

ΑΣΤΕΡΙΟΥ ΓΚΑΝΤΖΟΥΝΗ

# Η $\zeta$ -ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΙΗΑΡΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών  
Αθήνα 16 Δεκεμβρίου 2013



ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Χρήστος Αθανασιάδης

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Δημήτρης Δεριζιώτης

Μιχάλης Μαλιάκας







# Περιεχόμενα

Εισαγωγή ix

<b>1</b>	<b>Η <math>\zeta</math>-συνάρτηση του Ihara</b>	<b>1</b>
1.1	Πρώτοι σε γράφηματα	1
1.2	Η Ihara $\zeta$ -συνάρτηση	2
1.2α'	Θεμελιώδης ομάδα και πρώτοι σε ένα γράφημα	3
1.3	Υπόθεση Riemann για Κανονικά Γραφήματα - Γραφήματα Ramanujan	9
1.4	Η ερμηνεία των συντελεστών της αντίστροφης της $\zeta$ -συνάρτησης του Ihara	17
<b>2</b>	<b>Σώματα Αριθμών</b>	<b>23</b>
2.1	Σώματα συναρτήσεων	25
2.2	Η $\zeta$ -συνάρτηση του Artin-Mazur-Ruelle	27
2.3	Η $\zeta$ -συνάρτηση του Selberg	28
2.3α'	Ο τύπος ίχνους του Selberg	29
<b>3</b>	<b>Αναπαραστάσεις και <math>L</math>-σειρές του Artin</b>	<b>31</b>
3.1	Υπενθύμιση της θεωρίας αναπαραστάσεων	31
3.2	Artin $L$ -συναρτησεις	34
<b>4</b>	<b>Θεωρία Galois σε Γραφήματα</b>	<b>37</b>
4.1	Πεπερασμένα καλύμματα και ομάδες Galois	37
4.1α'	Παραδείγματα καλυμμάτων	42
4.2	Το θεμελιώδες θεώρημα του Galois	44
4.3	Η συμπεριφορά των πρώτων στα καλύμματα	52
4.4	Ο αυτομορφισμός του Frobenius	53
4.4α'	Κατασκευή ενδιάμεσων καλυμμάτων με χρήση του αυτομορφισμού Frobenius	56

<b>5</b>	<b>Οι Artin-Ihara <math>L</math>-σειρές</b>	<b>59</b>
5.1	Ορισμοί	59
5.2	Ιδιότητες	63
5.3	Η Artin $L$ -συνάρτηση ακμών	71
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>81</b>



# Εισαγωγή

Μια ζ-συνάρτηση είναι μία συνάρτηση απαρίθμησης. Για παράδειγμα η κλασική συνάρτηση του Riemann η οποία ορίζεται για  $s \in \mathbb{C}$  με  $\operatorname{Re} s > 1$  ως

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Το παραπάνω άπειρο γινόμενο εδώ καλείται γινόμενο Euler. Ο Euler μελέτησε την ζήτα συνάρτηση ως μία συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, η μιγαδική ανάλυση δεν υπήρχε στην εποχή του. Το 1859 ο Riemann στο μνημιώδες άρθρο του *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse* [32] επέκτεινε τον ορισμό αυτό σε μια αναλυτική συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός του απλού πόλου που έχει για  $s = 1$ . Επίσης έδειξε ότι υπάρχει μια συμμετρία που συνδέει την τιμή της στο  $s$  με την τιμή της στο  $1 - s$ , που καλείται συναρτησιακή εξίσωση.

Η υπόθεση Riemann αναφέρει ότι οι ρίζες της  $\zeta(s)$  έχουν όλες  $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ . Η υπόθεση Riemann συνδέεται με το θεώρημα των πρώτων αριθμών που μετράει το πλήθος των πρώτων που είναι μικρότεροι από τον  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\#\{p = \text{πρώτος} | p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Πολλά άλλα είδη ζήτα συναρτήσεων έχουν διερευνηθεί από την εποχή του Riemann. Στην θεωρία αριθμών υπάρχει η συνάρτηση ζήτα του Dedekind ενός αλγεβρικού σώματος αριθμών  $K$ , όπως το  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . Αυτή η ζήτα συνάρτηση είναι ένα άπειρο γινόμενο πάνω από τα πρώτα ιδεώδη  $\mathfrak{p}$  του δακτυλίου  $O_K$  των αλγεβρικών ακεραίων του  $K$ . Στο παράδειγμα μας το  $O_K = \mathbb{Z}(\sqrt{2})$  και οι όροι του γινομένου είναι οι  $(1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$  όπου  $N\mathfrak{p} = \#(O_K/\mathfrak{p})$ .

Μπορούμε να ορίσουμε ζήτα συναρτήσεις για σώματα συναρτήσεων, όπου το σώμα αριθμών  $K$  αντικαθίσταται από μια πεπερασμένη αλγεβρική επέκταση του  $\mathbb{F}_q(x)$ , των ρητών συναρτήσεων μιας μεταβλητής πάνω από το σώμα με  $q$  στοιχεία  $\mathbb{F}_q$ . Ο A. Weil [42] απέδειξε, την υπόθεση Riemann για τις ζήτα συναρτήσεις σωμάτων συναρτήσεων μιας μεταβλητής, ενώ η γενική περίπτωση για ζήτα συναρτήσεις αλγεβρικών πολλαπλοτήτων έγινε από τον P. Deligne [16].

Η σημασία των ζ-συναρτήσεων οφείλεται στο ότι κωδικοποιούν πολλά χαρακτηριστικά των αντικειμένων (σώματα αριθμών, αλγεβρικές πολλ/τες) στα οποία αναφέρονται. Γενικά για μια ζ-συνάρτηση περιμένουμε να ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- (i) Να υπάρχουν γινόμενα Euler

- (ii) Μέσω της κατάλληλης αναλυτικής συνέχισης η συνάρτηση να επεκτείνεται σε μερόμορφη συνάρτηση σε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς.
- (iii) Να ικανοποιεί μια συναρτησιακή εξίσωση
- (iv) Να μπορούμε να δώσουμε μια συνομολογιακή μετάφραση των συντελεστών απαρίθμησης.
- (v) Να ισχύει η υπόθεση Riemann.

Για την κλασική συνάρτηση του Riemann τα (i),(ii),(iii) είναι κλασικά αποτελέσματα, για το (iv) έχουν δοθεί πολλές προτάσεις, για παράδειγμα από τις εργασίες του A. Connes [14] και C. Deninger [15], ενώ το (v) είναι ένα από τα σημαντικά άλυτα προβλήματα της μαθηματικής επιστήμης.

Στην εργασία αυτή μελετούμε τις ζήτα συναρτήσεις που όρισε ο Ihara [23] πάνω σε γραφήματα. Αυτές αποτελούν ειδικές περιπτώσεις ζήτα συναρτήσεων που υπήρχαν στην βιβλιογραφία όπως του Selberg [34], Artin-Mazur-Ruelle [30], [33] κτλ. Το εντυπωσιακό με αυτές είναι ότι εμφανίζονται όλα τα πολύπλοκα φαινόμενα της Θεωρίας αριθμών σε μια περισσότερο απλή μορφή, ενώ πολλές από τις άλυτες εικασίες της θεωρίας αριθμών στην περίπτωση της ζήτα συνάρτησης του Ihara είναι λυμένες. Δημιουργείται έτσι η ελπίδα ότι η θεωρία της Ihara ζήτα συνάρτησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα «toy model» το οποίο θα υποστηρίξει την διαίσθηση μας για περισσότερο πολύπλοκες ζήτα συναρτήσεις.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Αριστείδη Κοντογεώργη ο οποίος με ενέπνευσε στην ενασχόληση μου με τις σύγχρονες κατευθύνσεις της Θεωρίας Αριθμών και υπό την καθοδήγηση του οποίου ουσιαστικά εκπονήθηκε η παρούσα εργασία. Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της τριμελούς επιτροπής καθηγητές Χ.Αθανασιάδη, Δ.Δεριζιώτη και Μ.Μαλιάχα για τις παρατηρήσεις τους και γενικότερα για τον χρόνο που διέθεσαν για την παρούσα εργασία.

Αστέριος Γκαντζούνης, Αθήνα  
2013.

# Κεφάλαιο 1

## Η $\zeta$ -συνάρτηση του Ihara

### 1.1 Πρώτοι σε γραφήματα

Η θεωρία που θα αναπτύξουμε αφορά γραφήματα που είναι πεπερασμένα, συνεκτικά και μη κατευθυνόμενα. Επιτρέπουμε να έχουν βρόχους και πολλαπλές ακμές μεταξύ κορυφών. Υποθέτουμε ότι τα γραφήματά μας δεν έχουν κορυφές βαθμού 1. Αυτή η υπόθεση είναι απαραίτητη για πολλά από τα κύρια θεωρήματα που παρουσιάζουμε.

Ένα κανονικό γράφημα είναι ένα γράφημα στο οποίο όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό, δηλαδή τον ίδιο αριθμό ακμών. Ένα γράφημα είναι  $k$ -κανονικό όταν κάθε κορυφή έχει βαθμό  $k$ . Ένα γράφημα λέγεται απλό, όταν δεν επιτρέπουμε βρόχους και πολλαπλές ακμές. Ένας πλήρης γράφημα, είναι ένα απλό γράφημα του οποίου κάθε κορυφή συνδέεται με κάθε άλλη κορυφή.

**Ορισμός 1.1.1.** Έστω  $V$  οι κορυφές ενός γραφήματος  $X$  και  $n = |V(X)|$  ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος. Δεδομένης μίας αρίθμησης των κορυφών του γραφήματος ο πίνακας γειτνίασης του  $X$  είναι ένας  $n \times n$  πίνακας με εισόδους  $(i, j)$   $1 \leq i, j \leq n$

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{ο αριθμός των μη κατευθυνόμενων ακμών} & \text{αν } i \neq j \\ \text{που συνδέουν το } i \text{ με το } j & \\ \text{ο αριθμός των βρόχων στην κορυφή } i & \text{αν } i = j \end{cases}$$

**Παρατήρηση 1.1.2.** Παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε μία διαφορετική αρίθμηση των κορυφών τότε για τον νέο πίνακα γειτνίασης  $A'$  ισχύει

$$A' = TAT^{-1}$$

όπου ο  $T$  είναι ένας πίνακας μετάθεσης.

**Παραδείγμα 1.1.1.** Ο πίνακας γειτνίασης του πλήρους γραφήματος  $K_4$  στο σχήμα 1.2 είναι ο

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Για να ορίσουμε την Ihara ζ συνάρτηση πρέπει να ορίσουμε τι σημαίνει πρώτος σε ένα γράφημα  $X$  με σύνολο ακμών  $E$ ,  $m = |E|$ . Παίρνουμε έναν προσανατολισμό στις ακμές και ονομάζουμε τις ακμές ως εξής

$$e_1, e_2, \dots, e_m, \quad e_{m+1} = e_1^{-1}, \dots, e_{2m} = e_m^{-1}.$$

Ένα μονοπάτι ή περίπατος  $C = a_1 \cdots a_s$ , όπου  $a_j$  είναι μια κατευθυνόμενη ακμή του λέμε ότι έχει πισογύρισμα, αν  $a_{j+1} = a_j^{-1}$  για κάποιο  $j = 1, \dots, s-1$ . Ένα μονοπάτι  $C = a_1 \cdots a_s$  λέγεται ότι έχει ουρά αν  $a_s = a_1^{-1}$ . Συμβολίζουμε το μήκος ενός μονοπατιού  $C$  με  $s = v(C)$ . Ένα κλειστό μονοπάτι καλείται *πρώτο μονοπάτι* αν δεν έχει πισογυρίσματα και ουρά και  $C \neq D^f$  για  $f > 1$  και  $D$  κλειστό μονοπάτι στο  $X$ . Για το κλειστό μονοπάτι  $C$  ορίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του  $[C]$  να είναι η εξής:

$$[C] = \{a_1 \cdots a_s, a_2 \cdots a_s a_1, \dots, a_s a_1 \cdots a_{s-1}\}.$$

Με άλλα λόγια δύο κλειστά μονοπάτια είναι ισοδύναμα αν μπορούμε να πάρουμε το ένα από το άλλο αλλάζοντας την αρχή. Ένας πρώτος στο γράφημα  $X$  είναι η κλάση ισοδυναμίας ενός πρώτου μονοπατιού στο  $X$ .

## 1.2 Η Ihara ζ-συνάρτηση

Το 1996 ο Yasutaka Ihara [23] έθεσε τα θεμέλια για τον ορισμό της ζ-συνάρτησης Ihara. Ο τελικός ορισμός που παρουσιάζουμε οφείλεται στον Bass [7].

**Ορισμός 1.2.1** (Ihara-Bass). *Η Ihara ζ-συνάρτηση για ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα (χωρίς κορυφές βαθμού 1) ορίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής  $u$ , με  $|u|$  αρκούντως μικρό*

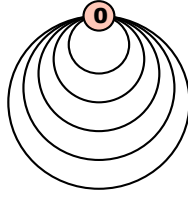
$$\zeta_X(u) = \zeta(u, X) = \prod_{[P]} \left(1 - u^{v(P)}\right)^{-1}$$

όπου το γινόμενο είναι πάνω από όλους τους πρώτους  $[P]$  στο  $X$  και όπως προαναφέραμε το  $v(P)$  δηλώνει το μήκος του  $P$ .

Γενικά το γινόμενο αυτό είναι άπειρο, υπάρχει όμως μία περίπτωση που το γινόμενο αυτό είναι πεπερασμένο, ο κύκλος, αφού στον κύκλο έχουμε μόνο δύο πρώτους. Σημειώνουμε εδώ ότι από τον ορισμό της ζ-συνάρτησης Ihara διακρίνουμε τον πρώτο  $[P]$  από τον πρώτο  $[P]^{-1}$  όπου  $P^{-1}$  είναι το μονοπάτι  $P$  προς την αντίθετη κατεύθυνση. Για τον κύκλο με  $n$  κορυφές έχουμε

$$\zeta_X(u) = (1 - u^n)^{-2}.$$

Ως δυναμοσειρά στην μιγαδική μεταβλητή  $u$ , η ζ-συνάρτηση του Ihara δεν έχει αρνητικούς συντελεστές. Οπότε από ένα κλασικό θεώρημα [3, σελ. 237] του Landau, τόσο η σειρά όσο και το γινόμενο που ορίζουν την  $\zeta_X(u)$  συγκλίνουν απόλυτα σε έναν κύκλο  $|u| < R_X$  με πόλο τάξης 1 στο  $u = R_X$ . Η ακτίνα σύγκλισης  $R_X$  είναι αρκετά μικρή, για παράδειγμα όταν  $X$  είναι ένα  $q+1$ -κανονικό γράφημα,  $R_X = 1/q$ .

Σχήμα 1.1: Ένα μπουκέτο με  $r$ -βρόχους

### 1.2α' Θεμελιώδης ομάδα και πρώτοι σε ένα γράφημα

Η θεμελιώδης ομάδα ενός τοπολογικού χώρου όπως ένα γράφημα  $X$  έχει ως στοιχεία κλειστά κατευθυνόμενα μονοπάτια που αρχίζουν και τελειώνουν σε ένα συγκεκριμένο σημείο (κορυφή)  $v \in X$ . Δύο μονοπάτια είναι *ισοδύναμα* αν και μόνο αν μπορούμε να μετασχηματίσουμε το ένα με συνεχή τρόπο στο άλλο. Το γινόμενο δύο μονοπατιών  $a, b$  σημαίνει ότι πρώτα πηγαίνουμε γύρω από το  $a$  και μετά γύρω από το  $b$ .

Υπενθυμίζουμε ότι μία ελεύθερη ομάδα  $F$  σε ένα σύνολο  $r$  γεννητόρων  $S$  είναι το σύνολο των λέξεων, δηλαδή των πεπερασμένων συμβολοσειρών συμβόλων του  $S$  modulo την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας: δύο λέξεις της μορφής  $a_1 \cdots a_t$  και  $a_1 \cdots b b^{-1} \cdots a_t$  είναι ισοδύναμες. Το γινόμενο των  $a_1 \cdots a_n$  και  $b_1 \cdots b_m$  είναι το  $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$ . Ο  $r$  θα λέγεται *βαθμός* της ελεύθερης ομάδας. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι ένας δεντροπαράγοντας του  $X$  είναι ένα μεγιστικό δέντρο του  $X$ . Γνωρίζουμε ότι  $r - 1 = |E| - |V|$  δηλαδή ο αριθμός των ακμών μείον των αριθμό των κορυφών στο γράφημα.

Από το γράφημα  $X$  κατασκευάζουμε ένα καινούριο γράφημα  $X^\#$  συρικνώνοντας ένα δεντροπαράγοντα  $T$  του  $X$  σε ένα σημείο. Το νέο γράφημα είναι ένα μπουκέτο με  $r$  βρόχους, σχήμα 1.1. Από την αλγεβρική τοπολογία γνωρίζουμε ότι τα δύο αυτά γραφήματα έχουν την ίδια θεμελιώδη ομάδα. Η θεμελιώδης ομάδα του  $X$ , συμβολίζεται με  $\pi_1(X, v)$ , είναι η ελεύθερη ομάδα με  $r$  γεννήτορες. Οι γεννήτορες είναι οι βρόχοι και οι λέξεις τα μονοπάτια γύρω από τους βρόχους. Οπότε ο *βαθμός* της θεμελιώδους ομάδας του αρχικού γραφήματος  $X$  είναι ο αριθμός των ακμών που δεν ανήκουν σε ένα δεντροπαράγοντα και συνεπώς προκύπτει ότι η θεμελιώδης ομάδα ενός γραφήματος  $X$  είναι μία ομάδα με  $r$  γεννήτορες, όπου  $r$  είναι ο αριθμός των ακμών που δεν ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο δεντροπαράγοντα.

**Η ζ-συνάρτηση ως ορίζουσα.** Η Ihara ζ-συνάρτηση είναι το αντίστροφο ενός πολυωνύμου όπως περιγράφεται από το ακόλουθο Θεώρημα των Bass και Hashimoto [7]:

**Θεώρημα 1.2.2** (Bass Hashimoto). Έστω  $A$  ο πίνακας γειννίας του γραφήματος  $X$  και  $Q$  ο διαγώνιος πίνακας με  $j$ -οστή είσοδο  $q_j$  ώστε το  $q_j + 1$  να είναι ο βαθμός της  $j$ -οστής κορυφής του  $X$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $r$  είναι η ο βαθμός της θεμελιώδους ομάδας του  $X$ , δηλαδή  $r - 1 = |E| - |V|$ . Τότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\zeta_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - Au + Qu^2)$$

*Απόδειξη.* Το αποδεικνύουμε παρακάτω σελ. 9 μετά τον ορισμό της πολυμεταβλητής ζ συνάρτησης ακμών.  $\square$

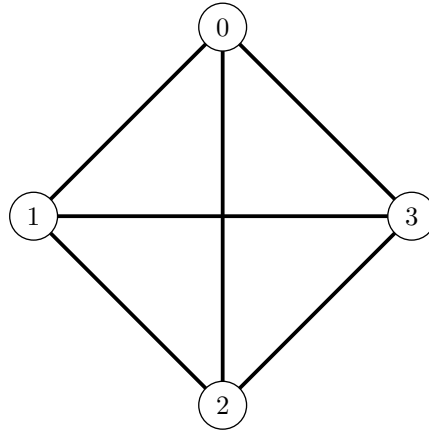
**Παραδείγματα 1.2.1.** Το πλήρες γράφημα  $K_4$  στο σχήμα 1.2 έχει συνάρτηση του Ihara.

$$\zeta_{K_4}^{-1} = -(u-1)^2(u+1)(2u-1)(2u^2+u+1)^3.$$

Χρησιμοποιήσαμε το σύστημα Sage για τον υπολογισμό της συνάρτησης του Ihara ορίζοντας την παρακάτω συνάρτηση:

```
def IharaZeta(G):
    A=G.adjacency_matrix()
    LL=G.laplacian_matrix()
    II=identity_matrix(QQ, len(G.vertices()))
    Q=LL+A-II
    var('u')
    r=len(G.edges())-len(G.vertices()+1
    IZ=(1-u^2)^(r-1)*(II-A*u+Q*u^2).det()
    return IZ
G=graphs.CompleteGraph(4)
IharaZeta(G)
```

Σχήμα 1.2: Το πλήρες γράφημα σε 4-κορυφές



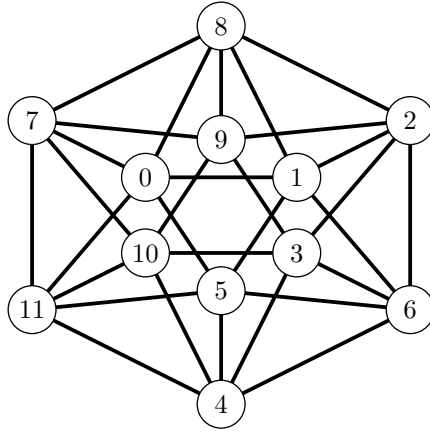
Η συνάρτηση Ihara για το εικοσάεδρο, σχήμα 1.3

$$\zeta_I = (u-1)^{19}(u+1)^{18}(4u-1)(4u^2+u+1)^5(16u^4+3u^2+1)^3$$

**ζ-συναρτήσεις ακμών** Στην συνέχεια θα ορίσουμε μία πολυμεταβλητή γενίκευση της Ihara ζ-συνάρτησης που οφείλεται στους Stark και Terras [38]. Θα την καλούμε Ihara ζ-συνάρτηση ακμών. Για να τις ξεχωρίζουμε, όταν χρειάζεται την ζ-συνάρτηση Ihara που ορίσαμε προηγουμένως θα την ονομάζουμε Ihara ζ-συνάρτηση κορυφών. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς:

**Ορισμός 1.2.3.** Ο πίνακας ακμών  $W$  ενός γραφήματος  $X$  είναι ένας  $2m \times 2m$  πίνακας με είσοδο  $(a, b)$  που αντιστοιχεί στις κατευθυνόμενες ακμές  $a$  και  $b$ .

Σχήμα 1.3: Το Εικοσάεδρο



Αυτή η είσοδος  $(a, b)$  είναι η μιγαδική μεταβλητή  $w_{ab}$  αν  $t(a) = o(b)$  δηλαδή αν η τερματική κορυφή της ακμής  $a$  ταυτίζεται με την αρχική κορυφή της ακμής  $b$  και  $b \neq a^{-1}$  και 0 διαφορετικά.

**Παραδείγμα 1.2.1.** Για το πλήρες γράφημα  $K_4$  υπολογίζουμε ότι ο πίνακας ακμών είναι ο

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & w_4 & w_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{19} & w_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{34} & w_{35} & 0 \\ 0 & w_{37} & w_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{54} & 0 & w_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{69} & 0 & w_{71} & 0 \\ w_{72} & 0 & w_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{87} & 0 & w_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{105} & w_{106} & 0 & 0 \\ w_{108} & w_{109} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{123} & w_{124} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{138} & w_{139} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ορισμός 1.2.4.** Δοθέντος ενός κλειστού μονοπατιού  $C$  στο  $X$ , που γράφεται ως γινόμενο κατευθυνόμενων ακμών  $C = a_1 a_2 \cdots a_s$ , η νόρμα ακμών του  $C$  είναι  $N_E(C) = w_{a_1 a_2} w_{a_2 a_3} \cdots w_{a_{s-1} a_s} w_{a_s a_1}$

**Ορισμός 1.2.5** (Stark- Terras). Η ζ-συνάρτηση ακμών ορίζεται ως

$$\zeta_E(W, X) = \prod_{[P]} (1 - N_E(P))^{-1}$$

όπου το γινόμενο είναι πάνω από τους πρώτους του  $X$ . Θα υποθέτουμε ότι τα  $|w_{ab}|$  είναι αρκούντως μικρά ώστε να συγκλίνει η συνάρτηση.

**Παραδείγματα 1.2.2.**

- (i) Παρατηρούμε ότι αν όλες οι μη μηδενικές μεταβλητές του πίνακα  $W$  είναι ίσες με  $u \in \mathbb{C}$ , η νόρμα ακμών γίνεται  $u^{v(C)}$  και κατά συνέπεια

$$\zeta_E(W, X) |_{0 \neq w_{ab}=u} = \zeta_X(u).$$

Μάλιστα ο παρακάτω κώδικας σε Sage δίνει ένα εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης του Ihara.

```
m=len(D.edges())
R = PolynomialRing(QQ, (m)^2, 'x')
M=matrix(R,m,m,R.gens())
Mi=-1
for e1 in D.edges():
    Mi=Mi+1
    Mj=-1
    for e2 in D.edges():
        Mj=Mj+1
        if (e1[1] != e2[0]) or ( (e1[1] == e2[0])
                                and (e2[1]==e1[0]) ):
            M[Mi, Mj]=0
II=identity_matrix(R,m)
F=det(II-M)
R1,u = PolynomialRing(QQ, 'u').objgen()
L= []
for i in range(m^2):
    L.append(u)
phi =R.hom(L,R1)
factor(phi(F))
```

- (ii) Αν το  $X$  είναι ένα γράφημα με βάρη στις ακμές και  $L$  η συνάρτηση των βαρών, δηλαδή η συνάρτηση που προσδίδει μια τιμή σε κάθε ακμή, και για τις μη-μηδενικές τιμές του πίνακα  $W$

$$w_{ab} = u^{(L(a)+L(b))/2}$$

η συνάρτηση αυτή ονομάζεται ζ-συνάρτηση βαρών του Ihara.

