Η ζ-συνάρτηση του Ihara

Αστέριος Γκαντζούνης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστημίου Αθηνών.

Πτυχιακή Εργασία Σεπτέμβριος 2013

Περιεχόμενα

Η κλασική ζ-συνάρτηση του Riemann

Η κλασική συνάρτηση του Riemann, ορίζεται για $s \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} s > 1$ ως

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in Primes} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ο Bertrand Riemann στο μνημειώδες άρθρο του Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse επέκτεινε την παραπάνω συνάρτηση σε μια αναλυτική συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός του απλού πόλου που έχει για $s = 1$. Επίσης έδειξε ότι υπάρχει μια συμμετρία που συνδέει την τιμή της στο s με την τιμή της στο $1 - s$, που καλείται συναρτησιακή εξίσωση.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Υπόθεση Riemann: Οι μη τετριμένες ρίζες της ζ-συνάρτησης του Riemann έχουν πραγματικό μέρος $\frac{1}{2}$.

Η κλασική ζ-συνάρτηση του Riemann

Η κλασική συνάρτηση του Riemann, ορίζεται για $s \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} s > 1$ ως

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in Primes} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ο Bertrand Riemann στο μνημειώδες άρθρο του

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse

επέκτεινε την παραπάνω συνάρτηση σε μια αναλυτική συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός του απλού πόλου που έχει για $s = 1$. Επίσης έδειξε ότι υπάρχει μια συμμετρία που συνδέει την τιμή της στο s με την τιμή της στο $1 - s$, που καλείται συναρτησιακή εξίσωση.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Υπόθεση Riemann: Οι μη τετριμμένες ρίζες της ζ-συνάρτησης του Riemann έχουν πραγματικό μέρος $\frac{1}{2}$.

Η κλασική ζ-συνάρτηση του Riemann

Η κλασική συνάρτηση του Riemann, ορίζεται για $s \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} s > 1$ ως

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in Primes} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ο Bertrand Riemann στο μνημειώδες άρθρο του
Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse
επέκτεινε την παραπάνω συνάρτηση σε μια αναλυτική συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός του απλού πόλου που έχει για $s = 1$.
Επίσης έδειξε ότι υπάρχει μια συμμετρία που συνδέει την τιμή της στο s με την τιμή της στο $1 - s$, που καλείται συναρτησιακή εξίσωση.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Υπόθεση Riemann: Οι μη τετριμένες ρίζες της ζ-συνάρτησης του Riemann έχουν πραγματικό μέρος $\frac{1}{2}$.

Η κλασική ζ-συνάρτηση του Riemann

Η κλασική συνάρτηση του Riemann, ορίζεται για $s \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} s > 1$ ως

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in Primes} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

O Bertrand Riemann στο μνημειώδες άρθρο του
Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse
επέκτεινε την παραπάνω συνάρτηση σε μια αναλυτική συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός του απλού πόλου που έχει για $s = 1$.
Επίσης έδειξε ότι υπάρχει μια συμμετρία που συνδέει την τιμή της στο s με την τιμή της στο $1 - s$, που καλείται συναρτησιακή εξίσωση.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Υπόθεση Riemann: Οι μη τετριμένες ρίζες της ζ-συνάρτησης του Riemann έχουν πραγματικό μέρος $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{cccc} L & \mathcal{O}_L & P\mathcal{O}_L = Q_1^{e_1} \cdots Q_r^{e_r} & \mathcal{O}_L/Q_i \\ \Big| & \Big| & \Big| & \Big| \\ K & \mathcal{O}_K & P & \mathcal{O}_K/P \end{array}$$

Για κάθε ιδεώδες Q_i στην παραπάνω ανάλυση το πηλίκο $\mathcal{O}_L/Q_i$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση του πεπερασμένου σώματος $\mathcal{O}_K/P$. Δηλαδή $\mathcal{O}_K/P = \mathbb{F}_q$ και $\mathcal{O}_L/Q = \mathbb{F}_{q^f}$. Τον αριθμό f που εξαρτάται από την επιλογή των P, Q θα τον ονομάζουμε βαθμό αδράνειας του Q πάνω από το P. Ας υποθέσουμε ότι το L είναι μια αλγεβρική επέκταση του $K = \mathbb{Q}$. Για κάθε ιδεώδες Q του δακτυλίου $\mathcal{O}_L$ ορίζεται η νόρμα $N(Q) = \#\mathcal{O}_L/Q = p^f$ για κάποιο πρώτο p (για τον πρώτο που γεννά το κύριο ιδεώδες P του $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ που βρίσκεται κάτω από το Q).

ζ-συνάρτηση σώματος αριθμών

Για ένα σώμα αριθμών L ορίζεται η ζ-συνάρτησή του:

$$\zeta_L(s) = \sum_{A \lhd \mathcal{O}_L} \frac{1}{N(A)^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω συνάρτηση δέχεται ένα γινόμενο Euler

$$\zeta_L(s) = \prod_{P \text{ πρώτο ιδεώδες}} \frac{1}{1 - N(P)^{-s}},$$

Στην περίπτωση που η επέκταση L/K είναι Galois με ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(L/K) = G$, έχουμε ότι η ομάδα G δρα μεταβατικά πάνω στα πρώτα ιδεώδη Q_i που βρίσκονται πάνω από ένα πρώτο ιδεώδες P δηλαδή για κάθε Q_i, Q_j υπάρχει g_{ij} ώστε $g_{ij}Q_i = Q_j$. Στην περίπτωση αυτή όλοι οι δείκτες e_i είναι ίσοι.
Στην περίπτωση των Galois ακολουθώντας τον Hilbert μπορούμε να ορίσουμε για κάθε πρώτο Q του δακτυλίου $\mathcal{O}_L$ τις παρακάτω ομάδες :

- Την ομάδα ανάλυσης

$$G(Q) := \{\sigma \in G : \sigma(Q) = Q\}$$

- Την ομάδα αδράνειας

$$I(Q) := \{\sigma \in G(Q) : \sigma(a) \equiv a \bmod Q, a \in \mathcal{O}_L\}$$

Παρατηρούμε ότι αν $P = Q \cap \mathcal{O}_K$ η επέκταση $\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}$ είναι Galois και η ομάδα Galois της μπαίνει σε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$1 \to I(Q) \to G(Q) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}\right) \to 1. \tag{1}$$

Αυτομορφισμός Frobenius

Είναι γνωστό ότι η ομάδα Galois της επέκτασης $\mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}\right)$ είναι κυκλική. Στην περίπτωση που το πεπερασμένο σώμα $\frac{\mathcal{O}_K}{P}$ έχει $q = p^h$-το πλήθος στοιχεία, και το σώμα $\frac{\mathcal{O}_L}{Q}$ έχει q^f-το πλήθος στοιχεία, η ομάδα Galois παράγεται από ένα στοιχείο τον αυτομορφισμό του Frobenious:

$$F : \frac{\mathcal{O}_L}{Q} \to \frac{\mathcal{O}_L}{Q}$$

$$x \mapsto x^q,$$

ο οποίος έχει τάξη f.

Θα λέμε ότι ο πρώτος Q πάνω από τον P διακλαδίζεται με βαθμό διακλάδωσης e αν η ομάδα $I(Q)$ είναι μη τετριμμένη και έχει τάξη e. Είναι γνωστό ότι σε μια επέκταση σωμάτων αριθμών υπάρχουν πεπερασμένοι πρώτοι που διακλαδίζονται.

Στην περίπτωση που δεν έχουμε διακλάδωση, παρατηρούμε από την βραχεία ακριβή ακολουθία (1) ότι η ομάδα Galois της επέκτασης $\mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q}/\frac{\mathcal{O}_K}{P}\right)$ είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της ομάδας $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να «σηκώσουμε» τον γεννήτορα Frobenious σε ένα μοναδικό στοιχείο της ομάδας $\mathrm{Gal}(L/K)$, το οποίο θα το συμβολίζουμε με

$$[L/K, Q].$$

Το παραπάνω σύμβολο εξαρτάται από την επιλογή του πρώτου Q που επεκτείνει τον P. Αν έχουμε ένα διαφορετικό πρώτο Q' που επεκτείνει τον P, τότε αυτός θα είναι της μορφής $Q' = gQ$, για κατάλληλη επιλογή $g \in \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}\right)$ και σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$\left[L/K, Q'\right] = g^{-1}\left[L/K, Q\right] g.$$

Στην περίπτωση που η ομάδα $\mathrm{Gal}(L/K)$ είναι αβελιανή το σύμβολο είναι ανεξάρτητο της επιλογής Q.

Θεωρούμε μια επέκταση Galois σωμάτων αριθμών L/K με ομάδα G και μία αναπαράσταση της G:

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

επί ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V. Έστω

$$V^{I(Q)} = \{v \in V : gv = v \text{ για κάθε } g \in I(Q)\}.$$

Στον χώρο αυτό ορίζουμε την δράση της ομάδας $\mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}\right)$ η οποία είναι ισόμορφη με την $G(Q)/I(Q)$

$$g \bmod I(Q) \cdot v = g \cdot v.$$

Αν το P δεν διακλαδίζεται τότε $V^{I(Q)} = V$.

Για κάθε πρώτο $P \in P(K)$ θεωρούμε τον γεννήτορα της κυκλικής ομάδας Galois $\mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}\right)$ τον οποίο βλέπουμε ως ένα στοιχείο $\phi_{Q/P}$ της ομάδας πηλίκου $G(Q)/I(Q)$. Ο ορισμός της L-σειράς του Artin δίνεται από το παρακάτω γινόμενο:

$$L(s, \rho, L/K) = \prod_{P \in P(K)} \det\left(1_V - NP^{-s} \cdot \rho(\phi_{Q/P})\right)^{-1} |_{V^{I(Q)}}$$

Ιδιότητες

Για την L-σειρά του Artin μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες :

1. Η σειρά $L(s, \rho, L/K)$ συγκλίνει απόλυτα στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}(s) > 1$, και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολά του.
2. Αν η ρ είναι μία πιστή αναπαράσταση της αβελιανής ομάδας G, και χ ο χαρακτήρας τότε η L-σειρά του Artin ταυτίζεται με την L-σειρά του Dirichlet:
$$L(s, \rho, L/K) = L(s, \chi).$$
3. Στην περίπτωση που ρ είναι η τετριμμένη αναπαράσταση έχουμε ότι
$$L(s, \rho, L/K) = \zeta_K(s).$$
4. $$\zeta_L(s) = \zeta_K(s) \prod_{\substack{\rho \in \hat{G} \\ \rho \neq Id}} L(s, \rho, L/K)^{\deg \rho}.$$

Πίνακας γειτνίασης κορυφών

Ορισμός

Έστω V οι κορυφές ενός γραφήματος X και $n = |V(X)|$ ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος. Δεδομένης μίας αρίθμησης των κορυφών του γραφήματος ο πίνακας γειτνίασης του X είναι ένας $n \times n$ πίνακας με εισόδους (i, j) $1 \leq i, j \leq n$

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{ο αριθμός των ακμών} & \\ \text{που συνδέουν την κορυφή } i \text{ με την κορυφή } j & \text{αν } i \neq j \\ 2 \times \text{ο αριθμός των βρόχων στην κορυφή } i & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Αν επιλέξουμε μία διαφορετική αρίθμηση των κορυφών τότε για τον νέο πίνακα γειτνίασης A' ισχύει

$$A' = TAT^{-1}$$

όπου ο T είναι ένας πίνακας μετάθεσης.

