής θα συμβολίζουμε την ορίζουσα της συνομολογίας πιο αναλυτικά ως:

$$D(X,\mathcal{F}) := \bigotimes_{i}^{n} detH^i(X,\mathcal{F})^{(-1)^{i+1}}$$

όπου $n = dimX$ και η οποία θα είναι ένα προβολικό R-πρότυπο τάξης 1. Επομένως, αν $\mathcal{M}$ moduli χώρος από δράγματα στον X, το $D(X,\mathcal{F})$ θα διατρέχει τα σημεία $[\mathcal{F}] \in \mathcal{M}$ και θα σχηματίζει μία δέσμη γραμμών $\mathcal{D} \to \mathcal{M}$. Εδώ ο $\mathcal{M}$ θα παίζει ανάλογο ρόλο με αυτόν των πολλαπλοτήτων χαρακτήρων στη μιγαδική γεωμετρία, οπότε θα έχει τη δομή ενός formal σχήματος ή ενός αναλυτικού χώρου πάνω από το $SpecR$. Το L-πλάτος εικάζεται να είναι ένας γεννήτορας $L(X,\mathcal{F}) \in D(X,\mathcal{F})$ έτσι ώστε να ικανοποιείται μια συνθήκη τετριμμενοποίησης του $\mathcal{D}$ πάνω από το $\mathcal{M}$. Κατ'επέκταση, η θεωρία των L-συναρτήσεων ουσιαστικά προτείνει την ύπαρξη μιας κανονικής τομής $L(X,\cdot) \in \Gamma(\mathcal{M},\mathcal{D})$, όπου $\mathcal{M}$ κάποιος moduli χώρος δραγμάτων.

Παρατήρηση 4.1.2. *Δυστυχώς, οι τεχνικές της αριθμητικής αλγεβρικής γεωμετρίας προκειμένου να οριστούν ολικές τομές των determinant δεσμών γραμμών, μέχρι στιγμής δεν έχουν καρποφορήσει παρά μόνο σε μερικές εξαιρετικά ειδικές περιπτώσεις, ενώ το γενικότερο πρόβλημα παραμένει άλυτο. Η ύπαρξη λύσεων σε εντελώς ανάλογα προβλήματα της κβαντικής θεωρίας πεδίου και η μεταφορά ιδεών από τον ένα κλάδο στον άλλο, αποτελεί το βασικό κίνητρο για την ανάπτυξη μιας παράλληλης αριθμητικής θεωρίας.*

Για ένα ακυκλικό δράγμα $\mathcal{F}$ ($H_c^i(X,\mathcal{F}) = 0, \forall i \geq 1$) υπάρχει η κανονική τετριμμενοποίηση:

$$D(X,\mathcal{F}) \simeq R$$

η οποία αντιστοιχεί στο γεγονός ότι η ορίζουσα του μηδενικού προτύπου είναι ο δακτύλιος R. Επομένως, για ακυκλικά δράγματα το L-πλάτος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στοιχείο του R. Επιπλέον, για $\mathcal{M}_{\text{acyc}} \subset \mathcal{M}$ η determinant δέσμη γραμμών θα έχει επίσης κανονική τετριμμενοποίηση: $\mathcal{D}|_{\mathcal{M}_{\text{acyc}}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\text{acyc}}}$ όποτε πάνω από το $\mathcal{M}_{\text{acyc}}$ το L-πλάτος μπορεί να θεωρηθεί απλά ως συνάρτηση.

Παρατήρηση 4.1.3. *Για δακτυλίους συντελεστών όπως ο $R = \mathbb{Z}_p$, ακόμα και όταν το $\mathcal{F}$ δεν είναι ακυκλικό, εντούτοις, το $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_p$ μπορεί να θεωρηθεί ως τέτοιο. Έτσι, ακόμα και αν ένα στοιχείο του $D(X,\mathcal{F})$ δεν είναι στοιχείο του R, παρά ταύτα μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο του $R \otimes \mathbb{Q}_p$. Ένα παρόμοιο φαινόμενο είναι το εξής: έστω $\mathcal{M} = Spec(T)$ με το μηδενοσύνολο των μη-ακυκλικών δραγμάτων να σχηματίζουν έναν διαιρέτη με εξίσωση $f = 0$. Τότε, το $\mathcal{D}$ μπορεί να θεωρηθεί ως T-πρότυπο ενώ το $\mathcal{D}[\frac{1}{f}] = \mathcal{D} \otimes T[\frac{1}{f}]$ θα είναι τετριμμένο. Έστω λοιπόν s η τομή του $\mathcal{D}[\frac{1}{f}]$ που αντιστοιχεί στο 1 κάτω από αυτή την τετριμμενοποίηση. Τότε, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες (π.χ $\mathcal{M}$ να είναι φυσιολογικό) η τομή $(\frac{1}{f})s$ επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathcal{M}$ και μπορεί να θεωρηθεί ως μία τομή τετριμμενοποίησης στο $\mathcal{D}$. Η κατάσταση αυτή θυμίζει πολύ τον τρόπο με τον οποίο τα χαρακτηριστικά στοιχεία εμφανίζονται στη διατύπωση της Κεντρικής Εικασίας Iwasawa, θεωρούμενα ως τομές τετριμμενοποίησης των determinant δεσμών γραμμών.*

Ας δούμε τώρα τα αξιώματα που αναμένετε να ικανοποιούν τα L-πλάτη:

(i) 1. (Πολλαπλασιαστικότητα) Αν έχουμε μια ακριβή ακολουθία δραγμάτων

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

τότε ο κανονικός ισομορφισμός

$$D(X, \mathcal{F}_2) \simeq D(X, \mathcal{F}_2) \otimes D(X, \mathcal{F}_2)$$

απεικονίζει το $L(X, \mathcal{F}_2)$ στο $L(X, \mathcal{F}_1) \otimes L(X, \mathcal{F}_3)$.

(ii) 2. (Συμβατότητα αλλαγής δακτυλίων συντελεστών) Αν $R^{'}$ είναι μια R-άλγεβρα και $\mathcal{F}^{'} = \mathcal{F} \otimes^{L} R^{'}$, τότε ο φυσικός ισομορφισμός

$$D(X, \mathcal{F}) \otimes_R R^{'} \simeq D(X, \mathcal{F}^{'})$$

απεικονίζει το $L(X, \mathcal{F}) \otimes 1$ στο $L(X, \mathcal{F}^{'})$.

(iii) 3. (Κανονικοποίηση) Η γενική περίπτωση σχετίζεται με τις εικασίες των L-πλατών για motives και καθώς χρειάζεται πολλά προαπαιτούμενα για τη διατύπωση της, δε θα την αναφέρουμε εδώ (για περισσότερα πρβλ. [15]). Θα δούμε όμως μια ειδική περίπτωση της ευθύς αμέσως.

Έστω η ακριβής ακολουθία:

$$0 \to j_!(j^{-1}\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to i_*(i^{-1}(\mathcal{F})) \to 0$$

όπου $i : Z \hookrightarrow X$ κλειστή εμφύτευση και $j : U \hookrightarrow X$ το συμπλήρωμα. Τότε, η πολλαπλασιαστικότητα απαιτεί:

$$L(X, \mathcal{F}) = L(U, \mathcal{F}) \otimes L(Z, \mathcal{F})$$

Επομένως, αν όλα τα δράγματα είναι ακυκλικά, το τανυστικό γινόμενο θα είναι απλά ένα γινόμενο αριθμών και άρα θα έχουμε μια ισότητα. Έστω τώρα $X = Spec(\mathbb{F}_q)$ με $q = p^d$. Στην ειδική αυτή περίπτωση, το stalk $\mathcal{F}_x$ στο γεωμετρικό σημείο $x : Spec(\bar{\mathbb{F}}_q) \to Spec(\mathbb{F}_q)$ επάγει μία δράση (την δυϊκή της απεικόνισης $a \mapsto a^{q^{-1}}$) του γεωμετρικού Frobenius $Fr_x : Spec(\bar{\mathbb{F}}_q) \to Spec(\mathbb{F}_q)$. Άρα, έχουμε μία ακριβή ακολουθία:

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}_x \stackrel{Id-Fr_x}{\longrightarrow} \mathcal{F}_x \to H^1(\mathcal{F}) \to 0$$

η οποία επάγει έναν ισομορφισμό:

$$D(Spec(\mathbb{F}_q), \mathcal{F}) \simeq det(\mathcal{F}_x)^* \otimes det(\mathcal{F}_x) \simeq R$$

Τότε, το $L(Spec(\mathbb{F}_q), \mathcal{F})$ ορίζεται να είναι η αντίστροφη εικόνα του 1. Αν επιπλέον το $\mathcal{F}_x$ είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο και $\mathcal{F}$ ακυκλικό, τότε η συνθήκη κανονικοποίησης στο 3. παίρνει την απλή μορφή:

$$L(Spec(\mathbb{F}_q), \mathcal{F}) = \frac{1}{det([Id - Fr_x]|_{\mathcal{F}_x})}$$

Υπενθυμίζουμε ότι, αν $X = Spec(\mathbb{F}_q)$, η κατηγορία των δραγμάτων από R-πρότυπα θα είναι ισοδύναμη με την κατηγορία των συνεχών αναπαραστάσεων της $G = Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ στα R-πρότυπα, με την απόλυτη ομάδα Galois να παράγεται τοπολογικά από τον Fr_x. Αφού εδώ για την ομάδα ομάδα Weil $W_{\mathbb{F}_q} \subset G$ (ακέραιες δυνάμεις του Fr_x) θα έχουμε ότι $W_{\mathbb{F}_q} \simeq \mathbb{Z}$, έπεται ότι οι 1-διάστατοι μιγαδικοί χαρακτήρες θα παραμετροποιούνται από το $\mathbb{C}^{\times}$ και άρα γράφονται στη μορφή: $Fr_x \mapsto q^{-s}$, για κάποιο $s \in \mathbb{C}$ ενώ συμβολίζουμε με $\mathbb{C}(s)$ τη 1-διάστατη αναπαράσταση που αντιστοιχεί σε αυτόν τον χαρακτήρα. Συμβολίζουμε επίσης με

$\mathcal{F}(s)$ το δράγμα που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση $\mathcal{F}_x \times \mathbb{C}(s)$, όπου $\mathcal{F}$ δράγμα $\mathbb{C}$-διανυσματικών χώρων. Τότε, αν το $\mathcal{F}(s)$ είναι ακυκλικό θα έχουμε:

$$L(Spec(\mathbb{F}_q), \mathcal{F}(s)) = \frac{1}{det([Id - p^{-s}Fr_x]|_{Fr_x})}$$

Αυτός ακριβώς είναι ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζονται οι αναλυτικοί παράγοντες Euler στην μιγαδική θεωρία των L-συναρτήσεων καθώς διατρέχουμε τις αναπαραστάσεις σε μια κανονική μονοπαραμετρική οικογένεια.

Παρατήρηση 4.1.4. *Για γενικότερα σχήματα, έστω $S \subset X_0$ πεπερασμένο, όπου X_0 τα κλειστά σημεία του X και $U_S = X \backslash S$. Τότε, η πολλαπλασιαστική ιδιότητα δίνει:*

$$L(X, \mathcal{F}) = L(U_S, \mathcal{F}) \prod_{y \in S} L(Spec(k(y)), \mathcal{F}_y)$$

όπου $k(y)$ το (πεπερασμένο) σώμα υπολοίπων στο y. Αν καθώς το S μεγαλώνει, το όριο υπάρχει, θα πρέπει να έχουμε:

$$L(X, \mathcal{F}) = L(gen, \mathcal{F}) \prod_{y \in X_0} L(Spec(k(y)), \mathcal{F}_y)$$

όπου gen το generic σημείο. Για πιο γενικούς δακτυλίους συντελεστών από το $\mathbb{C}$, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν δράγματα Weil που αντιστοιχούν σε l-αδικά δράγματα. Τότε, η συνήθης εικασία των Hasse-Weil για motives υποθέτει τότε ότι αν το $\mathcal{F}$ είναι motivic, τότε ορίζεται η $L(X, \mathcal{F}(s))$ έτσι ώστε να είναι μερόμορφη στο s ενώ στους πόλους συνεισφέρουν μόνο τα τετριμμένα δράγματα.

4.1α΄ Δράση Chern-Simons

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τι δομή θα έχει ένα αριθμητικό ανάλογο (για αριθμητικές καμπύλες) της δράσης Chern-Simons στην 2+1 ΤΚΘΠ, πάνω σε χώρους αναπαραστάσεων Galois.