**Θεώρημα 1.2.6** (Τύπος με ορίζουσα Stark Terras Horton). *Ισχύει ότι*

$$\zeta_E(W, X) = \det(I - W)^{-1}$$



Απόδειξη. [22] Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\log \zeta_E(W, X) &= \log \prod_{[P]} (1 - N_E(P))^{-1} \\
&= - \sum_{[P]} \log(1 - N_E(P)) \\
&= \sum_{[P]} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} N_E(P)^j \\
&= \sum_{m \geq 1, j \geq 1} \frac{1}{jm} \sum_{P, v(P)=m} N_E(P)^j \\
&= \sum_C \frac{1}{v(C)} N_E(C) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \text{Tr} W^m
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα αναπτύξαμε τον λογάριθμο σε δυναμοσειρά και στο τελευταίο άθροισμα το  $C$  συμβολίζει τα κλειστά, χωρίς πισογυρίσματα και ουρές μονοπάτια. Η προτελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι ένα τέτοιο μονοπάτι  $C$  έχει την μορφή  $P^j$  για κάποιο πρώτο μονοπάτι  $P$  και  $j = 1, 2, \dots$ . Τώρα λόγω της γραμμικής συνέχειας του τελεστή ίχνους έχουμε

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \text{Tr} W^m = \text{Tr} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} W^m.$$

Τέλος από την ανάπτυξη του  $\log(I - W)$  έχουμε

$$\log \zeta_E(W, X) = -\text{Tr} \log(I - W) = \log \det(I - W)^{-1}$$

και παίρνοντας εκθετικά και στα δύο μέλη έχουμε το ζητούμενο. Στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ταυτότητα από την γραμμική άλγεβρα  $\exp \text{Tr} A = \det \exp A$  [44, σελ. 321-324].  $\square$

**Πόρισμα 1.2.7.** Για την Ihara ζ-συνάρτηση κορυφών έχουμε ότι  $\zeta_X(u) = \det(I - uW_1)^{-1}$ , όπου το  $W_1$  προκύπτει θέτοντας σε όλες τις μεταβλητές του πίνακα  $W$  την τιμή 1.

Μία συνδυαστική απόδειξη για το παραπάνω αποτέλεσμα υπάρχει στο [18].

**Παρατήρηση 1.2.8.** Από το παραπάνω θεώρημα φαίνεται ότι οι πόλοι της Ihara ζ-συνάρτησης αν την αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά γύρω από το 0 είναι τα αντίστροφα των ιδιοτιμών του πίνακα  $W_1$  με  $W_{ij} = 1$  αν η  $t(e_i) = o(e_j)$  και 0 διαφορετικά. Οπότε η ακτίνα σύγκλισης της είναι  $R_X = \rho(W)^{-1}$  όπου  $\rho(W) = \max\{|\lambda|\}$  με  $\lambda$  ιδιοτιμή του πίνακα  $W_1$ .

**Παρατήρηση 1.2.9.** Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί αν το ότι δύο γραφήματα έχουν την ίδια Ihara ζ-συνάρτηση, σημαίνει ότι έχουν το ίδιο πλήθος πρώτων με μήκος  $m$  για κάθε  $m$ . Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση βλέπουμε ότι αυτό ισχύει αφού

$$u \frac{d}{du} \log \zeta_X(u) = \sum_{m \geq 1} N_m u^m.$$

δηλαδή η  $u \frac{d}{du} \log \zeta_X(u)$  είναι γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών  $N_m$ , όπου με  $N_m = N_m(X)$  συμβολίζουμε το πλήθος των μονοπατιών μήκους  $m$  χωρίςπισω-γυρίσματα και ουρές στο γράφημα  $X$ . Από αυτό μπορούμε να πάρουμε το πλήθος των πρώτων μονοπατιών μήκους  $m$  και άρα και το πλήθος των πρώτων μήκους  $m$  για κάθε  $m$ .

Στην συνέχεια δίνουμε μία εκδοχή της απόδειξης του θεωρήματος του Bass 1.2.2 χρησιμοποιώντας θεώρημα 1.2.6. Έστω  $n$  ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος  $X$  και  $m$  είναι ο αριθμός των μη κατευθυνόμενων ακμών του. Αρχικά ορίζουμε κάποιους πίνακες. Θέτουμε

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια ορίζουμε τον  $n \times 2m$  πίνακα έναρξης  $S$  και τον  $n \times 2m$  τερματικό πίνακα  $T$  ως εξής

$$s_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{αν η } v \text{ είναι η αρχή της } e \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$t_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{αν η } v \text{ είναι το πέρας της } e \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε κάποιες ιδιότητες για τους πίνακες που ορίσαμε

**Πρόταση 1.2.10** (Ιδιότητες πινάκων).

- (i)  $SJ = T$  και  $TJ = S$
- (ii) Αν  $A$  είναι ο πίνακας γειτνίασης του  $X$  και  $Q + I_n$  είναι ο διαγώνιος πίνακας με  $j$ -οστή διαγώνια είσοδο τον βαθμό της  $j$ -οστής κορυφής του  $X$  τότε  $A = ST^t$  και  $Q + I_n = SS^t = TT^t$ .
- (iii) Ο πίνακας ακμών  $W_1$  ικανοποιεί την σχέση  $W_1 + J = T^tS$ .

Απόδειξη.

- (i) Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η αρχική(τελική) κορυφή της  $e_j$  είναι η τελική(αρχική) κορυφή της  $e_{j+|E|}$ .
- (ii) Θεωρούμε το άθροισμα

$$(ST^t)_{ab} = \sum_e s_{ae}t_{be}.$$

Στο δεξί μέρος το άθροισμα είναι ο αριθμός των κατευθυνόμενων ακμών  $e$  έτσι ώστε  $a$  είναι η αρχική κορυφή και  $b$  η τελική κορυφή της  $e$ , δηλαδή η  $ab$  είσοδος του  $A$ . Παρατηρούμε ότι  $A_{aa}$  είναι ο αριθμός των βρόχων της κορυφής  $a$ . Όμοια επιχειρήματα αποδεικνύουν την δεύτερη σχέση.

- (iii) Έχουμε ότι

$$(T^tS)_{ef} = \sum_v t_{ve}s_{vf}.$$

Το άθροισμα είναι 1 αν  $t(e) = o(f)$ , ακόμα και αν  $f = e^{-1}$ . Αν  $f \neq e^{-1}$  τότε παίρνουμε  $(W_1)_{ef} = (W_1 + J)_{ef}$  αλλά αν  $f = e^{-1}$  τότε παίρνουμε  $(J)_{ef} = (W_1 + J)_{ef}$ .

□

Απόδειξη. Θέλουμε να αποδείξουμε τον εξής τύπο

$$\zeta_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - Au + Qu^2).$$

Στην παρακάτω ισότητα όλοι οι πίνακες είναι  $(n + 2m) \times (n + 2m)$  και το πρώτο block είναι μεγέθους  $n \times n$ , όπου  $n$  είναι οι κορυφές του  $X$  και  $m$  ο αριθμός των μη κατευθυνόμενων ακμών του.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ T^t & I_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n(1 - u^2) & Su \\ 0 & I_{2m} - W_1u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n - Au + Qu^2 & Su \\ 0 & I_{2m} + Ju \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ T^t - S^t u & I_{2m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Παίρνοντας ορίζουσες και στα δύο μέλη έχουμε:

$$(1 - u^2)^n \det(I - W_1u) = \det(I_n - Au + Qu^2) \det(I_{2m} + Ju).$$

Για να τελειώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι

$$I + Ju = \begin{pmatrix} I & Iu \\ Iu & I \end{pmatrix}$$

συνεπάγεται ότι

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -Iu & I \end{pmatrix} (I + Ju) = \begin{pmatrix} I & Iu \\ 0 & I(1 - u^2) \end{pmatrix}.$$

Οπότε  $\det(I + Ju) = (1 - u^2)^m$  και αφού ισχύει ότι  $r - 1 = m - n$  για ένα συνεκτικό γράφημα έχουμε το ζητούμενο. □

### 1.3 Υπόθεση Riemann για Κανονικά Γραφήματα - Γραφήματα Ramanujan

Ας υποθέσουμε ότι το  $X$  είναι ένα  $(q+1)$ -κανονικό γράφημα τότε υπάρχει ένα ανάλογο της υπόθεσης του Riemann. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι η υπόθεση του Riemann ισχύει αν και μόνο αν το γράφημα  $X$  είναι Ramanujan. Θα συμβολίζουμε με  $\text{Spectrum}A$  το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα γειτνίασης του  $A$ .

**Ορισμός 1.3.1.** Ένα συνεκτικό  $(q+1)$ -κανονικό γράφημα  $X$  είναι Ramanujan αν και μόνο αν για

$$\mu = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spectrum}A, \lambda \neq q + 1\}$$

έχουμε  $\mu \leq 2\sqrt{q}$ .

**Παραδείγμα 1.3.1.** Το πλήρες γράφημα  $K_4$  έχει πίνακα γειτνίασης που δίνεται στην εξίσωση (1.1). Οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι οι  $3, -1, -1, -1$  ενώ ο βαθμός κάθε κορυφής είναι 3. Το γράφημα είναι Ramanujan.

Γενικά ισχύει ότι οι ιδιοτιμές του πλήρους γραφήματος  $K_n$  είναι η  $n - 1$  με πολλαπλότητα 1 και η  $-1$  με πολλαπλότητα  $n - 1$  για κάθε  $n$ , οπότε τα πλήρη γραφήματα είναι Ramanujan.

**Ορισμός 1.3.2.** Ένα γράφημα λέγεται διμερές αν και μόνο αν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να χωριστεί σε δύο ξένα σύνολα  $S, T$  έτσι ώστε καμία κορυφή του συνόλου  $S$  να μην γειτονεύει με καμία άλλη κορυφή του  $S$  και καμία κορυφή του  $T$  να μην γειτονεύει με καμία άλλη κορυφή του  $T$ .

**Πρόταση 1.3.3** (Ιδιότητες του Spectrum (Φάσματος Ιδιοτιμών) του πίνακα  $A$  όπου  $A$  ο πίνακας γειτνίασης του συνεκτικού  $(q+1)$ -κανονικού γραφήματος  $X$ ). Ας υποθέσουμε ότι το  $X$  είναι ένα συνεκτικό  $(q+1)$ -κανονικό γράφημα και  $A$  ο πίνακας γειτνίασης του. Τότε:

- (i)  $\lambda \in \text{Spectrum}A$  συνεπάγεται ότι  $|\lambda| \leq q+1$
- (ii)  $q+1 \in \text{Spectrum}A$  με πολλαπλότητα 1
- (iii)  $-(q+1) \in \text{Spectrum}A$  ανν το γράφημα  $X$  είναι διμερές.

Απόδειξη. Για το (i) παρατηρούμε ότι η  $q+1$  είναι ιδιοτιμή του  $A$  που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα  $(1, 1, \dots, 1)$ . Υποθέτουμε ότι  $Av = \lambda v$  για κάποιο διάνυσμα στήλη  $v = (v_1 \dots v_n)^t \in \mathbb{R}^n$ , και υποθέτουμε ότι  $\max |v_i|$  συμβαίνει για  $i = a$ . Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό  $a \sim b$  όταν η  $b$  κορυφή είναι γειτονική στην  $a$  έχουμε

$$|\lambda||v_a| = |(Av)_a| = \left| \sum_{b \sim a} v_b \right| \leq (q+1)|v_a|.$$

Για το (ii) υποθέτουμε ότι  $Av = (q+1)v$  για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα  $v = (v_1 \dots v_n)^t \in \mathbb{R}^n$ . Όπως και πριν υποθέτουμε ότι  $\max |v_i|$  συμβαίνει για  $i = a$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $v_a > 0$  αφού μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το  $v$  με το  $-1$  αν χρειάζεται. Οπότε όπως πριν

$$(q+1)v_a = (Av)_a = \sum_{b \sim a} v_b \leq (q+1)v_a.$$

Για να έχουμε ισότητα στο άθροισμα πρέπει  $v_b = v_a$  για κάθε  $b$  γειτονική της  $a$ . Αφού το  $X$  είναι συνεκτικό, συμπεραίνουμε ότι το  $v$  πρέπει να είναι το σταθερό διάνυσμα.

Προκειμένου να αποδείξουμε το (iii) αρχικά υποθέτουμε ότι η  $-(q+1)$  είναι ιδιοτιμή του  $X$ . Έστω  $v = (v_1, \dots, v_n)^t$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Θέτουμε  $v' = (|v_1|, \dots, |v_n|)^t$ , τότε

$$(1.2) \quad |v^t Av| = |-(q+1)v^t v| = (q+1)v^t v.$$

Από την άλλη

$$(1.3) \quad v^t Av = \left| \sum_i \sum_j a_{ij} v_i v_j \right| \leq \sum_i \sum_j a_{ij} |v_i| |v_j| = v'^t A v' \leq (q+1)v'^t v' = (q+1)v^t v.$$

(αφού η  $q+1$  είναι η μέγιστη τιμή της παράστασης  $u^t Au/u^t u$ ). Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 1.2 και 1.3, βρίσκουμε ότι πρέπει να έχουμε ισότητα οπότε το  $v'$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην  $q+1$  ιδιοτιμή και επειδή το  $X$  είναι συνεκτικό, καμία είσοδος του  $v'$  δεν είναι 0. Επιπλέον όλοι οι μη μηδενικοί όροι του

$$\sum_i \sum_j a_{ij} v_i v_j = -(q+1)v^t v$$

πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο και μίας και το άθροισμα είναι αρνητικό όλοι οι προσθετέοι είναι αρνητικοί. Οπότε όταν το  $a_{ij} \neq 0$  τα  $v_i$  και  $v_j$  πρέπει να έχουν διαφορετικό πρόσημο. Οπότε θέτοντας

$$S_1 = \{x_i \in V | w_i > 0\}, \quad S_2 = \{x_i \in V | w_i < 0\}$$

τότε ο  $(S_1, S_2)$  είναι ένας διχρωματισμός των κορυφών του γραφήματος  $X$ . Αντίστροφα έστω  $X$  ένα διμερές γράφημα και  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $q + 1$ . Έστω  $S_1, S_2$  ένας διχρωματισμός των κορυφών του  $X$ . Θέτουμε

$$v'_i = \begin{cases} v_i & \text{αν } x_i \in S_1 \\ -v_i & \text{αν } x_i \in S_2 \end{cases}$$

τότε η  $i$  συντεταγμένη του  $Av'$  είναι η

$$\sum_j a_{ij}w'_j = -\sum_j a_{ij}w_j = -(q+1)v_i = -(q+1)v'_i,$$

αν  $x_i \in S_1$  (αφού για όλα τα  $j$  εδώ που έχουν  $a_{ij} \neq 0$  έχουμε  $x_j \in S_2$ ) και όμοια

$$\sum_j a_{ij}w'_i = \sum_j a_{ij}w_j = (q+1)v_i = -(q+1)v'_j$$

αν το  $x_i \in S_2$ . Οπότε το  $v'$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα και η αντίστοιχη ιδιοτιμή του είναι η  $-(q+1)$ .  $\square$

**Ορισμός 1.3.4.** Υποθέτουμε ότι το  $X$  είναι ένα συνεκτικό  $(q+1)$ -κανονικό γράφημα (χωρίς κορυφές βαθμού 1). Λέμε ότι η Ihara ζ-συνάρτηση  $\zeta_X(q^{-s})$  ικανοποιεί την υπόθεση Riemann αν για  $0 < \operatorname{Re} s < 1$

$$\zeta_X(q^{-s})^{-1} = 0 \implies \operatorname{Re} s = 1/2.$$

Παρατηρούμε ότι αν  $u = q^{-s}$ ,  $\operatorname{Re} s = 1/2$  αντιστοιχεί σε  $|u| = 1/\sqrt{q}$ .

**Θεώρημα 1.3.5.** Για ένα συνεκτικό  $(q+1)$  κανονικό γράφημα  $X$ , η  $\zeta_X(u)$  ικανοποιεί την υπόθεση Riemann αν το γράφημα είναι Ramanujan.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα 1.2.2 για να δείξουμε ότι

$$\zeta_X(q^{-s})^{-1} = (1-u^2)^{r-1} \prod_{\lambda \in \operatorname{Spectrum} A} (1-\lambda u + qu^2)$$

$1-\lambda u + qu^2 = (1-\alpha u)(1-\beta u)$  όπου  $\alpha\beta = q$  και  $\alpha+\beta = \lambda$ . Παρατηρούμε ότι τα  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αντίστροφα των πόλων της  $\zeta_X(u)$ . Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση έχουμε τρεις περιπτώσεις:

(i)  $\lambda = \pm(q+1)$  το οποίο συνεπάγεται ότι  $\alpha = \pm q$  και  $\beta = \pm 1$

(ii)  $|\lambda| \leq 2\sqrt{q}$  το οποίο συνεπάγεται ότι  $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{q}$

(iii)  $2\sqrt{q} < |\lambda| < q+1$  το οποίο συνεπάγεται ότι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $1 < |\alpha| \neq |\beta| < q$ ,  $|\alpha|, |\beta| \neq \sqrt{q}$ .

Έστω  $u = \alpha^{-1}$  ή  $\beta^{-1}$  όπου

$$u = \left( \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4q} \right) / 2q$$

Οι περιπτώσεις (i) και (ii) είναι προφανείς. Για να κατανοήσουμε την περίπτωση (iii) πρώτα υποθέτουμε ότι  $\lambda > 0$  και παρατηρούμε ότι  $u = (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4q}) / (2q)$  είναι μια μονότονα αύξουσα συνάρτηση του  $\lambda$ . Αυτό συνεπάγεται ότι η μεγαλύτερη ρίζα  $u$  είναι στο διάστημα  $(1/\sqrt{q}, 1)$  και για την μικρότερη ρίζα  $u' = (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4q}) / (2q)$  έχουμε  $|u'| \in (1/q, 1/\sqrt{q})$ . Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι  $uu' = 1/q$ . Ανάλογα επιχειρηματολογούμε για  $\lambda$  αρνητικό. Οπότε για  $u = q^{-s}$ , η περίπτωση (ii) δίνει  $\operatorname{Re} s = 1/2$ .  $\square$

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει κάποιες συναρτησιακές εξισώσεις για την Ihara ζ-συνάρτηση ενός κανονικού γραφήματος. Αν θέσουμε όπου  $u = q^{-s}$  οι συναρτησιακές εξισώσεις συνδέουν το  $s$  με το  $1 - s$  κάτι που αποτελεί ανάλογο της συναρτησιακής εξίσωσης της ζ-συνάρτησης του Riemann, δηλαδή της [43, σελ. 31]:

$$\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

**Ορισμός 1.3.6.** Έστω  $X$  ένα  $(q+1)$ -κανονικό γράφημα με ελάχιστο βαθμό κορυφών 2 και  $n = |V|$ . Ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις:

- (i)  $\Lambda_X(u) \equiv (1 - u^2)^{r-1+n/2} (1 - q^2 u^2)^{n/2} \zeta_X(u)$ .
- (ii)  $\xi_X(u) \equiv (1 + u)^{r-1} (1 - u)^{r-1+n} (1 - qu)^n \zeta_X(u)$ .
- (iii)  $\Xi_X(u) = (1 - u^2)^{r-1} (1 + qu)^n \zeta_X(u)$ .

**Πρόταση 1.3.7.** Για τις συναρτήσεις του ορισμού 1.3.6 έχουμε τις ακόλουθες συναρτησιακές εξισώσεις:

- (i)  $\Lambda_X(u) = (-1)^n \Lambda_X(1/qu)$ .
- (ii)  $\xi_X(u) = \xi_X(1/qu)$ .
- (iii)  $\Xi_X(u) = \Xi_X(1/qu)$ .

Απόδειξη. (i)

$$\begin{aligned} \Lambda_X(u) &= (1 - u^2)^{n/2} (1 - q^2 u^2)^n / 2 \det(I - Au - qu^2 I)^{-1} \\ &= \left(\frac{q^2}{q^2 u^2} - 1\right)^{n/2} \left(\frac{1}{q^2 u^2} - 1\right)^{n/2} \det\left(I - A \frac{1}{qu} + \frac{q}{(qu)^2} I\right)^{-1} \\ &= (-1)^n \Lambda\left(\frac{1}{qu}\right). \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε και τις υπόλοιπες δύο συναρτησιακές εξισώσεις.  $\square$

Από τις παραπάνω συναρτησιακές εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συμμετρία στην κατανομή των πόλων της  $\zeta_X(u)$  για κανονικά γραφήματα, δηλαδή αν η  $\zeta_X(u)$  έχει ένα πόλο στο  $u$  τότε πρέπει να έχει και ένα πόλο στο  $1/qu$ .

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε συνοπτικά τις βασικές ιδιότητες και την σημασία των Ramanujan γραφημάτων δίνοντας κάποιες αναφορές. Σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα των Alon και Borovna [1] τα Ramanujan γραφήματα είναι τα γραφήματα με το οριακά μεγαλύτερο χάσμα ιδιοτιμών.

**Θεώρημα 1.3.8.** Υποθέτουμε ότι η  $X_n$  είναι μία ακολουθία  $k$ -κανονικών συνεκτικών γραφημάτων και ότι ο αριθμός των κορυφών των  $X_n$  τείνει στο άπειρο καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο. Έστω  $\lambda_1(X_n)$  η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα γειννίασης του  $X_n$ . Τότε

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(X_n) \geq 2\sqrt{k-1}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [39, σελ. 68] □

Αυτή η πρόταση μας λέει ότι για κάθε  $\epsilon > 0$  τα  $k$ -κανονικά γραφήματα με  $\lambda_1 < 2\sqrt{k-1} - \epsilon$  είναι πεπερασμένα και άρα τα Ramanujan γραφήματα υπό αυτή την έννοια είναι η ακραία άπειρη οικογένεια κανονικών γραφημάτων ως προς το μέγεθος της δεύτερης ιδιοτιμής. Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή είναι πάντα η  $k$  όπως δείξαμε παραπάνω.

Τα Ramanujan γραφήματα παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον, όχι μόνο θεωρητικό αλλά και πρακτικό, με εφαρμογές στην πληροφορική και τα δίκτυα επικοινωνιών λόγω των ιδιοτήτων τους. Τα τελευταία χρόνια ιδιαίτερα η μελέτη τους έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον διάσημων ερευνητών όπως των Tao, Bourgain, Sarnak, Wigderson, Green, Lubotzky κ.α. [25], [6], [10], [9]. Ας δούμε πώς σχετίζεται αυτή η συνθήκη για το χάσμα των ιδιοτιμών με ιδιότητες των γραφημάτων. Τα Ramanujan γραφήματα είναι εκπληκτικά expander γραφήματα δηλαδή ισχυρά συνεκτικά αλλά αραιά γραφήματα. Πιο αναλυτικά υποθέτουμε ότι το  $X$  είναι ένα μη κατευθυνόμενο  $k$ -κανονικό γράφημα.

**Ορισμός 1.3.9.** Έστω  $S, T$  υποσύνολα του συνόλου των κορυφών του  $X$ , ορίζουμε

$$E(S, T) = \{e \mid e \text{ ακμή του } X \text{ με μία κορυφή στο } S \text{ και την άλλη στο } T\}$$

**Ορισμός 1.3.10.** Αν το  $S$  είναι ένα σύνολο από κορυφές του  $X$  ορίζουμε το σύνορο του  $S$  να είναι  $\partial S = E(S, X - S)$

**Ορισμός 1.3.11.** Ένα γράφημα  $X$  με σύνολο κορυφών  $V$  και  $n = |V|$  έχει *expansion ratio*

$$h(X) = \min_{\{S \subset V \mid |S| \leq n/2\}} \frac{|\partial S|}{|S|}.$$

Παρατηρούμε ότι  $h > 0$  αν και μόνο αν το  $X$  είναι συνεκτικό. Επίσης για οποιοδήποτε  $S$  με  $|S| \leq n/2$  έχουμε ότι  $\partial S \geq h|S|$ , οπότε αν το  $h$  δεν είναι μικρό το  $S$  έχει πολλούς γείτονες εκτός του  $S$  από όπου προκύπτει και το όνομα expander (αυτό που εξαπλώνεται).

**Ορισμός 1.3.12.** Μία ακολουθία από  $k$ -κανονικά γραφήματα  $\{X_j\}$  έτσι ώστε  $|V(X_j)| \rightarrow \infty$  για  $j \rightarrow \infty$  ονομάζεται *οικογένεια expander γραφημάτων* αν υπάρχει ένα  $\epsilon > 0$  έτσι ώστε  $h(X_j) \geq \epsilon$  για κάθε  $j$ .

Είναι εύκολο να δούμε ότι για να υπάρχει μία τέτοια οικογένεια το  $k$  πρέπει να είναι τουλάχιστον 3. Το ότι  $h > \epsilon > 0$  μας εξασφαλίζει ότι τα γραφήματα μας είναι ισχυρά συνεκτικά, και επειδή το  $k$  είναι συγκεκριμένο και το πλήθος των ακμών είναι  $|E| = \frac{kn}{2}$  μας εξασφαλίζει ότι τα γραφήματα μας είναι αραιά.

Το παρακάτω θεώρημα που απέδειξαν ανεξάρτητα οι Alon-Milman [4] και Dodziuk [17] δείχνει πως συνδέεται η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή με το expansion ratio

:

**Θεώρημα 1.3.13.** Έστω  $X$  ένα  $k$ -κανονικό συνεκτικό γράφημα. Τότε

$$\frac{k - \lambda_1}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k(k - \lambda_1)}.$$

Δηλαδή για να έχουμε οικογένεια expanders πρέπει το  $k - \lambda$  να είναι θετικά φραγμένο και για να έχουμε καλής ποιότητας expanders η τιμή η διαφορά αυτή πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Στην συνέχεια παραθέτουμε το expander-mixing lemma [2] που δείχνει ότι το  $E(S, T)$  είναι πιο κοντά στο αναμενόμενο για ένα τυχαίο  $k$ -κανονικό γράφημα  $X$  πυκνότητας  $k/n$ , όσο πιο μεγάλο είναι το χάσμα ιδιοτιμών και είναι αυτό που δείχνει ότι τα Ramanujan γραφήματα είναι εξαιρετικά expanders.