Πίνακας γειτνίασης κορυφών

Ορισμός

Έστω V οι κορυφές ενός γραφήματος X και $n = |V(X)|$ ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος. Δεδομένης μίας αρίθμησης των κορυφών του γραφήματος ο πίνακας γειτνίασης του X είναι ένας $n \times n$ πίνακας με εισόδους (i, j) $1 \leq i, j \leq n$

$$a_{ij} = \begin{cases} \begin{array}{l} \text{ο αριθμός των ακμών} \\ \text{που συνδέουν την κορυφή } i \text{ με την κορυφή } j \end{array} & \text{αν } i \neq j \\ 2 \times \text{ο αριθμός των βρόχων στην κορυφή } i & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Αν επιλέξουμε μία διαφορετική αρίθμηση των κορυφών τότε για τον νέο πίνακα γειτνίασης A' ισχύει

$$A' = TAT^{-1}$$

όπου ο T είναι ένας πίνακας μετάθεσης.

Παράδειγμα

Ο πίνακας γειτνίασης του πλήρους γραφήματος K_4 είναι ο

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Πρώτοι σε ένα γράφημα

Έστω ένα γράφημα X με σύνολο ακμών E, $m = |E|$. Παίρνουμε και τις δύο κατευθύνσεις στις ακμές και τις ονομάζουμε ως εξής

$$e_1, e_2, \ldots, e_m, \quad e_{m+1} = e_1^{-1}, \ldots, e_{2m} = e_m^{-1}.$$

Ένα μονοπάτι ή περίπατος $C = a_1 \cdots a_s$, όπου a_j είναι μια κατευθυνόμενη ακμή λέμε ότι έχει πισογύρισμα, αν $a_{j+1} = a_j^{-1}$ για κάποιο $j = 1, \ldots, s-1$. Ένα μονοπάτι $C = a_1 \cdots a_s$ λέγεται ότι έχει ουρά αν $a_s = a_1^{-1}$.

Ένα κλειστό μονοπάτι καλείται *πρώτο μονοπάτι* αν δεν έχει πισογυρίσματα και ουρά και $C \neq D^f$ για $f > 1$ και D κλειστό μονοπάτι στο X.

Παίρνουμε την κλάση ισοδυναμίας $[C]$

$$[C] = \{a_1 \cdots a_s, a_2 \cdots a_s a_1, \ldots, a_s a_1 \cdots a_{s-1}\}.$$

Οι πρώτοι είναι κλάσεις ισοδυναμίας πρώτων μονοπατιών.

Πρώτοι σε ένα γράφημα

Έστω ένα γράφημα X με σύνολο ακμών E, $m = |E|$. Παίρνουμε και τις δύο κατευθύνσεις στις ακμές και τις ονομάζουμε ως εξής

$$e_1, e_2, \ldots, e_m, \quad e_{m+1} = e_1^{-1}, \ldots, e_{2m} = e_m^{-1}.$$

Ένα μονοπάτι ή περίπατος $C = a_1 \cdots a_s$, όπου a_j είναι μια κατευθυνόμενη ακμή λέμε ότι έχει πισογύρισμα, αν $a_{j+1} = a_j^{-1}$ για κάποιο $j = 1, \ldots, s-1$. Ένα μονοπάτι $C = a_1 \cdots a_s$ λέγεται ότι έχει ουρά αν $a_s = a_1^{-1}$.

Ένα κλειστό μονοπάτι καλείται *πρώτο μονοπάτι* αν δεν έχει πισογυρίσματα και ουρά και $C \neq D^f$ για $f > 1$ και D κλειστό μονοπάτι στο X.

Παίρνουμε την κλάση ισοδυναμίας $[C]$

$$[C] = \{a_1 \cdots a_s, a_2 \cdots a_s a_1, \ldots, a_s a_1 \cdots a_{s-1}\}.$$

Οι πρώτοι είναι κλάσεις ισοδυναμίας πρώτων μονοπατιών.

Πρώτοι σε ένα γράφημα

Έστω ένα γράφημα X με σύνολο ακμών E, $m = |E|$. Παίρνουμε και τις δύο κατευθύνσεις στις ακμές και τις ονομάζουμε ως εξής

$$e_1, e_2, \ldots, e_m, \quad e_{m+1} = e_1^{-1}, \ldots, e_{2m} = e_m^{-1}.$$

Ένα μονοπάτι ή περίπατος $C = a_1 \cdots a_s$, όπου a_j είναι μια κατευθυνόμενη ακμή λέμε ότι έχει πισογύρισμα, αν $a_{j+1} = a_j^{-1}$ για κάποιο $j = 1, \ldots, s-1$. Ένα μονοπάτι $C = a_1 \cdots a_s$ λέγεται ότι έχει ουρά αν $a_s = a_1^{-1}$.

Ένα κλειστό μονοπάτι καλείται *πρώτο μονοπάτι* αν δεν έχει πισογυρίσματα και ουρά και $C \neq D^f$ για $f > 1$ και D κλειστό μονοπάτι στο X.

Παίρνουμε την κλάση ισοδυναμίας $[C]$

$$[C] = \{a_1 \cdots a_s, a_2 \cdots a_s a_1, \ldots, a_s a_1 \cdots a_{s-1}\}.$$

Οι πρώτοι είναι κλάσεις ισοδυναμίας πρώτων μονοπατιών.

Πρώτοι σε ένα γράφημα

Έστω ένα γράφημα X με σύνολο ακμών E, $m = |E|$. Παίρνουμε και τις δύο κατευθύνσεις στις ακμές και τις ονομάζουμε ως εξής

$$e_1, e_2, \ldots, e_m, \quad e_{m+1} = e_1^{-1}, \ldots, e_{2m} = e_m^{-1}.$$

Ένα μονοπάτι ή περίπατος $C = a_1 \cdots a_s$, όπου a_j είναι μια κατευθυνόμενη ακμή λέμε ότι έχει πισογύρισμα, αν $a_{j+1} = a_j^{-1}$ για κάποιο $j = 1, \ldots, s-1$. Ένα μονοπάτι $C = a_1 \cdots a_s$ λέγεται ότι έχει ουρά αν $a_s = a_1^{-1}$.
Ένα κλειστό μονοπάτι καλείται *πρώτο μονοπάτι* αν δεν έχει πισογυρίσματα και ουρά και $C \neq D^f$ για $f > 1$ και D κλειστό μονοπάτι στο X.
Παίρνουμε την κλάση ισοδυναμίας $[C]$

$$[C] = \{a_1 \cdots a_s, a_2 \cdots a_s a_1, \ldots, a_s a_1 \cdots a_{s-1}\}.$$

Οι πρώτοι είναι κλάσεις ισοδυναμίας πρώτων μονοπατιών.

Η Ihara ζ-συνάρτηση

Η Ihara ζ-συνάρτηση για ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα (χωρίς κορυφές βαθμού 1) ορίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής u, με $|u|$ αρκούντως μικρό

$$\zeta_X(u) = \zeta(u, X) = \prod_{[P]} \left(1 - u^{\nu(P)}\right)^{-1}$$

όπου το γινόμενο είναι πάνω από όλους τους πρώτους $[P]$ στο X και $\nu(P)$ το μήκος του P.

Ένα άπειρο γινόμενο, ωστόσο...

Η Ihara ζ-συνάρτηση

Η Ihara ζ-συνάρτηση για ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα (χωρίς κορυφές βαθμού 1) ορίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής u, με $|u|$ αρκούντως μικρό

$$\zeta_X(u) = \zeta(u, X) = \prod_{[P]} \left(1 - u^{\nu(P)}\right)^{-1}$$

όπου το γινόμενο είναι πάνω από όλους τους πρώτους $[P]$ στο X και $\nu(P)$ το μήκος του P.
Ένα άπειρο γινόμενο, ωστόσο...

Η ζ-συνάρτηση Ihara ως ορίζουσα.

Ο **πίνακας ακμών** W_1 ενός γραφήματος X είναι ένας $2m \times 2m$ πίνακας με είσοδο (a, b) που αντιστοιχεί στις κατευθυνόμενες ακμές a και b. Αυτή η είσοδος (a, b) ισούται με 1 αν $t(a) = o(b)$ δηλαδή αν η τερματική κορυφή της ακμής a ταυτίζεται με την αρχική κορυφή της ακμής b και $b \neq a^{-1}$ και 0 διαφορετικά.

Για την Ihara ζ-συνάρτηση έχουμε ότι $\zeta_X(u) = \det(I - uW_1)^{-1}$.

Δηλαδή οι πόλοι της Ihara ζ-συνάρτησης είναι τα αντίστροφα των ιδιοτιμών του πίνακα W_1

Η ζ-συνάρτηση Ihara ως ορίζουσα.