Έστω $X = Spec(\mathcal{O}_F)$ σχήμα, όπου $\mathcal{O}_F$ ο δακτύλιος των αλγεβρικών ακεραίων ενός σώματος αριθμών F. Υποθέτουμε χάριν απλότητας ότι το F ολικά φανταστικό. Έστω $\mathbb{G}_m$ το étale δράγμα της πολλαπλασιαστικής ομάδας των μονάδων $O_X^\times$. Τότε, από τη δυϊκότητα Artin-Verdier (πρβλ. Παράρτημα), θα έχουμε τον εξής ισομορφισμό:

$$inv : H^3(X, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

όπου inv η αναλλοίωτη απεικόνιση Hasse της τοπικής θεωρίας κλάσεων σωμάτων. Έστω τώρα το προ-δράγμα $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim_i \mu_{p^i}$ ως σύστημα συντελεστών, όπου $\mu_n \subset \mathbb{G}_m$ το υποδράγμα των n-οστών ριζών της μονάδας. Τότε, έχουμε τον εξής ισομορφισμό:

Πρόταση 4.1.5.

$$inv : H^3(X, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathbb{Z}_p$$

Απόδειξη. Έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία:

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\cdot)^n} \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m/(\mathbb{G}_m)^n \to 0$$

Όμως, αφού $H^2(X, \mathbb{G}_m) = 0$ και $H^i(X, \mathbb{G}_m/(\mathbb{G}_m)^n) = 0$, για κάθε $i \geq 1$ [57] έπεται πως διασπώντας την ακολουθία σε δύο ακριβείς ακολουθίες: $0 \to \mu_n \to$

$\mathbb{G}_m \xrightarrow{(\cdot)^n} \mathcal{K}_n \to 0$ και $0 \to \mathcal{K}_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m/(\mathbb{G}_m)^n \to 0$ θα έχουμε ότι: $H^2(X, \mathcal{K}_n) = 0$ και άρα $H^3(X, \mu_n) \simeq \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, η n-στρέψη στο $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Παίρνοντας αντίστροφο όριο πάνω από το $n = p^i$, έχουμε τον ζητούμενο ισομορφισμό. □

Παρατήρηση 4.1.6. *Με βάση το MKR λεξικό της αριθμητικής τοπολογίας [95], το γεγονός ότι δοθέντος ενός πεπερασμένου συνόλου πρώτων S, το $X_S = Spec(\mathcal{O}_F[\frac{1}{S}])$ οφείλει να ερμηνευθεί ως μια 3-διάστατη πολλαπλότητα με μη-κενό σύνορο που δίνεται από ένωση τόρων (ένας για κάθε 'κόμβο' στο S), πρέπει να μας υπενθυμίζει τους βασικούς μορφισμούς σε μια 2-διάστατη ΤΚΘΠ. Από αυτή την άποψη, το σύστημα συντελεστών $\mathbb{G}_m$ του πρώτου ισομορφισμού αναλογεί στο S^1-σύστημα συντελεστών της κλασικής θεωρίας Chern-Simons. Πιο συγκεκριμένα, έστω M να είναι μία μιγαδική πολλαπλότητα και $\mathcal{O}_M^\times$ το δράγμα των αντιστρέψιμων αναλυτικών συναρτήσεων στην M. Τότε για συμπαγείς πολλαπλότητες Kähler με $c_i(L) = 0$ κλάσεις Chern για τις δέσμες γραμμών, θα έχουμε από θεωρία Hodge τον εξής ισομορφισμό σύγκρισης:*

$$H^1(M, S^1) \simeq H^1(M, \mathcal{O}_M^\times)$$

Αυτό μας προϊδεάζει πως στην αριθμητική περίπτωση, χωρίς το φυσιολογικό σταθερό δράγμα των S^1, το συνήθες δράγμα $\mathbb{G}_m$ θα έχει μια τοπολογική χροιά. Σημειώνουμε επίσης, πως η δομή αυτή συνδέεται άμεσα με την αναλυτική πλευρά όπως παρατηρήσαμε και στην υποενότητα με τις στρέψεις.

Έστω $b : Spec(\bar{F}) \to X$ ένα γεωμετρικό σημείο και $\pi = \pi_1^{ét}(X, b)$. Υποθέτουμε ότι $\mu_n(\bar{F}) \subset F$ και σταθεροποιούμε έναν ισομορφισμό $\zeta_n : \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mu_n$. Τότε,

$$inv : H^3(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H^3(X, \mu_n) \simeq \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

Έστω τώρα A μια πεπερασμένη ομάδα και κλάση $c \in H^3(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Ορίζουμε ως $\mathcal{M}(A) := Hom_{\text{cont}}(\pi, A)/A$ το σύνολο των κλάσεων ισομορφισμών από πρωτεύουσες A-δέσμες επί του X (η A δρα μέσω συζυγίας). Σε κάθε $[\rho] \in \mathcal{M}(A)$ θα αντιστοιχεί η κλάση $\rho^*(c) \in H^3(\pi, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ που θα εξαρτάται μόνο από την κλάση ισομορφισμού $[\rho]$. Συμβολίζοντας με inv τη σύνθεση

$$H^3(\pi, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^3(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

θα επάγεται συνάρτηση: $CS_c : \mathcal{M}(A) \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ μέσω της $[\rho] \mapsto \mathrm{inv}(\rho^*(c))$.

Παράδειγμα 4.1.7. *Έστω $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\alpha \in H^1(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ η κλάση του ταυτοτικού στοιχείου και $\beta \in H^2(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ η κλάση της επέκτασης ομάδων:*

$$0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Τότε, $\beta = \delta\alpha$, όπου $\delta : H^1(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^2(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ο συνοριακός τελεστής που προκύπτει από την επέκταση. Από τη θεωρία συνομολογίας των πεπερασμένων κυκλικών ομάδων [3] θα έχουμε τον ισομορφισμό:

$$(\cdot) \cup \beta : H^1(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^3(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Θέτουμε, $c := \alpha \cup \beta = \alpha \cup \delta\alpha \in H^3(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Τότε,

$$CS_c([\rho]) = inv[\rho^*(\alpha)\delta\rho^*(\alpha)]$$

σε πλήρη αναλογία με την αβελιανή θεωρία Chern-Simons.

Έστω τώρα n φυσικός αριθμός και S πεπερασμένο σύνολο πρώτων στο $\mathcal{O}_F$ (π.χ όλοι οι πρώτοι που διαιρούν το n). Έστω $\pi_S := \pi_1^{\acute{e}t}(X_S, b)$, $\pi_v = Gal(\bar{F}_v/F_v)$ και $i_S := \{i_v\}_{v\in S}$ με $i_v : \pi_v \to \pi_S$ να επάγονται από τις εμφυτεύσεις $\bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_v$. Έστω επίσης $Y_S(A) := Hom_{cont}(\pi_S, A)$ και $\mathcal{M}_S(A)$ το groupoid δράσης, τα αντικείμενα του οποίου θα δίνονται από τα στοιχεία του $Y_S(A)$ και οι μορφισμοί από την δράση συζυγίας του A. Τοπικά θα έχουμε: $Y_{loc}^S(A) = \prod_{v\in S} Hom_{cont}(\pi_v, A)$ ενώ για το groupoid $\mathcal{M}_{loc}^S(A)$ τα αντικείμενα θα δίνονται από τα $Y_{loc}^S(A)$ και οι μορφισμοί από τη δράση της $A^S := \prod_{v\in S} A$ μέσω συζυγίας των συνιστωσών. Επομένως, επάγεται ο συναρτητής περιορισμού:

$$r_S : \mathcal{M}_S(A) \to \mathcal{M}_{loc}^S(A)$$

όπου ο ομομορφισμός $\rho : \pi_S \to A$ θα είναι ο περιορισμός στη συλλογή $i_S^*(\rho) := (\rho \circ i_v)_{v\in S}$ και το A θα είναι η διαγώνια εμφύτευση στην A^S. Θα ορίσουμε τώρα έναν συν-κύκλο $c \in Z^3(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ έτσι ώστε να αντιστοιχεί έναν $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-torsor σε κάθε σημείο του $Y_{loc}^S(A)$ με έναν A^S-equivariant τρόπο (επομένως θα αποτελεί ένα πεπερασμένο αριθμητικό ανάλογο της Chern-Simons δέσμης γραμμών επί του $\mathcal{M}_{loc}^S$ [97]). Έστω $C_S^i := \prod_{v\in S} C^i(\pi_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ οι συνεχείς συν-αλυσίδες, $Z_S^i := \prod_{v\in S} Z^i(\pi_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subset C_S^i$ οι συνεχείς συν-κύκλοι και $B_S^i := \prod_{v\in S} B^i(\pi_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subset Z_S^i \subset C_S^i$ τα συνεχή συν-σύνορα αντίστοιχα και τελεστής συν-συνόρων $d : C_S^2 \to Z_S^3$. Έστω επίσης $\rho_S := (\rho_v)_{v\in S} \in Y_{loc}^S(A)$ ενώ $c \circ \rho_S := (c \circ \rho_v)_{v\in S}$ και $c \circ Ad_\alpha := (c \circ Ad_{\alpha_v})_{v\in S}$, όπου $\alpha = (\alpha_v)_{v\in S} \in A^S$ με Ad_{α_v} η συζυγής δράση. Προκειμένου να ορίσουμε την αριθμητική Chern-Simons δέσμη γραμμών που αντιστοιχεί στην ρ_S χρειαζόμαστε το ενδιάμεσο αντικείμενο:

$$H(\rho_S) := d^{-1}(c \circ \rho_S)/B_S^2 \subset C_S^2/B_S^2$$

Το αντικείμενο αυτό θα αποτελεί torsor (Θεώρημα 7.1.8 [3]) για την $H_S^2 := \prod_{v\in S} H^2(G_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \prod_{v\in S} \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ και μέσω της απεικόνισης άθροισης:

$$\prod_{v\in S} \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

τελικά ανυψώνεται σε έναν $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-torsor. Πράγματι, ορίζουμε $L(\rho_S) := \Sigma_*[H(\rho_S)]$, με απεικόνιση άθροισης $\Sigma : H(\rho_S) \to L(\rho_S)$.

Ειδικότερα, η L επεκτείνεται σε έναν συναρτητή από το $\mathcal{M}_{loc}^S(A)$ στην κατηγορία των $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-torsors. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να εξωθήσουμε (πυσηφορωαρδ) το H σε έναν συναρτητή για H_S^2-torsors.

Λήμμα 4.1.8. *Για κάθε $\alpha = (\alpha_v)_{v\in S} \in A^S$ και για κάθε v, υπάρχει $h_{\alpha_v} \in C^2(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ έτσι ώστε:*

$$c \circ Ad_{\alpha_v} = c + dh_{\alpha_v}$$

$$h_{\alpha_v \beta_v} = h_{\alpha_v} \circ Ad_{\beta_v} + h_{\beta_v}$$

Επομένως, για $\alpha : \rho_S \to \rho_S^{'}$ έτσι ώστε $\rho_S^{'} = Ad_\alpha \circ \rho_S$ ορίζουμε την απεικόνιση $H(\alpha) : H(\rho_S) \to H(\rho_S^{'})$ μέσω της $x \mapsto x' = x + (h_{\alpha_v} \circ \rho_v)_{v\in S}$. Τότε θα έχουμε διαδοχικά ότι, $dx' = dx + (d(h_{\alpha_v} \circ \rho_v))_{v\in S} = (c \circ \rho_v)_{v\in S} + (d(h_{\alpha_v}) \circ \rho_v)_{v\in S} = (c \circ Ad_{\alpha_v} \circ \rho_v)_{v\in S}$. Επομένως, $x' \in d^{-1}(c \circ \rho_S^{'})/B_S^2$ και άρα από τον παραπάνω τύπο το H θα είναι συναρτητής. Πράγματι, το ab θα στέλνει το x στο $x + h_{ab} \circ \rho_S$, ενώ εφαρμόζοντας πρώτα το b παίρνουμε: $x + h_b \circ \rho_S \in H(Ad_b \circ \rho_S)$ που έπειτα μέσω του a απεικονίζεται στο $x + h_b \circ \rho_S + h_a \circ Ad_b \circ \rho_S$ και άρα

$H(ab) = H(a)H(b)$. Ορίζοντας $L(a) = \Sigma_* \circ H(a)$ το L θα είναι πλέον ένας συναρτητής από το M_{loc}^S στους $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-torsors και μάλιστα ο L ορίζει έναν A^S-equivariant $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-torsor στο $Y_{loc}^S(A)$ ή ισοδύναμα έναν $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-torsor στη στοίβα $\mathcal{M}_{loc}^S(A)$. Έτσι, αν συνθέσουμε τον συναρτητή L με τον συναρτητή περιορισμού $r_S : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_{loc}^S(A)$ θα προκύψει ένας A-equivariant συναρτητής L^{glob} από το $\mathcal{M}_S(A)$ στους $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-torsors.