**Λήμμα 1.3.14** (Expander-mixing lemma). Έστω  $X$  ένα συνεκτικό  $k$ -κανονικό μη διμερές γράφημα με  $n$  κορυφές και

$$\mu = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Spectrum } A, \lambda \neq k\}.$$

Τότε για όλα τα σύνολα  $S, T$  από κορυφές του  $X$  έχουμε ότι

$$\left| E(S, T) - \frac{k|S||T|}{n} \right| \leq \mu \sqrt{|S||T|}.$$

Μια ακόμη ιδιότητα των Ramanujan γραφημάτων είναι ότι έχουν μικρές διαμέτρους. Παραθέτουμε ένα ακόμα θεώρημα της Fan Chung [12] που δείχνει πως συνδέεται το χάσμα ιδιοτιμών με την διάμετρο αφού πρώτα υπενθυμίσουμε τι είναι διάμετρος ενός γραφήματος.

**Ορισμός 1.3.15.** Ορίζουμε ως απόσταση  $d(x, y)$  ανάμεσα σε δύο κορυφές  $x, y$  ενός γραφήματος  $X$  το μήκος του κοντινότερου μονοπατιού που συνδέει τα  $x$  και  $y$ . Τότε η διάμετρος του  $X$  είναι

$$\text{diam}X = \max_{x, y \in V(X)} d(x, y)$$

**Θεώρημα 1.3.16.** Έστω το  $X$  ένα γράφημα συνεκτικό, μη διμερές με  $n$  κορυφές και ως συνήθως

$$\mu = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Spectrum } A, \lambda \neq \pm k\}.$$

τότε

$$\text{diam}X \leq 1 + \frac{\log(n-1)}{\log(k/\mu)}.$$

Η απόδειξη της πρότασης βρίσκεται στο [12]. Το τελευταίο θεώρημα δείχνει ότι η ελαχιστοποίηση του  $\mu$  ελαχιστοποιεί το άνω φράγμα για την διάμετρο.

Τέλος θα αναφερθούμε σε τυχαίους περιπάτους σε ένα γράφημα. Έστω  $A$  ο πίνακας γειτνίασης ενός  $k$ -κανονικού γραφήματος  $X$  με  $n$  κορυφές. Παίρνουμε Markov αλυσίδες από τον  $A$  ως εξής: οι καταστάσεις είναι οι κορυφές του  $X$ . Στην χρονική στιγμή  $t$  ο περιπατητής (διαδικασία) πηγαίνει από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $j$  με πιθανότητα  $p_{ij} = 1/k$  αν η κορυφή  $i$  είναι γειτονική της κορυφής  $j$  και 0 διαφορετικά. Ένα διάνυσμα πιθανότητας  $p \in \mathbb{R}^n$  έχει μη αρνητικές συντεταγμένες  $p_i$  ώστε  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , όπου  $p_i$  είναι η πιθανότητα ο τυχαίος περιπατητής να βρίσκεται στην κορυφή  $i$  του γραφήματος.



Ο *Markov* πίνακας μετάβασης είναι ο

$$T = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{1}{k} A$$

Με  $p_i^{(m)}$  συμβολίζουμε την πιθανότητα ο περιπατητής να βρίσκεται στην κορυφή  $i$  την χρονική στιγμή  $m$ . Το διάνυσμα πιθανότητας είναι  $p^{(m)} = (p_1^{(m)} \dots p_n^{(m)})$ . Οπότε

$$p^{(m+1)} = T p^{(m)} \text{ και } p^{(m)} = T^{(m)} p^{(0)}.$$

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 1.3.17** (Ο τυχαίος περιπατητής χάνεται). Έστω ένα γράφημα  $X$  συνεκτικό μη διμερές  $k$ -κανονικό με  $n$  κορυφές και πίνακα γειτνίασης  $A$ . Αν  $T = (1/k)A$  για κάθε αρχικό διάνυσμα πιθανότητας  $p^{(0)}$  ισχύει ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} T^m p^{(0)} = u = \left( \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)^t$$

δηλαδή τελικά ο παρατηρητής έχει την ίδια πιθανότητα να βρίσκεται σε οποιαδήποτε κορυφή του γραφήματος.

Απόδειξη. Η απόδειξη υπάρχει στο [39] σελ.62

□

Μας ενδιαφέρει να ξέρουμε σε πόσο χρόνο χάνεται ο περιπατητής. Αυτό εξαρτάται από την δεύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα γειτνίασης δεδομένου ότι το γράφημα δεν είναι διμερές. Το επόμενο θεώρημα απαντά σε αυτό το ερώτημα. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τον περίπατο ώστε ο περιπατητής να χάνεται και σε διμερή γραφήματα αν του επιτρέψουμε να παραμείνει στην κορυφή που βρίσκεται με ίση πιθανότητα. Θα χρησιμοποιήσουμε την 1-νόρμα για να μετρήσουμε αποστάσεις μεταξύ διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^n$  δηλαδή την

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

**Θεώρημα 1.3.18.** (πόσο γρήγορα χάνεται ο παρατηρητής) Έστω  $X$  ένα συνεκτικό, μη διμερές  $k$ -κανονικό γράφημα με  $n$  κορυφές και πίνακα γειτνίασης  $A$ . Αν  $T = (1/k)A$ , για κάθε αρχικό διάνυσμα πιθανότητας  $p^{(0)}$ , έχουμε ότι

$$\|T^m p^{(0)} - u\| \leq \sqrt{n} \left( \frac{\mu}{k} \right)^m$$

όπου  $u = \left( \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n} \right)^t$  και  $\mu = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Spectrum } A, \lambda \neq k\}$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [40], σελ. 104-106.

□

**Πόρισμα 1.3.19.** Αν το γράφημα στο προηγούμενο θεώρημα είναι *Ramanujan* τότε  $\mu \leq 2\sqrt{k-1}$  και  $\|T^m p^{(0)} - u\|_1 \leq \sqrt{n} \left( \frac{2\sqrt{k-1}}{k} \right)^m$ . Αυτό σημαίνει ότι στα *Ramanujan* γραφήματα ο παρατηρητής χάνεται πιο γρήγορα και ιδιαίτερα για μεγάλα  $k$  αυτό δεν παίρνει πολύ χρόνο.

Η ιδιότητα αυτή των Ramanujan γραφημάτων τα καθίστα πολύ χρήσιμα ως γεννήτριες τυχαίων αριθμών [41].

Το να κατασκευάσει κανείς οικογένειες Ramanujan γραφημάτων δεν είναι τετριμμένο ζήτημα. Οι κατασκευές είναι συχνά αλγεβρικές. Οι Lubotzky, Phillips και Sarnak [31] έδειξαν πως να κατασκευάσει κανείς μια άπειρη οικογένεια από  $p + 1$ -κανονικά γραφήματα όταν το  $p \equiv 1 \pmod{4}$  είναι πρώτος.

**Παραδείγμα 1.3.2** (Τα γραφήματα των Lubotzky, Phillips, Sarnak  $X_{p,q}$ ). Έστω  $p$  και  $q$  διαφορετικοί πρώτοι με  $p, q \equiv 1 \pmod{4}$ . Ορίζουμε την ομάδα  $G = \text{PGL}(2, \mathbb{F}_q) = \text{GL}(2, \mathbb{F}_q)/Z(\text{GL}(2, \mathbb{F}_q))$ , όπου  $\text{GL}(2, \mathbb{F}_q)$  είναι η ομάδα των  $2 \times 2$  αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία στο σώμα με  $q$  στοιχεία και  $Z(\text{GL}(2, \mathbb{F}_q))$  το κέντρο της ομάδας που είναι το σύνολο των βαθμωτών πολλαπλασιών του ταυτοτικού πίνακα. Τα  $X_{p,q}$  είναι Cayley γραφήματα της ομάδας  $G$ .

Επιλέγουμε έναν ακέραιο  $i$  ώστε  $i^2 \equiv -1 \pmod{4}$ . Ορίζουμε το σύνολο  $S$  να είναι το

$$S = \left\{ \left( \begin{array}{cc} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{array} \right) \mid a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p, a_0 > 0, a_1, a_2, a_3 \text{ άρτιοι} \right\}$$

Ένα θεώρημα του Jacobi λέει ότι υπάρχουν ακριβώς  $p + 1$  ακέραιες λύσεις στην  $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p$ , με αυτές τις συνθήκες οπότε  $|S| = p + 1$ . Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το  $S$  είναι κλειστό ως προς αντιστροφή πινάκων. Το γράφημα  $X_{p,q}$  είναι η συνεκτική συνιστώσα του Cayley γραφήματος  $X(G, S)$  που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο. Μπορεί να αποδειχτεί ότι ανάλογα με το αν το  $S$  είναι σύνολο γεννητόρων ή όχι το  $X(G, S)$  είναι συνεκτικό ή έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες ίσου μεγέθους. Τέλος προκύπτει ότι αυτά τα  $p + 1$ -κανονικά γραφήματα με  $O(q^3)$  κορυφές για  $q \rightarrow \infty$  είναι Ramanujan.

Η απόδειξη τους χρησιμοποιεί την απόδειξη της υπόθεση του Ramanujan για την συνάρτηση  $\tau$ , η οποία είναι συνέπεια των εικασιών του Weil που αποδείχθηκαν από τον Deligne στο [16], και γι'αυτό πήραν το όνομα Ramanujan γραφήματα. Ο Morgenstern [29] επέκτεινε την κατασκευή των Lubotzky, Phillips και Sarnak σε  $p^a + 1$ -κανονικά Ramanujan γραφήματα όπου  $p$  πρώτος και  $a \in \mathbb{N}$ .

Το ερώτημα για το αν υπάρχουν Ramanujan γραφήματα για οποιαδήποτε βαθμό κορυφών παρέμενε ανοιχτό μέχρι πρόσφατα οπότε οι Adam Marcus, Daniel Spielman και Nikhil Srivastava στο [26] απέδειξαν ότι υπάρχουν άπειρες οικογένειες διμερών Ramanujan γραφημάτων για κάθε βαθμό  $d > 2$  αποδεικνύοντας για την περίπτωση των διμερών γραφημάτων μία εικασία των Bilu και Linial [8] για τα 2-κανονικά καλύμματα. Η απόδειξη που παρέθεσαν είναι υπαρξιακή. Θα αναφερθούμε σε αυτή την εικασία στην συνέχεια, όταν θα έχουμε αναπτύξει την θεωρία των κανονικών καλυμμάτων των γραφημάτων.

Τέλος αναφέρουμε ότι σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα του Friedman (εικασία Alon) [19] ένα τυχαίο κανονικό γράφημα είναι σχεδόν Ramanujan, η για να το θέσουμε πιο αυστηρά για συγκεκριμένο  $k$  και για κάθε  $\epsilon > 0$  και  $X_{n,k}$  μία ακολουθία  $k$ -κανονικών γραφημάτων με  $n$  κορυφές έχουμε ότι η πιθανότητα του  $\lambda_1(X_{n,k}) \leq 2\sqrt{k-1} + \epsilon$  τείνει στο 1 για  $n \rightarrow \infty$ . Η εικασία που στηρίζεται σε αριθμητικά δεδομένα και πειράματα είναι ότι ακριβώς το 27% των κανονικών γραφημάτων ικανοποιούν την γραφοθεωρητική RH (δηλαδή είναι Ramanujan) καθώς ο αριθμός των κορυφών τείνει στο άπειρο [28].

## 1.4 Η ερμηνεία των συντελεστών της αντίστροφης της $\zeta$ -συνάρτησης του Ihara

Σε αυτήν την παράγραφο ακολουθούμε το άρθρο των Scott και Storm the coefficients of the Ihara zeta function [37]. Όπως αποδείξαμε η  $\zeta_X(u)$  είναι ρητή και η αντίστροφη της είναι ένα πολυώνυμο που δίνεται από τον τύπο

$$(1.4) \quad \zeta_X(u)^{-1} = \det(I - W_1 u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \cdots + c_{2m} u^{2m},$$

όπου για το γράφημα  $X$  έχουμε  $n = |V|$  ο αριθμός των κορυφών και  $m = |E|$  ο αριθμός των ακμών του. Ο πίνακας  $W_1$  είναι ο  $2m \times 2m$  πίνακας με  $ij$  είσοδο 1 αν δίνοντας κατευθύνσεις και αριθμώντας τις ακμές όπως στην αρχή του κεφαλαίου έχουμε ότι  $t(e_i) = o(e_j)$  και  $e_j \neq e_i^{-1}$ . Σε αυτήν την παράγραφο θα δώσουμε την ερμηνεία, με όρους δομής του γραφήματος, των συντελεστών  $c_i$ . Το πρώτο αποτέλεσμα είναι των Kotani και Sunada [24] και είναι μία έκφραση για το  $c_{2m}$ .

**Θεώρημα 1.4.1.** Έστω  $X$  ένα γράφημα και  $\zeta_X(u)$  η Ihara  $\zeta$ -συνάρτηση του  $X$ ,  $n = |V|$  και  $m = |E|$ . Με  $d(v)$  συμβολίζουμε τον βαθμό της κορυφής  $v$  δηλαδή τον αριθμό των ακμών στις οποίες ανήκει η  $v$ . Τότε

$$c_{2m} = (-1)^{m-n} \prod_{v_i \in V} (d(v_i) - 1).$$

Η Czarneski [13] στη διατριβή της υπολόγισε το  $c_1$

**Θεώρημα 1.4.2.** Έστω  $X$  ένα γράφημα και  $\zeta_X(u)$  η Ihara  $\zeta$ -συνάρτηση του  $X$ . Τότε το  $c_1$  ισούται με το αρνητικό του διπλασίου του πλήθους των βρόχων στο  $X$ .

Στην διατριβή του ο Storm [35] υπολόγισε το  $c_3$  από τον αριθμό των τριγώνων στο  $X$ . Η μέθοδος που παρουσιάζουμε σε αυτήν την παράγραφο είναι μία γενίκευση αυτής που χρησιμοποίησε ο Storm για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος.

**Θεώρημα 1.4.3.** Έστω  $X$  ένα απλό γράφημα και  $\zeta_X(u)$  η Ihara  $\zeta$  συνάρτηση του  $X$ . Τότε το  $c_3$  ισούται με το αρνητικό του διπλασίου του αριθμού των τριγώνων στο  $X$ .

Ο Horton στην διατριβή του [21] έδειξε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την περιφέρεια ενός γραφήματος από την Ihara  $\zeta$ -συνάρτηση του.

**Ορισμός 1.4.4.** Έστω  $X$  ένα γράφημα. Η περιφέρεια του  $X$  είναι ο μικρότερος κύκλος στο  $X$ . Ένα  $k$ -γωνο του  $X$  είναι ένα υπογράφημα του  $X$  που είναι ισόμορφο με τον κύκλο με  $k$  κορυφές  $C_k$ .

**Θεώρημα 1.4.5.** Έστω  $g$  η περιφέρεια ενός απλού συνεκτικού γραφήματος  $X$  με  $\zeta$  συνάρτηση  $\zeta_X(u)$ . Τότε,  $c_k = 0$  για  $1 \leq k < g$ . Επιπλέον,  $c_g$  είναι το αρνητικό του διπλασίου του πλήθους των  $g$ -γώνων στο  $X$ .

Για να διατυπώσουμε το γενικότερο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου θα χρειαστούμε κάποιους ακόμη ορισμούς από τα διγραφήματα. Ο βαθμός εισόδου (indegree) μίας κορυφής  $v$ ,  $\text{in}(v)$ , ενός διγραφήματος  $D$  είναι ο αριθμός των κατευθυνόμενων ακμών με τερματική κορυφή την  $v$ . Όμοια ο βαθμός εξόδου (out-degree) της  $v$  είναι ο αριθμός των ακμών με εναρκτήρια κορυφή την  $v$ . Ορίζουμε ως γραμμικό υπογράφημα ενός διγραφήματος  $D$  ένα υπογράφημα στο οποίο ανήκουν όλες οι κορυφές του  $D$  και κάθε κορυφή του  $v$  έχει  $\text{in}(v) = 1$  και  $\text{out}(v) = 1$ . Δηλαδή ένα γραμμικό υπογράφημα είναι μία ξένη ένωση κατευθυνόμενων κύκλων.

**Ορισμός 1.4.6.** Έστω  $D$  ένα διγράφημα. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{G}_k(D)$  το σύνολο των υπογραφημάτων του  $D$  που έχουν ακριβώς  $k$  κορυφές. Για ένα στοιχείο  $\tilde{D}$  του  $\mathcal{G}_k(D)$ , συμβολίζουμε με  $\mathcal{E}_k(\tilde{D})$  το πλήθος των γραμμικών υπογραφημάτων του  $\tilde{D}$  που περιέχουν άρτιο αριθμό κύκλων αρτίου μήκους. Όμοια συμβολίζουμε με  $\mathcal{O}_k(\tilde{D})$  το πλήθος των γραμμικών υπογραφημάτων του  $\tilde{D}$  με περιττό πλήθος κύκλων αρτίου μήκους.

Χρειαζόμαστε έναν ακόμη ορισμό για να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα

**Ορισμός 1.4.7.** Έστω  $X$  ένα γράφημα από το οποίο δίνοντας σε κάθε ακμή και τις δυο διευθύνσεις παίρνουμε το συμμετρικό διγράφημα του  $D(X)$ . Οπότε το  $D(X)$  έχει  $2|E(X)|$  ακμές. Ορίζουμε το κατευθυνόμενο γραμμικό γράφημα του  $X$  και συμβολίζουμε με  $L(X)$  το γράφημα με σύνολα κορυφών και ακμών τα ακόλουθα

$$V_L = E(D(X))$$

$$E_L = \{(e_i, e_j) \in E(D(X)) \times E(D(X)) : \bar{e}_i \neq e_j, t(e_i) = o(e_j)\}.$$

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 1.4.8.** Έστω  $X$  ένα συνεκτικό γράφημα με κατευθυνόμενο γραμμικό γράφημα  $L(X)$  και  $\zeta_X(u)$  η Ihara συνάρτηση του. Τότε ακολουθώντας τους παραπάνω ορισμούς έχουμε ότι για  $1 \leq k \leq 2m$ , ισχύει

$$c_k = \sum_{D \in \mathcal{G}_k(L(X))} (-1)^k (\mathcal{E}_k(D) - \mathcal{O}_k(D)).$$

Θα αποδείξουμε αυτό το θεώρημα παρακάτω. Κάνουμε πρώτα ορισμένες παρατηρήσεις για την εξίσωση 1.4. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.4.7 μπορούμε να δούμε τον πίνακα  $W_1$  ως τον πίνακα γειτνίασης του κατευθυνόμενου γραμμικού γραφήματος του  $X$ . Μελετώντας αυτόν τον τύπο με ορίζουσα μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα σε σχέση με τους συντελεστές  $c_k$ . Παρατηρούμε αρχικά ότι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα  $W_1$  σχετίζονται άμεσα με τους συντελεστές της αντίστροφης της ζ-Ihara συνάρτησης σύμφωνα με το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 1.4.9.** Έστω  $W_1$  ο πίνακας γειτνίασης του κατευθυνόμενου γραμμικού γραφήματος του συνεκτικού γραφήματος  $X$ . Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $W_1$  ως

$$\chi_{W_1}(u) = \det(W_1 - uI) = u^{2m} + c_1 u^{2m-1} + \dots + c_{2m},$$

τότε το αντίστροφο της Ihara ζ συνάρτησης γράφεται ως εξής

$$\zeta_X(u)^{-1} = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \dots + c_{2m} u^{2m}.$$

*Απόδειξη.* Αρχίζουμε θεωρώντας το  $\chi_{W_1}(u) = \det(W_1 - uI)$ . Το ξαναγράφουμε ως

$$\det(W_1 - uI) = (-u)^{2m} \det\left(I - \frac{1}{u}W_1\right).$$

Αντικαθιστώντας τώρα το  $u$  με το  $1/u$  έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

Αυτό το λήμμα είναι πολύ χρήσιμο γιατί οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυώνυμου είναι αθροίσματα των κυρίων ελασσόνων του πίνακα, όπου βέβαια όταν λέμε κυρίων ελασσόνων ενός πίνακα  $M$  εννοούμε τις ορίζουσες των υποπινάκων του  $M$  που σχηματίζονται επιλέγοντας ένα υποσύνολο των γραμμών και των στηλών του πίνακα με τον ίδιο δείκτη. Χρησιμοποιούμε το ακόλουθο γνωστό λήμμα από την γραμμική άλγεβρα.

**Λήμμα 1.4.10.** Έστω  $M$  ένας  $n \times n$  τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\chi_M(u) = u^n + c_1 u^{n-1} + \dots + c_n.$$

Τότε ο συντελεστής  $c_i$  είναι  $(-1)^i$  επί το άθροισμα όλων των  $i \times i$  κυρίων ελασσόνων του  $M$ .

Θα θέλαμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω λήμμα στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $W_1$ . Αυτό θα μας έδινε τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για τους συντελεστές της αντίστροφης της  $\zeta$  συνάρτησης του Ihara. Έστω μία κύρια ελάσσων του πίνακα  $W_1$  και έστω  $I$  το σύνολο των δεικτών που αντιστοιχεί στους δείκτες των γραμμών και των στηλών του πίνακα που κρατάμε. Κάθε γραμμή και η αντίστοιχη στήλη αναπαριστούν μία κορυφή στο κατευθυνόμενο γραμμικό γράφημα. Αυτές οι κορυφές αντιστοιχούν σε κατευθυνόμενες ακμές στο συμμετρικό διγράφημα  $D(X)$ . Οπότε κρατώντας από τον πίνακα  $W_1$  μόνο τις γραμμές και τις στήλες που έχουν δείκτες στο  $I$ , στην πραγματικότητα κοιτάμε τον πίνακα  $\tilde{W}_1$  που θα παίρναμε από το υπογράφημα που ενάγεται από τις ακμές του  $D(X)$  με δείκτη  $I$  σχηματίζοντας τον πίνακα γειτνίασης που αντιστοιχεί στο κατευθυνόμενο γραμμικό του γράφημα. Οπότε μία  $i \times i$  κύρια ελλάσσων μπορεί να υπολογιστεί παίρνοντας το κατάλληλο υπογράφημα του  $D(X)$  που ενάγεται από  $i$  ακμές, σχηματίζοντας τον  $\tilde{W}_1$  πίνακα και στην συνέχεια παίρνοντας την ορίζουσα του. Οπότε μας μένει να δούμε σε τι αντιστοιχεί ο πίνακας γειτνίασης ενός διγραφήματος. Αυτό το έχει απαντήσει ο Haggary [20] από το 1962.

**Λήμμα 1.4.11.** Έστω  $D$  ένα διγράφημα του οποίου τα γραμμικά υπογραφήματα, όπως ορίζονται στον ορισμό 1.4.6, είναι τα  $D_i$ , για  $i = 1, \dots, n$  και υποθέτουμε ότι κάθε  $D_i$  έχει  $e_i$  άρτιους κύκλους. Τότε

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{e_i},$$

όπου ο  $A$  είναι ο πίνακας γειτνίασης του  $D$ .

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 1.4.8

*Απόδειξη.* Έστω ο συντελεστής  $c_k$  με  $2 \leq k < 2m$ . Από το λήμμα 1.4.10 πρέπει να αθροίσουμε όλες τις  $k \times k$  κύριες ελάσσονες του  $W_1$ . Κάθε κύρια ελάσσων αντιστοιχεί στο να διαλέξουμε  $k$  κορυφές του  $L(X)$  και στην συνέχεια να πάρουμε το κατευθυνόμενο υπογράφημα που ενάγεται από αυτές. Όμως ένα τέτοιο διγράφημα είναι ένα στοιχείο του  $\mathcal{G}(L(X))$ . Ονομάζουμε αυτό το υπογράφημα  $\tilde{D}$ . Η κύρια ελάσσων αντιστοιχεί στην ορίζουσα του πίνακα γειτνίασης  $W_1$  του  $\tilde{D}$ . Για να πάρουμε αυτήν την ορίζουσα χρησιμοποιούμε το λήμμα 1.4.11 και χρησιμοποιώντας τον ορισμό 1.4.6 έχουμε

$$\det \tilde{W}_1 = \sum_{i=1}^n (-1)^{e_i} = \mathcal{E}(\tilde{D}) - \mathcal{O}(\tilde{D}),$$

όπου  $e_i$  είναι ο αριθμός των άρτιων κύκλων στα  $\tilde{D}_i$ . Συνδυάζοντας αυτό με το λήμμα 1.4.10 έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα είναι εύκολο να υπολογίσουμε τους συντελεστές για μικρές δυνάμεις του  $u$ . Παρατηρούμε ότι ένα γραμμικό υπογράφημα του  $L(X)$  αντιστοιχεί σε ένα υπογράφημα του  $D(X)$  που αποτελείται από πρώτα μονοπάτια που δεν έχουν κοινές ακμές. Οπότε μόνο τα υπογραφήματα του συμμετρικού διγραφήματος με  $k$  ακμές που αποτελούνται από κύκλους χωρίς κοινές ακμές και χωρίς πηλοσυστάματα και ουρές συνεισφέρουν στο  $c_k$ . Αυτή η παρατήρηση ωστόσο δεν έχει πρακτική αξία για τον υπολογισμό των συντελεστών μεγαλύτερων δυνάμεων του  $u$  λόγω της αυξημένης πολυπλοκότητας. Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα για τους συντελεστές  $c_1, \dots, c_7$  το ακόλουθο πόρισμα

**Πόρισμα 1.4.12.** Έστω  $X$  ένα συνεκτικό γράφημα με Ihara  $\zeta$  συνάρτηση όπως παραπάνω τότε

- (i) Αν το  $X$  έχει βρόχους το  $c_1$  είναι το αρνητικό του διπλασίου του αριθμού των βρόχων στο  $X$ .
- (ii) αν το  $X$  δεν έχει βρόχους, τότε ο συντελεστής  $c_2$  είναι το αρνητικό του διπλασίου του αριθμού των πρώτων κύκλων μήκους 2 (υπενθυμίζουμε ότι επιτρέπονται πολλαπλές ακμές). Επίσης το  $c_3$  είναι το αρνητικό του διπλασίου των τριγώνων στο  $X$ . Επιπροσθέτως, το  $c_4$  είναι ο αριθμός των πρώτων κύκλων μήκους 2 συν του διπλασίου του αριθμού των ζευγαριών των πρώτων κύκλων μήκους 2 που μοιράζονται μία ακμή συν του τετραπλασίου του αριθμού των ζευγαριών πρώτων κύκλων μήκους 2 που δεν έχουν κοινή ακμή πλην του διπλασίου του αριθμού των τετραγώνων στο  $X$ .
- (iii) αν το  $X$  είναι απλό γράφημα, οι συντελεστές  $c_3, c_4, c_5$  είναι το αρνητικό του διπλασίου των τριγώνων, των τετραγώνων και των πενταγώνων στο  $X$  αντίστοιχα. Το  $c_6$  είναι το αρνητικό του διπλασίου του αριθμού των εξαγώνων του  $X$  συν το τετραπλάσιο του αριθμού των ζευγαριών των τριγώνων χωρίς κοινές ακμές συν του διπλασίου του αριθμού των τριγώνων με μία κοινή ακμή στο  $X$  και το  $c_7$  είναι το αρνητικό του διπλασίου του αριθμού των επταγώνων στο  $X$  συν το τετραπλάσιο του αριθμού των ζευγαριών ενός τριγώνου και ενός τετραγώνου χωρίς κοινή ακμή συν το διπλάσιο του αριθμού των ζευγαριών ενός τριγώνου και ενός τετραγώνου που έχουν μία κοινή ακμή.