Ο **πίνακας ακμών** W_1 ενός γραφήματος X είναι ένας $2m \times 2m$ πίνακας με είσοδο (a, b) που αντιστοιχεί στις κατευθυνόμενες ακμές a και b. Αυτή η είσοδος (a, b) ισούται με 1 αν $t(a) = o(b)$ δηλαδή αν η τερματική κορυφή της ακμής a ταυτίζεται με την αρχική κορυφή της ακμής b και $b \neq a^{-1}$ και 0 διαφορετικά.
Για την Ihara ζ-συνάρτηση έχουμε ότι $\zeta_X(u) = \det(I - uW_1)^{-1}$.
Δηλαδή οι πόλοι της Ihara ζ-συνάρτησης είναι τα αντίστροφα των ιδιοτιμών του πίνακα W_1

Ο **πίνακας ακμών** W_1 ενός γραφήματος X είναι ένας $2m \times 2m$ πίνακας με είσοδο (a, b) που αντιστοιχεί στις κατευθυνόμενες ακμές a και b. Αυτή η είσοδος (a, b) ισούται με 1 αν $t(a) = o(b)$ δηλαδή αν η τερματική κορυφή της ακμής a ταυτίζεται με την αρχική κορυφή της ακμής b και $b \neq a^{-1}$ και 0 διαφορετικά.
Για την Ihara ζ-συνάρτηση έχουμε ότι $\zeta_X(u) = \det(I - uW_1)^{-1}$.
Δηλαδή οι πόλοι της Ihara ζ-συνάρτησης είναι τα αντίστροφα των ιδιοτιμών του πίνακα W_1

Οι πόλοι της ζ-συνάρτησης του Ihara

Οποτε η ακτίνα σύγκλισής της ως δυναμοσειρά γύρω από το 0 είναι $R_X = \rho(W_1)^{-1}$ όπου $\rho(W_1) = \max\{|\lambda|\}$ με λ ιδιοτιμή του πίνακα W_1.

Ισχύει ότι

$$u\frac{d}{du}\log\zeta_X(u) = \sum_{m\geq 1} N_m u^m.$$

όπου N_m το πλήθος των κλειστών μονοπατίων χωρίς πισογυρίσματα και ουρές, μήκους m.

Οι πόλοι της ζ-συνάρτησης του Ihara

Οποτε η ακτίνα σύγκλισής της ως δυναμοσειρά γύρω από το 0 είναι $R_X = \rho(W_1)^{-1}$ όπου $\rho(W_1) = \max\{|\lambda|\}$ με λ ιδιοτιμή του πίνακα W_1. Ισχύει ότι

$$u\frac{d}{du}\log\zeta_X(u) = \sum_{m\geq 1} N_m u^m.$$

όπου N_m το πλήθος των κλειστών μονοπατίων χωρίς πισογυρίσματα και ουρές, μήκους m.

Θεώρημα Bass Hasimoto

Έστω A ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος X και Q ο διαγώνιος πίνακας με $j-$οστή είσοδο q_j ώστε το $q_j + 1$ να είναι ο βαθμός της $j-$οστής κορυφής του X . Ας υποθέσουμε ότι το r είναι η ο βαθμός της θεμελιώδους ομάδας του X , δηλαδή $r - 1 = |E| - |V|$. Τότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\zeta_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - Au + Qu^2).$$

Παράδειγμα

Το πλήρες γράφημα K_4 έχει ζ-συνάρτηση του Ihara την

$$\zeta_{K_4}^{-1} = -(u-1)^2(u+1)(2u-1)\left(2u^2+u+1\right)^3.$$

Θεώρημα Bass Hasimoto

Έστω A ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος X και Q ο διαγώνιος πίνακας με $j-$οστή είσοδο q_j ώστε το $q_j + 1$ να είναι ο βαθμός της $j-$οστής κορυφής του X . Ας υποθέσουμε ότι το r είναι η ο βαθμός της θεμελιώδους ομάδας του X , δηλαδή $r - 1 = |E| - |V|$. Τότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\zeta_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - Au + Qu^2).$$

Παράδειγμα

Το πλήρες γράφημα K_4 έχει ζ-συνάρτηση του Ihara την

$$\zeta_{K_4}^{-1} = -(u-1)^2(u+1)(2u-1)\left(2u^2+u+1\right)^3.$$

Συναρτησιακές εξισώσεις

Έστω X ένα $q+1$-κανονικό γράφημα με ελάχιστο βαθμό κορυφών 2 και $n = |V|$. Τότε έχουμε τις ακόλουθες συναρτησιακές εξισώσεις

1. $\Lambda_X(u) \equiv (1-u^2)^{r-1+n/2}(1-q^2u^2)^{n/2}\zeta_X(u) = (-1)^n\Lambda_X(1/qu)$.
2. $\xi_X(u) \equiv (1+u)^{r-1}(1-u)^{r-1+n}(1-qu)^n\zeta_X(u) = \xi_X(1/qu)$.
3. $\Xi_X(u) \equiv (1-u^2)^{r-1}(1+qu)^n\zeta_X(u) = \Xi_X(1/qu)$.

Από τις παραπάνω συναρτησιακές εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συμμετρία στην κατανομή των πόλων της $\zeta_X(u)$ για κανονικά γραφήματα, δηλαδή αν η $\zeta_X(u)$ έχει ένα πόλο στο u τότε πρέπει να έχει και ένα πόλο στο $1/qu$.

Αν θέσουμε όπου $u = q^{-s}$ οι συναρτησιακές εξισώσεις συνδέουν το s με το $1-s$ κάτι που αποτελεί ανάλογο της συναρτησιακής εξίσωσης της ζ-συνάρτησης του Riemann

Συναρτησιακές εξισώσεις

Έστω X ένα $q+1$-κανονικό γράφημα με ελάχιστο βαθμό κορυφών 2 και $n = |V|$. Τότε έχουμε τις ακόλουθες συναρτησιακές εξισώσεις

1. $\Lambda_X(u) \equiv (1-u^2)^{r-1+n/2}(1-q^2u^2)^{n/2}\zeta_X(u) = (-1)^n \Lambda_X(1/qu)$.
2. $\xi_X(u) \equiv (1+u)^{r-1}(1-u)^{r-1+n}(1-qu)^n\zeta_X(u) = \xi_X(1/qu)$.
3. $\Xi_X(u) \equiv (1-u^2)^{r-1}(1+qu)^n\zeta_X(u) = \Xi_X(1/qu)$.

Από τις παραπάνω συναρτησιακές εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συμμετρία στην κατανομή των πόλων της $\zeta_X(u)$ για κανονικά γραφήματα, δηλαδή αν η $\zeta_X(u)$ έχει ένα πόλο στο u τότε πρέπει να έχει και ένα πόλο στο $1/qu$.

Αν θέσουμε όπου $u = q^{-s}$ οι συναρτησιακές εξισώσεις συνδέουν το s με το $1-s$ κάτι που αποτελεί ανάλογο της συναρτησιακής εξίσωσης της ζ-συνάρτησης του Riemann

Συναρτησιακές εξισώσεις

Έστω X ένα $q+1$-κανονικό γράφημα με ελάχιστο βαθμό κορυφών 2 και $n = |V|$. Τότε έχουμε τις ακόλουθες συναρτησιακές εξισώσεις

1. $\Lambda_X(u) \equiv (1-u^2)^{r-1+n/2}(1-q^2u^2)^{n/2}\zeta_X(u) = (-1)^n\Lambda_X(1/qu)$.
2. $\xi_X(u) \equiv (1+u)^{r-1}(1-u)^{r-1+n}(1-qu)^n\zeta_X(u) = \xi_X(1/qu)$.
3. $\Xi_X(u) \equiv (1-u^2)^{r-1}(1+qu)^n\zeta_X(u) = \Xi_X(1/qu)$.

Από τις παραπάνω συναρτησιακές εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συμμετρία στην κατανομή των πόλων της $\zeta_X(u)$ για κανονικά γραφήματα, δηλαδή αν η $\zeta_X(u)$ έχει ένα πόλο στο u τότε πρέπει να έχει και ένα πόλο στο $1/qu$.

Αν θέσουμε όπου $u = q^{-s}$ οι συναρτησιακές εξισώσεις συνδέουν το s με το $1-s$ κάτι που αποτελεί ανάλογο της συναρτησιακής εξίσωσης της ζ-συνάρτησης του Riemann

Υπόθεση Riemann

Υποθέτουμε ότι το X είναι ένα συνεκτικό $(q+1)$-κανονικό γράφημα (χωρίς κορυφές βαθμού 1). Λέμε ότι η Ihara ζ-συνάρτηση $\zeta_X(q^{-s})$ ικανοποιεί την *υπόθεση Riemann* ανν για $0 < \operatorname{Re} s < 1$

$$\zeta_X(q^{-s})^{-1} = 0 \Longrightarrow \operatorname{Re} s = 1/2.$$

Παρατηρούμε ότι αν $u = q^{-s}$, $\operatorname{Re} s = 1/2$ αντιστοιχεί σε $|u| = 1/\sqrt{q}$.

Γραφήματα Ramanujan

Ένα συνεκτικό $(q+1)$-κανονικό γράφημα X λέγεται *Ramanujan* αν και μόνο αν για

$$\mu = \max\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \mathrm{Spectrum} A, |\lambda| \neq q+1\}$$

έχουμε $\mu \leq 2\sqrt{q}$.

Υπόθεση Riemann

Υποθέτουμε ότι το X είναι ένα συνεκτικό $(q+1)$-κανονικό γράφημα (χωρίς κορυφές βαθμού 1). Λέμε ότι η Ihara ζ-συνάρτηση $\zeta_X(q^{-s})$ ικανοποιεί την *υπόθεση Riemann* ανν για $0 < \operatorname{Re} s < 1$

$$\zeta_X(q^{-s})^{-1} = 0 \Longrightarrow \operatorname{Re} s = 1/2.$$

Παρατηρούμε ότι αν $u = q^{-s}$, $\operatorname{Re} s = 1/2$ αντιστοιχεί σε $|u| = 1/\sqrt{q}$.

Γραφήματα Ramanujan

Ένα συνεκτικό $(q+1)$-κανονικό γράφημα X λέγεται *Ramanujan* αν και μόνο αν για

$$\mu = \max\{|\lambda| | \lambda \in \mathrm{Spectrum} A, |\lambda| \neq q+1\}$$

έχουμε $\mu \leq 2\sqrt{q}$.

Υπόθεση Riemann για Γραφήματα - Γραφήματα Ramanujan

Θεώρημα

Για ένα συνεκτικό $(q+1)$ κανονικό γράφημα X, η $\zeta_X(u)$ ικανοποιεί την υπόθεση *Riemann* ανν το γράφημα είναι *Ramanujan*.

Τα Ramanujan γραφήματα είναι βέλτιστα expander γραφήματα δηλαδή ισχυρά συνεκτικά αλλά αραιά γραφήματα.