Λήμμα 4.1.9. *Έστω $\rho \in Y_S(A)$ και $a \in Aut(\rho)$. Τότε, $L^{glob}(a) = 0$*

Απόδειξη. Από υπόθεση $Ad_a\rho = \rho$ και άρα $dh_a \circ \rho = 0$. Δηλαδή, $h_a \circ \rho \in H^2(\pi_S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Από την τοπική-ολική αρχή Hasse για κεντρικές απλές άλγεβρες (Θεώρημα 8.1.17 [3]):

$$0 \to Br(A) \to \bigoplus_p Br(A_p) \xrightarrow{inv} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

θα έχουμε ότι $\Sigma_*(h_a \circ \rho) = 0$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Αποδεικνύεται ότι ([97], σελ. 439) υπάρχει ένας $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$-torsor $L^{\mathrm{inv}}([\rho])$ από αναλλοίωτες τομές για τον συναρτητή L^{glob} που εξαρτάται μόνο από την τροχιά $[\rho]$. Ο συναρτητής αυτός θα δίνεται ως το αντίστροφο όριο όλων των $L^{\mathrm{glob}}(\rho^{'})$ ως προς την κατηγορία δεικτών $[\rho]$ ή πιο αναλυτικά: το σύνολο όλων των οικογενειών με στοιχεία $x_{\rho'} \in L^{\mathrm{glob}}(\rho^{'})$, όπου το $\rho^{'}$ διατρέχει την $[\rho]$ έτσι ώστε κάθε μορφισμός $a : \rho_1 \to \rho_2$ να απεικονίζει το x_{ρ_1} στο x_{ρ_2}.

Αφού τώρα, $H^3(X_S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ (Πρόταση 8.3.18 [3]), ο συν-κύκλος $c \circ \rho$ θα είναι ένα συν-σύνορο $c \circ \rho = d\beta$ για κάθε $\beta \in C^2(\pi_S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Το στοιχείο αυτό θα ορίζει μια κλάση:

$$CS_c([\rho]) := \Sigma([i_S^*(\beta)]) \in L^{\mathrm{inv}}([\rho])$$

Η κλάση $CS_c([\rho])$ θα είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του β. Πράγματι, αν $\beta^{'}$ διαφορετικός αντιπρόσωπος, θα έχουμε ότι: $\beta^{'} = \beta + z$, όπου $z \in Z^2(\pi_S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ κάποιος 2-συν-κύκλος, ο οποίος μηδενίζεται όταν απεικονιστεί στο $L((\rho \circ i)_{v\in S})$.

Περνάμε τώρα στην p-αδική περίπτωση. Έστω p πρώτος και S όπως προηγουμένως. Σταθεροποιώντας ένα συμβατό σύστημα $(\zeta_{p^n})_n$ p^n-στών δυνάμεων ριζών της μονάδας θα έχουμε ισομορφισμό:

$$\zeta : \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim_n \mu_{p^n}$$

Έστω A p-αδική ομάδα Lie. Υποθέτουμε ότι η A είναι εφοδιασμένη με ομομορφισμό $t : A \to \mathbb{Z}_p^\times$ και A^n είναι ο πυρήνας της σύνθεσης:

$$A \to \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$$

Συμβολίζουμε με $A^\infty = \bigcap_n A^n$ και $\Gamma = A/A^\infty = \varprojlim_n \Gamma_n$, όπου $\Gamma_n = A/A^n$.

Ορισμός 4.1.10. *Ορίζουμε ως σύνολο $Y_S(A)$ όλους τους συνεχείς ομομορφισμούς $\rho : \pi_S \to A$ έτσι ώστε:*

(i) *1. Η σύνθεση $t \circ \rho$ να είναι μια δύναμη χ^s του p-αδικού κυκλοτομικού χαρακτήρα της π_S, όπου s μια p-αδική μονάδα.*

(ii) *2. Οι εικόνες των $t(A)$ και $t \circ \rho$ στο $\mathbb{Z}_p^\times$, ταυτίζονται.*

Όπως και προηγουμένως, η A δρα στο $Y_S(A)$ μέσω συζυγίας. Πλέον όμως, θα περιορίσουμε τη δράση στο A^∞ και θα συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_S(A)$ το αντίστοιχο groupoid δράσης. Έστω $F_n := F(\mu_{p^n})$ και $X_S^n = Spec(\mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{S}])$, όπου $\mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{S}]$ η ακέραιη-κλειστότητα του $\mathcal{O}_F[\frac{1}{S}]$ στο F_n. Έπεται ότι η $\pi_S^n := \pi_1^{\acute{e}t}(X_S^n, b)$ θα είναι μια φθίνουσα ακολουθία από ανοικτές υποομάδες της π_S και για κάθε $\rho \in Y_S(A)$ θα έχουμε ότι $\pi_S^n = \rho^{-1}(A^n)$. Επιπρόσθετα, από τον παραπάνω ορισμό, θα έχουμε ισομορφισμούς: $\pi_S/\pi_S^n \simeq \Gamma_n$. Σταθεροποιούμε τώρα ένα αντίστροφο όριο από κλάσεις:

$$c = (c_n) \in \varprojlim_n H^3(A^n, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

όπου η απεικόνιση:

$$H^3(A^{n+1}, \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}) \to H^3(A^n, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

ορίζεται να είναι η σύνθεση της φυσικής προβολής στην $H^3(A^{n+1}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ και του συν-περιορισμού:

$$cores : H^3(A^{n+1}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^3(A^n, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

Από το Λήμμα Shapiro, το c μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν συν-κύκλο στην $Z^3(A, \mathbb{Z}_p[[\Gamma]])$, όπου $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[\Gamma_n]$. Αποδεικνύεται ότι [98] για κάθε $\rho \in Y_S(A)$, αν και ο ισομορφισμός $\zeta : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p(1)$ δεν είναι ο ίδιος π_S-equivariant επάγει παρ'όλα αυτά μία απεικόνιση:

$$\zeta : \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \Lambda := \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\Gamma_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mu_{p^n}$$

η οποία είναι π_S-equivariant ισομορφισμός. Επομένως, προκύπτει ένας συν-κύκλος $\zeta \circ \rho^* c = \zeta \circ c \circ \rho \in Z^3(\pi_S, \Lambda)$. Συμβολίζοντας ξανά με $Z_S^i(\Lambda) = \prod_{v \in S} Z^i(\pi_v, \Lambda)$, έχουμε ότι ο περιορισμός ενός στοιχείου $\zeta \circ \rho^* c$ δίνει ένα στοιχείο:

$$i_S^*(\zeta \circ \rho^* c) := (\zeta \circ \rho^* c \circ i_v)_{v \in S} \in Z_S^3(\Lambda)$$

Θέτουμε λοιπόν:

$$H(\rho, \Lambda) := d^{-1}(i_S^*(\zeta \circ \rho^* c))/B_S^2(\Lambda) \subset C_S^2(\Lambda)/B_S^2(\Lambda)$$

ο οποίος θα είναι $H_S^2(\Lambda) \simeq \prod_{v \in S} \mathbb{Z}_p$-torsor. Πράγματι, πάλι από το Λήμμα Shapiro θα έχουμε ότι:

$$H^2(\pi_v, \Lambda) \simeq \varprojlim_n H^2(Gal(\bar{F}_v/F_v(\mu_n)), \mu_n) = \varprojlim_n \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

Οι απεικονίσεις συν-περιορισμού στην συνομολογία επάγουν μεταθετικά διαγράμματα (Πόρισμα 7.1.4, [3]):

$$\begin{tikzcd}
H^2(Gal(\bar{F}_v/F_v(\mu_{mn})), \mu_n) \arrow[r, "inv"] \arrow[d, "cores"'] & \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "id"] \\
H^2(Gal(\bar{F}_v/F_v(\mu_n)), \mu_n) \arrow[r, "inv"] & \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την απεικόνιση άθροισης $\Sigma : \prod_{v\in S} \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ μπορούμε να ανυψώσουμε τον torsor σε $\mathbb{Z}_p$-torsor, ορίζοντας:

$$L^{\mathrm{glob}}(\rho) := \Sigma_*(H(\rho, \Lambda))$$

και όπως προηγουμένως, να τον εξωθήσουμε σε έναν συναρτητή στην $\mathcal{M}_S(A)$, λαμβάνοντας όμως αυτή τη φορά υπ'όψιν τη δράση του A^∞. Αποδεικνύεται τότε, πως και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μοναδικός $\mathbb{Z}_p$-torsor $L^{\mathrm{inv}}([\rho])$ από αναλλοίωτες τομές που εξαρτώνται μόνο από την A^∞-τροχιά $[\rho]$. Έστω τώρα $\beta \in C^2(\pi_S, \Lambda)$ έτσι ώστε $d\beta = \zeta \circ c \circ \rho \in Z^3(\pi_S, \Lambda) = B^3(\pi_S, \Lambda)$. Τότε, ορίζουμε ως p-αδική δράση Chern-Simons το στοιχείο:

$$CS_c([\rho]) := \Sigma(i_S^* \beta) \in L^{\mathrm{inv}}([\rho])$$

και ακριβώς όπως προηγουμένως, αποδεικνύεται πως είναι καλά-ορισμένο, ως ανεξάρτητο του β.

Επιστρέφοντας τώρα στην ειδική περίπτωση που μας ενδιαφέρει, έστω $X = Spec(\mathcal{O}_F)$ και $X_S = Spec(\mathcal{O}_F[\frac{1}{S}])$ με S πεπερασμένο σύνολο πρώτων. Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, η p-αδική L-συνάρτηση θα είναι μία τομή του $\mathcal{D}$ στον $\mathcal{M}_S$:

$$L(X, \cdot) \in \Gamma(\mathcal{M}_S, \mathcal{D})$$

Με βάση την αναλογία, η τομή αυτή εικάζεται να είναι (τουλάχιστον σε ειδικές περιπτώσεις) η τομή CS_c που κατασκευάσαμε:

$$CS_c(\cdot) \simeq log L(X, \cdot)$$

Για να έχει νόημα η παραπάνω ταύτιση, θα πρέπει να βρεθεί ένας αυστηρός τρόπος να συσχετιστούν οι $\mathbb{Z}_p$-torsors με τις determinant δέσμες γραμμών. Δυστυχώς, μια τέτοια κατασκευή δεν είναι διαθέσιμη ούτε καν στην τοπολογική περίπτωση της θεωρίας Chern-Simons. Από την άλλη πλευρά, έστω $r_S : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_{loc}^S$ ο συναρτητής περιορισμού από την moduli στοίβα των p-αδικών αναπαραστάσεων της π_S στην moduli στοίβα της $(\rho_v)_{v\in S}$, όπου ρ_v μια p-αδική αναπαράσταση της π_v. Πρέπει επίσης να είμαστε σε θέση να ορίσουμε αυστηρά τον moduli χώρο των $GL(n, \Lambda)$ αναπαραστάσεων, όπου Λ η άλγεβρα Iwasawa κατά τέτοιο τρόπο ώστε η εικόνα μέσω της δυϊκότητας Tate-Poitou (που αποτελεί το αριθμητικό ανάλογο της δυϊκότητας Lefschetz-Poincare) να γίνεται το ανάλογο μιας Λαγκρανζιανής! Υπάρχει πράγματι μία determinant δέσμη γραμμών $\mathcal{D}_{loc}^S$ στον $\mathcal{M}_{loc}^S$ η οποία προκύπτει από την ορίζουσα της τοπικής συνομολογίας. Αν σε αυτή την περίπτωση υπήρχε μια κβαντική θεωρία Chern-Simons, θα είχαμε μια 'κυματοσυνάρτηση':

$$\Psi_S \in \Gamma(\mathcal{M}_{loc}^S, [\mathcal{D}_{loc}^S]^{-1})$$

Και από την ακρίβεια στη συνομολογία συμπαγούς φορέα στην p-αδική θεωρία Hodge [99]:

$$R\Gamma_c(X_S, \mathcal{F}) \to R\Gamma(X_S, \mathcal{F}) \to \prod_{v\in S} R\Gamma(Spec(F_v), \mathcal{F}) \to R\Gamma_c(X_S, \mathcal{F})$$

θα επάγεται ισομορφισμός:

$$[r_S^* \mathcal{D}_{loc}^S]^{-1} \otimes \delta \simeq \mathcal{D}$$

όπου $\delta := \mathcal{D}^o$ η determinant δέσμη γραμμών που προκύπτει από τη συνομολογία χωρίς φορέα. Αν υποθέσουμε ότι ο r_S είναι μονικός έτσι ώστε το $\mathcal{M}_S$ να είναι μία Λαγκρανζιανή υποπολλαπλότητα του $\mathcal{M}_{loc}^S$, τότε η αναλογία μάς προϊδεάζει πως πρέπει να υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\Gamma(\mathcal{M}_S, \mathcal{D}) \simeq \Gamma(\mathcal{M}_S, [\mathcal{D}_{loc}^S|_{\mathcal{M}_S}]^{-1} \otimes \delta) \simeq \Gamma(\mathcal{M}_{loc}^S, [\mathcal{D}_{loc}^S]^{-1})$$

ο οποίος θα προκύπτει από ένα ανάλογο της 'κβάντωσης των ημι-κλασικών καταστάσεων' (7.3 [100]). Σε αυτή την περίπτωση, θα είχε νόημα να συγκρίνουμε τις κυματοσυναρτήσεις Chern-Simons με τις p-αδικές L-συναρτήσεις. Για παράδειγμα, η σύγκριση της θεωρίας Chern-Simons στα X_S και X_T, όπου $T = S \cup \{v\}$ με το X_S να μπορεί να ιδωθεί ως το αποτέλεσμα της συγκόλλησης με έναν συμπαγή τόρο στο X_T. Κατ'επέκταση μπορούν να προκύψουν περαιτέρω αναλογίες μεταξύ της πολλαπλασιαστικότητας των L-συναρτήσεων και των τύπων συγκόλλησης των κυματοσυναρτήσεων Chern-Simons μέσω κάποιου αριθμητικού αναλόγου της στρέψης Reidemeister. Εξ'άλλου, ο Witten έχει παρατηρήσει ήδη [101] πως η τετραγωνική ρίζα της στρέψης Reidemeister είναι αυτή που τελικά εμφανίζεται ως η κύρια συνεισφορά στις ημι-κλασικές κυματοσυναρτήσεις Chern-Simons.