Θα διατυπώσουμε τώρα ένα πιο γενικό πόρισμα. Πρώτα δίνουμε έναν ορισμό που θα χρησιμοποιήσουμε στο θεώρημα

**Ορισμός 1.4.13.** Έστω  $X$  ένα γράφημα με δύο κυκλικά υπογραφήματα  $C_n$  και  $C_m$ . Λέμε ότι τα  $C_n$  και  $C_m$  είναι συμβατά αν μπορούμε να δώσουμε κατευθύνσεις στις ακμές του  $X$  έτσι ώστε οι  $C_n$  και  $C_m$  να είναι κατευθυνόμενοι κύκλοι.

Διατυπώνουμε τώρα το πόρισμα μας

**Πόρισμα 1.4.14.** Έστω  $X$  ένα συνεκτικό γράφημα με περιφέρεια  $g$  τότε

- (i) για  $0 < i < g$ , οι συντελεστές  $c_i$  ισούνται με 0.
- (ii) για  $g < i < 2g$ , οι συντελεστές  $c_i$  είναι το αρνητικό του διπλασίου του αριθμού των  $i$ -γώνων στο  $X$ .

- (iii) για  $2g \leq i < 3g$ , οι συντελεστές  $c_i$  είναι το άθροισμα των ακολούθων όρων
- το αρνητικό του διπλασίου του αριθμού των  $i$ -γώνων στο  $X$
  - το τετραπλάσιο του αριθμού των ζευγαριών ενός  $k$ -γώνου και ενός  $(c_i - k)$ -γώνου χωρίς κοινές ακμές για  $g \leq k < 2g$ ,
  - το διπλάσιο του αριθμού των ζευγαριών ενός  $k$ -γώνου και ενός  $(c_i - k)$ -γώνου που έχουν τουλάχιστον μία κοινή ακμή και είναι συμβατά υπογραφήματα για  $g \leq k < 2g$  και
  - το διπλάσιο του αριθμού των ζευγαριών ενός  $k_1$ -γώνου και ενός  $k_2$ -γώνου που έχουν ένα μονοπάτι μήκους  $\frac{1}{2}(c_i - k_1 - k_2)$  ανάμεσα τους και είναι συμβατά, όπου  $k_1 + k_2 < 3g$

Σαν παράδειγμα των παραπάνω αποτελεσμάτων υπολογίζουμε την  $\zeta$  συνάρτηση των γραφημάτων  $CH_{n,k}$  που είναι τα γραφήματα που προκύπτουν προσθέτοντας μία ακόμα ακμή στον κύκλο  $C_n$  έτσι ώστε ο μικρότερος κύκλος στο νέο γράφημα να έχει μήκος  $k + 1$ .

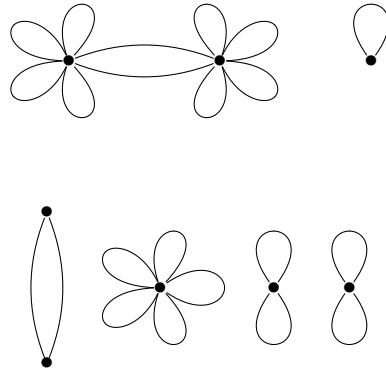
**Πόρισμα 1.4.15.** Η Ihara  $\zeta$ -συνάρτηση του γραφήματος  $CH_{n,k}$  είναι η

$$\zeta_{CH_{n,k}}^{-1} = 1 - 2u^{k+1} - 2u^{n-k+1} - 2u^n + 2u^{2n-k+1} + 2u^{n+2} + 2u^{n+k+1} + u^{2k+2} + u^{2n-2k+2} + u^{2n} - 4u^{2n+2}$$

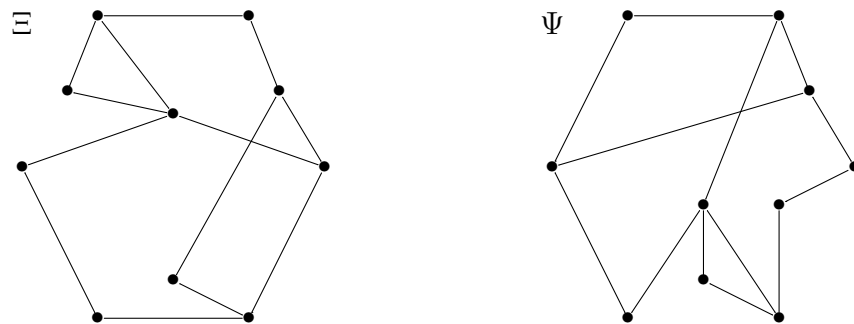
*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακριβώς έξι κύκλοι στο συμμετρικό διγράφημα  $D(CH_{n,k})$  χωρίς πηλοσυρίσματα και ουρές. Συγκεκριμένα το  $D(CH_{n,k})$  περιέχει δεξιόστροφα και αριστερόστροφα αντίγραφα των  $C_n, C_{n-k+1}, C_{k+1}$ . Το κάθε ζεύγος από αυτούς τους κύκλους διαμορφώνει το δεύτερο, τον τρίτο και τον τέταρτο όρο της  $\zeta_{CH_{n,k}}^{-1}$  αντίστοιχα. Υπάρχουν ακριβώς εννιά διαφορετικά υπογραφήματα του συμμετρικού διγράφηματος που αποτελούνται από δύο ακριβώς από αυτούς τους κύκλους τα οποία διαμορφώνουν τους επόμενους έξι όρους. Τέλος υπάρχουν ακριβώς τέσσερα γραμμικά υπογραφήματα του γραμμικού κατευθυνόμενου γραφήματος του  $CH_{n,k}$  που μας δίνουν τον τελικό όρο  $-4u^{2n+2}$ . Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι αυτά αποτελούνται από περιττό πλήθος κύκλων. Ο τελευταίος όρος εναλλακτικά μπορεί να υπολογιστεί από το θεώρημα 1.4.1. Δεν υπάρχει άλλος κύκλος στο  $D(CH_{n,k})$  χωρίς ουρές και πηλοσυρίσματα οπότε η απόδειξη μας έχει ολοκληρωθεί.  $\square$

Θα αναφέρουμε εδώ το πλεονέκτημα που έχουμε όταν χρησιμοποιούμε την πολυμεταβλητή  $\zeta$ -συνάρτηση ακμών ως προς την πληροφορία που μπορούμε να ανακαλέσουμε. Στο άρθρο του Some graph properties determined by edge zeta functions[36] ο Christopher Storm δείχνει πώς μπορούμε να αντλήσουμε την πληροφορία για το πόσους κύκλους Hamilton έχει το γράφημα μας, ποιά είναι η μέγιστη κλίκα του γραφήματος μας, αν το γράφημα μας είναι τέλειο κ.α. Αυτές τις πληροφορίες δεν μπορούμε να τις πάρουμε μόνο από την  $\zeta$ -συνάρτηση του Ihara με μία μεταβλητή.

Γενικά δύο μη ισόμορφα γραφήματα μπορούν να έχουν την ίδια Ihara  $\zeta$ -συνάρτηση, όπως φαίνεται στα παραδείγματα του [36], στα σχήματα 1.4 1.5



Σχήμα 1.4: Δύο γραφήματα με την ίδια  $\zeta$ -συνάρτηση αλλά διαφορετικούς αριθμούς κορυφών και συνεκτικών συνιστωσών.



Σχήμα 1.5: Δύο γραφήματα με την ίδια  $\zeta$ -συνάρτηση.



## Κεφάλαιο 2

# Σώματα Αριθμών

Στην παράγραφο αυτή συγκεντρώνουμε μερικά στοιχεία από την αλγεβρική θεωρία αριθμών. Στην πραγματικότητα η θεωρία για τα γραφήματα που θα αναπτύξουμε μιμείται την συμπεριφορά των πρώτων ιδεωδών σε δακτυλίους ακεραίων αλγεβρικών.

**Ορισμός 2.0.16.** Ένα σώμα αριθμών  $K$  είναι μια πεπερασμένη αλγεβρική επέκταση των ρητών αριθμών. Μέσα στο  $K$  ξεχωρίζουμε τον υποδακτύλιο των αλγεβρικών αριθμών  $\mathcal{O}_K$ , δηλαδή τα στοιχεία του  $K$  τα οποία ικανοποιούν μια αλγεβρική εξίσωση της μορφής:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

όπου τα στοιχεία  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

**Παρατήρηση 2.0.17.** Όταν το  $K = \mathbb{Q}$  τότε το  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ . Στην γενική περίπτωση ο δακτύλιος  $\mathcal{O}_K$  «παίζει» τον ρόλο των ακεραίων.

Στην περίπτωση του  $\mathbb{Z}$  οι πρώτοι αριθμοί είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα πρώτα ιδεώδη του  $\mathbb{Z}$ . Αυτό συμβαίνει γιατί οι ακεραίοι είναι ένας δακτύλιος που αντιστοιχεί σε ένα «απλά συνεκτικό γεωμετρικό αντικείμενο» δηλαδή κάθε ιδεώδες του είναι κύριο.

Είναι γνωστό ότι κάθε ιδεώδες ενός δακτυλίου  $\mathcal{O}_K$  γράφεται ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών. Επίσης αν έχουμε μια επέκταση  $L/K$  σωμάτων αριθμών τότε σχηματίζουμε το παρακάτω διάγραμμα δακτυλίων ιδεωδών:

$$\begin{array}{ccccccc} L & \mathcal{O}_L & P\mathcal{O}_L = Q_1^{e_1} \cdots Q_r^{e_r} & \mathcal{O}_L/Q_i & & & \\ | & | & | & | & & & \\ K & \mathcal{O}_K & P & \mathcal{O}_K/P & & & \end{array}$$

Στο παραπάνω διάγραμμα έχουμε θεωρήσει το πρώτο ιδεώδες  $P$  του δακτυλίου  $\mathcal{O}_K$  το οποίο το βλέπουμε ως ιδεώδες  $P\mathcal{O}_L$  του δακτυλίου  $\mathcal{O}_L$  και ως τέτοιο δέχεται μια ανάλυση  $Q_1^{e_1} \cdots Q_r^{e_r}$  ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών.

Για κάθε ιδεώδες  $Q_i$  στην παραπάνω ανάλυση το πηλίκο  $\mathcal{O}_L/Q_i$  είναι μια πεπερασμένη επέκταση του πεπερασμένου σώματος  $\mathcal{O}_K/P$ . Δηλαδή  $\mathcal{O}_K/P = \mathbb{F}_q$  και  $\mathcal{O}_L/Q_i = \mathbb{F}_{q^f}$ . Τον αριθμό  $f$  που εξαρτάται από την επιλογή των  $P, Q_i$  θα τον

ονομάζουμε βαθμό αδράνειας του  $Q$  πάνω από το  $P$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $L$  είναι μια αλγεβρική επέκταση του  $K = \mathbb{Q}$ . Για κάθε ιδεώδες  $Q$  του δακτυλίου  $\mathcal{O}_L$  ορίζεται η νόρμα  $N(Q) = \#\mathcal{O}_L/Q = p^f$  για κάποιο πρώτο  $p$  (για τον πρώτο που γεννά το κύριο ιδεώδες  $P$  του  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$  που βρίσκεται κάτω από το  $Q$ ).

**Ορισμός 2.0.18** ( $\zeta$ -συνάρτηση σώματος αριθμών). Για ένα σώμα αριθμών  $L$  ορίζεται η  $\zeta$ -συνάρτησή του:

$$\zeta_L(s) = \sum_{A \triangleleft \mathcal{O}_L} \frac{1}{N(A)^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω συνάρτηση δέχεται ένα γινόμενο Euler

$$\zeta_L(s) = \prod_{P \text{ πρώτο ιδεώδες}} \frac{1}{1 - N(P)^{-s}},$$

επεκτείνεται μερόμορφα στους μιγαδικούς αριθμούς, έχει την κατάλληλη συναρτησιακή εξίσωση κτλ. Θα δούμε αργότερα όταν η επέκταση  $L/\mathbb{Q}$  είναι Galois ότι αναλύεται σε γινόμενο  $L$ -σειρών μία από τις οποίες είναι η συνηθισμένη  $\zeta_{\mathbb{Q}}$ .

Στην περίπτωση που η επέκταση  $L/K$  είναι Galois με ομάδα Galois  $\operatorname{Gal}(L/K) = G$ , έχουμε ότι η ομάδα  $G$  δρα μεταβατικά πάνω στα ιδεώδη  $Q_i$  δηλαδή για κάθε  $Q_i, Q_j$  υπάρχει  $g_{ij}$  ώστε  $g_{ij}Q_i = Q_j$ . Στην περίπτωση αυτή όλοι οι δείκτες  $e_i$  είναι ίσοι.

Στην περίπτωση των Galois επεκτάσεων ακολουθώντας τον Hilbert μπορούμε να ορίσουμε για κάθε πρώτο  $Q$  του δακτυλίου  $\mathcal{O}_L$  τις παρακάτω ομάδες:

- Την ομάδα ανάλυσης

$$G(Q) := \{\sigma \in G : \sigma(Q) = Q\}.$$

- Την ομάδα αδράνειας

$$I(Q) := \{\sigma \in G(Q) : \sigma(a) \equiv a \pmod{Q}\}.$$

Παρατηρούμε ότι για  $P = Q \cap \mathcal{O}_K$  η επέκταση  $\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}$  είναι Galois και η ομάδα Galois της μπαίνει σε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$(2.1) \quad 1 \rightarrow I(Q) \rightarrow G(Q) \rightarrow \operatorname{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}\right) \rightarrow 1.$$

Επίσης είναι γνωστό ότι η ομάδα Galois της επέκτασης  $\operatorname{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}\right)$  είναι κυκλική. Στην περίπτωση που το πεπερασμένο σώμα  $\frac{\mathcal{O}_K}{P}$  έχει  $q = p^h$ -το πλήθος στοιχεία, και το σώμα  $\frac{\mathcal{O}_L}{Q}$  έχει  $q^f$ -το πλήθος στοιχεία, η ομάδα Galois παράγεται από ένα στοιχείο τον αυτομορφισμό του Frobenius:

$$F : \frac{\mathcal{O}_L}{Q} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_L}{Q}$$

$$x \mapsto x^q,$$

ο οποίος έχει τάξη  $f$ .

Θα λέμε ότι ο πρώτος  $Q$  πάνω από τον  $P$  διακλαδίζεται με βαθμό διακλάδωσης  $e$  αν η ομάδα  $I(Q)$  είναι μη τετριμμένη και έχει τάξη  $e$ . Είναι γνωστό ότι σε μια επέκταση σωμάτων αριθμών υπάρχουν πεπερασμένοι πρώτοι που διακλαδίζονται.

Στην περίπτωση που δεν έχουμε διακλάδωση, παρατηρούμε από την μικρή ακριβή ακολουθία (2.1) ότι η ομάδα Galois της επέκτασης  $\text{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{\mathcal{O}_P}/\frac{\mathcal{O}_K}{\mathcal{O}_P}\right)$  είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της ομάδας  $\text{Gal}(L/K)$ . Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να «σηκώσουμε» τον γεννήτορα Frobenius σε ένα μοναδικό στοιχείο της ομάδας  $\text{Gal}(L/K)$ , το οποίο θα το συμβολίζουμε με

$$[L/K, Q].$$

Το παραπάνω σύμβολο εξαρτάται από την επιλογή του πρώτου  $Q$  που επεκτείνει τον  $P$ . Αν έχουμε ένα διαφορετικό πρώτο  $Q'$  που επεκτείνει τον  $P$ , τότε αυτός θα είναι της μορφής  $Q' = gQ$ , για κατάλληλη επιλογή  $g \in \text{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{\mathcal{O}_P}/\frac{\mathcal{O}_K}{\mathcal{O}_P}\right)$  και σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε

$$[L/K, Q'] = g^{-1} [L/K, Q] g.$$

Στην περίπτωση που η ομάδα  $\text{Gal}(L/K)$  είναι αβελιανή το σύμβολο είναι ανεξάρτητο της επιλογής  $Q$ .

**Παρατήρηση 2.0.19.** *Ακόμα και στην περίπτωση που έχουμε διακλάδωση στοιχεία της ομάδας Galois μπορούν να ανυψωθούν σε στοιχεία της καθολικής ομάδας Galois, μόνο που η ανύψωση δεν είναι μοναδική.*

## 2.1 Σώματα συναρτήσεων

Είναι σαφές από τα πρώτα μαθήματα αφηρημένης άλγεβρας, ότι οι δακτύλιοι  $\mathbb{Z}$ , και  $K[t]$  όπου το  $K$  είναι ένα σώμα μοιράζονται πολλές ιδιότητες. Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε αυτή την αναλογία η οποία ήταν μια από τις κινητήριες δυνάμεις για την θεωρία αριθμών.

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σώμα  $\mathbb{F}_q$  με  $q = p^h$  το πλήθος στοιχεία. Θεωρούμε το σώμα ρητών συναρτήσεων  $\mathbb{F}_q(t)$ , δηλαδή τα πηλίκα πολυωνύμων. Το σώμα αυτό θα είναι το ανάλογο των ρητών συναρτήσεων. Μία αλγεβρική επέκταση του  $\mathbb{F}_q(t)$  θα είναι το ανάλογο ενός σώματος αριθμών. Σώματα αυτής της μορφής θα τα λέμε «σώματα συναρτήσεων μιας μεταβλητής» ή «σώματα συναρτήσεων» όταν η διάσταση είναι σαφής από τα συμφραζόμενα.

Τα σώματα αυτά είναι τα σώματα συναρτήσεων τα οποία ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο πάνω σε αλγεβρικές καμπύλες. Για παράδειγμα η αλγεβρική καμπύλη  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  ορισμένη στο σώμα  $\mathbb{F}_p$  αντιστοιχεί στα σημεία  $(x, y) \in \mathbb{F}_p^2$  τα οποία ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση ορισμού. Οι συναρτήσεις της καμπύλης αυτής, όμως σχηματίζουν ένα σώμα, το  $\mathbb{F}_p(x)(\sqrt{1-y^2})$ , το οποίο είναι μια πεπερασμένη αλγεβρική επέκταση του ρητού σώματος συναρτήσεων.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ζ-συνάρτηση από μια προβολική αλγεβρική καμπύλη ορισμένη πάνω από το σώμα  $\mathbb{F}_p$  ως εξής: Για κάθε επέκταση  $\mathbb{F}_{p^h}$  του  $\mathbb{F}_p$  θεωρούμε το πλήθος των σημείων της στο σώμα  $\mathbb{F}_{p^h}$  το οποίο και συμβολίζουμε με  $N_h$ .

Σχηματίζουμε την «γεννήτρια συνάρτηση»:

$$Z(X, t) = \exp\left(\sum_{h=1}^{\infty} N_h \frac{t^h}{h}\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

**Παραδείγμα 2.1.1.**  $X = \mathbb{P}^1$ ,  $N_h = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^h}) = p^h + 1$ .

$$Z(\mathbb{P}^1, t) = \exp\left(\sum_{h=1}^{\infty} (q^h + 1) \frac{t^h}{h}\right) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}.$$

Οι παραπάνω  $Z$ -συναρτήσεις ικανοποιούν μια σειρά από εικασίες οι οποίες στην βιβλιογραφία εμφανίζονται ως «Εικασίες του Weil»

(i) Η  $Z(X, t)$  είναι ρητή συνάρτηση του  $t$ .

(ii)  $Z(X, 1/q^nt) = \pm q^{nE/2} t^E Z(X, t)$ ,  $E = \Delta \cdot \Delta$ ,  $\Delta \subset X \times X$ .

(iii)  $P_0(t) = 1 - t$ ,  $P_{2n} = 1 - q^n t$  και για κάθε  $1 \leq i \leq 2n - 1$ ,  $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$ ,

$$P_i(t) = \prod_j (1 - a_{ij}t) \text{ με } |a_{ij}| = q^{1/2}.$$

$$Z(X, t) = \frac{P_1(t)P_3(t) \cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t) \cdots P_{2n}(t)}.$$

Οι εικασίες αυτές αποδείχτηκαν στην γενικότερη μορφή τους από τον P. Deligne ο οποίος για να τις αποδείξει έκανε χρήση μιας τεχνικής από την Αλγεβρική Τοπολογία που μετράει τα σταθερά σημεία βασισμένη στο ίχνος της επαγόμενης συνάρτησης στις ομάδες ομολογίας. Θεωρούμε το  $x \in \mathbb{F}_p$ . Είναι γνωστό ότι

$$f : x \in \mathbb{F}_{p^h} \Leftrightarrow x^{p^h} = x.$$

Τα σταθερά σημεία του μορφισμού του Frobenius  $x \mapsto x^{p^h}$  του συνόλου  $V$  είναι οι λύσεις που ζητάμε. Μπορούμε να εκτιμήσουμε το πλήθος τους με βάση τον τύπο σταθερών σημείων του Lefschetz

$$N_h = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \text{Tr}(f^{h*}; H^i(X, \mathbb{Q}_l)).$$

**Λήμμα 2.1.1.** Αν  $\phi$  ενδομορφισμός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \text{Tr}(\phi^r; V) \frac{t^r}{r}\right) = \det(1 - \phi t; V)^{-1}.$$

Απόδειξη. Αν  $\dim(V) = 1$  τότε

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \frac{t^r}{r}\right) = \frac{1}{1 - \lambda t}$$

Η γενική περίπτωση γίνεται με επαγωγή στην διάσταση. □

Το ότι η  $Z$ -συνάρτηση είναι ρητή προκύπτει από το παραπάνω λήμμα μαζί με τον τύπο σταθερού σημείου του Lefschetz.

$$P_i(t) = \det(1 - f^* t; H^i(X, \mathbb{Q}_l)).$$

Είναι ενδιαφέρον να τονίσουμε ότι η λεγόμενη συναρτησιακή εξίσωση είναι άμεση εφαρμογή της Poincare duality!

Για την περίπτωση των καμπυλών έχουμε ότι

$$N_h = 1 - a_h + q^h.$$

τότε

$$|a_h| \leq 2g\sqrt{q^h}$$

$$Z(X, t) = \frac{P_1(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

όπου το  $g$  είναι ένας φυσικός αριθμός που ονομάζεται το γένος της καμπύλης, και είναι το «τοπολογικό γένος» δηλαδή το γένος της επιφάνειας Riemann που προκύπτει αν θεωρήσουμε την εξίσωση ορισμού πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Καμπύλες με μέγιστο πλήθος σημείων ονομάζονται «μέγιστες» και ο υπολογισμός τους ενδιαφέρει την Θεωρία κωδίκων, περισσότερο συγκεκριμένα την θεωρία των γεωμετρικών κωδίκων Goppa.

## 2.2 Η ζ-συνάρτηση του Artin-Mazur-Ruelle

Στις ζ-συναρτήσεις των αλγεβρικών καμπυλών ορισμένων πάνω από ένα πεπερασμένο σώμα, είναι σαφές ότι υπολογίζουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις του πλήθους  $N_m$  των σταθερών σημείων του Frobenius  $F^m$ :

$$Z(z, V) = \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} N_m \right)$$

Οι Artin και Mazur αντικατέστησαν τον ομομορφισμό του Frobenius μιας αλγεβρικής πολλαπλότητας με ένα διαφορομορφισμό  $F$  μιας ομαλής συμπαγούς πολλαπλότητας  $M$ . Τα σταθερά σημεία του  $F$  είναι τα

$$\text{Fix}(f^m) = \{x \in M \mid f^m(x) = x\}$$

και η ζ-συνάρτηση είναι η

$$\zeta(z) = \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} |\text{Fix}(f^m)| \right).$$

Ο Ruelle γενίκευσε τα παραπάνω θεωρώντας μια συνάρτηση  $M \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$  από την πολλαπλότητα στους πίνακες και όρισε την συνάρτηση:

$$\zeta(z) = \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \text{Fix}(f^m)} \text{Tr} \left( \prod_{k=0}^{m-1} \phi(f^k(x)) \right) \right),$$

η οποία ταυτίζεται με την συνάρτηση των Artin-Mazur όταν  $d = 1$  και  $\phi = 1$ . Παρατηρούμε ότι μπορούμε να δούμε την ζ-συνάρτηση του Ihara ως Ruelle ζ-συνάρτηση ως εξής: Από την απόδειξη του θεωρήματος 1.2.6 έχουμε ότι

$$\zeta_X(u) = \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} u^m \right),$$

όπου  $N_m$  είναι το πλήθος των κλειστών μονοπατιών στο  $X$  μήκους  $m$  χωρίς πηλογορίσματα και ουρές.