Υπόθεση Riemann για Γραφήματα - Γραφήματα Ramanujan

Θεώρημα

Για ένα συνεκτικό $(q+1)$ κανονικό γράφημα X, η $\zeta_X(u)$ ικανοποιεί την υπόθεση *Riemann* ανν το γράφημα είναι *Ramanujan*.

Τα Ramanujan γραφήματα είναι βέλτιστα expander γραφήματα δηλαδή ισχυρά συνεκτικά αλλά αραιά γραφήματα.

Expanders

Ορισμός

Έστω $S, \; T$ υποσύνολα του συνόλου των κορυφών του X, ορίζουμε

$$E(S,T) = \{e | e \text{ ακμή του } X \text{ με μία κορυφή στο } S \text{ και την άλλη στο } T\}$$

Ορισμός

Αν το S είναι ένα σύνολο από κορυφές του X ορίζουμε το σύνορο του S να είναι $\partial S = E(S, X - S)$

Ορισμός

Ένα γράφημα X με σύνολο κορυφών V και $n = |V|$ έχει expansion ratio

$$h(X) = \min_{\{S \subset V | \; |S| \leq n/2\}} \frac{|\partial S|}{|S|}.$$

Expanders

Παρατηρούμε ότι $h > 0$ αν και μόνο αν το X είναι συνεκτικό. Επίσης για οποιοδήποτε S με $|S| \leq n/2$ έχουμε ότι $\vartheta S \geq h|S|$, οπότε αν το h δεν είναι μικρό το S έχει πολλούς γείτονες εκτός του S από όπου προκύπτει και το όνομα expander (αυτό που εξαπλώνεται).

Ορισμός

Μία ακολουθία από k-κανονικά γραφήματα $\{X_j\}$ έτσι ώστε $|V(X_j)| \to \infty$ για $j \to \infty$ ονομάζεται οικογένεια expander γραφημάτων αν υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ έτσι ώστε $h(X_j) \geq \epsilon$ για κάθε j.

Θεώρημα Dodziuk, Alon, Milman

Έστω X ένα k-κανονικό συνεκτικό γράφημα. Τότε ισχύει:

$$\frac{k-\lambda_1}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k(k-\lambda_1)}.$$

όπου λ_1 είναι η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα γειτνίασης.

Θεώρημα Alon Boppana

Υποθέτουμε ότι η X_n είναι μία ακολουθία k-κανονικών συνεκτικών γραφημάτων και ότι ο αριθμός των κορυφών των X_n τείνει στο άπειρο καθώς το n τείνει στο άπειρο. Τότε

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_1(X_n) \geq 2\sqrt{k-1}$$

Expander-mixing lemma

Έστω X ένα συνεκτικό k-κανονικό μη διμερές γράφημα με n κορυφές και

$$\mu = \max\{|\lambda| | \lambda \in \mathrm{Spectrum}\, A, \ |\lambda| \neq k\}.$$

Τότε για όλα τα σύνολα S, T από κορυφές του X έχουμε ότι

$$\left| E(S,T) - \frac{k|S||T|}{n} \right| \leq \mu \sqrt{|S||T|}.$$

Μικρή διαμέτρος

Έστω το X ένα γράφημα συνεκτικό, μη διμερές με n κορυφές, τότε

$$\mathrm{diam} X \leq 1 + \frac{\log(n-1)}{\log(k/\mu)}.$$

Expander-mixing lemma

Έστω X ένα συνεκτικό k-κανονικό μη διμερές γράφημα με n κορυφές και

$$\mu = \max\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \mathrm{Spectrum}\, A,\ |\lambda| \neq k\}.$$

Τότε για όλα τα σύνολα S, T από κορυφές του X έχουμε ότι

$$\left| E(S,T) - \frac{k|S||T|}{n} \right| \leq \mu \sqrt{|S||T|}.$$

Μικρή διαμέτρος

Έστω το X ένα γράφημα συνεκτικό, μη διμερές με n κορυφές, τότε

$$\mathrm{diam} X \leq 1 + \frac{\log(n-1)}{\log(k/\mu)}.$$

Ο τυχαίος περιπατητής χάνεται

Έστω ένα γράφημα X συνεκτικό μη διμερές k-κανονικό με n κορυφές και πίνακα γειτνίασης A. Αν $T = (1/k)A$ για κάθε αρχικό διάνυσμα πιθανότητας $p^{(0)}$ ισχύει ότι

$$\lim_{m\to\infty} p^{(m)} = \lim_{m\to\infty} T^m p^{(0)} = u = \left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)^t$$

Πόσο γρήγορα χάνεται ο περιπατητής

Έστω X ένα συνεκτικό, μη διμερές k-κανονικό γράφημα με n κορυφές και πίνακα γειτνίασης A. Αν $T = (1/k)A$, για κάθε αρχικό διάνυσμα πιθανότητας $p^{(0)}$, έχουμε ότι

$$||T^m p^{(0)} - u|| \leq \sqrt{n}\left(\frac{\mu}{k}\right)^m$$

Τα γραφήματα $X_{p,q}$ των Lubotzky,Phillips,Sarnak (1988)

Τα $X_{p,q}$ είναι Cayley γραφήματα της ομάδας
$G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)/Z(\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q))$
όπου $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ είναι η ομάδα των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία στο σώμα με q στοιχεία και $Z(\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ το κέντρο της ομάδας που είναι το σύνολο των βαθμωτών πολλαπλασίων του ταυτοτικού πίνακα. Επιλέγουμε έναν ακέραιο i ώστε $i^2 \equiv -1 \bmod 4$.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p, a_0 > 0, \\ a_1, a_2, a_3 \text{ άρτιοι} \end{array} \right\}$$

Ένα θεώρημα του Jacobi λέει ότι με αυτές τις προυποθέσεις $|S| = p + 1$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το S είναι κλειστό ως προς αντιστροφή πινάκων. Το γράφημα $X_{p,q}$ είναι η συνεκτική συνιστώσα του Cayley γραφήματος $X(G, S)$ που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο.

Τα γραφήματα $X_{p,q}$ των Lubotzky,Phillips,Sarnak (1988)

Τα $X_{p,q}$ είναι Cayley γραφήματα της ομάδας $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)/Z(\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q))$ όπου $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ είναι η ομάδα των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία στο σώμα με q στοιχεία και $Z(\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ το κέντρο της ομάδας που είναι το σύνολο των βαθμωτών πολλαπλασίων του ταυτοτικού πίνακα. Επιλέγουμε έναν ακέραιο i ώστε $i^2 \equiv -1 \,\mathrm{mod} 4$.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p, a_0 > 0, \\ a_1, a_2, a_3 \text{ άρτιοι} \end{array} \right\}$$

Ένα θεώρημα του Jacobi λέει ότι με αυτές τις προυποθέσεις $|S| = p + 1$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το S είναι κλειστό ως προς αντιστροφή πινάκων. Το γράφημα $X_{p,q}$ είναι η συνεκτική συνιστώσα του Cayley γραφήματος $X(G, S)$ που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο.

Γραφήματα Ramanujan κάθε βαθμού (2013)

Ο Morgenstern επέκτεινε την κατασκευή των Lubotzky,Phillips,Sarnak σε $p^a + 1$-κανονικά Ramanujan γραφήματα όπου p πρώτος και $a \in \mathbb{N}$.

Οι Adam Marcus, Daniel Spielman και Nikhil Srivastava απέδειξαν ότι υπάρχουν άπειρες οικογένειες διμερών Ramanujan γραφημάτων για κάθε βαθμό $d > 2$.

Η απόδειξη που παρέθεσαν είναι υπαρξιακή.

Γραφήματα Ramanujan κάθε βαθμού (2013)

Ο Morgenstern επέκτεινε την κατασκευή των Lubotzky,Phillips,Sarnak σε $p^a + 1$-κανονικά Ramanujan γραφήματα όπου p πρώτος και $a \in \mathbb{N}$.

Οι Adam Marcus, Daniel Spielman και Nikhil Srivastava απέδειξαν ότι υπάρχουν άπειρες οικογένειες διμερών Ramanujan γραφημάτων για κάθε βαθμό $d > 2$.

Η απόδειξη που παρέθεσαν είναι υπαρξιακή.

Συντελεστές της αντίστροφης της ζ-συνάρτησης του Ihara

$$\zeta_X(u)^{-1} = \det(I - W_1 u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \cdots + c_{2m} u^{2m}$$

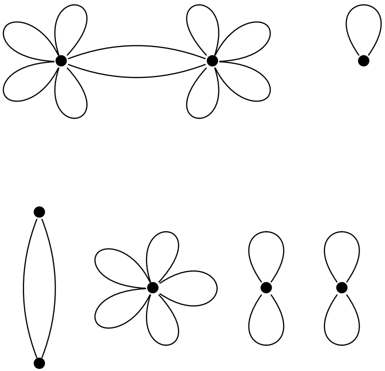
όπου $m = |E|$ ο αριθμός των ακμών του γραφήματος X.

1. $c_0 = 1$
2. $c_{2m} = (-1)^{m-n} \prod_{v_i \in V} (d(v_i) - 1)$.
3. Το c_1 ισούται με το αρνητικό του διπλασίου του πλήθους των βρόχων στο X.
4. Αν X απλό το c_3 ισούται με το αρνητικό του διπλασίου του αριθμού των τριγώνων στο X.
5. Έστω g η περιφέρεια ενός απλού συνεκτικού γραφήματος X, τότε, $c_k = 0$ για $1 \leq k < g$. Επιπλέον το c_g είναι το αρνητίκο του διπλασίου του πλήθους των g-γώνων στο X.

Συντελεστές της αντίστροφης της ζ-συνάρτησης του Ihara

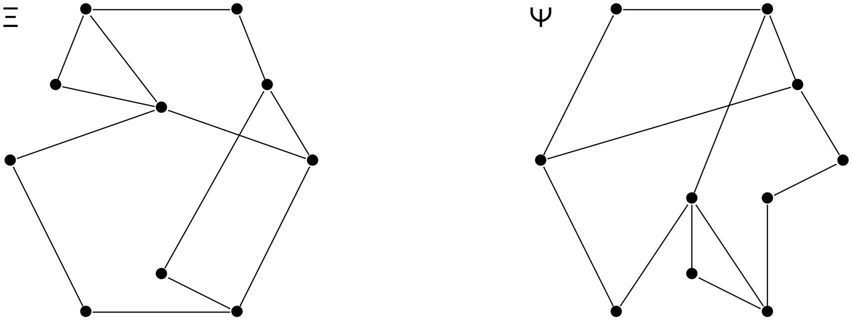
Γενικότερα το c_i είναι το πλήθος των υπογραφημάτων του συμμετρικού διγραφήματος $D(X)$ με i κορυφές που αποτελούνται από άρτιο αριθμό κλειστών μονοπατιών χωρίς πισογυρίσματα, ουρές και επαναλήψεις ακμών μείον του πλήθους των υπογραφημάτων του συμμετρικού διγραφήματος $D(X)$ με i κορυφές που αποτελούνται από περιττό αριθμό κλειστών μονοπατιών χωρίς πισογυρίσματα, ουρές και επαναλήψεις ακμών.