Παράρτημα Α'

Χρήσιμες έννοιες

Α'.1 Θεωρία κλάσεων σωμάτων

Έστω $F = \mathbb{F}_q$ πεπερασμένο σώμα, $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$, M ένα πεπερασμένο Galois G-πρότυπο και $M^* = Hom(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, το δυϊκό πρότυπο Pontryagin. Η δράση της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ στο M^* ορίζεται ως: $(g\phi)(x) := \phi(g^{-1}x), g \in G, \phi \in M^*, x \in M$. Τότε, το cup product:

$$H^i(\mathbb{F}_q, M^*) \times H^{1-i}(\mathbb{F}_q, M) \to H^1(\mathbb{F}_q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

δίνει ένα μη-εκφυλισμένο pairing μεταξύ πεπερασμένων αβελιανών ομάδων για $i = 0, 1$. Επομένως, $dim_{\text{ét}}Spec(\mathbb{F}_q) = 1$. Ειδικότερα, αν η G δρα τετριμμένα στο M (δεδομένου ότι $\pi_1^{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{F}_q)) = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \hat{\mathbb{Z}})$, το pairing αυτό ανάγεται απλά στην δυϊκότητα $M \simeq M^{**}$.

Έστω τώρα $k_\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$-αδικό σώμα, $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p})$, M πεπερασμένο Galois G-πρότυπο και $M^{'} := Hom(M, k_\mathfrak{p}^\times)$ ο δυϊκός Tate (συστροφή Tate του M^*). Τότε, η δράση της $\mathrm{Gal}(\bar{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p})$ ορίζεται ως: $(g\phi)(x) := g\phi(g^{-1}x), g \in G, \phi \in M^*, x \in M$. Τότε,

Θεώρημα Α'.1.1. *(Τοπική δυϊκότητα Tate)*

$$H^i(k_\mathfrak{p}, M^{'}) \times H^{2-i}(k_\mathfrak{p}, M) \to H^2(k_\mathfrak{p}, \bar{k}_\mathfrak{p}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Κατ'επέκταση, έχουμε ένα μη-εκφυλισμένο pairing μεταξύ πεπερασμένων αβελιανών ομάδων για $i = 0, 1, 2$ και άρα $dim_{\acute{e}t}Spec(k_\mathfrak{p}) = 2$. Στην ειδική περίπτωση όπου $i = 1$ και $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ θα έχουμε $M' = \mu_n$. Επομένως, αφού $H^1(k_\mathfrak{p}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = Hom_{cont}(\mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{ab}/k_\mathfrak{p}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ και από Θεωρία Kummer έχουμε ότι $H^1(k_\mathfrak{p}, \mu_n) = k_\mathfrak{p}^\times/(k_\mathfrak{p})^n$, η τοπική δυϊκότητα Tate θα επάγει ισομορφισμό:

$$k_\mathfrak{p}^\times \Big/ (k_\mathfrak{p})^n \simeq \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{ab}/k_\mathfrak{p}) \Big/ n\mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{ab}/k_\mathfrak{p})$$

Οπότε, στο προβολικό όριο παίρνουμε τον ομομορφισμό αντιστροφής της τοπικής θεωρίας κλάσεων σωμάτων: $\rho_{k_\mathfrak{p}} : k_\mathfrak{p}^\times \to \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{ab}/k_\mathfrak{p})$, που είναι 1-1 και έχει πυκνή εικόνα. Επιπλέον, παίρνοντας την εφέλκυση (pullback) θα έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των ανοικτών υποομάδων της $\mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{ab}/k_\mathfrak{p})$ και του συνόλου των ανοικτών υποομάδων της $k_\mathfrak{p}^\times$ πεπερασμένου δείκτη. Έστω $\widetilde{k_\mathfrak{p}}$ η μέγιστη, αδιακλάδιστη επέκταση του $k_\mathfrak{p}$. Τότε, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & k_{\mathfrak{p}}^{\times} \arrow[r, "v_p"] \arrow[d, "\rho_{k_{\mathfrak{p}}}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\subset"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{ab}/\tilde{k}_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{ab}/k) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\tilde{k}_{\mathfrak{p}}/k) = \hat{\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Η εμφύτευση στο δεξί μέρος του διαγράμματος στέλνει το 1 στον αυτομορφισμό Frobenius $\sigma_{\mathfrak{p}}$, επομένως $\rho_{k_{\mathfrak{p}}}(\pi) = \sigma_{\mathfrak{p}}$, όπου π πρώτο στοιχείο του $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ με $v_{\mathfrak{p}}(\pi) = 1$ (uniformizer).

Για μία πεπερασμένη, αβελιανή επέκταση $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ ορίζουμε ομομορφισμό αντιστροφής: $\rho_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}} : k_{\mathfrak{p}}^{\times} \to \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ συνθέτοντας την $\rho_{k_{\mathfrak{p}}}$ με την φυσική προβολή $\mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{ab}/k_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$. Τότε, η $\rho_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}$ επάγει ισομορφισμό:

$$k_{\mathfrak{p}}^{\times} \Big/ N_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}(K_{\mathfrak{P}}^{\times}) \simeq \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$$

και έπεται ότι κάθε ανοικτή υποομάδα της $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ πεπερασμένου δείκτη προκύπτει από την ομάδα νόρμα της πολλαπλασιαστικής ομάδας μιας πεπερασμένης, αβελιανής επέκτασης του $k_{\mathfrak{p}}$. Επιπλέον, θα έχουμε ότι η $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ είναι αδιακλάδιστη αν και μόνο εάν $\rho_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}) = id_{K_{\mathfrak{P}}}$, δηλαδή $N_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^{\times}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$, όπου στην περίπτωση μας σημαίνει ότι $\rho_{k_{\mathfrak{p}}}(x) = \sigma^{v_{\mathfrak{p}}(x)}$, με $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ ο αυτομορφισμός Frobenius. Από την άλλη πλευρά, αν $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ ολικά διακλαδιζόμενο, τότε ο περιορισμός $\rho_{k_{\mathfrak{p}}}|_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}^{\times}}}$ επάγει ισομορφισμό:

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \Big/ N_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^{\times}) \simeq \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$$

Έστω τώρα ότι το $k_{\mathfrak{p}}$ περιέχει μια πρωτογενή n-στη ρίζα της μονάδας για κάποιο $n \geq 2$. Τότε, ορίζουμε ως σύμβολο Hilbert:

$$(\frac{*}{\mathfrak{p}})_n : k_{\mathfrak{p}}^{\times} \Big/ (k_{\mathfrak{p}}^{\times})^n \times k_{\mathfrak{p}}^{\times} \Big/ (k_{\mathfrak{p}}^{\times})^n \to \mu_n$$

μέσω της

$$(\frac{a,b}{\mathfrak{p}})_n := \frac{\rho_{k_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{a})/k_{\mathfrak{p}}}(b)}{\sqrt[n]{a}}$$

το οποίο είναι αμφι-πολλαπλασιαστικό, αντισυμμετρικό και ισχύει ότι $(\frac{a,b}{\mathfrak{p}})_n = 1$ αν και μόνο εάν $b \in N_{k_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{a})/k_{\mathfrak{p}}}(k_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{a})^{\times})$. Όταν η $k_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{a})/k_{\mathfrak{p}}$ είναι αδιακλάδιστη επέκταση (π.χ αν $a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$) τότε ορίζεται το σύμβολο υπολοίπων n-στών δυνάμεων ως: $(\frac{a}{\mathfrak{p}})_n := (\frac{a,\pi}{\mathfrak{p}})_n = \frac{\sigma(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}}$, όπου $\sigma = \rho_{k_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{a})/k_{\mathfrak{p}}(\pi)} \in \mathrm{Gal}(k_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{a})/k_{\mathfrak{p}})$ ο αυτομορφισμός του Frobenius. Τότε, θα έχουμε $(\frac{a}{\mathfrak{p}})_n = 1$ αν και μόνο εάν $a \in (k_{\mathfrak{p}}^{\times})^n$, δηλαδή $a \mathrm{mod} \mathfrak{p} \in (\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}^{\times})^n$. Επομένως, για $k_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p$ όπου p περιττός πρώτος και $(a,p) = 1$, το $(\frac{a}{p})_2$ θα ταυτίζεται με το σύμβολο Legendre. Για τοπικά σώματα χαρακτηριστικής 0 ισχύουν τα ανάλογα, αλλά χρησιμοποιούμε πλέον τις τροποποιημένες ομάδες συνομολογίας Tate. Για παράδειγμα, έστω M πεπερασμένο $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-πρότυπο και $M' = Hom(M, \mathbb{C}^{\times})$ με την δράση όπως ορίστηκε παραπάνω. Τότε, το cup product:

$$\hat{H}^i(\mathbb{R}, M') \times \hat{H}^{2-i}(\mathbb{R}, M) \to H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{\times}) \simeq \mathbb{F}_2$$

δίνει ένα μη-εκφυλισμένο pairing πεπερασμένων αβελιανών ομάδων, για κάθε $i \in \mathbb{Z}$. Έτσι, για $i = 1$ και $M = \mu_2$ θα έχουμε τον ισομορφισμό:

$$\rho_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : \mathbb{R}^\times \Big/ (\mathbb{R}^\times)^2 = H^1(\mathbb{R}, \mu_2) \simeq H^1(\mathbb{R}, \mathbb{F}_2)^* = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$$

και ο ομομορφισμός αντιστροφής $\rho_\mathbb{R} : \mathbb{R}^\times \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ ορίζεται να είναι η σύνθεση της φυσικής προβολής $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2$ με την απεικόνιση $\rho_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$. Άρα η $\rho_\mathbb{R}$ είναι επιμορφισμός και $ker(\rho_\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times$ (η συνεκτική συνιστώσα του 1).

Έστω τώρα k σώμα αριθμών και $X = Spec\mathcal{O}_k$. Ένα étale δράγμα M από αβελιανές ομάδες στον X θα καλείται *κατασκευάσιμο* εάν κάθε stalk του M είναι πεπερασμένο και επιπλέον υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο του $U \subset X$ έτσι ώστε το $M|_U$ να είναι τοπικά σταθερό. Θα χρησιμοποιήσουμε τις τροποποιημένες ($i \in \mathbb{Z}$) ομάδες συνομολογίας étale [54], [55], [56] προκειμένου να συμπεριλάβουμε και τους πρώτους στο άπειρο. Έστω $M' := Hom(M, \mathbb{G}_{m,X})$, όπου $\mathbb{G}_{m,X}$ το étale δράγμα στο X που αντιστοιχεί σε κάθε συνεκτική, πεπερασμένη étale επικάλυψη $SpecB \to X$ την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{G}_{m,X}(Y) = B^\times$. Τότε, το επόμενο Θεώρημα γενικεύει με πολύ κομψό τρόπο τη δυϊκότητα Tate:

Θεώρημα Α′.1.2. *(Δυϊκότητα Artin-Verdier) [57] Έστω M ένα κατασκευάσιμο δράγμα στον X. Τότε, υπάρχει κανονικός ισομορφισμός $\hat{H}^3(X, \mathbb{G}_{m,X}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ και το παρακάτω γινόμενο Yoneda:*

$$\hat{H}^i(X, M') \times Ext_X^{3-i}(M, \mathbb{G}_{m,X}) \to \hat{H}^3(X, \mathbb{G}_{m,X}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

θα δίνει ένα μη-εκφυλισμένο pairing πεπερασμένων αβελιανών ομάδων. Ειδικότερα, $dim_{\acute{e}t} Spec\mathcal{O}_K = 3$