Οπότε θέτουμε ως  $I$  το σύνολο των κατευθυνόμενων ακμών του γραφήματος και ορίζουμε ο πίνακας μετάβασης  $t = (t_{ij})_{i,j \in I}$  να είναι ο πίνακας ακμών  $W_1$ . Το γινόμενο  $I^{\mathbb{Z}}$  είναι συμπαγές οπότε και το κλειστό υποσύνολο του  $\Lambda$  που ορίζεται ως

$$\Lambda = \{(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid t_{\xi_k \xi_{k+1}} = 1, \text{ για όλα τα } k\}.$$

είναι συμπαγές. Δρώντας με την συνάρτηση  $\tau : \Lambda \rightarrow \Lambda$  με  $\tau(\xi)_k = \xi_{k+1}$ , έχουμε ότι  $|\text{Fix}(\tau^m)| = N_m$ .

### 2.3 Η ζ-συνάρτηση του Selberg

Θα περιοριστούμε να ορίζουμε την ζ-συνάρτηση του Selberg στην περίπτωση των συμπαγών επιφανειών Riemann γένους  $g \geq 2$  που είναι ηλίκα του υπερβολικού επιπέδου.

Το υπερβολικό επίπεδο

$$\mathbb{H} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\},$$

εφοδιάζεται με το στοιχείο μέτρησης τόξου

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Οι μετασχηματισμοί της μορφής

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \text{ όπου } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ και } ad - bc > 0$$

απεικονίζουν το υπερβολικό επίπεδο στον εαυτό του και είναι ισομετρικές. Ο τελεστής *Laplace* ορίζεται ως

$$\Delta = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

και είναι επίσης αναλλοίωτος κάτω από τους παραπάνω μετασχηματισμούς.

Είναι γνωστό ότι οι γεωδαισιακές (δηλαδή καμπύλες που ελαχιστοποιούν το μήκος) είναι ημειυθείες ή ημικύκλια κάθετα στον πραγματικό άξονα.

Θεωρούμε την ομάδα  $\Gamma = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  των  $2 \times 2$  πινάκων με ορίζουσα 1 και το ηλίκο της  $\bar{\Gamma} = \Gamma / \{\pm I\}$ . Τα στοιχεία της ομάδας  $\bar{\Gamma}$  μπορούν να χωριστούν στις παρακάτω κατηγορίες ανάλογα με την κλάση ομοιότητας κατά την ανάλυση Jordan του  $2 \times 2$  πίνακα:

- (i)  $z \mapsto z$
- (ii) Ελλειπτικά στοιχεία  $z \mapsto cz$ , όπου  $|c| = 1, c \neq 1$ .
- (iii) Υπερβολικά στοιχεία  $z \mapsto cz, c > 0, c \neq 1$ .
- (iv) Παραβολικά στοιχεία  $z \mapsto z + a, a \neq 0$ .

Θεωρούμε μια υποομάδα της  $\Gamma'$  της  $\Gamma$ . Το πηλίκο  $\Gamma' \backslash \mathbb{H}$  είναι συμπαγής και χωρίς σημεία διακλάδωσης αν και μόνο αν η ομάδα  $\Gamma'$  περιέχει μόνο υπερβολικά στοιχεία. Η περίπτωση αυτή είναι απλούστερη και θα περιοριστούμε σε αυτή, αν και οι ενδιαφέρουσες υποομάδες της  $\Gamma$  υπό την σκοπιά της θεωρίας αριθμών έχουν ελλειπτικά και παραβολικά στοιχεία.

Ένα υπερβολικό στοιχείο  $\gamma \in \Gamma'$  έχει δύο σταθερά σημεία  $z, w$  στο  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Μπορούμε να βρούμε ακριβώς ένα ημικύκλιο-γεωδαισιακή  $C(z, w)$  που να συνδέει τα δύο αυτά σημεία. Θεωρούμε την εικόνα  $C(w, z)$  της γεωδαισιακής στην συμπαγή επιφάνεια Riemann  $\Gamma' \backslash \mathbb{H}$ . Θα λέμε ότι η  $C(w, z)$  είναι μια κλειστή γεωδαισιακή αν η αρχή της είναι ίδια με το τέλος της, ισόδυναμα αν υπάρχει ένα στοιχείο  $\gamma \in \Gamma'$  ώστε  $\gamma C(z, w) = C(z, w)$ . Μια πρωταρχική κλειστή γεωδαισιακή είναι μια κλειστή γεωδαισιακή που την διατρέχουμε μια φορά.

Θα θεωρούμε τις πρωταρχικές κλειστές γεωδαισιακές ως «πρώτους» και από αυτά μπορούμε να κατασκευάσουμε την ζ-συνάρτηση του Selberg:

$$Z(s) = \prod_{[C]} \prod_{j \geq 1} (1 - e^{-(s+j)\nu(C)}),$$

όπου το γινόμενο λαμβάνεται πάνω από τις πρωταρχικές κλειστές γεωδαισιακές μήκους  $\nu(C)$ .

### 2.3α' Ο τύπος ίχνους του Selberg

Είναι γνωστό ότι τελεστής Laplace σε μία συμπαγή επιφάνεια Riemann έχει διακριτές ιδιοτιμές,

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$$

όπου οι ιδιοτιμές  $\gamma_n$  αντιστοιχούν σε  $\Gamma'$ -αναλλοιώτες ιδιοσυναρτήσεις  $u \in C^\infty(\mathbb{H})$  της Λαπλασιανής, δηλαδή:

$$u(\gamma z) = u(z), \text{ για κάθε } \gamma \in \Gamma'$$

$$y^2(u_{xx} + u_{yy}) + \mu_n u = 0.$$

Ο τύπος ίχνους του Selberg συνδέει το φάσμα ιδιοτιμών με τα μήκη των πρωταρχικών κλειστών γεωδαισιακών και δίνεται από [27]

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t\gamma_n} &= \frac{\text{area}(M)e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{be^{b^2/4t}}{\sinh \frac{1/2}{b}} db + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\text{κλάσεις συζυγίας } C \\ \text{στοιχείων της } \Gamma'}} \frac{\nu(C)}{\sinh \frac{1}{2}\nu(p^n)} \frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\nu(p^n)^2/4t}. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω τύπος είναι το γεωμετρικό ανάλογο, τύπων της αναλυτικής θεωρίας αριθμών που συνδέουν το μέγεθος πρώτων με τις ρίζες της ζ-συνάρτησης του Riemann [11, 9.4 σελ. 241].





## Κεφάλαιο 3

# Αναπαραστάσεις και $L$ -σειρές του Artin

### 3.1 Υπενθύμιση της θεωρίας αναπαραστάσεων

Οι Artin  $L$ -συναρτήσεις ορίζονται με βάση τις αναπαραστάσεις της ομάδας Galois. Σε αυτή την ενότητα υπενθυμίζουμε κάποιες έννοιες και αποτελέσματα από την Θεωρία αναπαραστάσεων.

Έστω

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

η πολλαπλασιαστική ομάδα των μιγαδικών αριθμών με νόρμα 1. Θα συμβολίζουμε με  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  την προσθετική (κυκλική) ομάδα των ακεραίων  $\pmod n$ .

Μια αναπαράσταση της κυκλικής ομάδας

$$\pi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{T}$$

είναι ένας ομομορφισμός ομάδων. Υπάρχουν  $n$  διακριτές (μη ισοδύναμες) αναπαραστάσεις του  $\mathbb{Z}_n$  που δίνονται από

$$\chi_a(x \pmod n) = \exp(2\pi i ax/n).$$

Ο χαρακτήρας  $\chi_a$  είναι καλά ορισμένος και αλλάζει πράγματι την προσθεση  $\pmod n$  σε πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών στο μοναδιαίο κύκλο.

Αυτές είναι οι συναρτήσεις της  $\mathbb{Z}_n$  που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρούμε τον μετασχηματισμό Fourier  $\hat{f}$  για κάθε  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  γράφοντας:

$$(3.1) \quad \hat{f}(a) = \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi_a(x)}.$$

Αυτός ο πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier έχει ανάλογες ιδιότητες με τον συνηθισμένο για τους πραγματικούς αριθμούς και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσει την «πραγματική» έκδοχη. Ειδικότερα, έχουμε την *αντιστροφή Fourier*:

$$nf(-x) = \widehat{\widehat{f}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_n.$$

Γενικότερα δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 3.1.1.** Έστω  $G$  μία πεπερασμένη ομάδα. Μία μοναδιαία αναπαράσταση  $\pi$  είναι ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\pi : G \longrightarrow U(n, \mathbb{C}),$$

όπου  $U(n, \mathbb{C})$  είναι η ομάδα των  $n \times n$  μοναδιαίων μιγαδικών πινάκων με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Μοναδιαίος πίνακας  $U$  σημαίνει  $U\bar{U}^t = I$ . Θα λέμε ότι η αναπαράσταση  $\pi$  είναι ανάγωγη όταν δεν μπορούμε να φέρουμε όλους τους πίνακες αναπαράστασης  $\pi(g)$  σε block διαγώνια μορφή με μία ομοιόμορφη αλλαγή βάσης. Ο βαθμός της αναπαράστασης  $\pi$ , συμβολίζεται με  $d_\pi = n$ , είναι το ίχνος του πίνακα  $\pi(e_G)$ .

Είναι γνωστό ότι αν η ομάδα είναι αβελιανή, τότε οι μόνες ανάγωγες αναπαραστάσεις είναι οι βαθμού 1.

Δύο αναπαραστάσεις  $\pi_1$  και  $\pi_2$  της  $G$  ονομάζονται ισοδύναμες (συμβολίζουμε με  $\cong$ ) αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $T$  έτσι ώστε

$$T\pi_1(g)T^{-1} = \pi_2(g)$$

για κάθε  $g \in G$ . Θα συμβολίζουμε με  $\hat{G}$  το σύνολο όλων των μη ισοδύναμων μοναδιαίων ανάγωγων αναπαραστάσεων της  $G$ . Η τετριμμένη αναπαράσταση, συμβολίζεται με 1, στέλνει κάθε στοιχείο της  $G$  στον  $1 \times 1$  πίνακα 1. Δεδομένων δύο αναπαραστάσεων  $\pi$  και  $\rho$ , ορίζουμε το ευθύ άθροισμα  $\pi \oplus \rho$  να είναι ο παρακάτω πίνακας:

$$(\pi \oplus \rho)(g) = \begin{pmatrix} \pi(g) & 0 \\ 0 & \rho(g) \end{pmatrix}.$$

Κάθε αναπαράσταση  $\rho$  του  $G$  είναι ισοδύναμη με ένα ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων:

$$(3.2) \quad \rho \cong \sum_{\pi \in \hat{G}}^{\oplus} m_\pi \pi \quad \text{όπου } m_\pi \text{ είναι η πολλαπλότητα της } \pi.$$

Το να περιγράψουμε μια αναπαράσταση βαθμού  $n$  είναι ισοδύναμο με το να δώσουμε μια δράση της ομάδας  $G$  σε ένα διανυσματικό χώρο  $V$  διάστασης  $n$ .

Με την κατασκευή των επαγόμενων αναπαραστάσεων μπορούμε να περάσουμε από αναπαραστάσεις της ομάδας  $H < G$  σε αναπαραστάσεις της ομάδας  $G$ . Πράγματι αν μια αναπαράσταση  $\rho$  της ομάδας  $H$  δίνεται από το  $\mathbb{C}[H]$ -module  $V$ , η επαγόμενη αναπαράσταση (που θα την συμβολίζουμε με  $\text{Ind}_H^G \rho$ ) θα είναι η αναπαράσταση που αντιστοιχεί στο module  $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$ .

Καλούμε την αναπαράσταση  $\text{Ind}_{\{e\}}^G 1$  δεξιά κανονική αναπαράσταση. Το παρακάτω σημαντικό θεώρημα μας λέει ότι η αναπαράσταση  $\pi = \text{Ind}_{\{e\}}^G 1$  (που επάγεται από την τετριμμένη αναπαράσταση της τετριμμένης υποομάδας) είναι η μητέρα των πάντων στην  $\hat{G}$ .

**Θεώρημα 3.1.2.** Εάν  $e$  είναι το ταυτοτικό στοιχείο της  $G$  και 1 είναι η τετριμμένη αναπαράσταση τότε:

$$\text{Ind}_{\{e\}}^G 1 \cong \sum_{\pi \in \hat{G}}^{\oplus} d_\pi \pi$$

Ο συμβολισμός σημαίνει ότι η δεξιά κανονική αναπαράσταση είναι ισοδύναμη με εκείνη που λαμβάνεται από ένα block διαγώνιο πίνακα που κατασκευάστηκε από

όλες της μη ισοδύναμες ανάγωγες αναπαραστάσεις όπου κάθε μία λαμβάνεται τόσες φορές όσος ο βαθμός της.

Ορίζουμε τον χαρακτήρα της αναπαράστασης  $\rho$  να είναι  $\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g))$ , όπου το  $\text{Tr}$  είναι το ίχνος του πίνακα. Για ανάγωγες αναπαραστάσεις αβελιανών ομάδων οι χαρακτήρες είναι ακριβώς οι ανάγωγες αναπαραστάσεις. Αποδεικνύεται ότι ο χαρακτήρας καθορίζει μία αναπαράσταση μέχρι ισοδυναμίας. Δηλαδή,

$$\chi_\pi = \chi_{\pi'} \iff \pi \cong \pi'.$$

Είναι σαφές ότι οι χαρακτήρες είναι αναλλοίωτοι στις κλάσεις συζυγίας

$$[g] = \{xgx^{-1} : x \in G\}.$$

Θα δημιουργήσουμε πίνακες χαρακτήρων με δείκτες για τις στήλες τις κλάσεις συζυγίας  $[g]$  της  $G$  και δείκτες για τις γραμμές τις κλάσεις ισοδυναμίας ανάγωγων μοναδιαίων αναπαραστάσεων  $\pi \in \hat{G}$ .

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 3.1.3** (τύπος χαρακτήρων του Frobenius). *Ας υποθέσουμε ότι η  $H$  είναι μια υποομάδα της πεπερασμένης ομάδας  $G$ . Έστω  $\sigma$  μια αναπαράσταση της  $H$ . Ορίζουμε  $\widetilde{\chi}_\sigma(y) = \chi_\sigma(y)$  αν  $y \in H$  και  $\widetilde{\chi}_\sigma(y) = 0$  αν  $y \notin H$ . Τότε η  $\pi = \text{Ind}_H^G \sigma$  έχει χαρακτήρα*

$$\chi_\pi(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \widetilde{\chi}_\sigma(xgx^{-1}).$$

Το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο στις συναρτήσεις της  $G$  χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην θεωρία αναπαραστάσεων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δούμε πόσα αντίγραφα μιας ανάγωγης αναπαράστασης  $\pi$  της  $G$  περιέχονται σε μία αυθαίρετη αναπαράσταση  $\rho$  της  $G$  (η πολλαπλότητα της  $\pi$  στην  $\rho$ ).

**Ορισμός 3.1.4.** Έστω  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι οι χαρακτήρες των αναπαραστάσεων  $\pi, \pi' \in \hat{G}$  ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$(3.3) \quad \langle \chi_\pi, \chi_{\pi'} \rangle_G = \begin{cases} 0 & \text{αν } \chi_\pi \neq \chi_{\pi'} \\ 1 & \text{αν } \chi_\pi = \chi_{\pi'} \end{cases}$$

Όπως προκύπτει από αυτές τις σχέσεις ορθογωνιότητας η πολλαπλότητα  $m_\pi$  του  $\pi \in \hat{G}$  σε μία αναπαράσταση του  $G$  από τον τύπο 3.2 μπορεί να υπολογιστεί από το  $\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle_G$ . Αυτό εξηγεί γιατί ο χαρακτήρας καθορίζει την αναπαράσταση μέχρι ισοδυναμίας. Θα χρειαστούμε και ένα δεύτερο θεώρημα του Frobenius.

**Θεώρημα 3.1.5** (νόμος αντιστροφής του Frobenius). *Κάνοντας τις ίδιες υποθέσεις όπως στο προηγούμενο θεώρημα, για  $\pi = \text{Ind}_H^G \sigma$  έχουμε για οποιαδήποτε αναπαράσταση*

$$\langle \chi_\rho, \chi_\pi \rangle_G = \langle \chi_{\rho|_H}, \chi_\sigma \rangle_H.$$

Εδώ  $\rho|_H$  δηλώνει τον περιορισμό της  $\rho$  στην  $H$ .

**Παράδειγμα 3.1.1.** Ο πίνακας χαρακτήρων της  $S_3$  θέλουμε να εξετάσουμε τον πίνακα χαρακτήρων της συμμετρική ομάδας  $S_3$ . Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό των μεταθέσεων ως γινόμενα ξένων κύκλων. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι κλάσεις συζυγίας είναι οι  $\{(1)\}$ ,  $\{(12)\}$ ,  $\{(123)\}$ . Υπάρχουν δύο προφανείς μονοδιάστατες αναπαραστάσεις: η τετριμμένη αναπαράσταση  $\chi_1$  και η αναπαράσταση  $\chi'_1(\sigma) = (-1)^{\text{sgn}\sigma}$ , όπου  $\text{sgn}\sigma = 0$  αριθμός των αντιμεταθέσεων που απαιτούνται, για να γράψουμε την μετάθεση  $\sigma$  ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Το τρίτο στοιχείο της  $G$  είναι μία 2-διάστατη αναπαράσταση  $\rho$ , η οποία ορίζεται ως εξής. Για κάθε  $\sigma \in G$ , ορίζουμε τον  $3 \times 3$  πίνακα  $M(\sigma)$  ως εξής

$$M(\sigma) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\sigma^{-1}(1)} \\ v_{\sigma^{-1}(2)} \\ v_{\sigma^{-1}(3)} \end{pmatrix}$$

Βλέπει κανείς ότι η  $M$  είναι μια αναπαράσταση του  $G$  η οποία επάγει μία 2-διάστατη αναπαράσταση  $\rho$  στον υπόχωρο

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0 \right\}.$$

Ο πίνακας χαρακτήρων της  $S_3$  δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	$\{(1)\}$	$\{(1, 2)\}$	$\{(1, 2, 3)\}$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi'_1$	1	-1	1
$\chi_\rho$	2	0	-1

### 3.2 Artin $L$ -συναρτησεις

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε τον ορισμό και μερικές βασικές ιδιότητες για τις  $L$ -σειρές του Artin. Περισσότερες πληροφορίες για αυτές όπως και πλήρεις αποδείξεις μπορεί να δει κανείς στο βιβλίο του Γ. Αντωνιάδη [43].

Θεωρούμε μια επέκταση Galois σωμάτων αριθμών  $L/K$  με ομάδα  $G$  και μία αναπαράσταση της  $G$ :

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

επί ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου  $V$ . Για κάθε πρώτο ιδεώδες  $P$  του δακτυλίου  $\mathcal{O}_K$ , θεωρούμε τις ομάδες ανάλυσης  $G(Q)$  και αδράνειας  $I(Q)$  ενός ιδεώδους  $Q$  του  $\mathcal{O}_L$  που επεκτείνει το  $P$ . Στην συνέχεια θεωρούμε τον χώρο

$$V^{I(Q)} = \{v \in V : gv = v \text{ για κάθε } g \in I(Q)\}.$$

Στον παραπάνω χώρο μπορεί να οριστεί μια δράση της ομάδας  $\text{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q}/\frac{\mathcal{O}_K}{P}\right)$  η οποία είναι ισόμορφη με την  $G(Q)/I(Q)$ . Πράγματι ορίζουμε την δράση

$$g \pmod{I(Q)} \cdot v = g \cdot v$$

η οποία είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη του αντιπροσώπου της κλάσης  $\pmod{I(Q)}$ .

Παρατηρήστε ότι αν το  $P$  δεν διακλαδίζεται τότε  $V^{I(Q)} = V$ .

**Ορισμός 3.2.1.** Για κάθε πρώτο  $P \in P(K)$  θεωρούμε τον γεννήτορα της κυκλικής ομάδας Galois  $\text{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_L}{Q} / \frac{\mathcal{O}_K}{P}\right)$  τον οποίο βλέπουμε ως ένα στοιχείο  $\phi_{Q/P}$  της ομάδας πηλίκου  $G(Q)/I(Q)$ . Ο ορισμός της  $L$ -σειράς του Artin δίνεται από το παρακάτω γινόμενο:

$$L(s, \rho, L/K) = \prod_{P \in P(K)} \det(1_V - NP^{-s} \cdot \rho(\phi_{Q/P}))^{-1} |_{V^{I(Q)}}$$

Για την  $L$ -σειρά του Artin μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Η σειρά  $L(s, \rho, L/K)$  συγκλίνει απόλυτα στο ημιεπίπεδο  $\text{Re}(s) > 1$ , ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολά του.
- (ii) Αν η  $\rho$  είναι μία πιστή αναπαράσταση της αβελιανής ομάδας  $G$ , και  $\chi$  ο χαρακτήρας τότε η  $L$ -σειρά του Artin ταυτίζεται με την  $L$ -σειρά του Dirichlet:

$$L(s, \rho, L/K) = L(s, \chi).$$

- (iii) Στην περίπτωση που  $\rho$  είναι η τετριμμένη αναπαράσταση έχουμε ότι

$$L(s, \rho, L/K) = \zeta_K(s).$$

- (iv)

$$\zeta_L(s) = \zeta_K(s) \prod_{\substack{\rho \in \hat{G} \\ \rho \neq Id}} L(s, \rho, L/K)^{\deg \rho}.$$

**Παρατήρηση 3.2.2.** Μια ανοιχτή εικασία σχετικά με τις  $L(s, \rho, L/K)$  στην περίπτωση που  $\rho$  δεν είναι η τετριμμένη αναπαράσταση είναι η εικασία του Artin η οποία ισχυρίζεται ότι η σειρά  $L(s, \rho, L/K)$  επεκτείνεται ολόμορφα σε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς.



## Κεφάλαιο 4

# Θεωρία Galois σε Γραφήματα

### 4.1 Πεπερασμένα καλύμματα και ομάδες Galois

**Ορισμός 4.1.1.** Έστω ένα γράφημα  $X$  χωρίς πολλαπλές ακμές και βρόχους. Θα λέμε ότι το γράφημα  $Y$  είναι ένα αδιακλάδιστο κάλυμμα του γραφήματος  $X$  αν έχουμε ένα χάρτη επικάλυψης  $\pi : Y \rightarrow X$  που είναι μία επί απεικόνιση γραφημάτων ώστε για κάθε  $x \in X$  και για κάθε  $y \in \pi^{-1}(x)$  οι κορυφές που είναι γειτονικές στο  $y \in Y$  να απεικονίζονται μία προς μία επί των γειτονικών κορυφών του  $x \in X$ .

Για να μπορέσουμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois για γραφήματα με βρόχους και πολλαπλές ακμές ο προηγούμενος ορισμός δεν επαρκεί. Θα χρειαστεί να δώσουμε έναν πιο περίπλοκο ορισμό που θα περιέχει την έννοια των γειτονιών σε κατευθυνόμενα γραφήματα.

**Ορισμός 4.1.2.** Μια γειτονιά  $N$  μιας κορυφής  $v$  σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $X$  είναι η κορυφή  $v$  μαζί με το ένα τρίτο κάθε ακμής της  $v$ .

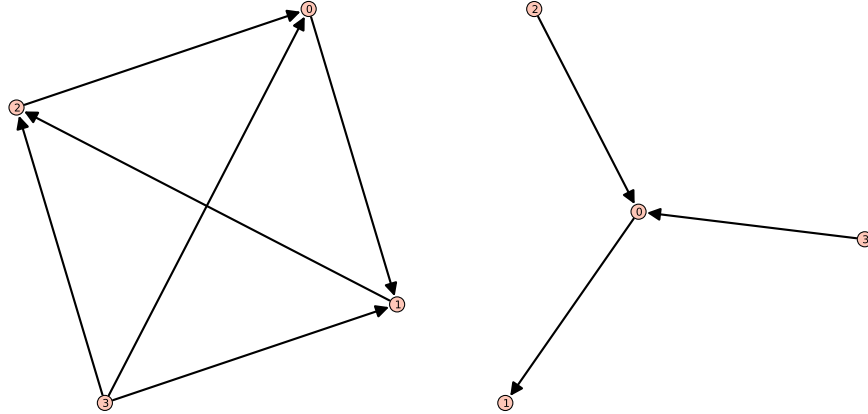
Στον προηγούμενο ορισμό το «ένα τρίτο» θα μπορούσε να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$  αρκετά μικρό.

**Ορισμός 4.1.3.** Ένα μη κατευθυνόμενο πεπερασμένο γράφημα  $Y$  είναι ένα κάλυμμα του μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $X$  αν, δίνοντας έναν αυθαίρετο προσανατολισμό στις ακμές του  $X$  υπάρχει μια επιλογή προσανατολισμού για τις ακμές του  $Y$  και μια επί απεικόνιση επικάλυψης  $\pi : Y \rightarrow X$  που στέλνει τις γειτονίες του  $Y$  επί των γειτονιών του  $X$  και διατηρεί τον προσανατολισμό των ακμών.