Παραδείγματα



Σχήμα : Δύο γραφήματα με την ίδια ζ-συνάρτηση αλλά διαφορετικούς αριθμούς κορυφών και συνεκτικών συνιστωσών.

Παραδείγματα



Σχήμα : Δύο γραφήματα με την ίδια ζ-συνάρτηση, το ένα έχει κύκλο Hamilton και το άλλο όχι.

Αδιακλάδιστα καλύμματα

Έστω ένα γράφημα X χωρίς πολλαπλές ακμές και βρόχους. Θα λέμε ότι το γράφημα Y είναι ένα *αδιακλάδιστο κάλυμμα* του γραφήματος X αν υπάρχει μία απεικόνιση επικάλυψης $\pi : Y \to X$ που είναι μία επί απεικόνιση γραφημάτων ώστε για καθε $x \in X$ και για κάθε $y \in \pi^{-1}(x)$ οι κορυφές που είναι γειτονικές στο $y \in Y$ να απεικονίζονται μία προς μία επί των γειτονικών κορυφών του $x \in X$.

Ορισμός

Ένα μη κατευθυνόμενο πεπερασμένο γράφημα Y είναι ένα αδιακλάδιστο κάλυμμα του μη κατευθυνόμενου γραφήματος X αν, δίνοντας έναν αυθαίρετο προσανατολισμό στις ακμές του X υπάρχει μια επιλογή προσανατολισμού για τις ακμές του Y και μια επί *απεικόνιση επικάλυψης* $\pi : Y \to X$ που στέλνει τις γειτονίες του Y επί των γειτονιών του X και διατηρεί τον προσανατολισμό των ακμών.

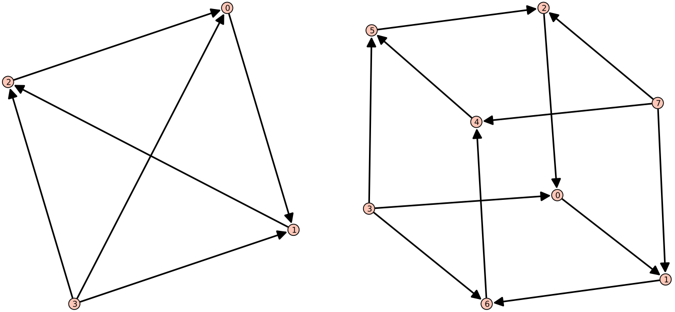
Αδιακλάδιστα καλύμματα

Έστω ένα γράφημα X χωρίς πολλαπλές ακμές και βρόχους. Θα λέμε ότι το γράφημα Y είναι ένα *αδιακλάδιστο κάλυμμα* του γραφήματος X αν υπάρχει μία απεικόνιση επικάλυψης $\pi : Y \to X$ που είναι μία επί απεικόνιση γραφημάτων ώστε για καθε $x \in X$ και για κάθε $y \in \pi^{-1}(x)$ οι κορυφές που είναι γειτονικές στο $y \in Y$ να απεικονίζονται μία προς μία επί των γειτονικών κορυφών του $x \in X$.

Ορισμός

Ένα μη κατευθυνόμενο πεπερασμένο γράφημα Y είναι ένα αδιακλάδιστο κάλυμμα του μη κατευθυνόμενου γραφήματος X αν, δίνοντας έναν αυθαίρετο προσανατολισμό στις ακμές του X υπάρχει μια επιλογή προσανατολισμού για τις ακμές του Y και μια επί *απεικόνιση επικάλυψης* $\pi : Y \to X$ που στέλνει τις γειτονίες του Y επί των γειτονιών του X και διατηρεί τον προσανατολισμό των ακμών.

Κατασκευή καλυμμάτων



Σχήμα : Τετράεδρο και τετραγωνικό κάλυμμα

Κανονικά Καλύμματα

Μοναδικοτητα της ανύψωσης των μονοπατιών στα καλύμματα.

Υποθέτουμε ότι το Y είναι ένα κάλυμμα του X και C ένα μονοπάτι στο X. Τότε το C έχει μια μοναδική ανύψωση σε ένα μονοπάτι $\tilde{C}$ στο Y, δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει την αρχική κορυφή του $\tilde{C}$.

Κανονικά καλύμματα

Ένα κάλυμμα Y/X με d-φύλλα και απεικόνιση επικάλυψης $\pi : Y \to X$ λέμε ότι είναι ένα *κανονικό ή Galois* κάλυμμα αν υπάρχουν d αυτομορφισμοί γραφημάτων $\sigma_i : Y \to Y, i = 1, \cdots, d$ ώστε $\pi \circ \sigma_i = \pi$. Η *ομάδα Galois* $G(Y/X)$ είναι το σύνολο των απεικονίσεων σ_i με πράξη την σύνθεση. Όταν λέμε αυτομορφισμό γραφημάτων εννοούμε μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση μεταξύ των κορυφών και των κατευθυνόμενων ακμών του Y που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Μοναδικοτητα της ανύψωσης των μονοπατιών στα καλύμματα.

Υποθέτουμε ότι το Y είναι ένα κάλυμμα του X και C ένα μονοπάτι στο X. Τότε το C έχει μια μοναδική ανύψωση σε ένα μονοπάτι $\tilde{C}$ στο Y, δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει την αρχική κορυφή του $\tilde{C}$.

Κανονικά καλύμματα

Ένα κάλυμμα Y/X με d-φύλλα και απεικόνιση επικάλυψης $\pi : Y \to X$ λέμε ότι είναι ένα *κανονικό ή Galois* κάλυμμα αν υπάρχουν d αυτομορφισμοί γραφημάτων $\sigma_i : Y \to Y, i = 1, \cdots, d$ ώστε $\pi \circ \sigma_i = \pi$. Η *ομάδα Galois* $G(Y/X)$ είναι το σύνολο των απεικονίσεων σ_i με πράξη την σύνθεση. Όταν λέμε αυτομορφισμό γραφημάτων εννοούμε μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση μεταξύ των κορυφών και των κατευθυνόμενων ακμών του Y που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Κανονικά Καλύμματα

Μοναδικοτητα της ανύψωσης των μονοπατιών στα καλύμματα.

Υποθέτουμε ότι το Y είναι ένα κάλυμμα του X και C ένα μονοπάτι στο X. Τότε το C έχει μια μοναδική ανύψωση σε ένα μονοπάτι $\tilde{C}$ στο Y, δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει την αρχική κορυφή του $\tilde{C}$.

Κανονικά καλύμματα

Ένα κάλυμμα Y/X με d-φύλλα και απεικόνιση επικάλυψης $\pi : Y \to X$ λέμε ότι είναι ένα *κανονικό ή Galois* κάλυμμα αν υπάρχουν d αυτομορφισμοί γραφημάτων $\sigma_i : Y \to Y, i = 1, \cdots, d$ ώστε $\pi \circ \sigma_i = \pi$. Η *ομάδα Galois* $G(Y/X)$ είναι το σύνολο των απεικονίσεων σ_i με πράξη την σύνθεση. Όταν λέμε αυτομορφισμό γραφημάτων εννοούμε μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση μεταξύ των κορυφών και των κατευθυνόμενων ακμών του Y που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Δράση της ομάδας Galois

Έστω Y/X ένα κανονικό κάλυμμα. Η ομάδα *Galois* $G = G(Y/X)$ δρά μεταβατικά στα φύλλα του καλύμματος.

Διαλέγουμε ένα από τα φύλλα του Y και το ονομάζουμε *φύλλο 1*. Η εικόνα του φύλλου 1 κάτω από την δράση ενός στοιχείου $g \in G$ θα ονομάζεται *φύλλο g*. Συνεπώς κάθε κορυφή $\tilde{x}$ στο Y μπορεί να συμβολίζεται μοναδικά με $\tilde{x} = (x, g)$, όπου $x = \pi(\tilde{x})$ και g είναι το φύλλο που περιέχει το $\tilde{x}$.

Η ομάδα Galois $G(Y/X)$ δρα στα φύλλα του Y μέσω του $g \circ (\text{ φύλλο } h) = \text{φύλλο}(gh)$:

$$g \circ (x, h) = (x, gh) \quad \text{για, } x \in X, \quad g, h \in G$$

Συνεπάγεται ότι η δράση του g κινεί ένα μονοπάτι στο Y ως εξής : $g\circ$(μονοπατι από το (a, h) στο (b, j)) = μονοπάτι από το (a, gh) στο (b, gj).

Δράση της ομάδας Galois

Έστω Y/X ένα κανονικό κάλυμμα. Η ομάδα *Galois* $G = G(Y/X)$ δρά μεταβατικά στα φύλλα του καλύμματος.

Διαλέγουμε ένα από τα φύλλα του Y και το ονομάζουμε *φύλλο 1*. Η εικόνα του φύλλου 1 κάτω από την δράση ενός στοιχείου $g \in G$ θα ονομάζεται *φύλλο g*. Συνεπώς κάθε κορυφή $\tilde{x}$ στο Y μπορεί να συμβολίζεται μοναδικά με $\tilde{x} = (x, g)$, όπου $x = \pi(\tilde{x})$ και g είναι το φύλλο που περιέχει το $\tilde{x}$.

Η ομάδα Galois $G(Y/X)$ δρα στα φύλλα του Y μέσω του $g \circ (\text{ φύλλο } h) = \text{φύλλο}(gh)$:

$$g \circ (x, h) = (x, gh) \quad \text{για, } x \in X, \quad g, h \in G$$

Συνεπάγεται ότι η δράση του g κινεί ένα μονοπάτι στο Y ως εξής : $g\circ$(μονοπατι από το (a, h) στο (b, j)) = μονοπάτι από το (a, gh) στο (b, gj).