Έστω $U \subset X$ ανοικτό. Θέτουμε $X_0 := Max(\mathcal{O}_K)$ και $U_0 = U \cap Max(\mathcal{O}_K)$. Έστω S_K^∞ το σύνολο των άπειρων πρώτων του K και $S = X \backslash U, \bar{S} = S \cup S_K^\infty$ έτσι ώστε $\pi_1^{\acute{e}t}(U) = \mathrm{Gal}(K_S/K)$. Έστω επίσης M ένα πεπερασμένο $G_S(K)$-πρότυπο (χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό με το τοπικά σταθερό, πεπερασμένο étale δράγμα) και υποθέτουμε ότι: $\#M \in \mathcal{O}(U)^\times$. Τότε, αν $j : U \overset{X}{\hookrightarrow}$ ορίζουμε ένα κατασκευάσιμο δράγμα $j_! M$ στο X ως εξής: για κάθε πεπερασμένη étale επικάλυψη $h : Y \to X$ θέτουμε $j_! M(Y) := M$ αν $h(Y) \subset U$ και $j_! M(Y) = 0$ διαφορετικά. Τότε, θα έχουμε $Ext_X^i(j_! M, \mathbb{G}_{m,X}) = H^i(U, M')$ και το pairing των Artin-Verdier γίνεται το cup product:

$$\hat{H}^i(X, j_! M) \times H^{3-i}(U, M') \to \hat{H}^3(X, \mathbb{G}_{m,X}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Έστω τώρα $V \subset X$ ανοικτό έτσι ώστε $V \subset U$ και:

$$H_v^{i+1}(X, j_! M) = \begin{cases} H^i(k_\mathfrak{p}, M) & \text{αν } v = \mathfrak{p} \in S \\ H_\mathfrak{p}^{i+1}(U, M) & \text{αν } v = \mathfrak{p} \in U \backslash V \end{cases}$$

ενώ για κάθε $v \in S_k^\infty$:

$$H_v^{i+1}(X, j_! M) = \hat{H}^i(k_v, M)$$

Τότε, εφαρμόζοντας το αξίωμα εκτομής σε μια ακολουθία στη σχετική étale συνομολογία για το ζεύγος $V \subset X$ και παίρνοντας επαγωγικό όριο $\varinjlim_V$ θα έχουμε την εξής μακρά, ακριβή ακολουθία στη συνομολογία:

$$\ldots \to H_c^i(U, M) \to H^i(k, M) \to \bigoplus_{v \in \bar{S}} H^i(k_v, M) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p} \in U_0} H_\mathfrak{p}^{i+1}(U, M) \to H_c^{i+1}(U, M) \to \ldots$$

Τέλος, παίρνουμε επαγωγικό όριο για μικρότερα U (άρα το S μεγαλύτερο) και παρατηρώντας ότι:

$$H^{i+1}_{\mathfrak{p}}(U,M) = coker(H^i(\mathbb{F}_p, M) \to H^i(k_{\mathfrak{p}}, M))$$

καταλήγουμε στην παρακάτω ακριβή ακολουθία 9-όρων:

Θεώρημα Α′.1.3. *(Ακολουθία Tate-Poitou) [3] Έστω M πεπερασμένο $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-πρότυπο, $M' = Hom(M, \bar{k}^{\times})$ και η δράση της G στην M' να δίνεται όπως παραπάνω. Τότε, έχουμε την εξής ακριβή ακολουθία τοπικά-συμπαγών, αβελιανών ομάδων:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(k,M) \arrow[r] & P^0(k,M) \arrow[r] & H^2(k,M')^* \arrow[r] & H^1(k,M) \arrow[d] \\
 & & & & P^1(k,M) \arrow[d] \\
0 & H^0(k,M')^* \arrow[l] & P^2(k,M) \arrow[l] & H^2(k,M')^* \arrow[l] & H^1(k,M')^* \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Στα παραπάνω οι ομάδες συνομολογίας $H^i(k,-), H^i(k_v,-)$ είναι εφοδιασμένες με τη διακριτή τοπολογία και έχουμε θέσει:

$$P^i(k,M) = \prod_{\mathfrak{p}\in X_0}{}' H^i(k_{\mathfrak{p}}, M) \times \prod_{v\in S_k^{\infty}} \hat{H}^i(k_v, M)$$

όπου $\prod'$ το περιορισμένο γινόμενο των $H^i(k_{\mathfrak{p}}, M)$ ως προς τις υποομάδες:

$$H^i_{ur}(k_{\mathfrak{p}}, M) := im(H^i(\mathbb{F}_p, M) \to H^i(k_{\mathfrak{p}}, M))$$

Η τοπολογία των $P^i(k,M)$ δίνεται από την (περιορισμένη) τοπολογία ευθύ γινομένο: αν το U διατρέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X, μια βάση περιοχών για το ταυτοτικό στοιχείο θα δίνεται από τις συμπαγείς ομάδες:

$$\prod_{v\in S_k^{\infty}} \hat{H}^i(k_v, M) \times \prod_{\mathfrak{p}\in S} H^i(k_{\mathfrak{p}}, M) \times \prod_{\mathfrak{p}\in U_0} H^i_{ur}(k_{\mathfrak{p}}, M)$$

Ορίζουμε ως ομάδα των idèles την

$$J_K := \prod_{\mathfrak{p}\in X_0}{}' k_{\mathfrak{p}}^{\times} \times \prod_{v\in S_k^{\infty}} k_v^{\times}$$

όπου $\prod'$ το περιορισμένο γινόμενο των $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ ως προς τα $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ και με διαγώνια εμφύτευση σχηματίζουμε την ομάδα κλάσεων των idèles του k ως το πηλίκο: $C_K = J_k/k^{\times}$. Στην ειδική περίπτωση $M = \mu_n$ η ακριβής ακολουθία Tate-Poitou δίνει διαδοχικά:

$$H^1(k,\mu_n) = k^{\times} \Big/ (k^{\times})^n$$

$$H^2(k,\mu_n) = (Br(k))_n$$

$$P^1(k,\mu_n) = J_k \Big/ J_k^n$$
$$P^2(k,M) = \bigoplus_v ((Br(k_v))_n$$

Αφού,

$$H^1(k,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \mathrm{Gal}(k^{ab}/k) \Big/ n\mathrm{Gal}(k^{ab}/k)$$

και η απεικόνιση τοπικοποίησης:

$$Br(k) \longrightarrow \bigoplus_{v\in X_0\cup S_k^\infty} Br(k_v)$$

είναι 1-1 (αρχή του Hasse για την ομάδα Brauer), θα έχουμε ισομορφισμό:

$$C_k \Big/ C_k^n \simeq \mathrm{Gal}(k^{ab}/k) \Big/ n\mathrm{Gal}(k^{ab}/k)$$

Παίρνοντας προβολικό όριο $\varprojlim_n$ προκύπτει ο ομομορφισμός αντιστροφής: $\rho_k : C_k \to \mathrm{Gal}(k^a b/k)$. Η απεικόνιση αυτή είναι επί και ο $ker(\rho_k)$ συμπίπτει με την συνεκτική συνιστώσα του 1 στην C_k. Όμοια με πριν, μέσω της εφέλκυσης θα έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των ανοικτών υποοομάδων της $\mathrm{Gal}(k^{ab}/k)$ και των ανοικτών υποομάδων της C_k. Η συμβατότητα με την τοπική θεωρία κλάσεων σωμάτων προκύπτει ως εξής: Έστω $\iota_v : k_v^\times \to C_k$ με $a_v \mapsto [(1,\ldots,1,a_v,1,\ldots)]$. Τότε, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} k_v^\times \arrow[r, "\rho_{k_v}"] \arrow[d, "\iota_v"'] & \mathrm{Gal}(k_v^{ab}/k_v) \arrow[d] \\ C_k \arrow[r, "\rho_k"'] & \mathrm{Gal}(k^{ab}/k) \end{tikzcd}$$

Έτσι για μια πεπερασμένη, αβελιανή επέκταση K/k, ορίζεται μέσω σύνθεσης της ρ_k με τη φυσική προβολή $\mathrm{Gal}(k^{ab}/k) \to \mathrm{Gal}(K/k)$, ο λεγόμενος ομομορφισμός αντιστροφής Artin:

$$\rho_{K/k} : C_k \to \mathrm{Gal}(K/k)$$

Η $\rho_{K/k}$ επάγει τον ισομορφισμό:

$$C_k \Big/ N_{K/k}(C_K) \simeq \mathrm{Gal}(K/k)$$

και άρα κάθε ανοικτή υποομάδα της C_k προκύπτει ως η ομάδα νόρμας της ομάδας κλάσεων των idèles μιας πεπερασμένης, αβελιανής επέκτασης του k. Τέλος, το $v \in S_k^\infty$ θα είναι αδιακλάδιστο στην K/k αν και μόνο εάν $\rho_{K/k} \circ \iota_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O}_v^\times) = id$, όπου $\mathcal{O}_v^\times := k_v^\times$.

Παράδειγμα Α΄.1.4. *Έστω $\tilde{k}_+^{ab}$ η μέγιστη, αβελιανή επέκταση του k έτσι ώστε κάθε $\mathfrak{p} \in X_0$ να μη διακλαδίζεται. Τότε, θα έχουμε: $\pi_1^{\acute{e}t,ab}(Spec\mathcal{O}_k) = \mathrm{Gal}(\tilde{k}_+^{ab}/k)$. Επιπρόσθετα, ο ομομορφισμός αντιστροφής ρ_k θα επάγει ισομορφισμό:*

$$J_k \Bigg/ k^x \left(\prod_{v\in S_k^\infty}(k_v^\times)^2 \times \prod_{\mathfrak{p}\in X_0} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times\right) \simeq \mathrm{Gal}(\tilde{k}_+^{ab}/k)$$

Το αριστερό μέλος είναι ισομορφικό με την narrow ομάδα κλάσεων ιδεωδών $H^+(k)$ *μέσω της αντιστοιχίας* $J_k \ni (a_v) \mapsto \prod_{\mathfrak{p}\in X_0} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(a_\mathfrak{p})} \in I_k$. *Άρα, θα έχουμε τον ισομορφισμό:*

$$H^+(k) \simeq \mathrm{Gal}(\tilde{k}_+^{ab}/k)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $\tilde{k}^{ab}$ *είναι η μέγιστη, αβελιανή επέκταση έτσι ώστε κάθε πρώτος του* k *να μη διακλαδίζεται (σώμα κλάσεων Hilbert του* k*), θα έχουμε τον εξής ισομορφισμό:*

$$H(k) \simeq \mathrm{Gal}(\tilde{k}^{ab}/k)$$

όπου $H(k) = cl_k$ *η ομάδα κλάσεων ιδεωδών του* k. *Υπό αυτή την έννοια, ο παραπάνω ισομορφισμός μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα αριθμητικό ανάλογο του θεωρήματος Hurewicz:* $H_1(X) \simeq \mathrm{Gal}(X^{ab}/X)$.

Παράδειγμα Α΄.1.5. *Έστω* S *πεπερασμένο υποσύνολο του* $Max(\mathcal{O}_k)$ *και* k_S^{ab} *η μέγιστη, αβελιανή επέκταση του* k *που παραμένει αδιακλάδιστη έξω από το* $S \cup S_k^\infty$ *έτσι ώστε* $G_S(k)^{ab} = \pi_1^{\acute{e}t,ab}(Spec\mathcal{O}_k \backslash S) = \mathrm{Gal}(k_S^{ab}/k)$. *Τότε, ο ομομορφισμός αντιστροφής* ρ_k *επάγει τον ισομορφισμό:*

$$J_k \Big/ \overline{k^\times \left(\prod_{v\in S_k^\infty} (k_v^\times)^2 \times \prod_{\mathfrak{p}\in X\backslash S} \mathcal{O}_p^\times\right)} \simeq \mathrm{Gal}(k_S^{ab}/k)$$

όπου $\overline{k^\times(...)}$ *η τοπολογική κλειστότητα. Από το προηγούμενο Παράδειγμα έχουμε ότι:*

$$\mathrm{Gal}(\tilde{k}_+^{ab}/k) \simeq H^+(k) = J_k \Big/ k^\times \left(\prod_{v\in S_k^\infty} (k_v^\times)^2 \times \prod_{\mathfrak{p}\in X_0} \mathcal{O}_p^\times\right)$$

και

$$k^\times \left(\prod_{v\in S_k^\infty} (k_v^\times)^2 \times \prod_{\mathfrak{p}\in X_0} \mathcal{O}_p^\times\right) \Big/ \overline{k^\times \left(\prod_{v\in S_k^\infty} (k_v^\times)^2 \times \prod_{\mathfrak{p}\in X\backslash S} \mathcal{O}_p^\times\right)}$$

$$\simeq \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \Big/ \left(\prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \cap \overline{k^\times \left(\prod_{v\in S_k^\infty} (k_v^\times)^2 \times \prod_{\mathfrak{p}\in X\backslash S} \mathcal{O}_p^\times\right)}\right) \simeq \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \Big/ \overline{\mathcal{O}_k^+}$$

όπου $\mathcal{O}_k^+$ *το σύνολο όλων των* $a \in \mathcal{O}_k^\times$ *που είναι τελείως-θετικά και* $\overline{\mathcal{O}_k^+}$ *η τοπολογική κλειστότητα της διαγώνιας εικόνας του* $\mathcal{O}_k^+$ *στο* $\prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$. *Επομένως, έχουμε την κάτωθι ακριβή ακολουθία:*

$$0 \to \prod_{\mathfrak{p}\in S} U_\mathfrak{p} \Big/ \overline{\mathcal{O}_k^+} \to \mathrm{Gal}(k_S^{ab}/k) \to H^+(k) \to 0$$

Αφού $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times = \mathbb{F}_p^\times \times (1+\mathfrak{p})$, *η ακριβής ακολουθία θα δίνει κάποιους περιορισμούς για τους διακλαδιζόμενους πρώτους στο* S. *Για παράδειγμα, αν το* $\mathfrak{p}$ *διακλαδίζεται σε μία προ-πεπερασμένη* l*-επέκταση για κάποιον πρώτο* l*, θα πρέπει να ισχύει ότι:* $N\mathfrak{p} \equiv \{0,1\} mod l$.