Παρατηρούμε ότι μία απεικόνιση επικάλυψης  $\pi$  δεν στέλνει μόνο κορυφές του  $Y$  σε κορυφές του  $X$  αλλά και τις ακμές του  $Y$  σε ακμές του  $X$ . Το αν το  $Y$  είναι ένα κάλυμμα του  $X$  είναι ανεξάρτητο της επιλογής του προσανατολισμού των ακμών του  $X$ . Στα καλύμματα  $Y$  του  $X$  (γράφουμε  $Y/X$ ) που περιέχουν βρόχους και πολλαπλές ακμές είναι χρήσιμο να ονοματίζουμε τις ακμές του  $X$  και έπειτα να δίνουμε στις ακμές του  $Y$  τα αντίστοιχα ονόματα ώστε να μπορέσουμε να διακρίνουμε ότι πράγματι έχουμε μια απεικόνιση επικάλυψης.

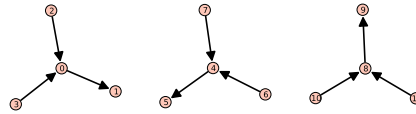
**Ορισμός 4.1.4.** Αν το  $Y$  καλύπτει το  $X$  με απεικόνιση επικάλυψης  $\pi$  λέμε ότι το υπογράφημα  $\tilde{G}$  του  $Y$  είναι μία ανύψωση του υπογραφήματος  $G$  του  $X$  αν  $\pi(\tilde{G}) = G$  και τα  $\tilde{G}$  και  $G$  έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών.

Κατασκευάζουμε ένα κάλυμμα  $Y$  ενός συνεκτικού γραφήματος  $X$  ως εξής. Πρώτα βρίσκουμε ένα δεντροπαράγοντα  $T$  του  $X$ . Για ένα κάλυμμα με  $d$  φύλλα



Σχήμα 4.1: Ένα γράφημα, μία επιλογή κατευθύνσεων των ακμών, και ο δεντροπαράγοντάς του.

παίρνουμε  $d$  αντίγραφα του  $T$ . Αυτό μας δίνει τις  $nd$  κορυφές του γραφήματος μας

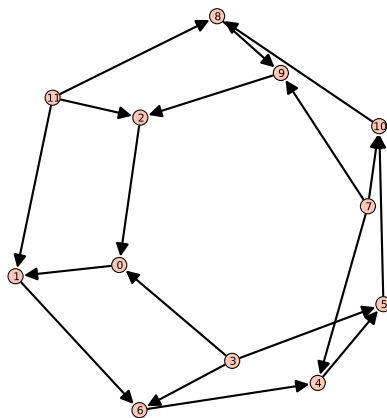


Σχήμα 4.2: 3 αντίγραφα του δεντροπαράγοντα

$Y$ . Οπότε μπορούμε να θεωρούμε το  $Y$  ως το σύνολο των σημείων  $(x, i)$ ,  $x \in X$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Έπειτα ανυψώνουμε στο  $Y$  τις ακμές του  $X$  που δεν ανήκουν στον δεντροπαράγοντα  $T$  και παίρνουμε ακμές στο  $Y$  δηλ. δημιουργούμε ακμές  $\tilde{e}$  στο  $Y$  με  $\pi(\tilde{e}) = e$  ξεκινώντας από κάθε ένα από τα αντίγραφα των δεντροπαράγοντων του  $X$ , δημιουργώντας το  $Y$ . Θεωρούμε τα αντίγραφα των δεντροπαράγοντων ως τα φύλλα του καλύμματος  $Y$  του  $X$ . Ο παρακάτω κώδικας Sage παίρνει ως είσοδο ένα γράφημα και τον αριθμό των φύλλων  $d$  και δίνει ως έξοδο ένα κάλυμμα  $d$ -φύλλων.

```
def LiftGraph(Glocal, d):
    from sage.graphs.spanning_tree import kruskal
    #Generate a spanning tree
    E = kruskal(Glocal, check=True)
    # make sure that the spanning tree
    # has the correct orientation
    E1=[]
    for ed in E:
        if ed in Glocal.edges():
            E1.append(ed)
```





Σχήμα 4.3: Το τελικό γράφημα

```

else :
    ed1=(ed [1] , ed [0] , ed [2] )
    E1.append (ed1)
def diff (a, b):
    b = set (b)
    return [aa for aa in a if aa not in b]
DD=diff (Glocal.edges () ,E1)
H=DiGraph ()
H.add_edges (E1)
if H==DiGraph ([]):
    H.add_vertex ()
AA=H.adjacency_matrix ()
Group=CyclicPermutationGroup (d)
g=Group [1]
PA=AA
for nu in [1..d-1]:
    PA=block_diagonal_matrix (PA,AA)
C=DiGraph (PA)
Cnew=C
nH=len (H.vertices ())
for i in [1..d]:
    for ed in DD:
        e0=(i-1)*nH+ed [0]
        e1=(g(i)-1)*nH+ed [1]
        Cnew.add_edge (e0, e1)
return Cnew

```

**Πρόταση 4.1.5** (Μοναδικότητα της ανύψωσης των μονοπατιών στα καλύμματα). Υποθέτουμε ότι το  $Y$  είναι ένα κάλυμμα του  $X$ . Έστω  $C$  ένα μονοπάτι στο  $X$ . Τότε το  $C$  έχει μια μοναδική ανύψωση σε ένα μονοπάτι  $\tilde{C}$  στο  $Y$ , δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει την αρχική κορυφή του  $\tilde{C}$ .

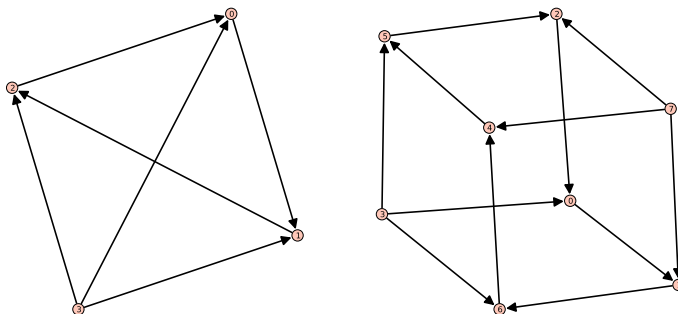
*Απόδειξη.* Έστω  $\pi$  η απεικόνιση επικάλυψης από το  $Y$  στο  $X$ . Σύμφωνα με τον ορισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε ακμή του  $Y$  και του  $X$  είναι κατευθυνόμενη και ότι η  $\pi$  διατηρεί τον προσανατολισμό τους. Υποθέτουμε ότι η  $e$  είναι μια κατευθυνόμενη ακμή που αρχίζει από την κορυφή  $a$  του  $X$ . Η ακμή  $e$  έχει μία μοναδική ανύψωση στην  $\tilde{e}$  του  $Y$  ώστε  $\pi(\tilde{e}) = e$  δεδομένης της κορυφής στο  $\pi^{-1}(a)$  από την οποία ξεκινά η  $\tilde{e}$ . Για να πάρουμε την μοναδική ανύψωση του μονοπατιού  $e_1 e_2 \cdots e_s$  του  $X$  απλώς ανυψώνουμε κάθε κατευθυνόμενη ακμή στη σειρά από την  $e_1$  ως την  $e_s$  ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

**Ορισμός 4.1.6.** Ένα κάλυμμα  $Y/X$  με  $d$ -φύλλα και απεικόνιση επικάλυψης  $\pi : Y \rightarrow X$  λέμε ότι είναι ένα κανονικό ή Galois κάλυμμα αν υπάρχουν  $d$  αυτομορφισμοί γραφημάτων  $\sigma_i : Y \rightarrow Y$   $i = 1, \dots, d$  ώστε  $\pi \circ \sigma_i = \pi$ . Η ομάδα Galois  $G(Y/X)$  είναι το σύνολο των απεικονίσεων  $\sigma_i$  με πράξη την σύνθεση. Όταν λέμε αυτομορφισμό γραφημάτων εννοούμε μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση μεταξύ των κορυφών και των κατευθυνόμενων ακμών του  $Y$  που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Παρακάτω θα δούμε ότι αν θέλουμε να φτιάξουμε ένα κανονικό κάλυμμα του  $X$ , με ομάδα Galois  $G$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία κατάλληλη αναπαράσταση της ομάδας Galois.

Δίνουμε κάποια παραδείγματα

**Παράδειγμα 4.1.1.** Ο κύβος είναι ένα κανονικό τετραγωνικό κάλυμμα του τετραέδρου



Σχήμα 4.4: Τετράεδρο και τετραγωνικό κάλυμμα

**Ορισμός 4.1.7** (Υπενθύμιση). Έστω  $G$  μια ομάδα που δρα σε ένα σύνολο  $X$ , λέμε ότι η  $G$  δρα μεταβατικά στο σύνολο  $X$  αν για κάθε  $x, y \in X$  υπάρχει  $g \in G$  ώστε  $gx = y$

**Πρόταση 4.1.8.** Έστω  $Y/X$  ένα κανονικό κάλυμμα. Η ομάδα Galois  $G = G(Y/X)$  δρα μεταβατικά στα φύλλα του καλύμματος.

*Απόδειξη.* Από την πρόταση 4.1.5 κάθε δεντροπαράγοντας του  $X$  έχει μία μοναδική ανύψωση που περιέχει μία ορισμένη κορυφή στο  $\pi^{-1}(v_0)$  όπου η  $v_0$  είναι μια κορυφή του  $X$ . Αυτές οι  $d$  ανυψώσεις είναι τα φύλλα του καλύμματος. Ένας αυτομορφισμός  $\sigma \in G$  που σταθεροποιεί μία κορυφή  $\tilde{v}_0 \in \pi^{-1}(v_0)$  είναι αναγκαστικά ο

ταυτοτικός. Για να το δούμε αυτό υποθέτουμε ότι  $\tilde{v}$  είναι μία οποιαδήποτε κορυφή στο  $Y$ . Τότε ένα μονοπάτι  $\tilde{P}$  από την  $\tilde{v}_0$  στην  $\tilde{v}$  στο  $Y$  προβάλλεται μέσω της  $\pi$  σε ένα μονοπάτι  $P$  από την  $v_0$  στην  $v = \pi(\tilde{v})$  στο  $X$ . Οπότε το  $\sigma(\tilde{P})$  είναι επίσης μία ανύψωση του  $P$  που αρχίζει στην  $\tilde{v}_0$  και άρα από την μοναδικότητα των ανυψώσεων βλέπουμε ότι το  $\sigma(\tilde{P}) = \tilde{P}$ . Συνεπώς επειδή η  $\tilde{v}$  ήταν αυθαίρετη ο  $\sigma$  πρέπει να είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός.

Δηλαδή κάθε αυτομορφισμός  $\sigma \in G$  στέλνει την  $\tilde{v}_0$  σε μία άλλη κορυφή και υπάρχουν μόνο  $d$  διαφορετικές κορυφές  $Y$  πάνω από την  $v_0$ . Οπότε η δράση της  $G$  είναι μεταβατική στα φύλλα του καλύμματος.  $\square$

Έστω ότι το  $Y/X$  είναι ένα κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois  $G$ . Διαλέγουμε ένα από τα φύλλα του  $Y$  και το ονομάζουμε φύλλο 1. Η εικόνα του φύλλου 1 κάτω από την δράση ενός στοιχείου  $g$  στο  $G$  θα ονομάζεται φύλλο  $g$ . Συνεπώς κάθε κορυφή  $\tilde{x}$  στο  $Y$  μπορεί να συμβολίζεται μοναδικά με  $\tilde{x} = (x, g)$ , όπου  $x = \pi(\tilde{x})$  και  $g$  είναι το φύλλο που περιέχει το  $\tilde{x}$ .

**Ορισμός 4.1.9** (Δράση της ομάδας Galois). Η ομάδα Galois  $G(Y/X)$  δρα στα φύλλα του  $Y$  μέσω του  $g \circ (\text{φύλλο } h) = \text{φύλλο}(gh)$ :

$$g \circ (x, h) = (x, gh) \quad \text{για } x \in X, \quad g, h \in G$$

Συνεπάγεται ότι η δράση του  $g$  κινεί ένα μονοπάτι στο  $Y$  ως εξής:  
 $g \circ (\text{μονοπάτι από το } (a, h) \text{ στο } (b, j)) = \text{μονοπάτι από το } (a, gh) \text{ στο } (b, gj)$ .

Ακόμα και τα μη-κανονικά καλύμματα  $Y$  πάνω από το  $X$  έχουν την ιδιότητα ότι η  $\zeta(u, X)^{-1}$  διαιρεί την  $\zeta(u, Y)^{-1}$  του καλύμματος  $Y$  όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση. Το ανάλογο για την Dedekind  $\zeta$ -συνάρτηση των σωμάτων αριθμών δεν είναι παρα μία εικασία, η εικασία του Artin. Έτσι για παράδειγμα το τριπλό κάλυμμα  $G$  του τετραέδρου  $K_4$  που κατασκευάσαμε στο σχήμα 4.3 έχει  $\zeta$ -συνάρτηση

$$\zeta_G^{-1} = -(u-1)^9(u+1)^9(u^2-u+1)(u^4+u^3+3u^2+u+1) \\ (u^{12}+6u^{10}+u^9+15u^8+3u^7+21u^6+3u^5+15u^4+u^3+6u^2+1)$$

το τετραέδρο  $K_4$  έχει  $\zeta$ -συνάρτηση

$$\zeta_{K_4}^{-1} = -(u-1)^3(u+1)^3(u^2-u+1)(u^4+u^3+3u^2+u+1)$$

και το πηλίκο είναι το

$$\frac{\zeta_G^{-1}}{\zeta_{K_4}^{-1}} = (u-1)^6(u+1)^6 \\ (u^{12}+6u^{10}+u^9+15u^8+3u^7+21u^6+3u^5+15u^4+u^3+6u^2+1).$$

**Θεώρημα 4.1.10.** Ας υποθέσουμε ότι το  $Y$  είναι ένα κάλυμμα  $d$ -φύλλων του  $X$  (πιθανώς μη-κανονικό). Τότε η  $\zeta(u, X)^{-1}$  διαιρεί την  $\zeta(u, Y)^{-1}$ .

Απόδειξη. Αρχίζουμε με τον τύπο που αποδείξαμε στο θεώρημα 1.2.2 δηλαδή

$$\zeta(u, Y)^{-1} = (1-u^2)^{r_Y-1} \det(I_Y - A_Y u + Q_Y u^2).$$

Παρατηρούμε ότι

$$r_Y - 1 = |E_Y| - |V_Y| = d(|E_X| - |V_X|) = d(r_X - 1).$$

Οπότε το  $(1 - u^2)^{rx-1}$  διαιρεί το  $(1 - u^2)^{ry-1}$ .

Στην συνέχεια διατάσσουμε τις κορυφές του  $Y$  σε blocks που αντιστοιχούν στα φύλλα του καλύμματος, ώστε ο  $A_Y$  να αποτελείται από block της μορφής  $\tilde{A}_{ij}$ , με  $1 \leq i, j \leq d$  ώστε  $\sum_j \tilde{A}_{ij} = A_X$ . Η ίδια διάταξη βάζει τον  $Q_Y$  σε block διαγώνια μορφή με  $d$  αντίγραφα του  $Q_X$  στην διαγώνιο.

Θεωρούμε το  $I_Y - A_Y u + Q_Y u^2$ . Χωρίς να αλλάξουμε την ορίζουσα μπορούμε να προσθέσουμε στην πρώτη block-στήλη τις υπόλοιπες  $d-1$  block-στήλες οπότε η πρώτη block-στήλη γίνεται

$$\begin{pmatrix} I_X - A_X u + Q_X u^2 \\ \vdots \\ I_X - A_X u + Q_X u^2 \end{pmatrix}.$$

Τώρα αφαιρώντας την πρώτη block-γραμμή από τις υπόλοιπες block-γραμμές η πρώτη block-στήλη γίνεται

$$\begin{pmatrix} I_X - A_X u + Q_X u^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

και η πρόταση αποδείχτηκε.  $\square$

#### 4.1α' Παραδείγματα καλυμμάτων

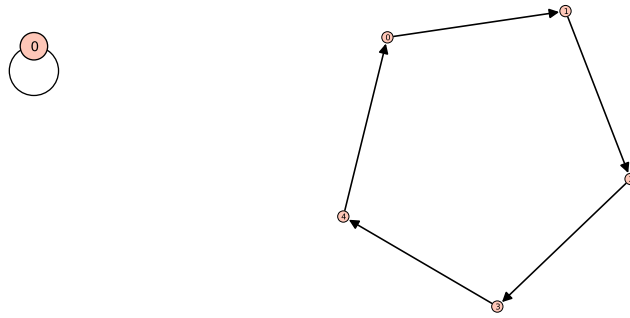
Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε αρκετά παραδείγματα για να ξεκαθαρίσουμε τις έννοιες της προηγούμενης ενότητας.

**Παράδειγμα 4.1.2.** Ένας  $n$ -κύκλος είναι ένα κανονικό  $n$ -κάλυμμα ενός βρόχου με ομάδα Galois κυκλική. Η Ihara ζ-συνάρτηση του βρόχου  $X$  είναι  $\zeta_X(u) = (1 - u)^{-2}$ , και η ζ-συνάρτηση του  $n$ -κύκλου είναι  $\zeta_Y(u) = (1 - u^n)^{-2}$ . Οπότε

$$\zeta_Y(u) = (1 - u^n)^{-2} = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - w^j u)^{-2} \quad \text{όπου } w = e^{2\pi i/n}$$

Η παραγοντοποίηση αυτή του  $\zeta_Y(u)$  θα δούμε σε επόμενη ενότητα ότι είναι ένα παράδειγμα της παραγοντοποίησης της Ihara ζ-συνάρτησης του καλύμματος  $Y$  σε γινόμενο των Artin  $L$ -συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις αναπαραστάσεις της ομάδας Galois του  $Y/X$ .

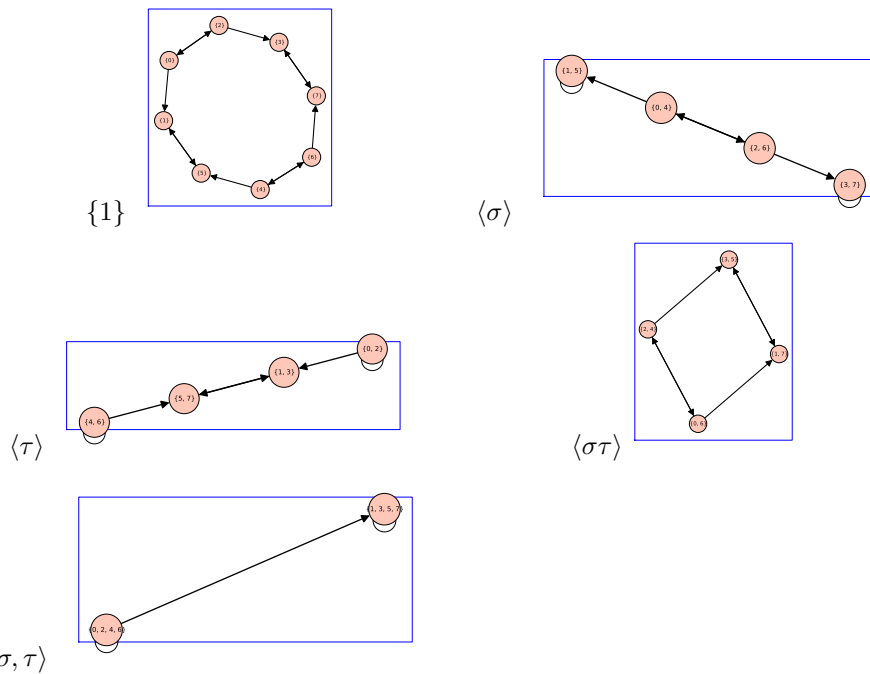
**Παρατήρηση 4.1.11.** Είναι λογικό να αναρωτηθεί κανείς αν, δεδομένου ενός γραφήματος  $Y$  που έχει μεγάλη ομάδα συμμετριών  $S$  και μιας υποομάδας  $G$  της  $S$ , υπάρχει ένα γράφημα  $X$  έτσι ώστε το  $Y$  να είναι ένα κανονικό κάλυμμα του  $X$  με ομάδα Galois  $G$ . Η απάντηση είναι ΟΧΙ πάντα. Για παράδειγμα, ο κύβος έχει ομάδα συμμετριών την  $S_4$  δηλαδή μία ομάδα με 24 στοιχεία. Αλλά αν η  $G$  είναι μια ομάδα τάξης  $d$  έτσι ώστε το  $d$  να μην διαιρεί το 4, τότε η  $G$  δεν μπορεί να είναι η ομάδα Galois  $G(Y/X)$  γιατί αν το  $Y/X$  ήταν ένα κανονικό κάλυμμα με  $d$  φύλλα, το  $d$  θα έπρεπε να διαιρεί τον αριθμό των ακμών και τον αριθμό των κορυφών του  $Y$ . Αλλά ο κύβος έχει 8 κορυφές και 12 ακμές οπότε το  $d$  πρέπει να διαιρεί το  $r_Y - 1 = |E| - |V| = 12 - 8 = 4$ .



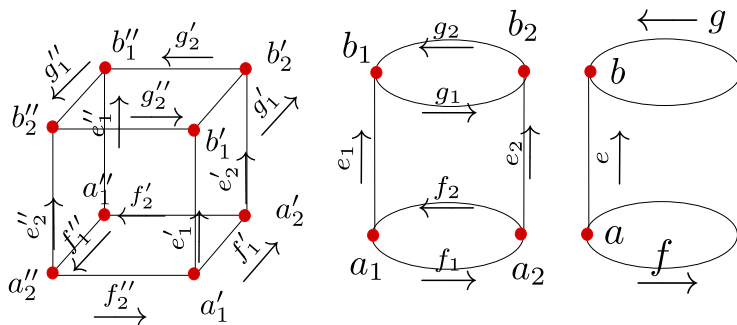
Σχήμα 4.5: Κυκλικό κάλυμμα τάξης 5 ενός βρόγχου

Το επόμενο παράδειγμα εξηγεί γιατί οι ορισμοί μας πρέπει να είναι τόσο περίπλοκοι.

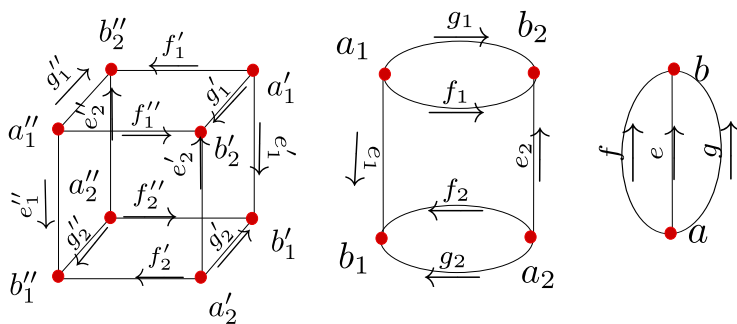
**Παράδειγμα 4.1.3.** Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζουμε ένα κάλυμμα του «αλτήρα» με ομάδα Galois την  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \sigma | \sigma^2 = \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma \text{ αλλά και τα ενδιάμεσα καλύμματα του (ορισμός 4.2.1)}$ .



Το ενδιαφέρον είναι ότι τα γραφήματα που προκύπτουν ως πηλίκα των στοιχείων  $\sigma, \tau$  είναι διαφορετικά χάρη στον προσανατολισμό των ακμών του γραφήματος. Αν



Σχήμα 4.6:



Σχήμα 4.7:

δεν είχαμε προσανατολισμό θα ήταν ισόμορφα, και δεν θα είχαμε ελπίδα να έχουμε μια αντιστοιχία Galois ανάμεσα σε ομάδες και γραφήματα.

**Παράδειγμα 4.1.4.** Στα σχήματα 4.6 και 4.7 βλέπουμε δύο γραφήματα με τον κύβο ως κανονικό κάλυμμα. Έστω  $Y$  ο κύβος. Τότε  $|V| = 8$ ,  $|E| = 12$ , και το  $|G|$  διαιρεί το  $\gcd(8, 12) = 4$ . Το σχήμα 4.6 δείχνει ένα κανονικό κάλυμμα  $Y/X$ , έτσι ώστε  $G = G(Y/X)$  είναι η κυκλική ομάδα τάξης 4. Το σχήμα 4.7 δείχνει ένα κανονικό κάλυμμα  $Y/X$ , έτσι ώστε  $G = G(Y/X)$  είναι η Klein-4 ομάδα. Σε κάθε σχήμα παρουσιάζουμε και ένα ενδιάμεσο τετραγωνικό κάλυμμα που ορίζουμε στην επόμενη παράγραφο.

## 4.2 Το θεμελιώδες θεώρημα του Galois

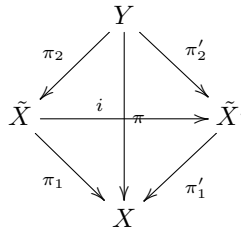
Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε την έννοια του ενδιάμεσου καλύμματος  $\tilde{X}$  στο Galois κάλυμμα  $Y/X$ . Ο κύριος στόχος μας είναι να αποδείξουμε το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois για γραφήματα, δηλαδή, την ύπαρξη της ένα προς ένα και επί αντιστοιχίας μεταξύ των υποομάδων  $H$  της ομάδας Galois  $G$  του  $Y/X$  και των ενδιάμεσων γραφημάτων στο  $X$  και στο  $Y/X$ . Γι' αυτό χρειαζόμαστε έναν ορισμό ο οποίος να είναι ισχυρότερος από το να πούμε ότι το  $Y/\tilde{X}$  είναι ένα κάλυμμα και το  $\tilde{X}/X$  είναι ένα κάλυμμα. Το παράδειγμα 4.1.3 και το παράδειγμα του σχήματος 4.7 θα έρχονταν σε αντίθεση με το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois για καλύμματα γραφημάτων εάν υπεραπλουστεύαμε τους ορισμούς μας. Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα, θα δώσουμε δύο ορισμούς οι οποίοι αρχικά

ίσως φανούν ενοχλητικά περίπλοκοι.