Δράση της ομάδας Galois

Έστω Y/X ένα κανονικό κάλυμμα. Η ομάδα *Galois* $G = G(Y/X)$ δρά μεταβατικά στα φύλλα του καλύμματος.

Διαλέγουμε ένα από τα φύλλα του Y και το ονομάζουμε *φύλλο 1*. Η εικόνα του φύλλου 1 κάτω από την δράση ενός στοιχείου $g \in G$ θα ονομάζεται *φύλλο* g. Συνεπώς κάθε κορυφή $\tilde{x}$ στο Y μπορεί να συμβολίζεται μοναδικά με $\tilde{x} = (x, g)$, όπου $x = \pi(\tilde{x})$ και g είναι το φύλλο που περιέχει το $\tilde{x}$.

Η ομάδα Galois $G(Y/X)$ δρα στα φύλλα του Y μέσω του $g \circ (\text{ φύλλο } h) = \text{φύλλο}(gh)$:

$$g \circ (x, h) = (x, gh) \qquad \text{για, } x \in X, \quad g, h \in G$$

Συνεπάγεται ότι η δράση του g κινεί ένα μονοπάτι στο Y ως εξής : $g\circ$(μονοπατι από το (a, h) στο (b, j)) = μονοπάτι από το (a, gh) στο (b, gj).

Θεμελιώδες Θεώρημα Galois

Ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι το Y είναι ένα κάλυμμα του X με απεικόνιση επικάλυψης π. Το γράφημα $\tilde{X}$ είναι ένα **ενδιάμεσο κάλλυμα** του Y/X αν το $Y/\tilde{X}$ είναι ένα κάλυμμα, το $\tilde{X}/X$ είναι ένα κάλυμμα και οι προβολές επικάλυψης $\pi_1 : \tilde{X} \to X$ και $\pi_2 : Y \to \tilde{X}$ έχουν την ιδιότητα ότι $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$.

Ουσιαστικά, είναι η τριάδα $(\tilde{X}, \pi_1, \pi_2)$ που ορίζει ένα ενδιάμεσο κάλυμμα.

Ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι το Y είναι ένα κάλυμμα του X με απεικόνιση επικάλυψης π. Το γράφημα $\tilde{X}$ είναι ένα **ενδιάμεσο κάλλυμα** του Y/X αν το $Y/\tilde{X}$ είναι ένα κάλυμμα, το $\tilde{X}/X$ είναι ένα κάλυμμα και οι προβολές επικάλυψης $\pi_1 : \tilde{X} \to X$ και $\pi_2 : Y \to \tilde{X}$ έχουν την ιδιότητα ότι $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$.

Ουσιαστικά, είναι η τριάδα $(\tilde{X}, \pi_1, \pi_2)$ που ορίζει ένα ενδιάμεσο κάλυμμα.

Ορισμός

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_2'"] \arrow[dd, "\pi"] & \\
\tilde{X} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \tilde{X}' \arrow[dl, "\pi_1'"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Ας υποθέσουμε ότι ο i είναι ένα ισομορφισμός μεταξύ των $\tilde{X}$ και $\tilde{X}'$ (που σημαίνει ότι είναι ένα-προς -ένα και επί στις κορυφές και στις κατευθυνόμενες ακμές). Αν ισχύει $\pi_1 = \pi_1' \circ i$ θα λέμε ότι ο i είναι ένας *ισομορφισμός καλυμμάτων* και τα $\tilde{X}$ και $\tilde{X}'$ είναι *ισόμορφα καλλύμματα* του X. Αν, επιπλέον, έχουμε ότι $i \circ \pi_2 = \pi_2'$ τότε λέμε ότι τα $\tilde{X}$ και $\tilde{X}'$ είναι *τα ίδια ή ίσα*.

Θεμελιώδες Θεώρημα Galois

Ας υποθέσουμε ότι το Y/X είναι ένα αδιακλάδιστο κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois $G = G(Y/X)$

1. Δεδομένης μίας υποομάδας H της G, υπάρχει ένα γράφημα $\tilde{X}$ ενδιάμεσο στο Y/X έτσι ώστε $H = G(Y/\tilde{X})$. Γράφουμε $\tilde{X} = \tilde{X}(H)$.
2. Έστω $\tilde{X}$ να είναι ενδιάμεσο στο Y/X. Τότε υπάρχει υποομάδα $H = H(\tilde{X})$ της G ισόμορφη με την $G(Y/\tilde{X})$.
3. Δύο ενδιάμεσα καλλύματα $\tilde{X}$ και $\tilde{X}'$ είναι ίσα αν και μόνον αν το $H(\tilde{X}) = H(\tilde{X}')$.
4. Έχουμε ότι $H(\tilde{X}(H)) = H$ και $\tilde{X}(H(\tilde{X})) = \tilde{X}$. Οπότε γράφουμε $\tilde{X} \leftrightarrow H$ για την αντιστοιχία μεταξύ των $\tilde{X}$ ενδιάμεσων καλυμμάτων στο Y/X και των υποομάδων H της Galois ομάδας $G = G(Y/X)$.
5. Αν $\tilde{X}_1 \leftrightarrow H_1$ και $\tilde{X}_2 \leftrightarrow H_2$ τότε το $\tilde{X}_1$ είναι ενδιάμεσο στο $Y/\tilde{X}_2$ ανν $H_1 \subset H_2$.

Συζυγή ενδιάμεσα καλύμματα

Ορισμός

Υποθέτουμε ότι έχουμε τις ακόλουθες αντιστοιχίες μεταξύ ενδιάμεσων καλυμμάτων και υποομάδων του G :

$$\begin{array}{ccl} \tilde{X} & \longleftrightarrow & H \subset G \\ \tilde{X}' & \longleftrightarrow & gHg^{-1} \subset G \quad g \in G \end{array}$$

τότε λέμε ότι τα $\tilde{X}$ και $\tilde{X}'$ είναι *συζυγή*.

Θεώρημα

Τα ενδιάμεσα καλύμματα $\tilde{X}$ και $\tilde{X}'$ στο Y/X με ομάδα Galois G είναι συζυγή ανν είναι ισόμορφα.

Θεώρημα

Το $\tilde{X}$ είναι κανονικό κάλυμμα του X ανν η H είναι κανονική υποομάδα της G, και σε αυτή την περίπτωση $G(\tilde{X}/X) \cong G/H$.

Συζυγή ενδιάμεσα καλύμματα

Ορισμός

Υποθέτουμε ότι έχουμε τις ακόλουθες αντιστοιχίες μεταξύ ενδιάμεσων καλυμμάτων και υποομάδων του G :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longleftrightarrow & H \subset G \\ \tilde{X}' & \longleftrightarrow & gHg^{-1} \subset G \quad g \in G \end{array}$$

τότε λέμε ότι τα $\tilde{X}$ και $\tilde{X}'$ είναι *συζυγή*.

Θεώρημα

Τα ενδιάμεσα καλύμματα $\tilde{X}$ και $\tilde{X}'$ στο Y/X με ομάδα Galois G είναι συζυγή ανν είναι ισόμορφα.

Θεώρημα

Το $\tilde{X}$ είναι κανονικό κάλυμμα του X ανν η H είναι κανονική υποομάδα της G, και σε αυτή την περίπτωση $G(\tilde{X}/X) \cong G/H$.

Πρώτοι στα καλύμματα

Αν ο $[D]$ είναι ένας πρώτος στο κάλυμμα Y/X με προβολή επικάλυψης π και $\pi(D) = C^f$ όπου $[C]$ είναι ένας πρώτος στο X, θα λέμε ότι ο $[D]$ είναι ένας πρώτος του Y πάνω από το $[C]$ ή, πιο απλά, ότι ο D είναι ένας πρώτος πάνω από τον C (γράφουμε $D|C$). Το $f = f(D, Y/X)$ ορίζεται ως ο βαθμός αδρανείας του D ως προς το Y/X.

Αν το Y/X είναι κανονικό ο βαθμός του $[D]$ πάνω από το C είναι ο ίδιος για όλα τα $[D]$ πάνω από το C. Αυτό δεν ισχύει πάντα για μη κανονικές επεκτάσεις.

Θα συμβολίσουμε με $g = g(D, Y/X)$ τον αριθμό των πρώτων $[D]$ πάνω από το $[C]$

Για κανονικά αδιακλάδιστα καλύμματα ισχύει ότι $fg = d$. -

Πρώτοι στα καλύμματα

Αν ο $[D]$ είναι ένας πρώτος στο κάλυμμα Y/X με προβολή επικάλυψης π και $\pi(D) = C^f$ όπου $[C]$ είναι ένας πρώτος στο X, θα λέμε ότι ο $[D]$ είναι ένας πρώτος του Y πάνω από το $[C]$ ή, πιο απλά, ότι ο D είναι ένας πρώτος πάνω από τον C (γράφουμε $D|C$). Το $f = f(D, Y/X)$ ορίζεται ως ο βαθμός αδρανείας του D ως προς το Y/X.
Αν το Y/X είναι κανονικό ο βαθμός του $[D]$ πάνω από το C είναι ο ίδιος για όλα τα $[D]$ πάνω από το C. Αυτό δεν ισχύει πάντα για μη κανονικές επεκτάσεις.
Θα συμβολίσουμε με $g = g(D, Y/X)$ τον αριθμό των πρώτων $[D]$ πάνω από το $[C]$
Για κανονικά αδιακλάδιστα καλύμματα ισχύει ότι $fg = d$. -

Πρώτοι στα καλύμματα

Αν ο $[D]$ είναι ένας πρώτος στο κάλυμμα Y/X με προβολή επικάλυψης π και $\pi(D) = C^f$ όπου $[C]$ είναι ένας πρώτος στο X, θα λέμε ότι ο $[D]$ είναι ένας πρώτος του Y πάνω από το $[C]$ ή, πιο απλά, ότι ο D είναι ένας πρώτος πάνω από τον C (γράφουμε $D|C$). Το $f = f(D, Y/X)$ ορίζεται ως ο βαθμός αδρανείας του D ως προς το Y/X.
Αν το Y/X είναι κανονικό ο βαθμός του $[D]$ πάνω από το C είναι ο ίδιος για όλα τα $[D]$ πάνω από το C. Αυτό δεν ισχύει πάντα για μη κανονικές επεκτάσεις.
Θα συμβολίσουμε με $g = g(D, Y/X)$ τον αριθμό των πρώτων $[D]$ πάνω από το $[C]$
Για κανονικά αδιακλάδιστα καλύμματα ισχύει ότι $fg = d$. -

Ορισμός Αυτομορφισμού Frobenius

Υποθέτουμε ότι το Y/X είναι ένα κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois $G = \mathrm{Gal}(Y/X)$. Έστω $[C]$ ένας πρώτος στο X, έτσι ώστε το C ξεκινά και τερματίζει στην κορυφή a. Έστω $[D]$ ένας πρώτος του Y πάνω από το C έτσι ώστε το D ξεκινά και τερματίζει στην κορυφή (a, g) στο φύλλο $g \in G$ του Y. Αν ο βαθμός αδρανείας του D πάνω από το C είναι f τότε το D είναι η ανύψωση του C^f που ξεκινά στο φύλλο g. Υποθέτουμε ότι το C ανυψώνεται σε ένα μονοπάτι $\tilde{C}$ του Y που ξεκινά στο φύλλο g στο (a, g) και τελειώνει στο φύλλο h του (a, h). Ορίζουμε τον *αυτομορφισμό του Frobenius* να είναι

$$[Y/X, D] = \left(\frac{Y/X}{D}\right) = hg^{-1} \in G.$$

Για να πάρουμε την κανονικοποιμένη μορφή του αυτομορφισμού Frobenius, αρκεί να πάρουμε $g = 1$, το ταυτοτικό της G.