Παρατήρηση Α΄.1.6. *(Γεωμετρικό Πρόγραμμα Langlands) Έστω* X *μια συνεκτική, συμπαγής επιφάνεια Riemann και* G *μια μιγαδική reductive ομάδα. Τότε, η κατηγοριο-θεωρητική εκδοχή του ολικού Γεωμετρικού Προγράμματος Langlands ισχυρίζεται ότι υπάρχει μια ισοδυναμία παράγωγων κατηγοριών:*

$$\mathbf{QCoh}(\mathbf{Loc}_{^LG}(X)) \simeq D_b(\mathbf{DMod}(\mathbf{Bun}_G(X)))$$

όπου στο αριστερό μέλος έχουμε την παράγωγο κατηγορία των οιωνεί-συναφών δραγμάτων πάνω στη moduli στοίβα τοπικών συστημάτων (επίπεδες διανυσματικές δέσμες) επί της αλγεβρικής καμπύλης X και στο δεξί την παράγωγο κατηγορία των D-modules (δράγμα προτύπων από το δράγμα διαφορικών τελεστών) πάνω στην στη moduli στοίβα των πρωτευουσών G-δεσμών επί της X.

Η αντίστοιχη τοπική εκδοχή εκφράζεται με μία κατηγορική ισοδυναμία που σχετίζει από τη μία πλευρά ${}^{L}G$-τοπικά συστήματα γύρω από τρυπημένους δίσκους σε ένα σημείο $x \in X$ μέσω της δράσης $G((t))$ με υποκατηγορίες της κατηγορίας των $\hat{\mathfrak{g}}_k$-προτύπων, όπου $\hat{\mathfrak{g}}_k$ είναι η αφινική Kac-Moody Lie άλγεβρα, δηλαδή μία κεντρική επέκταση της απειροδιάστατης άλγεβρας βρόγχων $L(g)$. Η σύνδεση με τα D-Modules γίνεται μέσω της περίφημης τοπικοποίησης των Beilinson-Bernstein. Είναι εύκολο να δει κανείς πως στην ειδική περίπτωση $n = 1$ έχουμε την εξής πρόταση, για τη συνεκτική συνιστώσα $Pic^0(X) = J(X)$ (moduli χώρος των γραμμικών δεσμών L με $degL = 0$) της πολλαπλότητας $Pic(X)$:

Πρόταση Α′.1.7. *Έστω $\phi : X \to J(X)$. Για κάθε τοπικό σύστημα E τάξης 1 στην X, υπάρχει μοναδικό τοπικό σύστημα Aut_E τάξης 1 στην Ιακωβιανή πολλαπλότητα $J(X)$ έτσι ώστε:*

(i) *ι) $\phi^*(Aut_E) = E$*

(ii) *ιι) $m^*(Aut_E) \simeq A_E \hat{\otimes} A_E$, όπου m το γινόμενο στην $J(X)$ που αντιστοιχεί στο $\bigotimes L_i$ και $\hat{\otimes} E_2 \equiv \pi_1(E_1)^* \otimes \pi_2(E_2)^*$ το εξωτερικό τανυστικό γινόμενο στην $X \times X$.*

Σημειώνουμε ότι με όρους κβαντικής θεωρίας πεδίου, το Γεωμετρικό Πρόγραμμα Langlands αποτελεί μέρος μιας τοπολογικά συνεστραμμένης τετραδιάστατης ($D = 4$) υπερσυμμετρικής $\mathcal{N} = 4$ μη-αβελιανής θεωρίας βαθμίδας Yang-Mills. Αποδεικνύεται ότι, η θεωρία αυτή μπορεί να προκύψει μέσω συμπαγοποίησης (αναγωγή στη διάσταση) σε επιφάνειες Riemann χρησιμοποιώντας τη νηματοποίηση Hitchin μιας πλουσιότερης, εξωτικής 6-διάστατης σύμμορφης θεωρίας πεδίου με $N = (0, 2)$ γεννήτορες. Εκεί το τοπικό σύστημα θα αντιστοιχεί σε μια ηλεκτρική M2 ιδιοβράνη που αντιστοιχεί σε έναν τελεστή Wilson, ενώ ένα ιδιόδραγμα Hecke ως μία μαγνητική ιδιοβράνη που αντιστοιχεί σε έναν τελεστή 't Hooft. Η θεωρία αυτή παραμένει ένα μυστήριο για τη φυσική καθώς είναι εγγενώς κβαντική (έχει άπειρες Λαγκρανζιανές). Παρ'όλα αυτά, η εγγενής $SL(2, \mathbb{Z})$ συμμετρία της, δύναται να εξηγήσει με φυσικό τρόπο την S-δυϊκότητα (μια γενικευμένη εκδοχή του ηλεκτρομαγνητικού δυϊσμού σε μη-αβελιανές θεωρίες βαθμίδας) ως μια μορφή (ομολογικής) κατοπτρικής συμμετρίας μεταξύ A-μοντέλου (κατηγορία Fukaya συμπλεκτικής γεωμετρίας Lagrangian υποπολλαπλοτήτων) και B-μοντέλου (αλγεβρική γεωμετρία των D-βρανών ως παράγωγος κατηγορία οιωνεί-συναφών δραγμάτων) και αυτή με τη σειρά της, τη γεωμετρική αντιστοιχία Langlands. Επίσης, συνδέεται με την ομολογία Khovanov (κατηγοριοποίηση Jones) που ενδέχεται να παίζει το ρόλο των παρατηρησιακών μεγεθών σε μια $n = 4$ ΤΚΘΠ η οποία αντιστοιχεί κατηγορίες σε 2-πολλαπλότητες (όπως παραπάνω για τις επιφάνειες Riemann), διανυσματικούς χώρους σε 3-πολλαπλότητες και αριθμητικές αναλλοίωτες σε 4-πολλαπλότητες.

Α′.1α′ Αντιστοιχία Langlands

Η αντιστοιχία Langlands εκφράζει μία θεμελιώδη σύνδεση πολύ απομακρυσμένων μαθηματικών αντικειμένων: τις αναπαραστάσεις Galois στη θεωρία αριθμών (αντικείμενα αλγεβρο-γεωμετρικής υφής) και τις αυτομορφικές μορφές στη θεωρία αναπαραστάσεων (αντικείμενα αναλυτικής υφής). Η αντιστοιχία αυτή μπορεί χονδρικά να κατανοηθεί ως μια μη-αβελιανή γενίκευση της αβελιανής θεωρίας κλάσεων σωμάτων που είδαμε παραπάνω, δηλαδή της αντιστοιχίας μεταξύ των μέγιστων, αβελιανών ομάδων Galois $\mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$ και της ομάδας των συνεκτικών συνιστωσών της $\mathrm{GL}(1,F)\backslash\mathrm{GL}(1,\mathbb{A}_F)$, με F ένα ολικό σώμα (π.χ σώμα αριθμών), $\mathbb{A}_F = F\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}$ (όπου $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}\times\hat{\mathbb{Z}}$) ο δακτύλιος των adèles του, με τον ισομορφισμό να δίνεται από την απεικόνιση αντιστροφής του Artin. Πράγματι, έστω G μια ομάδα. Τότε, ξέρουμε ότι οι 1-διάστατες αναπαραστάσεις της πάνω από έναν μεταθετικό δακτύλιο θα είναι ίδιες με αυτές της G^{ab}. Επιπλέον, μια μεταθετική ομάδα μπορεί να ανακτηθεί από τις 1-διάστατες αναπαραστάσεις της (μια ειδική περίπτωση της δυϊκότητας Tannaka η οποία μας επιτρέπει να ανακατασκευάσουμε μια συμπαγή, τοπολογική ομάδα από την κατηγορία των πεπερασμένηςδιάστασης αναπαράστασεων της $Rep(G)$). Στην αβελιανή περίπτωση, επαρκεί φυσικά η γνώση των χαρακτήρων της G, αφού κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της είναι 1-διάστατη. Έτσι, αν παραφράσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της αβελιανής θεωρίας κλάσεων σωμάτων θα έχουμε ότι: υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των 1-διάστατων $\mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$-αναπαραστάσεων και των $\mathrm{GL}(1,\mathbb{A}_F)$-αναπαραστάσεων του ομογενή χώρου $\mathrm{GL}(1,F)\backslash\mathrm{GL}(1,\mathbb{A}_F)$. Ο Langlands σε ένα γράμμα του στον Weil το 1967, διατύπωσε την εικασία πως η αντιστοιχία παραμένει εν ισχύι για μια συγκεκριμένη κλάση ανάγωγων, αδιακλάδιστων n-διάστατων αναπαραστάσεων μεταξύ της $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ και συγκεκριμένων αδιακλάδιστων αυτομορφικών αναπαραστάσεων $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$ στην $\mathrm{GL}(n,F)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$ για κάθε n. Επιπλέον, οι ιδιοτιμές της γενικευμένης μορφής του αυτομορφισμού Frobenius (κλάση συζυγίας) στη μη-αβελιανή $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ θα αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές Hecke μιας αυτομορφικής αναπαράστασης. Πιο συγκεκριμένα, ας δούμε την διατύπωση της αντιστοιχίας Langlands στην περίπτωση των σωμάτων συναρτήσεων. Έστω X λεία, προβολική πολλαπλότητα διάστασης 1 (αλγεβρική καμπύλη) πάνω από το $\mathbb{F}_q$. Ορίζουμε όπως και στην αριθμητική περίπτωση τον δακτύλιο των adèles $\mathbb{A} := \prod'_x K_x$, ως το περιορισμένο γινόμενο (τα στοιχεία εκείνα των οποίων όλες πλην πεπερασμένες συνιστώσες ανήκουν στον δακτύλιο των αλγεβρικών ακεραίων $\mathbb{O} := \prod_x \mathcal{O}_x \subset \mathbb{A}$) των πληρώσεων (που είναι δακτύλιοι διακριτής εκτίμησης) του ολικού σώματος ρητών συναρτήσεων $K = K(X)$ ως προς κάθε κλειστό σημείο $x\in X$. Έστω τώρα η τοπικά συμπαγής ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$. Λόγω της διαγώνιας εμφύτευσης $K\hookrightarrow\mathbb{A}$ μπορούμε να θεωρήσουμε τις λείες (αναλλοίωτες ως προς μία συμπαγή υποομάδα) μιγαδικές συναρτήσεις στο αριστερό πηλίκο $\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$, καθώς η ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ δρα στον $\mathcal{C}(\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}))$ μέσω αριστερής μεταφοράς: $(g\cdot f)(h) = f(hg), h\in H = \mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}), g\in G(n,\mathbb{A})$. Παρατηρούμε ότι αν η f είναι αναλλοίωτη στην H τότε το $g\cdot f$ παραμένει αναλλοίωτο στο σύμπλοκο $g^{-1}H$ που είναι και αυτό συμπαγής υποομάδα. Επομένως, αν $\mathrm{GL}(n,\mathbb{O})$ η μέγιστη, συμπαγής υποομάδα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ θα έχουμε ότι ο υπόχωρος των $\mathrm{GL}(n,\mathbb{O})$-αναλλοίωτων συναρτήσεων $\mathcal{C}(\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{O}))$ δεν παραμένει αναλλοίωτος ως προς τη δράση της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$. Παρ'όλα αυτά, όπως θα δούμε παρακάτω, η άλγεβρα Hecke δρα επάνω του. Έστω ένα μέτρο Haar μ για την $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ (δεξιά αναλλοίωτο και πεπερασμένο στα συμπαγή υποσύνολα) έτσι ώστε $\mu(\mathrm{GL}(n,\mathbb{O})) = 1$. Έστω επίσης U η υποομάδα των unipotent ριζικών (η συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου της υποομάδας Borel). των παραβολικών υποομάδων (σταθεροποιητές σημαιών $0\subset W_1\subset\ldots\subset W_r = dim\mathbb{A}^n$ με $dimW_i = d_i$ της μορφής άνω-τριγωνικών πινάκων όπου τα στοιχεία της διαγωνίου θα είναι τετραγωνικοί πίνακες διάστασης $d_i - d_{i-1}$).