**Ορισμός 4.2.1.** *Ας υποθέσουμε ότι το  $Y$  είναι ένα κάλυμμα του  $X$  με απεικόνιση επικάλυψης  $\pi$ . Το γράφημα  $\tilde{X}$  είναι ένα ενδιάμεσο κάλυμμα του  $Y/X$  αν το  $Y/\tilde{X}$  είναι ένα κάλυμμα, το  $\tilde{X}/X$  είναι ένα κάλυμμα και οι προβολές επικάλυψης  $\pi_1 : \tilde{X} \rightarrow X$  και  $\pi_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$  έχουν την ιδιότητα ότι  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ .*

Ουσιαστικά, είναι η τριάδα  $(X, \pi_1, \pi_2)$  που ορίζει ένα ενδιάμεσο κάλυμμα.

**Ορισμός 4.2.2.** *Έστω τα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  να είναι ενδιάμεσα στο  $Y/X$  με απεικονίσεις επικάλυψης όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.*



Υποθέτουμε ότι όλα τα γραφήματα έχουν κατευθύνσεις στις ακμές που είναι συμβατές με τις απεικονίσεις επικάλυψης. Ας υποθέσουμε ότι ο  $i$  είναι ένα ισομορφισμός μεταξύ των  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  (που σημαίνει ότι είναι ένα-προς-ένα και επί στις κορυφές και στις κατευθυνόμενες ακμές). Αν ισχύει  $\pi_1 = \pi'_1 \circ i$  θα λέμε ότι ο  $i$  είναι ένας ισομορφισμός καλυμμάτων και τα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  είναι ισόμορφα καλύμματα του  $X$ . Αν, επιπλέον, έχουμε ότι  $i \circ \pi_2 = \pi'_2$  τότε λέμε ότι τα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  είναι τα ίδια ή ίσα.

Στο θεώρημα 4.2.5 θα δούμε ότι ισόμορφα ενδιάμεσα καλύμματα του κάλυμματος Galois  $Y/X$  με ομάδα Galois  $G$  αντιστοιχούν σε συζυγείς υποομάδες της  $G$ . Αυτό σημαίνει ότι ισόμορφα ενδιάμεσα καλύμματα για γραφήματα είναι ανάλογα με αριθμητικά σώματα όπως τα  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ,  $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{2})$ .

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το θεμελιώδες θεώρημα. Σημειώστε ότι οι περισσότερες από τις αποδείξεις των διαφόρων τμημάτων του θεωρήματος βασίζονται στην μοναδικότητα των ανυψώσεων των μονοπατιών

**Θεώρημα 4.2.3** (Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois). *Ας υποθέσουμε ότι το  $Y/X$  είναι ένα αδιακλάδιστο κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois  $G = G(Y/X)$*

- (i) *Δεδομένης μίας υποομάδας  $H$  της  $G$ , υπάρχει ένα γράφημα  $\tilde{X}$  ενδιάμεσο στο  $Y/X$  έτσι ώστε  $H = G(Y/\tilde{X})$ . Γράφουμε  $\tilde{X} = \tilde{X}(H)$ .*
- (ii) *Έστω  $\tilde{X}$  να είναι ενδιάμεσο στο  $Y/X$ . Τότε υπάρχει υποομάδα  $H = H(\tilde{X})$  της  $G$  ισόμορφη με την  $G(Y/\tilde{X})$ .*
- (iii) *Δύο ενδιάμεσα καλύμματα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  είναι ίσα αν και μόνον αν η  $H(\tilde{X}) = H(\tilde{X}')$ .*
- (iv) *Έχουμε ότι  $H(\tilde{X}(H)) = H$  και  $\tilde{X}(H(\tilde{X})) = \tilde{X}$ . Οπότε γράφουμε  $\tilde{X} \leftrightarrow H$  για την αντιστοιχία μεταξύ των  $\tilde{X}$  ενδιάμεσων καλυμμάτων στο  $Y/X$  και των υποομάδων  $H$  της Galois ομάδας  $G = G(Y/X)$ .*
- (v) *Αν  $\tilde{X}_1 \leftrightarrow H_1$  και  $\tilde{X}_2 \leftrightarrow H_2$  τότε το  $\tilde{X}_1$  είναι ενδιάμεσο στο  $Y/\tilde{X}_2$  αν  $H_1 \subset H_2$ .*

Απόδειξη. (i) Έστω  $H$  μια υποομάδα της  $G$ . Οι κορυφές του  $Y$  είναι της μορφής  $(x, g)$  με  $x \in X$  και  $g \in G$ . Ορίζουμε τις κορυφές του  $\tilde{X}$  να είναι οι  $(x, Hg)$  για  $x \in X$  και το σύμπλοκο  $Hg \in H \setminus G$ . Δημιουργούμε μία ακμή από την  $(a, Hr)$  στην  $(b, Hs)$  για  $a, b \in X$  και  $r, s \in G$  αν υπάρχουν  $h, h' \in H$  ώστε να υπάρχει ακμή από την  $(a, hr)$  στην  $(b, h's)$  στο  $Y$ . Στην ακμή ανάμεσα στην  $(a, Hr)$  και την  $(b, Hs)$  στο  $\tilde{X}$  δίνουμε το όνομα (label) και την κατεύθυνση της ακμής  $(a, b)$  στο  $X$ . Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι το  $\tilde{X}$  είναι καλά ορισμένο, ενδιάμεσο στο  $Y/X$  και συνεκτικό.

(ii) Έστω  $\tilde{X}$  ένα ενδιάμεσο κάλυμμα  $Y/X$  με απεικονίσεις επικάλυψης

$$\pi : Y \longrightarrow X, \pi_2 : Y \longrightarrow \tilde{X}, \pi_1 : \tilde{X} \longrightarrow X.$$

Επιλέγουμε μια κορυφή  $v_0 \in X$  με  $\tilde{v}_0 \in \pi^{-1}(v_0)$  στο φύλλο 1 του  $Y$ . Δηλαδή είναι,  $\tilde{v}_0 = (v_0, 1)$  χρησιμοποιώντας τις ετικέτες που έχουμε δώσει στα φύλλα του  $Y$ . Έστω  $\tilde{v}_0 = \pi_2(\tilde{v}_0) \in X$ . Ορίζουμε

$$(4.1) \quad \begin{aligned} H &= \{h \in G \mid h(\tilde{v}_0) \in \pi_2^{-1}(\tilde{v}_0)\} \\ &= \{h \in G \mid \pi_2(v_0, h) = \pi_2(v_0, 1)\}. \end{aligned}$$

Για να δούμε ότι η  $H$  είναι μια υποομάδα της  $G$  αρκεί να δείξουμε ότι η  $H$  είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό. Έστω  $h_1$  και  $h_2$  στοιχεία της  $H$ . Τότε, από τον ορισμό της  $H$ , έχουμε  $\pi_2(v_0, h_1) = \pi_2(v_0, h_2) = \pi_2(v_0, 1) = \tilde{v}_0$ . Έστω  $\tilde{p}_1$  και  $\tilde{p}_2$  μονοπάτια στο  $Y$  από την  $(v_0, 1)$  προς τις κορυφές  $(v_0, h_1)$  και  $(v_0, h_2)$  αντίστοιχα. Τότε τα  $\tilde{p}_1$  και  $\tilde{p}_2$  προβάλλονται μέσω της  $\pi_2$  στα μονοπάτια  $\tilde{p}_1$  και  $\tilde{p}_2$  του  $\tilde{X}$  που αρχίζουν και τελειώνουν στην  $\tilde{v}_0$ . Και τα  $\tilde{p}_1$  και  $\tilde{p}_2$  προβάλλονται μέσω της  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$  στα μονοπάτια  $p_1$  και  $p_2$  του  $X$  που αρχίζουν και τελειώνουν στην  $v_0$ . Από τον ορισμό 4.1.9, το  $h_1 \circ \tilde{p}_2$  ξεκινά από την  $(v_0, h_1)$  και καταλήγει στην  $(v_0, h_1 h_2)$ . Οπότε η ανύψωση του  $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2$  από το  $\tilde{X}$  στο  $Y$  με αρχή την  $(v_0, 1)$ , που ταυτίζεται με την ανύψωση του  $p_1 p_2$  από το  $X$  στο  $Y$  με αρχή την  $(v_0, 1)$ , καταλήγει στην  $(v_0, h_1 h_2)$ . Συνεπάγεται ότι το  $h_1 h_2$  είναι στην  $H$  και η  $H$  είναι μια υποομάδα της  $G$ . Μπορούμε να δούμε ότι η  $H$  είναι ανεξάρτητη της επιλογής της κορυφής  $v_0$  αφού οι κορυφές του ίδιου φύλλου του  $Y$  απεικονίζονται πάντα στο ίδιο φύλλο στο  $\tilde{X}$  μέσω της  $\pi_2$ .

(iii) Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο γραφήματα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  ενδιάμεσα στο  $Y/X$  με προβολές  $\pi_2 : Y \longrightarrow \tilde{X}, \pi_1 : \tilde{X} \longrightarrow X$  και  $\pi'_2 : Y \longrightarrow \tilde{X}', \pi'_1 : \tilde{X}' \longrightarrow X$ . Θέτουμε  $H = H(\tilde{X})$  και  $H' = H(\tilde{X}')$ . Υποθέτουμε ότι  $\tilde{X} = \tilde{X}'$ . Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός γραφημάτων  $i : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}'$  όπως στον ορισμό 4.2.2 ώστε  $i \circ \pi_2 = \pi'_2$  και  $\pi'_1 \circ i = \pi_1$ . Τότε

$$H = \{h \in G \mid \pi_2(v_0, h) = \pi_2(v_0, 1)\}$$

$$H' = \{h \in G \mid \pi'_2(v_0, h) = \pi'_2(v_0, 1)\}.$$

Αφού  $i \circ \pi_2 = \pi'_2$  και ο  $i$  είναι ισομορφισμός έχουμε ότι  $H = H'$ .

Για την αντίθετη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι  $H(\tilde{X}) = H(\tilde{X}')$ . Οπότε χρειάζεται να δείξουμε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός γραφημάτων  $i : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}'$  όπως στον ορισμό 4.2.2 ώστε  $i \circ \pi_2 = \pi'_2$  και  $\pi'_1 \circ i = \pi_1$ . Παρατηρούμε πρώτα ότι  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών. Χρησιμοποιούμε ένα



χαρακτηρισμό που θα αποδείξουμε αμέσως παρακάτω. Ισχύει ότι υπάρχουν  $g_v, g_{v'}$  ώστε

$$\begin{aligned}\pi_2^{-1}(\tilde{v}) &= \{(v, hg_v) | h \in H\}, \\ \pi_2'^{-1}(\tilde{v}') &= \{(v', hg_{v'}) | h \in H\}.\end{aligned}$$

Ορίζουμε  $i(\tilde{v}) = \pi_2'(v, hg_v)$  και παρατηρούμε ότι ο  $i$  είναι ένας ισομορφισμός γραφημάτων έτσι ώστε  $i \circ \pi_2 = \pi_2'$  και  $\pi_1 = \pi_1' \circ i$ .

- (iv) Έστω το  $\tilde{X}$  να είναι ενδιάμεσο στο  $Y/X$ . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι  $\tilde{X}(H(\tilde{X})) = \tilde{X}$ , χρησιμοποιώντας τους ορισμούς από τις αποδείξεις των μερών (i) και (ii) καθώς και τον ορισμό 4.2.2. Πριν επιχειρήσουμε να αποδείξουμε αυτή την ισότητα θα πρέπει να αποδείξουμε έναν χαρακτηρισμό της  $\pi_2^{-1}(\tilde{v})$  για κάθε κορυφή  $\tilde{v}$  του  $X$ . Αυτός λέει ότι υπάρχει ένα στοιχείο  $g_v \in G$  τέτοιο ώστε αν το  $H(\tilde{X}) = H$ ,

$$(4.2) \quad \pi_2^{-1}(\tilde{v}) = \{(v, hg_v) | h \in H\}.$$

Έστω  $v_0$  να είναι η επιλεγμένη κορυφή του  $X$  από τον ορισμό της  $H$  στην απόδειξη του μέρους (ii). Έστω  $\tilde{q}$  ένα μονοπάτι στο  $\tilde{X}$  από την  $\tilde{v}_0$  στην  $\tilde{v}$  τότε υπάρχει μοναδική ανύψωση  $\tilde{q}$  του  $\tilde{q}$  στο  $Y$  που ξεκινά από την  $(v_0, 1)$  και έστω ότι καταλήγει στην  $(v, g_v)$ . Γράφουμε  $\tilde{v} = (v, g_v)$  στο  $Y$  με  $\tilde{v} = \pi_2(\tilde{v})$  και  $\pi(\tilde{v}) = v$ . Προβάλλοντας τα στο  $X$  παίρνουμε το μονοπάτι  $q$  από την  $v_0$  στην  $v$ . Για  $g \in G$  από την εξίσωση στον ορισμό 4.1.9 το μονοπάτι  $q$  στο  $X$  ανυψώνεται σε ένα μονοπάτι  $g \circ \tilde{q}$  από την  $(v_0, g)$  στην  $(v, gg_v)$  στο  $Y$ . Οπότε από την μοναδικότητα των ανυψώσεων έχουμε ότι  $\pi_2 \circ g \circ \tilde{q} = \tilde{q}$  αν και μόνο αν το αναρκτήριο φύλλο της ανύψωσης του  $q$  στο  $\tilde{X}$  είναι αυτό της  $\tilde{v}_0$ . Δηλαδή το  $\pi_2 \circ g \circ \tilde{q} = \tilde{q}$  αν και μόνο αν  $g \in H$ . Οπότε αποδείξαμε τον τύπο 4.2.

Τώρα προσπαθούμε να δείξουμε ότι  $\tilde{X}' = \tilde{X}(H(\tilde{X})) = \tilde{X}$  με την έννοια του ορισμού 4.2.2. Υπενθυμίζουμε ότι το  $\tilde{X}' = \tilde{X}(H(\tilde{X}))$  έχει κορυφές της μορφής  $(x, Hg)$  και προβολές  $\pi_2'(x, g) = (x, Hg)$  και  $\pi_1'(x, Hg) = x$ . Ορίζουμε  $i : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  με  $i(\tilde{v}) = (v, Hg_v)$  χρησιμοποιώντας το στοιχείο  $g_v \in G$  από τον τύπο 4.2 και επαληθεύουμε ότι  $i \circ \pi_2 = \pi_2'$  και  $\pi_1' \circ i = \pi_1$ . Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι  $H(\tilde{X}(H)) = H$ . Με τους ορισμούς που έχουμε χρησιμοποιήσει στα μέρη (i) και (ii) έχουμε

$$\begin{aligned}H(\tilde{X}(H)) &= \{g \in G | \pi_2(v_0, g) = \pi_2(v_0, 1)\} \\ &= \{g \in G | (v_0, Hg) = (v_0, H)\} = H.\end{aligned}$$

- (v) Υποθέτουμε ότι  $\pi_2 : Y \rightarrow \tilde{X}_1$  και  $\pi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  με  $\pi_3 = \pi_1 \circ \pi_2 : Y \rightarrow \tilde{X}_2$ . Από την απόδειξη του μέρους (ii) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}H(\tilde{X}_1) &= H_1 = \{h \in G | \pi_2(v_0, h) = \pi_2(v_0, 1)\} \\ H(\tilde{X}_2) &= H_2 = \{h \in G | \pi_3(v_0, h) = \pi_3(v_0, 1)\}.\end{aligned}$$

Αφού  $\pi_3 = \pi_1 \circ \pi_2$  συνεπάγεται ότι  $H_1 \subset H_2$ . Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι  $H_1 \subset H_2$ . Οπότε υπάρχουν ενδιάμεσα γραφήματα  $\tilde{X}_i$ ,  $i \in 1, 2$  με κορυφές  $(x, H_i\sigma)$  όπου  $x \in X$  και σύμπλοκα  $H_i\sigma \in H_i/G$ . Μία ακμή μεταξύ  $(a, H_i\sigma)$  και  $(b, H_i\tau)$ , για  $a, b \in X$  και  $\sigma, \tau \in G$  υπάρχει, αν υπάρχουν

$h, h' \in H_i$  ώστε  $(a, h\sigma)$  και  $(b, h'\tau)$  να έχουν μία ακμή στο  $Y$ . Χρειάζεται να δείξουμε ότι  $\exists \pi_2 : Y \rightarrow \tilde{X}_1$  και  $\pi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  με  $\pi_3 = \pi_1 \circ \pi_2 : Y \rightarrow \tilde{X}_2$ . Εδώ  $\pi_2(v, g) = (v, H_1g)$  και  $\pi_3(v, g) = (v, H_2g)$  για  $v \in X$ ,  $g \in G$ . Άρα αφού  $H_1 \subset H_2$ , βλέπουμε ότι το  $\pi_1(v, H_1g) = (v, H_2g)$  έχει νόημα, αφού  $H_1a = H_1b$  αν  $ab^{-1} \in H_1$ . Αφού  $H_1 \subset H_2$  αυτό συνεπάγεται ότι  $H_2a = H_2b$ .  $\square$

Στην συνέχεια θεωρούμε συζυγείς ομάδες της ομάδας Galois (υποομάδες  $H$  και  $gHg^{-1}$  για  $g \in G$ ) και τα αντιστοιχόντα σε αυτές ενδιάμεσα καλύμματα.

**Ορισμός 4.2.4.** Υποθέτουμε ότι έχουμε τις ακόλουθες αντιστοιχίες μεταξύ ενδιάμεσων καλυμμάτων και υποομάδων του  $G$ :

$$\begin{aligned}\tilde{X} &\longleftrightarrow H \subset G \\ \tilde{X}' &\longleftrightarrow gHg^{-1} \subset G \quad g \in G\end{aligned}$$

τότε λέμε ότι τα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  είναι συζυγή.

**Θεώρημα 4.2.5.** Τα ενδιάμεσα καλύμματα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  στο  $Y/X$  με ομάδα Galois  $G$  είναι συζυγή αν είναι ισόμορφα.

Απόδειξη. Έστω οι  $H$  και  $H' = g_0Hg_0^{-1}$  συζυγείς υποομάδες της  $G$  όπου  $g_0 \in G$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι τα αντίστοιχα ενδιάμεσα καλύμματα  $\tilde{X} = \tilde{X}(H)$  και  $\tilde{X}' = \tilde{X}(H')$  είναι ισόμορφα. Έχουμε ότι

$$G = \bigcup_{j=1}^d Hg_j \quad \text{και} \quad G = \bigcup_{j=1}^d H'g_0g_j.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα γραφήματα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  έχουν κορυφές  $\{(v, Hg) | v \in X, 1 \leq j \leq d\}$  και  $\{(v, H'g_0g_j) | v \in X, 1 \leq j \leq d\}$  αντίστοιχα. Ο ισομορφισμός  $i : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  ορίζεται ως  $i(v, Hg) = (v, H'g_0g)$ .

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι τα  $\tilde{X}$  και  $\tilde{X}'$  είναι ισόμορφα ενδιάμεσα καλύμματα. Πρέπει να δείξουμε ότι οι αντίστοιχες υποομάδες  $H = H(\tilde{X})$  και  $H' = H(\tilde{X}')$  είναι συζυγείς. Από τον ορισμό 4.2.2 υπάρχει ένας ισομορφισμός  $i : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  έτσι ώστε  $\pi_1 = \pi'_1 \circ i$ . Επιλέγουμε μία κορυφή  $v_0$  και έστω  $\tilde{v}_0 = (v_0, 1)$  να είναι στο φύλλο 1 του  $Y$  η οποία προβάλλεται στην  $\tilde{v}_0 = \pi_2(\tilde{v}_0)$  στο  $\tilde{X}$ . Κάθε κορυφή  $\tilde{v} \in \tilde{X}$ , υποθέτουμε ότι προβάλλεται στην  $v \in X$  μέσω της  $\pi_1$  και ότι η  $\tilde{v} = (v, g_v) \in Y$  προβάλλεται στην  $\tilde{v}$  μέσω της  $\pi_2$ . Το σύνολο  $\{g \in G | \pi_2(v, g) = \tilde{v}\} = Hg_v$  από τον τύπο 4.2. Έστω  $\tilde{p}$  ένα μονοπάτι στο  $Y$  από την  $\tilde{v}_0$  στην  $\tilde{v}$ . Το  $\tilde{p}$  προβάλλεται μέσω της  $\pi_2$  σε ένα μονοπάτι  $\tilde{p}$  στο  $\tilde{X}$  από την  $\tilde{v}_0$  στην  $\tilde{v}$  και σε ένα μονοπάτι  $p$  στο  $X$  από την  $v_0$  στην  $v$ .

Το  $i(\tilde{p})$  στο  $\tilde{X}'$  από την  $i(\tilde{v}_0)$  στην  $i(\tilde{v})$  προβάλλεται μέσω της  $\pi'_1$  στο  $p$ . Αφού η  $i(\tilde{v}_0)$  προβάλλεται μέσω της  $\pi'_1$  στην  $v_0$ , υπάρχει ένα  $g_0 \in G$  έτσι ώστε η  $(v_0, g_0) \in Y$  προβάλλεται μέσω της  $\pi'_2$  στην  $i(\tilde{v}_0)$ . Όμως  $\pi(g_0 \circ \tilde{p}) = \pi(\tilde{p}) = p$ . Αφού το  $\pi = \pi'_1 \circ \pi'_2$  συνεπάγεται ότι το μονοπάτι  $\pi'_2(g_0 \circ \tilde{p})$  στο  $\tilde{X}'$  έχει αρχική κορυφή  $i(\tilde{v}_0)$  και προβάλλεται στο  $p$  στο  $X$ . Από την μοναδικότητα των ανυψώσεων  $i(\tilde{p}) = \pi'_2(g_0 \circ \tilde{p})$ . Ωστόσο το  $g_0 \circ \tilde{p}$  τελειώνει σε κάποια  $(v, g_0g)$ . Οπότε η  $\pi'_2$  προβάλλει την  $(v, g_0g)$  στην  $i(\tilde{v})$ . Ιδιαίτερα το σύνολο όλων των  $g_0g$  είναι  $g_0Hg_v = (g_0Hg_0^{-1})g_0g_v$ . Οπότε  $H' = g_0Hg_0^{-1}$ .  $\square$

**Παρατήρηση 4.2.6.** Η προηγούμενη απόδειξη έδειξε ότι το αποτέλεσμα του ισομορφισμού  $i$  επιτυγχάνεται μέσω του στοιχείου  $g_0 \in G$ . Το  $g_0$  μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του δεξιού συμπλόκου  $(g_0 H g_0^{-1})g_0 = g_0 H$ , που είναι ένα αριστερό σύμπλοκο της  $H$ . Αυτό δίνει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των αριστερών συμπλόκων  $g_0 H$  της  $H$  και όλων των δυνατών εμφυτεύσεων του  $\tilde{X}$  στο  $Y/X$ .

**Θεώρημα 4.2.7.** Υποθέτουμε ότι το  $Y/X$  είναι ένα κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois  $G$  και  $\tilde{X}$  είναι ένα ενδιάμεσο κάλυμμα που αντιστοιχεί στην υποομάδα  $H$  της  $G$ . Τότε το  $\tilde{X}$  είναι και αυτό ένα κανονικό κάλυμμα του  $X$  αν και μόνο αν η  $H$  είναι κανονική υποομάδα της  $G$ , και σε αυτή την περίπτωση  $G(\tilde{X}/X) \cong G/H$ .

Απόδειξη. Θεωρούμε το  $\tilde{X}$  ως  $\tilde{X}(H)$  με σύνολο κορυφών το

$$\{(v, Hg_j) | v \in X, 1 \leq j \leq d\},$$

όπου τα  $g_j$  είναι αντιπρόσωποι των δεξιών συμπλόκων της  $H$  στην  $G$ . Υποθέτουμε ότι η  $H$  είναι κανονική υποομάδα της  $G$ . Ένα σύμπλοκο  $Hg$  δρά στο  $\tilde{X}(H)$  στέλνοντας την  $(v, Hg_j)$  στην  $(v, Hgg_j)$ . Χρησιμοποιώντας την κανονικότητα της  $H$  βλέπουμε ότι αυτή η δράση διατηρεί τις ακμές και είναι μεταβατική στα σύμπλοκα  $Hg$ . Οπότε έχουμε  $d = |G/H|$  αυτομορφισμούς του  $\tilde{X}(H)$ , δηλαδή το  $\tilde{X}(H)$  είναι κανονικό πάνω από το  $X$  με ομάδα Galois την  $G/H$ .

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το  $\tilde{X}/X$  είναι κανονικό και ότι ο  $i$  είναι ένας αυτομορφισμός του  $\tilde{X}$  στην  $G(\tilde{X}/X)$ . Εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.2.5 με  $\tilde{X}' = \tilde{X}$ ,  $\pi_1 = \pi_1'$ , και  $\pi_2 = \pi_2'$ . Ο  $i$  είναι μία απεικόνιση συζυγίας αφού  $\pi_1' \circ i = \pi_1 \circ i = \pi_1$ . Οπότε από το θεώρημα 4.2.5 έχουμε ότι υπάρχει ένα  $g_0 \in G$  έτσι ώστε το ενδιάμεσο κάλυμμα  $\tilde{X}'$  αντιστοιχεί στην υποομάδα  $g_0 H g_0^{-1}$ . Επειδή το  $\tilde{X}' = \tilde{X}$ , έχουμε ότι το  $g_0 H g_0^{-1} = H$ .