Η ομάδα ανάλυσης του D ως προς Y/X είναι

$$Z(D) = Z(D, Y/X) = \{\tau \in G | [\tau \circ D] = [D]\}.$$

Ιδιότητες του αυτομορφισμού Frobenius

1. Για έναν πρώτο κύκλο D στο Y πάνω από το C στο X, ο αυτομορφισμός Frobenius είναι ανεξάρτητος της επιλογής του D στην κλάση ισοδυναμίας του $[D]$. Οπότε μπορούμε να ορίσουμε τον $[Y/X,[D]] = [Y/X,D]$.
2. Η τάξη του $[Y/X,D]$ στην G είναι ο βαθμός $f = f(D,Y/X)$.
3. Αν $\tau \in G$ τότε $[Y/X,\tau \circ D] = \tau[Y/X,D]\tau^{-1}$.
4. Αν ο D ξεκινά στο φύλλο 1 τότε $[Y/X,D] = \sigma(C)$, ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius.
5. Η ομάδα $Z(D)$ είναι η κυκλική υποομάδα της G τάξης f που παράγεται από τον $[Y/X,D]$. Συγκεκριμένα, η $Z(D)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του D στην κλαση ισοδυναμίας του $[D]$.

Ιδιότητες του αυτομορφισμού Frobenius για ενδιάμεσα καλύμματα

1. Ας υποθέσουμε ότι το $\tilde{X}$ είναι ένα ενδιάμεσο κάλυμμα του Y/X που αντιστοιχεί στην υποομάδα H του $G = G(Y/X)$. Έστω $[D]$ μια κλάση ισοδυναμίας των πρώτων κύκλων του Y τέτοια ώστε το D να βρίσκεται πάνω από το $\tilde{C}$ στο $\tilde{X}$. Έστω $f = f(D, Y/X) = f_1 f_2$, όπου $f_2 = f(D, Y/\tilde{X})$ και $f_1 = f(\tilde{C}, \tilde{X}/X)$. Τότε f_1 είναι η ελάχιστη δύναμη του $[Y/X, D]$ που βρίσκεται στην H, και έχουμε
$$[Y/X, D]^{f_1} = [Y/\tilde{X}, D]. \tag{3}$$
2. Αν, επιπλέον,το $\tilde{X}$ είναι κανονικό πάνω από το X τότε ως στοιχείο του $H\backslash G$ έχουμε το
$$[\tilde{X}/X, \tilde{C}] = H[Y/X, D].$$

Artin-Ihara L-σειρές

Ορισμός

Υποθέτουμε ότι το Y είναι ένα κανονικό αδιακλάδιστο κάλυμμα του X με ομάδα Galois $G = G(Y/X)$. Αν ρ είναι είναι μία αναπαράσταση του G με βαθμό $d = d_\rho$ και u είναι μια μιγαδική μεταβλητή με $|u|$ αρκούντως μικρό, ορίζουμε την **Artin-Ihara** L-συνάρτηση

$$L(u, \rho, Y/X) = \prod_{[C]} \det\left(I - \rho([Y/X, D])u^{\nu(C)}\right)^{-1},$$

όπου το γινόμενο διατρέχει τους πρώτους $[C]$ του X και $[D]$ είναι αυθαίρετα επιλεγμένο από τους πρώτους στο Y πάνω από το C. Εδώ $[Y/X, D]$ είναι ο αυτομορφισμός Frobenius και $\nu(C)$ το μήκος του μονοπατιού C αντιπροσώπου του πρώτου $[C]$

Ισχύει ότι

$$L(u, 1, Y/X) = \zeta_X(u)$$

Ορισμός

Ορίζουμε τον **Artinized πινακα γειτνίασης** να είναι ο πίνακας που κατασκευάζεται από block $d_\rho \times d_\rho$ που αντιστοιχούν στις κατευθυνόμενες ακμές e, f, όπου το block $(W_{1,\rho})_{e,f}$ που αντιστοιχεί στις ακμές e, f είναι το

$$(W_{1,\rho})_{e,f} = (W_1)_{e,f} \cdot \rho(\sigma(e)) = \begin{cases} \rho(\sigma(e)) & \text{αν } t(e) = o(f) \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου ο $\sigma(e)$ είναι ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius που αντιστοιχεί στην κατευθυνόμενη ακμή e και W_1 είναι ο πίνακας ακμών του X.

Θεώρημα

Ισχύει ότι $L(u, \rho, Y/X)^{-1} = \det(I - uW_{1,\rho})$.

Ιδιότητες της Artin-Ihara L-συνάρτησης

Έστω Y/X ένα κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois G. Τότε:

1. $L(u, \rho_1 \oplus \rho_2) = L(u, \rho_1)L(u, \rho_2)$.
2. Έστω ότι $\tilde{X}$ ένα ενδιάμεσο κάλυμμα στο Y/X και υποθέτουμε ότι $\tilde{X}/X$ είναι κανονικό, $G = \mathrm{Gal}(Y/X)$, $H = \mathrm{Gal}(Y/\tilde{X})$. Έστω ρ η αναπαράσταση της $G/H \cong \mathrm{Gal}(\tilde{X}/X)$. Οπότε η ρ μπορεί να ειδωθεί ως μία αναπαράσταση της G (η ανύψωση της ρ). Τότε
$$L(u, \rho, Y/X) = L(u, \rho, \tilde{X}/X)$$
3. (επαγωγική ιδιότητα) Αν $\tilde{X}$ είναι ένα ενδιάμεσο κάλυμμα στο κανονικό κάλυμμα Y/X και ρ είναι μία αναπαράσταση του $H = \mathrm{Gal}(Y/\tilde{X})$ θα συμβολίζουμε με $\rho^{\#} = \mathrm{Ind}_H^G \rho$ την αναπαράσταση που επάγεται από την ρ από την H στην G. Τότε
$$L(u, \rho^{\#}, Y/X) = L(u, \rho, Y/\tilde{X})$$
Εδώ δεν υποθέτουμε ότι το $\tilde{X}$ είναι κανονικό πάνω από το X.

Πόρισμα

Υποθέτουμε ότι το Y/X είναι κανονικό με Galois ομάδα $G = G(Y/X)$. Έστω $\hat{G}$ να είναι ένα πλήρες σύνολο από μη ισοδύναμες ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της G. Τότε

$$\zeta_Y(u) = L(u, 1, Y/Y) = \prod_{\rho \in \hat{G}} L(u, \rho, Y/X)^{d_\rho}.$$

Για $\sigma, \tau \in G$ και κορυφές $a, b \in X$, ορίζουμε τον πίνακα $A(\sigma, \tau)$ να είναι ο $n \times n$ πίνακας με στοιχείο $A(\sigma, \tau)_{a,b}$ ίσο με τον αριθμό των κατευθυνόμενων ακμών στο Y από το (a, σ) στο (b, τ). Εδώ σε κάθε μη κατευθυνόμενη ακμή του Y δίνουμε και τις δύο κατευθύνσεις.

$A(\sigma, \tau) = A(1, \sigma^{-1}\tau) \equiv A(\sigma^{-1}\tau)$

Για μία αναπαράσταση ρ της $G(Y/X)$, ορίζουμε τον Artinized πίνακα γειτνίασης A_ρ ως

$$A_\rho = \sum_{\sigma \in G} A(\sigma) \otimes \rho(\sigma).$$

επίσης θέτουμε

$$Q_\rho = Q \otimes I_d,$$

όπου Q είναι ο $|V(X)| \times |V(X)|$ διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου που αντιστοιχούν στις ενδιάμεσες ακμές που αντιστοιχούν στο $a \in X$ και δίνονται απο το $q_a = (\text{βαθμος του } a) - 1$ και d είναι ο βαθμός της ρ.

Artinized πίνακας γειτνίασης

Για $\sigma, \tau \in G$ και κορυφές $a, b \in X$, ορίζουμε τον πίνακα $A(\sigma, \tau)$ να είναι ο $n \times n$ πίνακας με στοιχείο $A(\sigma, \tau)_{a,b}$ ίσο με τον αριθμό των κατευθυνόμενων ακμών στο Y από το (a, σ) στο (b, τ). Εδώ σε κάθε μη κατευθυνόμενη ακμή του Y δίνουμε και τις δύο κατευθύνσεις.

$A(\sigma, \tau) = A(1, \sigma^{-1}\tau) \equiv A(\sigma^{-1}\tau)$

Για μία αναπαράσταση ρ της $G(Y/X)$, ορίζουμε τον Artinized πίνακα γειτνίασης A_ρ ως

$$A_\rho = \sum_{\sigma \in G} A(\sigma) \otimes \rho(\sigma).$$

επίσης θέτουμε

$$Q_\rho = Q \otimes I_d,$$

όπου Q είναι ο $|V(X)| \times |V(X)|$ διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου που αντιστοιχούν στις ενδιάμεσες ακμές που αντιστοιχούν στο $a \in X$ και δίνονται απο το $q_a = (\text{βαθμος του } a) - 1$ και d είναι ο βαθμός της ρ.