Ορισμός Α′.1.8. *Μια συνάρτηση $f \in \mathcal{C}(\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}))$ θα καλείται cuspidal εάν για κάθε $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ ισχύει ότι:*

$$\int_{U(K)U(\mathbb{A})} f(u \cdot g)m(u) = 0$$

Συμβόλιζουμε τον υπόχωρο των $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$-αναλλοίωτων cuspidal συναρτήσεων με $Cusp(\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}))$.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $\mathcal{C}(\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}))$ γράφεται ως ένα ευθύ άθροισμα ανάγωγων $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$-αναπαραστάσεων που καλούνται cuspidal αυτομορφικές αναπαραστάσεις της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$. Η αντιστοιχία Langlands επιθυμεί ουσιαστικά να μελετήσει τον χώρο των $Cusp(\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{O}))$ των $\mathrm{GL}(n,\mathbb{O})$-αναλλοίωτων cuspidal συναρτήσεων, στον οποίο δρα η άλγεβρα Hecke που θα ορίσουμε παρακάτω, παρά η $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$. Κάθε $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$-αναπαράσταση π διασπάται ως ένα περιορισμένο τανυστικό γινόμενο $\pi = \bigoplus_x^{'} \pi_x$, όπου π_x μία ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathrm{GL}(n,K_x)$. Το περιορισμένο γινόμενο εδώ σημαίνει πως για όλα πλην πεπερασμένα $x \in X$ η π_x είναι *σφαιρική* (δηλαδή περιέχει έναν 1-διάστατο υπόχωρο ο οποίος παραμένει αναλλοίωτος κάτω από τη δράση της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{O}_x)$). Έστω u_x το διάνυσμα που παράγει την π_x. Τότε, $\pi = span \bigoplus_x w_x$, όπου $w_x = u_x$, για όλα πλην πεπερασμένα $x \in X$. Αποδεικνύεται ότι η π είναι σφαιρική για κάθε $x \in X$ ακριβώς όταν το σύνολο των $\mathrm{GL}(n,\mathbb{O})$-αναλλοίωτων διανυσμάτων της π είναι μη-τετριμμένο (και τότε η ανάγωγη $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$-αναπαράσταση θα καλείται επίσης σφαιρική).

Ορισμός Α′.1.9. *Ορίζουμε ως τοπική άλγεβρα Hecke $\mathcal{H}_x$ τον χώρο όλων των συναρτήσεων στην $\mathrm{GL}(n,K_x)$ με συμπαγή-φορέα οι οποίες είναι $\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}_x)$-αμφιαναλλοίωτες. Ο χώρος αυτός αποκτά δομή άλγεβρας μέσω της συνέλιξης:*

$$(f \star g)(h) = \int_{\mathrm{GL}(n,K_x)} f(h \cdot k)g(k^{-1})\mu(k), h \in \mathrm{GL}(n,K_x)$$

Μπορούμε επίσης να περιγράψουμε τον $\mathcal{H}_x$ ως $\mathbb{C}[T_{1,x},\ldots,T_{n-1,x},T_{n,x},T_{n,x}^{-1}]$, όπου $T_{i,x}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του διπλού συμπλόκου

$$\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}_x)diag(t_x,\ldots,t_x,1,\ldots,1)\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}_x)$$

με t_x ο uniformizer του δακτυλίου διακριτής εκτίμησης $\mathcal{O}_x$. Ορίζουμε τώρα ως (ολική) άλγεβρα Hecke $\mathcal{H}$, το περιορισμένο γινόμενο τοπικών αλγεβρών Hecke: $\mathcal{H} := \bigoplus_x^{'} \mathcal{H}_x$. Αν τώρα για κάθε λεία $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$-αναπαράσταση π, θεωρήσουμε τον υπόχωρο $\pi^{'}$ των διανυσμάτων που σταθεροποιεί η $\mathrm{GL}(n,\mathbb{O})$, παρατηρούμε ότι η $\mathcal{H}$ δρα στον $\pi^{'}$. Πράγματι, αρκεί να ορίσουμε τη δράση κατά συνιστώσα με τον $\mathcal{H}_x$ να δρα στον $\pi_x^{'}$ μέσω της:

$$f \cdot u = \int_{\mathrm{GL}(n,K_x)} f(g)(g \cdot u)\mu(g), f \in \mathcal{H}_x, u \in \pi_x^{'}$$

Δύναται τότε να αποδειχτεί ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία σφαιρικών $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$-αναπαράστασεων στον $\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ και ανάγωγων αναπαραστάσεων της άλγεβρας Hecke στον $\mathrm{GL}(n,K)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{O})$. Έστω π

μία σφαιρική $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$-αναπαράσταση. Από την παραπάνω περιγραφή της τοπικής άλγεβρας Hecke ως πολυωνυμική άλγεβρα, θα έχουμε ότι αν η π_x είναι ανάγωγη θα είναι αναγκαστικά 1-διάστατη. Κατ'επέκταση, η δράση της $\mathcal{H}_x$ θα ισοδυναμεί με έναν ομομορφισμό αλγεβρών $\phi : \mathcal{H}_x \to \mathbb{C}$ που θα καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές των τελεστών $\{T_{i,x}\}_{i=1}^n$ με $\phi(T_{n,x}) \in \mathbb{C}^\times$. Θέλοντας να δώσουμε μια απλή μορφή στη διατύπωση της αντιστοιχίας Langlands, επιχειρούμε την εξής κανονικοποίηση: υπάρχουν $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^\times$ έτσι ώστε:

$$T_{i,x} \cdot u_x = \lambda_{i,x} s_i(z_1, \ldots, z_n) u_x$$

όπου $\lambda_{i,x} = |K_x/\mathcal{O}_x^{\frac{i(n-1)}{2}}|$ ο παράγοντας κανονικοποίησης. Τότε, η τοπική άλγεβρα θα είναι ισόμορφη με τη συμμετρική πολυωνυμική άλγεβρα $Sym_{S_n}\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$, η οποία όμως είναι ουσιαστικά η άλγεβρα χαρακτήρων των πεπερασμένης-διάστασης $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-αναπαραστάσεων. Επομένως, κάθε τελεστής $T_{i,x}$ θα αντιστοιχεί στην $\lambda_{i,x}\chi_i$, όπου χ_i ο χαρακτήρας της i-στης θεμελιώδους αναπαράστασης της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Επιπρόσθετα, η n-άδα $(z_1, \ldots, z_n)$ θα αποτελείται από ιδιοτιμές ενός πίνακας σε μια ημιαπλή κλάση συζυγίας στην $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Συμπερασματικά, δοθέντος μιας cuspidal αυτομορφικής αναπαράστασης π, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στα σφαιρικά σημεία $x \in X$ μια n-άδα $(z_1(\pi_x), \ldots, z_n(\pi_x)), z_i(\pi_x) \in \mathbb{C}^\times$ που θα ονομάζονται ιδιοτιμές Hecke της π στο x. Από το Θεώρημα (strong multiplicity one) του Piatetski-Shapiro που ισχυρίζεται πως δύο cuspidal αυτομορφικές αναπαραστάσεις θα είναι ισόμορφες αν είναι ισόμορφες στις τοπικές συνιστώσες του, έπεται πως οι ιδιοτιμές Hecke θα καθορίζουν πλήρως την π μέχρι ισομορφισμού.

Μία άλλη σημαντική παρατήρηση εδώ είναι πως η δράση της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ στον $Cusp(\mathrm{GL}(n, K)\backslash \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}))$ δεν εξαρτάται από την τοπολογία του $\mathbb{C}$, οπότε μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα άλλο αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής 0 και έτσι επιλέγουμε το $\bar{\mathbb{Q}}_l$ για τις αναπαράστασεις Galois της $\pi_1^{\acute{e}t}(X)$ (το αντίστροφο όριο του συστήματος $\{\mathrm{Gal}(K'/K)\}$, πάνω από όλα τα σώματα συναρτήσεων $K' = K(Y)$ για τα étale καλύμματα $Y \to X$). Έστω λοιπόν $x \in X$ και $k(x)$ το σώμα υπολοίπων του, που θα είναι μια πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{F}_q$. Έστω επίσης $y \in Y \to X$. Όμοια, με την αριθμητική περίπτωση, ορίζουμε τις ομάδες ανάλυσης και αδράνειας από την ακριβή ακολουθία στη θεωρία Hilbert:

$$0 \to I_y \to D_y \to \mathrm{Gal}(\bar{k}(x)/k(x)) \to 0$$

όπου εδώ η ομάδα $\mathrm{Gal}(\bar{k}(x)/k(x))$ θα παράγεται αντίστοιχα από τον γεωμετρικό αυτομορφισμό Frobenius $Fr_x : z \mapsto z^{-q_x}$, όπου $q_x = |k(x)|$ και όμοια η αναπαράσταση ρ της $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ θα καλείται αδιακλάδιστη στο x εάν $I_y \subset ker(\rho)$ για κάθε y πάνω από το x (αυτό είναι ανεξάρτητο της επιλογής του y, αφού ο πυρήνας είναι κανονική υποομάδα). Έτσι, όταν η ρ είναι συνεχής (ως προς την τοπολογία Krull), αδιακλάδιστη στο x, l-αδική n-διάστατη αναπαράσταση, η $\rho(Fr_x)$ θα είναι μια καλώς-ορισμένη κλάση συζυγίας στην $\mathrm{GL}(n, \bar{\mathbb{Q}}_l)$ για $(l, q) = 1$. Σε κάθε ανάγωγη, l-αδική n-διάστατη αναπαράσταση σ αντιστοιχούμε σε κάθε αδιακλάδιστο σημείο x το σύνολο των ιδιοτιμών $(z_1(\sigma_x), \ldots, z_n(\sigma_x))$ του $\sigma(Fr_x)$ και από το Θεώρημα πυκνότητας του Chebotarev, οι ιδιοτιμές αυτές θα καθορίζουν πλήρως την σ μέχρι ισομορφισμού. Έχουμε λοιπόν την εξής αντιστοιχία Langlands για σώματα συναρτήσεων:

Θεώρημα Α'.1.10. *(Drinfeld, Lafforgue) Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ κλάσεων ισομορφισμού n-διάστατων, ανάγωγων, l-αδικών αναπαραστάσεων Galois πάνω από το K και n-διάστατων cuspidal αυτομορφικών αναπα-*

ράστασεων. Ειδικότερα, δύο αναπαραστάσεις σ, π θα βρίσκονται σε αντιστοιχία μεταξύ τους αν και μόνο εάν τα σύνολα των αδιακλάδιστων σημείων τους ταυτίζονται και για κάθε τέτοιο x, τα σύνολα των ιδιοτιμών Frobenius και Hecke αντιστοίχως, ταυτίζονται επίσης:

$$\{z_1(\sigma_x), \ldots, z_n(\sigma_x)\} = \{z_1(\pi_x), \ldots, z_n(\pi_x)\}$$

Βιβλιογραφία

[1] M. Morishita, *Knots and primes: an introduction to arithmetic topology*, Springer, (2011).

[2] T. Nguyen Quang Do: *Formations de classes et modules d' Iwasawa*, Number Theory, Noordwijkerhout, 1983. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1068, pp. 167–185. Springer, Berlin (1984)

[3] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 2nd edn. Vol. 323. Springer, Berlin (2008)

[4] L. Washington: *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd edn. Graduate Texts in Mathematics, vol. 83. Springer, Berlin (1997)

[5] B. Mazur, A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$, Invent. Math. **76**(2), 179–330 (1984)

[6] K. Iwasawa, *On* $\mathbb{Z}_l$*-extensions of algebraic number fields*, Ann. Math. (2) **98**, 246–326 (1973)

[7] J. Hillman, *Algebraic Invariants of Links. Series on Knots and Everything*, vol. 32. World Scientific, Singapore (2002)

[8] A. Noguchi, *A functional equation for the Lefschetz zeta functions of infinite cyclic coverings with an application to knot theory*, Topol. Proc. Spring Topology and Dynamical Systems Conference, **29**(1), 277–291 (2005)

[9] A. Noguchi, *Zeros of the Alexander polynomial of knot*, Osaka J. Math. **44**(3), 567–577 (2007)

[10] K. Schmidt, *Dynamical Systems of Algebraic Origin*, Progress in Mathematics, vol. 128. Birkhäuser, Basel (1995)

[11] D. Silver, S. Williams, *Mahler measure, links and homology growth*, Topology 41, 979–991 (2002)

[12a] J. Milnor, *Isotopy of Links*, Algebraic geometry and topology 280–306 (1957).