Η block διαγωνόποίηση του πίνακα γειτνίασης ενός κανονικού καλύμματος

Υποθέτουμε ότι το Y/X είναι κανονικό με ομάδα Galois $G = G(Y/X)$. Έστω $\hat{G}$ ένα πλήρες σύνολο από μη ισοδύναμες, ανάγωγες, μοναδιαίες αναπαραστάσεις του G. Τότε μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα γειτνίασης του Y ως block διαγώνιο πίνακα με block τους πίνακες A_ρ, ο καθένας επαναλαμβανόμενος d_ρ φορές καθώς οι ρ διατρέχουν το $\hat{G}$

Θεώρημα

Με τις παραπάνω υποθέσεις και όρισμους έχουμε

$$L(u, \rho, Y/X)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - A_\rho + Q_\rho u^2).$$

Εδώ r είναι ο βαθμός της θεμελιώδους ομάδας του X

Η περίπτωση των 2-καλλυμάτων

Αν το Y/X είναι ένα 2-κάλυμμα τότε ο πίνακας γειτνίασης A_Y μπορεί να γραφεί ως διαγώνιος δύο block πίνακας, ένα block το A_X (ο πίνακας γειτνίασης του X) και ένα άλλο block το A_A. Ο πίνακας A_A έχει ως στοιχεία που αντιστοιχουν σε δύο κορυφές a, b του X τα:

$$(A_A)_{a,b} = \begin{cases} +1 & \text{αν οι } a \text{ και } b \text{ ενώνονται με μία ακμή στο } X \text{ η οποία} \\ & \text{ανυψώνεται σε μία ακμή του } Y \text{ της οποίας τα άκρα} \\ & \text{βρίσκονται στο ίδιο φύλλο} \\ -1 & \text{αν οι } a \text{ και } b \text{ ενώνονται με μία ακμή στο } X \text{ η οποία} \\ & \text{ανυψώνεται σε μία ακμή του } Y \text{ της οποίας τα άκρα} \\ & \text{βρίσκονται σε διαφορετικό φύλλο} \\ 0 & \text{αν οι } a \text{ και } b \text{ δεν ενώνονται με ακμή στο } X \end{cases}$$

Εικασία των Bilu, Linial

Κάθε d-κανονικό γράφημα X έχει ένα 2-κάλυμμα Y έτσι ώστε

$$\mathrm{Spectrum} A_Y - \mathrm{Spectrum} A_X \subset \left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$$

όπου A_Y είναι ο πίνακας γειτνίασης του Y.

Μία εικασία που αφορά το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα A_A.
Για διμερή γραφήματα Απρίλιος (2013) από τους οι Adam Marcus, Daniel Spielman και Nikhil Srivastava κάτι που αποδεικνύει ότι υπάρχουν άπειρες οικογένειες Ramanujan γραφημάτων για κάθε d ξεκινώντας από το πλήρες d-κανονικό διμερές γράφημα, που ως γνωστόν είναι Ramanujan αφού οι ιδιοτιμές του εκτός των d και $-d$ είναι 0, και ανυψώνοντας κατάλληλα. Ωστόσο η απόδειξη που έδωσαν είναι υπαρξιακή και έτσι δεν μας δείνει ακόμα αλγόριθμο για αυτό.

Εικασία των Bilu, Linial

Κάθε d-κανονικό γράφημα X έχει ένα 2-κάλυμμα Y έτσι ώστε

$$\mathrm{Spectrum} A_Y - \mathrm{Spectrum} A_X \subset \left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$$

όπου A_Y είναι ο πίνακας γειτνίασης του Y.

Μία εικασία που αφορά το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα A_A.

Για διμερή γραφήματα Απρίλιος (2013) από τους οι Adam Marcus, Daniel Spielman και Nikhil Srivastava κάτι που αποδεικνύει ότι υπάρχουν άπειρες οικογένειες Ramanujan γραφημάτων για κάθε d ξεκινώντας από το πλήρες d-κανονικό διμερές γράφημα, που ως γνωστόν είναι Ramanujan αφού οι ιδιοτιμές του εκτός των d και $-d$ είναι 0, και ανυψώνοντας κατάλληλα. Ωστόσο η απόδειξη που έδωσαν είναι υπαρξιακή και έτσι δεν μας δείνει ακόμα αλγόριθμο για αυτό.

Εικασία των Bilu, Linial

Κάθε d-κανονικό γράφημα X έχει ένα 2-κάλυμμα Y έτσι ώστε

$$\mathrm{Spectrum} A_Y - \mathrm{Spectrum} A_X \subset \left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$$

όπου A_Y είναι ο πίνακας γειτνίασης του Y.

Μία εικασία που αφορά το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα A_A.
Για διμερή γραφήματα Απρίλιος (2013) από τους οι Adam Marcus, Daniel Spielman και Nikhil Srivastava κάτι που αποδεικνύει ότι υπάρχουν άπειρες οικογένειες Ramanujan γραφημάτων για κάθε d ξεκινώντας από το πλήρες d-κανονικό διμερές γράφημα, που ως γνωστόν είναι Ramanujan αφού οι ιδιοτιμές του εκτός των d και $-d$ είναι 0, και ανυψώνοντας κατάλληλα. Ωστόσο η απόδειξη που έδωσαν είναι υπαρξιακή και έτσι δεν μας δείνει ακόμα αλγόριθμο για αυτό.

Ερευνητικές Προτάσεις.

1. Γενίκευση Εικασίας Bilu-Linial- Ανάλογη απόδειξη-Καλύμματα με κυκλικές ή τάξης πρώτου ομάδες Galois- Κατασκευασιμότητα-Διερεύνηση της ύπαρξης k-κανονικών Ramanujan γραφημάτων για πλήθος κορυφών $> k + 1$
2. Αν εξειδικεύσω τις ακμές της edge ζ-συνάρτησης κατά στήλες έχω πλήρη αναλοίωτη;
3. Τυπικά Απειρογινόμενα- Ερωτήσεις -Ramanujan γραφήματα
4. Μεταφορά Θεωρίας Number Fields-Function Fields σε γραφήματα (π.χ. Νομος τετραγωνικής Αντιστροφής -Κυκλοτομικά καλύμματα κτλ.)
5. Αρθρο Cioba-Murty Expander graphs and gaps between primes και φραγμένα διαστήματα διαδοχικών πρώτων (Κατασκευαστική).

Ερευνητικές Προτάσεις.

1. Γενίκευση Εικασίας Bilu-Linial- Ανάλογη απόδειξη-Καλύμματα με κυκλικές ή τάξης πρώτου ομάδες Galois- Κατασκευασιμότητα- Διερεύνηση της ύπαρξης k-κανονικών Ramanujan γραφημάτων για πλήθος κορυφών $> k+1$
2. Αν εξειδικεύσω τις ακμές της edge ζ-συνάρτησης κατά στήλες έχω πλήρη αναλοίωτη;
3. Τυπικά Απειρογινόμενα- Ερωτήσεις -Ramanujan γραφήματα
4. Μεταφορά Θεωρίας Number Fields-Function Fields σε γραφήματα (π.χ. Νομος τετραγωνικής Αντιστροφής -Κυκλοτομικά καλύμματα κτλ.)
5. Αρθρο Cioba-Murty Expander graphs and gaps between primes και φραγμένα διαστήματα διαδοχικών πρώτων (Κατασκευαστική).

Ερευνητικές Προτάσεις.

1. Γενίκευση Εικασίας Bilu-Linial- Ανάλογη απόδειξη-Καλύμματα με κυκλικές ή τάξης πρώτου ομάδες Galois- Κατασκευασιμότητα-Διερεύνηση της ύπαρξης k-κανονικών Ramanujan γραφημάτων για πλήθος κορυφών $> k+1$
2. Αν εξειδικεύσω τις ακμές της edge ζ-συνάρτησης κατά στήλες έχω πλήρη αναλοίωτη;
3. Τυπικά Απειρογινόμενα- Ερωτήσεις -Ramanujan γραφήματα
4. Μεταφορά Θεωρίας Number Fields-Function Fields σε γραφήματα (π.χ. Νομος τετραγωνικής Αντιστροφής -Κυκλοτομικά καλύμματα κτλ.)
5. Αρθρο Cioba-Murty Expander graphs and gaps between primes και φραγμένα διαστήματα διαδοχικών πρώτων (Κατασκευαστική).

Ερευνητικές Προτάσεις.

1. Γενίκευση Εικασίας Bilu-Linial- Ανάλογη απόδειξη-Καλύμματα με κυκλικές ή τάξης πρώτου ομάδες Galois- Κατασκευασιμότητα-Διερεύνηση της ύπαρξης k-κανονικών Ramanujan γραφημάτων για πλήθος κορυφών $> k + 1$
2. Αν εξειδικεύσω τις ακμές της edge ζ-συνάρτησης κατά στήλες έχω πλήρη αναλοίωτη;
3. Τυπικά Απειρογινόμενα- Ερωτήσεις -Ramanujan γραφήματα
4. Μεταφορά Θεωρίας Number Fields-Function Fields σε γραφήματα (π.χ. Νομος τετραγωνικής Αντιστροφής -Κυκλοτομικά καλύμματα κτλ.)
5. Αρθρο Cioba-Murty Expander graphs and gaps between primes και φραγμένα διαστήματα διαδοχικών πρώτων (Κατασκευαστική).

Ερευνητικές Προτάσεις.

1. Γενίκευση Εικασίας Bilu-Linial- Ανάλογη απόδειξη-Καλύμματα με κυκλικές ή τάξης πρώτου ομάδες Galois- Κατασκευασιμότητα-Διερεύνηση της ύπαρξης k-κανονικών Ramanujan γραφημάτων για πλήθος κορυφών $> k + 1$
2. Αν εξειδικεύσω τις ακμές της edge ζ-συνάρτησης κατά στήλες έχω πλήρη αναλοίωτη;
3. Τυπικά Απειρογινόμενα- Ερωτήσεις -Ramanujan γραφήματα
4. Μεταφορά Θεωρίας Number Fields-Function Fields σε γραφήματα (π.χ. Νομος τετραγωνικής Αντιστροφής -Κυκλοτομικά καλύμματα κτλ.)
5. Αρθρο Cioba-Murty Expander graphs and gaps between primes και φραγμένα διαστήματα διαδοχικών πρώτων (Κατασκευαστική).