[12] J. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds, Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967, pp. 115–133. Prindle, Weber & Schmidt, Boston (1968)

[13] F. Knudsen, D. Mumford, *The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on "det" and "Div"*, Math. Scand. **39**(1), 19–55 (1976)

[14] B. Mazur, *Remarks on the Alexander polynomial*, Unpublished Note (1963)

[15] K. Kato, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse–Weil L-functions via B_{dR}*, Arithmetic Algebraic Geometry. Lecture Note in Mathematics, vol. 1553, pp. 50–163. Springer, Berlin (1993)

[16] P. Kirk, C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson–Gordon invariants*, Topology **38**(3), 635–661 (1999)

[17] W. Lück, *Analytic and topological torsion for manifolds with boundary and symmetry*, J. Differ. Geom. 37, 263–322 (1993)

[18] K. Sugiyama, *An analog of the Iwasawa conjecture for a compact hyperbolic threefold*, J. Reine Angew. Math. 613, 35–50 (2007)

[19] K. Sugiyama, *The geometric Iwasawa conjecture from a viewpoint of the arithmetic topology*, In: Proceedings of the Symposium on Algebraic Number Theory and Related Topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, vol. 4, pp. 235–247. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto (2007)

[20] P. Bayer, J. Neukirch, *On values of zeta functions and l-adic Euler characteristics*, Invent. Math. **50**(1), 35–64 (1978)

[21] S. Lang, *Cyclotomic Fields I and II*, Combined 2nd edn. With an appendix by Karl Rubin Graduate Texts in Mathematics, vol. 121. Springer, New York (1990)

[22] J. Coates, R. Sujatha, *Cyclotomic Fields and Zeta Values*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin (2006)

[23] J. Coates, B. Perrin-Riou, *On p-adic L-functions attached to motives over* $\mathbb{Q}$, Algebraic Number Theory. Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 17, pp. 23–54. Academic Press, Boston (1989)

[24] B. Mazur, *The theme of p-adic variation*, In: Mathematics: Frontiers and Perspectives, pp. 433–459. Am. Math. Soc., Providence (2000)

[25] M. Culler, P. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. Math. 117, 109–146 (1983)

[26] E. Hironaka, *Alexander stratifications of character varieties*, Ann. Inst. Fourier 47, 555–583 (1997)

[27] T. Le, *Varieties of representations and their subvarieties of homology jumps for certain knot groups*, Russ. Math. Surv. 46, 250–251 (1991)

[28] B. Mazur, *Deforming Galois representations*, Galois Groups over $\mathbb{Q}$, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 16, pp. 385–437. Springer, Berlin (1989)

[29] A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser, Basel (1996).

[30] M. Morishita, *On the Alexander stratification in the deformation space of Galois characters*, Kyushu J. Math. 60, 405–414 (2006)

[31] M. Kurihara, *Iwasawa theory and Fitting ideals*, J. Reine Angew. Math. 561, pp. 39–86, (2003)

[32] M. Kurihara, *Refined Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type*, Proc. London Math. Soc. (3) 104, pp. 728–769, (2012)

[33] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. **19**(4), 231–273 (1986)

[34] H. Hida, *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. 85, 545–613 (1986)

[35] H. Hida, *Modular Forms and Galois Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 69. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000)

[36] W. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Lecture Note, Princeton (1977)

[37] M. Boileau, J. Porti, *Geometrization of 3-Orbifolds of Cyclic Type*, Astérisque, vol. 272 (2001)

[38] W. Neumann, D. Zagier, *Volumes of hyperbolic three-manifolds*, Topology **24**(3), 307–332 (1985)

[39] M. Morishita, Y. Terashima, *Chern–Simons variation and Deligne cohomology*, Spectral Analysis in Geometry and Number Theory on Professor Toshikazu Sunada's 60th Birthday. Contemporary Math., Am. Math. Soc., Providence, vol. 484, pp. 127–134. (2009)

[40] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 179, pp. 136–172. Springer, Berlin (1971)

[41] B. Mazur, A. Wiles, *On p-adic analytic families of Galois representations*, Compos. Math. **59**(2), 231–264 (1986)

[42] M. Morishita, Y. Terashima, *Arithmetic topology after Hida theory*, Intelligence of Low Dimensional Topology, Knots and Everything Book Series, vol. 40, pp. 213–222, World Scientific, Singapore (2006)

[43] B. Mazur, *Two-dimensional p-adic Galois representations unramified away from p*, Compos. Math. 74, 115–133 (1990)

[44] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. Math. (2) **141**(3), 443–551 (1995)

[45] R. Taylor, A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. Math. (2) **141**(3), 553–572 (1995)

[46] R. Greenberg, G. Stevens, *p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math. **111**(2), 407–447 (1993)

[47] H. Hida, *Hilbert Modular Forms and Iwasawa Theory*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Univ. Press, Oxford (2006)

[48] R. Coleman, *Dilogarithms regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math. **69**(2), 171–208 (1982)

[49] M. Morishita, T. Yuji, *Chern-Simons variation and Hida-Mazur theory*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 1571, 23-30, (2007)

[50] S. Bloch, *The dilogarithm and extensions of Lie algebras*, Algebraic K-theory, Evanston 1980 (Proc. Conf., Northwestem Univ., Evanston, M , 1980), pp. 1-23, Lecture Notes in Math., 854, Springer, Berlin-New York, (1981)

[51] J.-L. Brylinski, *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization*, Progress in Mathematics, 107, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1993)

[52] P. Kirk, E. Klassen, *Chern-Simons invariants of 3-manifolds decomposed along tori and the circle bundle over the representation space of* T^2, Comm. Math. Phys. 153, no. 3, 521-557, (1993)

[53] M. Morishita, T. Yuji, *Geometry of polysymbols*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 1521, 154-160, (2006)

[54] T. Zink, *Étale cohomology and duality in number fields*, Appendix 2. Galois cohomology of algebraic number fields. Deutscher Verlag der Wissenschaften, pp. 127–145, (1978)

[55] K. Kato, *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, J. Reine Angew. Math. 366, 142–183 (1986)

[56] J. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Mathematics, vol. 1. Academic Press, Boston (1986)

[57] B. Mazur, *Notes on étale cohomology of number fields*, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. **6**(4), 521–552 (1973)

[58] M. Kapranov, *Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory*, Functional analysis on the eve of 21st century, Birkhäuser, vol. 1, 119-151, (1995)

[59] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups, I & II*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences 53.4 (1977) 140-143, II. ibid. 54.8 250-255, (1978)

[60] S. Bloch, *Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces*, Ann. Math. 114, 229-266, (1981)

[61] S. Saito, *Unramified class field theory for arithmetic schemes*, Ann. Math. 121, 251-28l, (1985)

[62] L. Breen, *Bitorseurs et cohomologie non-Abelienne*, Grothendieck Festschrift, Vol. 1, Progress in Math. 86, Birkhäuser Boston, 40-476, (1990)

[63] J.-L. Brylinski, *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Birkhäuser, (1993)

[64] J.-L. Brylinski, *Central extensions and reciprocity laws*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques 38.3, 193-215 (1997)

[65] D. Freed, *Higher algebraic structures and quantization*, Communications in Mathematical Physics 159.2, 343-398, (1994)

[66] R.P. Langlands, *Modular forms and l-adic representations*, Lecture Notes in Math., 439, Springer-Verlag, (1973)

[67] R.P. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties and motives*, Ein Marchen, Proc. Symp. Pure Math., 33, pt. 2, p. 205-246, (1977)

[68] J. Giraud, *Cohomologie Non-Abelienne*, (Erg. der Math. 64), SpringerVerlag, (1971)

[69] A. Grothendieck, *Pursuing Stacks*, preprint, (1983)

[70] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of generalized free products I*, Ann. Math. 108, 135-204, (1978)

[71] H. Gillet, *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory*, Adv. Math. 40, 203-289, (1981)

[72] V.G Drinfel'd, *Elliptic modules*, Mathematics of the USSR-Sbornik 23.4, 561, (1974)

[73] V.G. Drinfel'd, *Two-dimensional l-adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on $GL(2)$*, Amer. J. Math. 105, 85-114, (1983)

[74] A. Beilinson, V. Ginzburg. *Infinitesimal structure of moduli spaces of G-bundles*, International Mathematics Research Notices 1992, 4, 63-74, (1992)

[75] A. Beilinson, *Residues and adeles*, Functional Analysis and its Applications 14.1, 34-35, (1980)

[76] A. Huber, *On the Parshin-Beilinson adeles for schemes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 66, 249-273, (1991)

[77] J. Tate, *Number-theoretic background*, Proc. Symp. Pure Math., 33, pt 2, p. 3-26, (1977)

[78] M.F. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publ. Math. IHES, 68, 175-186, (1988)

[79] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes*, Applications du principe de fonctorialité, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, Vol. 1, Perspectives in Math. 10, Academic Press, 77-160, (1990)

[80] N. Bernstein, A-V. Zelevinsky, *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a local non-archimedean field*, Russian Math. Surveys, 31, 1-68, (1976)

[81] F. Rodier, *Représentations de $GL(n, k)$ où k est un corps p-adique*, Séminaire Bourbaki 24, 201-218, (1982)

[82] P. Deligne, *Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modeles canoniques*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 33. No. part 2, (1979)

[83] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 33. No. 2, (1979)

[84] P. Deligne, *Le symbole modere*, Publ. Math. IHES, 73, 148-181, (1991)

[85] H. Jacquet, R.P. Langlands, *Automorphic forms on $GL(2)$*, Lecture Notes in Math. 114, Springer-Verlag, (1971)

[86] A. Weil, *Uber die bestimmung Dirichletschen Reihen durch Functionalgleigungen*, Math. Ann. 168, 149-156, (1967)

[87] H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika, *Automorphic forms on $GL(3)$*, Ann. Math. 109, 163-258, (1979)

[88] J.P. May, *Geometry of Iterated Loop Spaces*, Lecture Notes in Math. 271, Springer-Verlag, (1972)

[89] J.P. May, *E_∞ Ring Spaces and E_∞ Ring Spectra*, Lect. Notes in Math., 577, Springer-Verlag, (1977)

[90] R. Street, *The algebra of oriented simplices*, J. Pure Appl. Alg. 49, 283-335, (1987)

[91] M. Johnson, *The combinatorics of n-categorical pasting*, J. Pure Appl. Alg. 62, 211-225, (1989)

[92] A.A. Suslin, *Homology of $GL(n)$, characteristic classes and Milnor K-theory*, Lecture Notes in Math. 1046, Springer-Verlag, 357-375, (1989)

[93] J. Lurie, *"On the classification of topological field theories"*, Current developments in Mathematics, 129-280, (2009)

[94] K. Minhyong, *Arithmetic Chern-Simons Theory I*, arxiv preprint.

[95] A. Sikora, *Analogies between group actions on 3-manifolds and number fields*, Comment. Math. Helv. 78, 832–844 (2003)

[96] Y. Manin, M. Marcolli, *Holography principle and arithmetic of algebraic curves*, Adv. Theor. Math. Phys. **5**(3), 617–650 (2001)

[97] D.S. Freed, F. Quinn, *Chern-Simons theory with finite gauge group*, Comm. Math. Phys. 156, no. 3, 435–472 (1993)

[98] J. Hornbostel, G. Kings, *On non-commutative twisting in étale and motivic cohomology*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56, no. 4, 1257–1279, (2006)

[99] L. Fargues, J.M. Fontaine, *Vector bundles and p-adic Galois representations*, Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2, 77–113, AMS/IP Stud. Adv. Math., 51, pt. 1, 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2012)

[100] S. Bates, A. Weinstein, *Lectures on the geometry of quantization*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, 8. American Mathematical Society, Providence, RI, Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, Berkeley, CA, (1997)

[101] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. 121, no. 3, 351–399, (1989)

[1] Gunter Malle and B. Heinrich Matzat. *Inverse Galois theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] Jean-Pierre Serre. *Topics in Galois theory*, volume 1 of *Research Notes in Mathematics.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, second edition, 2008. With notes by Henri Darmon.

[3] Helmut Völklein. *Groups as Galois groups*, volume 53 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996. An introduction.

[4] Edward Witten. Quantum field theory and the jones polynomial. In *New Developments in the Theory of Knots*, chapter 39, pages 815–863.

[5] Igor Frenkel and Andrey Todorov. Complex counterpart of Chern-Simons-Witten theory and holomorphic linking. 8 February 2005.

[6] M Morishita. *Knots and Primes: An Introduction to Arithmetic Topology.* SpringerLink : Bücher. Springer-Verlag London Limited, 2011.

[7] Alexander Reznikov. Three-manifolds class field theory (homology of coverings for a nonvirtually b_1-positive manifold). *Selecta Math. (N.S.)*, 3(3):361–399, 1997.

[8] Masanori Morishita. On certain analogies between knots and primes. *J. Reine Angew. Math.*, 550:141–167, 2002.

[9] Prasolov, V.V. and Prasolov, V.V. and Sossinsky, A.B. Knots, links, braids and 3-manifolds: an introduction to the new invariants in low-dimensional topology Translations of mathematical monographs American Mathematical Society 1997