Επιπλέον άμα διαλέξουμε  $\tilde{v}_0 \in \tilde{X}$  όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.2.5 έχουμε ότι  $\pi_2((v_0, g_0)) = \pi_2'((v_0, g_0)) = i(\tilde{v}_0)$ . Καθώς το  $i$  διατρέχει τα  $d$  στοιχεία της  $G(\tilde{X}/X)$ , η  $i(\tilde{v}_0)$  διατρέχει όλες τις  $d$  ανυψώσεις της  $v_0$  στο  $\tilde{X}$ . Οπότε τα αντίστοιχα  $d$  διαφορετικά  $g_0$  διατρέχουν τα  $d$  αριστερά σύμπλοκα της  $H$  στην  $G$  και έχουμε ότι  $g_0 H g_0^{-1} = H$  για όλα αυτά, το οποίο σημαίνει ότι η  $H$  είναι κανονική.  $\square$

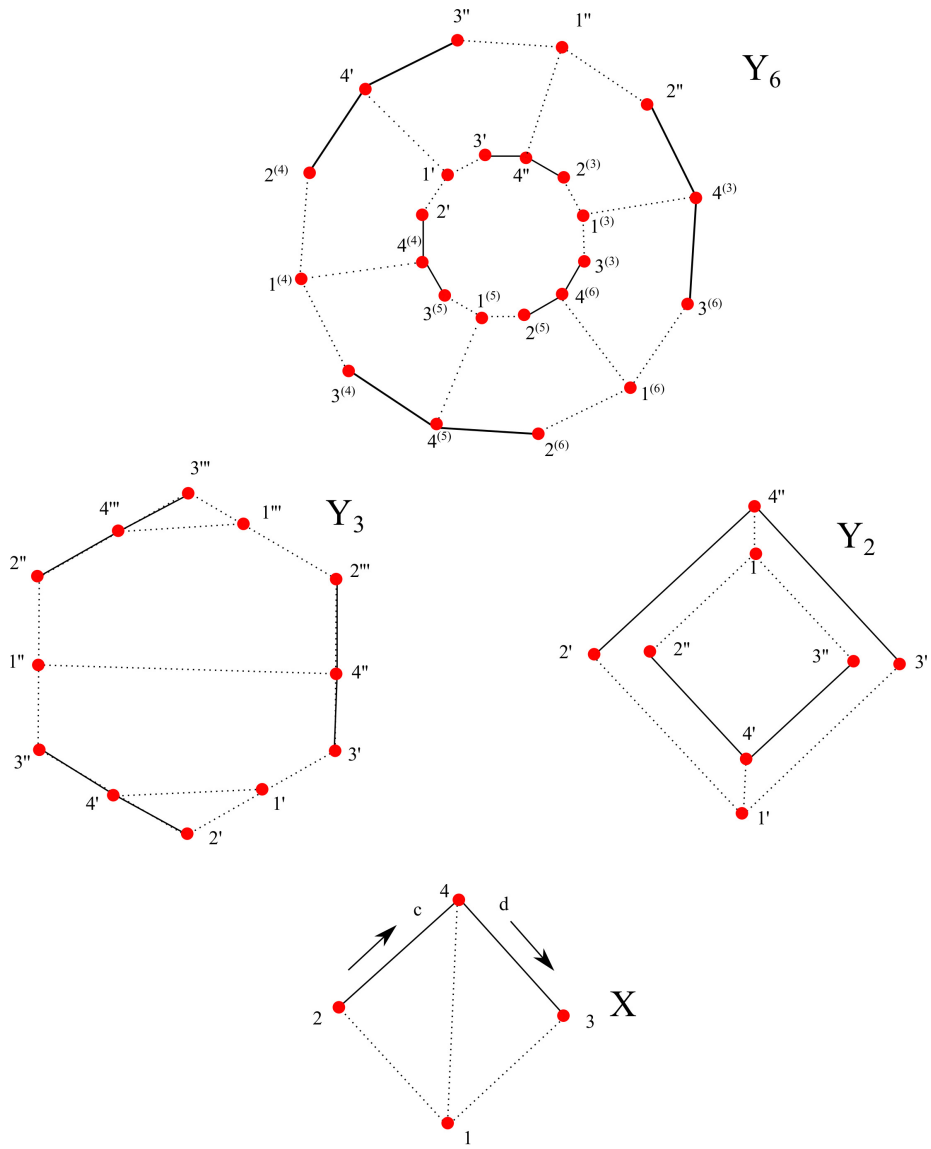
**Παραδείγμα 4.2.1.** Στο σχήμα 4.8 έχουμε ένα κανονικό  $Y_6$  κάλυμμα του  $X = K_4 - e$  με ομάδα Galois  $G(Y_6/X) = S_3$ , την συμμετρική ομάδα των μεταθέσεων τριών αντικειμένων,  $S_3$ .

Το ενδιάμεσο κάλυμμα  $Y_3$  είναι το κάλυμμα που αντιστοιχεί στην υποομάδα  $H = \{(1), (23)\}$  και φαίνεται στο σχήμα 4.8. Θα εξηγήσουμε λίγο την μέθοδο που χρησιμοποιούμε για να κατασκευάσουμε αυτά τα γραφήματα.

Το πάνω γράφημα  $Y_6$  είναι ένα κανονικό κάλυμμα 6-φύλλων του  $X$  με ομάδα Galois την  $S_3$ . Κάνουμε τις ακόλουθες ταυτίσεις

$$\begin{aligned} a' &= (a, (1)), & a'' &= (a, (13)), & a^{(3)} &= (a, (132)), \\ a^{(4)} &= (a, (23)), & a^{(5)} &= (a, (123)), & a^{(6)} &= (a, (12)). \end{aligned}$$

Οι ακμές, του δέντροπαράγοντα που χρησιμοποιούμε, είναι οι διακεκομμένες γραμμές. Οι ακμές που αφήνονται εκτός του δέντροπαράγοντα (συνεχείς γραμμές) παράγουν την θεμελιώδη ομάδα του γραφήματος  $X$ . Έστω η κατευθυνόμενη ακμή από την κορυφή 2 στην κορυφή 4 να είναι η ακμή  $c$  και η κατευθυνόμενη ακμή από την κορυφή 4 στην κορυφή 3 να είναι η  $d$  όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 4.8:

Λαμβάνουμε το γράφημα  $Y_6$  ως εξής. Παίρνουμε 6 αντίγραφα του  $X$ . Αυτό μας δίνει όλες τις κορυφές του  $Y_6$  αλλά κάποιες ακμές λείπουν. Βάζουμε την ετικέτα  $x^{(i)}$  στην κορυφή του  $i$  φύλλου του  $Y_6$  που προβάλλεται στην κορυφή  $x$  στο  $X$ . Ανυψώνουμε την ακμή  $c$  σε 6 ακμές. Χρησιμοποιώντας την μετάθεση  $\sigma(c) = (14)(23)(56)$ . Εδώ ο  $\sigma(c)$  είναι ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius που θα ορίσουμε στην συνέχεια. Η μετάθεση αυτή προκύπτει αν γράψουμε τα στοιχεία της  $S_3$  ως εξής,

$$\begin{aligned} g_1 &= (1), & g_2 &= (12), & g_3 &= (123), \\ g_4 &= (23), & g_5 &= (132), & g_6 &= (13). \end{aligned}$$

και  $g_i g = g_{\mu(g)}$ , όπου  $\mu(g) \in S_6$  και να παρατηρήσουμε ότι  $\mu((23)) = (14)(23)(56)$  και ότι  $\mu((12)) = (12)(36)(45)$ . Τα  $(23), (12)$  παράγουν την  $S_3$ .

Δηλαδή συνδέουμε την κορυφή  $2^{(1)}$  με την κορυφή  $4^{(4)}$ , την  $2^{(4)}$  με την  $4^{(1)}$ , την  $2^{(2)}$  με την  $4^{(3)}$ , την  $2^{(3)}$  με την  $4^{(2)}$  και τέλος την  $2^{(5)}$  με την  $4^{(6)}$  και την  $2^{(6)}$  με την  $4^{(5)}$  στο  $Y_6$ . Κάνουμε την ανάλογη κατασκευή για  $\sigma(d) = (12)(36)(45)$  και παίρνουμε τις υπόλοιπες ακμές του  $Y_6$ . Οι μεταθέσεις  $\sigma(c)$  και  $\sigma(d)$  έχουν τάξη 2 και παράγουν μια υποομάδα της  $S_6$  ισόμορφη με την  $S_3$ . Παρακάτω θα αφιερώσουμε ολοκληρω παράγραφο στο πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε κανονικά καλύμματα χρησιμοποιώντας τον κανονικοποιημένο αυτομορφισμό Frobenius.

Μπορούμε να δούμε την  $S_3$  ως την διεδρική ομάδα  $D_3$  των συμμετριών ενός ισόπλευρου τριγώνου. Έστω  $R$  μία στροφή κατά  $2\pi/3$  ενός ισόπλευρου τριγώνου και  $F$  μια ανάκλαση. Τότε η  $D_3$  γράφεται ως  $D_3 = \{I, R, R^2, F, FR, FR^2\}$ , όπου  $R^3 = I$  και  $FR = R^2F$ . Κάνουμε τις ακόλουθες ταυτίσεις

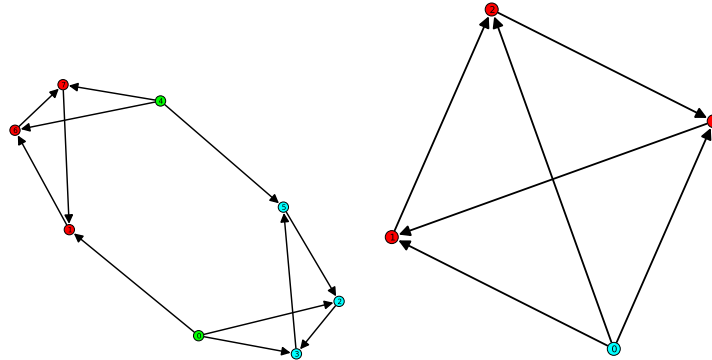
$$\begin{aligned} a' &= (a, I), & a'' &= (a, FR^2), & a^{(3)} &= (a, R^2), \\ a^{(4)} &= (a, FR), & a^{(5)} &= (a, R), & a^{(6)} &= (a, F). \end{aligned}$$

και επίσης  $\sigma(c) = FR, \sigma(d) = FR^2$ .

Κατοπιν θέλουμε να κατασκευάσουμε το ενδιάμεσο κάλυμμα  $Y_3$  που αντιστοιχεί στην υποομάδα  $H = \{I, FR\}$ . Αρχικά χρειαζόμαστε την κατάλληλη αναπαράσταση της  $G$  σε μεταθέσεις για τα τρία σύμπλοκα  $Hg_i, i = 1, 2, 3$  με  $g_1 = I, g_2 = FR^2, g_3 = F$ . Επειδή  $\sigma(c) = FR$  έχουμε  $Hg_1\sigma(c) = Hg_1, Hg_2\sigma(c) = Hg_3, Hg_3\sigma(c) = Hg_2$ . Οπότε η αναπαράσταση σε ξένους κύκλους της μετάθεσης που αντιστοιχεί στο  $\sigma(c)$  που δρά στα σύμπλοκα της  $H$  είναι η  $(1)(23)$ . Όμοια η μετάθεση των συμπλόκων της  $H$  που αντιστοιχεί στο  $\sigma(d) = FR^2$  είναι η  $(12)(3)$ .

Κατασκευάζουμε τώρα το ενδιάμεσο γράφημα στο  $Y_6/X$  που αντιστοιχεί στην  $H, Y_3$ . Αρχικά παίρνουμε τρία αντίγραφα του δέντροπαράγοντα του  $X$ . Αυτό μας δίνει όλες τις κορυφές του  $Y_3$ . Βάζουμε ετικέτες στο  $Y_3$  με ένα δύο και τρεις τόνους, αντίστοιχα. Η μετάθεση  $(1)(23)$  μας λέει πως να ανυψώσουμε την ακμή  $c$  του  $X$  σε τρεις ακμές στο  $Y_3$ . Παίρνουμε ακμές από την κορυφή  $2'$  στην  $4'$ , από την  $2''$  στην  $4''$  και από την  $2'''$  στην  $4'''$ . Όμοια η μετάθεση  $(12)(3)$  μας λέει πως να ανυψώσουμε την ακμή  $d$  του  $X$  σε τρεις ακμές στο  $Y_3$ . Παίρνουμε τις ακμές  $(4', 3''), (4'', 3')$  και  $(4''', 3''')$ .

Οι τρεις υποομάδες με δύο στοιχεία της  $S_3$  είναι όλες συζυγείς της  $H$  οπότε απο το θεώρημα 4.2.5 κάθε μία μας οδηγεί σε ένα ισόμορφο γράφημα του  $Y_3$ , λόγω του ότι δεν έχουμε δώσει τις προβολές από το  $Y_6$  στο  $Y_3$ . Χωρίς να γνωρίζουμε αυτές τις προβολές, τα τρία συζυγή κυβικά καλύμματα ενδιάμεσα στο  $Y_6/X$  είναι ισόμορφα, και ο ισομορφισμός διατηρεί τις προβολές στο  $X$ .



Σχήμα 4.9: Ένας πρώτος και ανυψώσεις του σε ένα  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Galois κάλυμμα.

### 4.3 Η συμπεριφορά των πρώτων στα καλύμματα

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε κάποια ανάλογα των νόμων που αφορούν την συμπεριφορά των πρώτων ιδεωδών στις επεκτάσεις των αλγεβρικών σωμάτων αριθμών.

**Ορισμός 4.3.1.** Αν ο  $[D]$  είναι ένας πρώτος στο κάλυμμα  $Y/X$  με προβολή επικάλυψης  $\pi$  και  $\pi(D) = C^f$  όπου  $[C]$  είναι ένας πρώτος στο  $X$ , θα λέμε ότι ο  $[D]$  είναι ένας πρώτος του  $Y$  πάνω από το  $[C]$  ή, πιο απλά, ότι ο  $D$  είναι ένας πρώτος πάνω από τον  $C$  (γράφουμε  $D|C$ ). Το  $f = f(D, Y/X)$  ορίζεται ως ο βαθμός του  $D$  ως προς το  $Y/X$ .

Αν το  $Y/X$  είναι κανονικό, για έναν πρώτο  $C$  του  $X$  και δεδομένου ενός ακεραίου  $j$  είτε κάθε ανύψωση του  $C^j$  είναι κλειστή στο  $Y$  είτε όλες είναι ανοιχτές. Οπότε ο βαθμός του  $[D]$  πάνω από το  $C$  είναι ο ίδιος για όλα τα  $[D]$  πάνω από το  $C$ . Αυτό δεν ισχύει πάντα για μη κανονικές επεκτάσεις.

**Ορισμός 4.3.2.** Θα συμβολίσουμε με  $g = g(D, Y/X)$  τον αριθμό των πρώτων  $[D]$  πάνω από το  $[C]$

Επειδή τα καλύμματα μας είναι αδιακλάδιστα, το ανάλογο του δείκτη διακλάδωσης είναι  $e = e(D, Y/X) = 1$ , και θα αποδείξουμε στην πρόταση 4.4.5 το αντίστοιχο του τύπου από την αλγεβρική Θεωρία αριθμών για κανονικά καλύμματα

$$(4.3) \quad efg = d,$$

όπου  $d$  είναι ο αριθμός των φύλλων του καλύμματος.

**Ορισμός 4.3.3.** Αν το  $Y/X$  είναι κανονικό,  $[D]$  ένας πρώτος στο  $Y$  πάνω από τον  $[C]$  στο  $X$  και  $\sigma$  ανήκει στην  $G(Y/X)$  λέμε ότι ο  $[\sigma \circ D]$  είναι συζυγής του  $D$  στο  $Y$  πάνω από τον  $C$ .

Οπότε έχουμε ότι  $f(\sigma \circ D, Y/X) = f(D, Y/X)$ . Για  $f = f(D, Y/X)$  μπορούμε να δούμε ότι καθώς το  $\sigma$  διατρέχει την  $G(Y/X)$  το  $\sigma \circ D$  διατρέχει όλες τις δυνατές ανυψώσεις του  $C^f$  από το  $X$  στο  $Y$ , άρα οι συζυγείς πρώτοι του  $[D]$  είναι όλοι οι πρώτοι στο  $Y$  πάνω από τον  $[C]$ . Δηλαδή αν και υπάρχουν  $d = |G(Y/X)|$

ανυψώσεις του  $C^f$  που αρχίζουν στα διαφορετικά φύλλα του  $Y$ , μόνο  $g$  από αυτές μας δίνουν διαφορετικούς πρώτους.

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι αν το  $Y/X$  δεν είναι κανονικό η αντίστοιχη της εξίσωσης 4.3 είναι η

$$\sum_{i=1}^g f_i = d,$$

όπου  $d = |G(Y/X)|$  και  $f_i$  οι βαθμοί διακλάδωσης των πρώτων του  $Y$  πάνω από έναν συγκεκριμένο πρώτο του  $X$ .

Τέλος αν  $\tilde{X}$  είναι ενδιάμεσο στο  $Y/X$  με απεικονίσεις επικάλυψης

$$\pi : Y \longrightarrow X, \pi_2 : Y \longrightarrow \tilde{X}, \pi_1 : \tilde{X} \longrightarrow X$$

με  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ ,  $E$  ένας πρώτος στο  $Y$  πάνω από τον  $C$  στο  $X$  και  $\pi_2(E) = D^{f_2}$ , όπου ο  $D$  είναι ένας πρώτος του  $\tilde{X}$  και  $f_2 = f(E, Y/\tilde{X})$ , ισχύει η ακόλουθη μεταβατική σχέση

$$f(E, Y/X) = f(E, Y/\tilde{X})f(D, \tilde{X}/X).$$

#### 4.4 Ο αυτομορφισμός του Frobenius

**Ορισμός 4.4.1.** Υποθέτουμε ότι το  $Y/X$  είναι ένα κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois  $G = \text{Gal}(Y/X)$ . Για ένα μονοπάτι  $p$  του  $X$  έχουμε από την πρόταση 4.1.5 την μοναδικότητα της ανύψωσης  $\tilde{p}$  στο  $Y$  που ξεκινά από το φύλλο 1 και έχει το ίδιο μήκος με το  $p$ . Αν το  $\tilde{p}$  έχει την τελική του κορυφή στο φύλλο με την ετικέτα  $g \in G$ , ορίζουμε τον κανονικοποιημένο αυτομορφισμό Frobenius  $\sigma(p) \in G$  με  $\sigma(p) = g$ .

**Λήμμα 4.4.2.** (i) Υποθέτουμε ότι τα  $p_1$  και  $p_2$  είναι δύο μονοπάτια στο  $X$  έτσι ώστε η τελική κορυφή του  $p_1$  είναι η αρχική κορυφή του  $p_2$ . Τότε  $\sigma(p_1 p_2) = \sigma(p_1) \sigma(p_2)$ .

(ii) Αν ένα μονοπάτι  $p = e_1 \cdots e_s$  για τις κατευθυνόμενες ακμές  $e_1, \dots, e_s$  τότε έχουμε  $\sigma(p) = \sigma(e_1) \cdots \sigma(e_s)$ .

*Απόδειξη.* (i) Αν το  $p_1$  πηγαίνει από την  $a$  στην  $b$  στο  $X$  και το  $p_2$  πηγαίνει από την  $b$  στην  $c$  στο  $X$  τότε η ανύψωση  $\tilde{p}_1$  του  $p_1$  που ξεκινά από το φύλλο 1 του  $Y$  πηγαίνει από την  $(a, 1)$  στην  $(b, \sigma(p_1))$  και η ανύψωση  $\tilde{p}_2$  του  $p_2$  που ξεκινά στο φύλλο 1 του  $Y$  πηγαίνει από την  $(b, 1)$  στην  $(c, \sigma(p_2))$ . Οπότε η ανύψωση του  $p_2$  που ξεκινά στο φύλλο  $\sigma(p_1)$  πηγαίνει από την  $(b, \sigma(p_1))$  στην  $(c, \sigma(p_1) \sigma(p_2))$ . Αυτό συνεπάγεται ότι η ανύψωση του μονοπατίου  $p_1 p_2$  ξεκινά στο φύλλο 1 του  $Y$  και καταλήγει στο φύλλο  $\sigma(p_1) \sigma(p_2)$ .

(ii) Προκύπτει εύκολα με χρήση της επάγωγης και του πρώτου μέρους. □

Στην συνέχεια ορίζουμε τον αυτομορφισμό Frobenius

**Ορισμός 4.4.3.** Υποθέτουμε ότι το  $Y/X$  είναι κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois  $G$ . Έστω  $[C]$  ένας πρώτος στο  $X$ , έτσι ώστε το  $C$  ξεκινά και τερματίζει στην κορυφή  $a$ . Έστω  $[D]$  ένας πρώτος του  $Y$  πάνω από το  $C$  έτσι ώστε το  $D$  ξεκινά και τερματίζει στην κορυφή  $(a, g)$  στο φύλλο  $g \in G$  του  $Y$ . Αν ο βαθμός

του  $D$  πάνω από το  $C$  είναι  $f$  τότε το  $D$  είναι η ανύψωση του  $C^f$  που ξεκινά στο φύλλο  $g$ . Υποθέτουμε ότι το  $C$  ανυψώνεται σε ένα μονοπάτι  $\tilde{C}$  του  $Y$  που ξεκινά στο φύλλο  $g$  στο  $(a, g)$  και τελειώνει στο φύλλο  $h$  του  $(a, h)$ . Ορίζουμε τον αυτομορφισμό του Frobenius να είναι

$$[Y/X, D] = \left( \frac{Y/X}{D} \right) = hg^{-1} \in G.$$

Παρατηρούμε ότι ο αυτομορφισμός Frobenius  $[Y/X, D] = hg^{-1}$  απεικονίζει το φύλλο  $g$  του  $Y$  στο φύλλο  $h$  του  $Y$ . Για να πάρουμε την κανονικοποιημένη μορφή του αυτομορφισμού Frobenius, αρκεί να πάρουμε  $g = 1$ , το ταυτοτικό της  $G$ .

**Ορισμός 4.4.4.** Η ομάδα ανάλυσης του  $D$  ως προς  $Y/X$  είναι

$$Z(D) = Z(D, Y/X) = \{\tau \in G \mid [\tau \circ D] = [D]\}.$$

**Πρόταση 4.4.5** (Ιδιότητες του αυτομορφισμού Frobenius). Ως συνήθως το  $Y/X$  είναι ένα κανονικό κάλυμμα με  $d$ -φύλλα και ομάδα Galois  $G$ . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) Για έναν πρώτο κύκλο  $D$  στο  $Y$  πάνω από το  $C$  στο  $X$ , ο αυτομορφισμός Frobenius είναι ανεξάρτητος της επιλογής του  $D$  στην κλάση ισοδυναμίας του  $[D]$ . Οπότε μπορούμε να ορίσουμε τον  $[Y/X, [D]] = [Y/X, D]$ .
- (ii) Η τάξη του  $[Y/X, D]$  στην  $G$  είναι ο βαθμός  $f = f(D, Y/X)$ .
- (iii) Αν  $\tau \in G$  τότε  $[Y/X, \tau \circ D] = \tau[Y/X, D]\tau^{-1}$ .
- (iv) Αν ο  $D$  ξεκινά στο φύλλο  $1$  τότε  $[Y/X, D] = \sigma(C)$ , ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius.
- (v) Η ομάδα  $Z(D)$  είναι η κυκλική υποομάδα της  $G$  τάξης  $f$  που παράγεται από τον  $[Y/X, D]$ . Συγκεκριμένα, η  $Z(D)$  δεν εξαρτάται από την επιλογή του  $D$  στην κλάση ισοδυναμίας του  $[D]$ .
- (vi) Για έναν πρώτο  $D$  στο  $Y$  πάνω από τον  $C$  στο  $X$ , αν  $f = f(D, Y/X)$  ο βαθμός του, και  $g = g(D, Y/X)$  ο αριθμός των συζυγών του πρώτων ισχύει  $d = fg$ .

*Απόδειξη.* Το (iv) προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς των  $\sigma(C)$  και  $[Y/X, D]$ .

Για τα (i) και (iii) υποθέτουμε ότι το  $C$  αρχίζει και τελειώνει στην κορυφή  $a$  στο  $X$  και ότι το  $D$  είναι η ανύψωση του  $C^f$  που ξεκινά στην κορυφή  $(a, \mu_0)$  στο φύλλο  $\mu_0$ . Ανυψώνοντας το  $C^f$  ανυψώνουμε το  $C$  συνολικά  $f$  φορές διαδοχικά, ξεκινώντας από την  $(a, \mu_0)$  και τελειώνοντας στις  $(a, \mu_1), (a, \mu_2), \dots, (a, \mu_{f-1}), (a, \mu_f)$ , όπου  $\mu_f = \mu_0$  και  $\mu_j \neq \mu_0$  για  $j = 1, 2, \dots, f-1$ .

Υποθέτουμε ότι η  $(b, \kappa)$  είναι μία άλλη κορυφή του  $D$  όπου η  $b$  ανήκει στο  $C$ . Οπότε η  $(b, \kappa)$  βρίσκεται σε μία από τις  $f$  διαδοχικές ανυψώσεις του  $C$ , έστω στην  $r$ . Η κορυφή  $b$  χωρίζεται το  $C$  σε δύο μονοπάτια  $C = p_1 p_2$ , όπου το  $b$  είναι η τελική κορυφή του  $p_1$  και η αρχική κορυφή του  $p_2$ . Η κορυφή  $(b, \kappa)$  του  $Y$  είναι η τελική κορυφή της ανύψωσης του  $p_1$  στο  $D$  που ξεκινά στην  $(a, \mu_{r-1})$ . Η ανύψωση του  $C$  του πρώτου  $[C]$  που ξεκινά στην κορυφή  $b$ , δηλαδή το  $p_2 p_1$  σε ένα μονοπάτι στο  $Y$  που ξεκινά στην κορυφή  $(b, \kappa)$  τελειώνει στην κορυφή  $(b, \lambda)$  στο  $D$  η οποία βρίσκεται στην  $(r+1)$  διαδοχική ανύψωση του  $C$ .



Έστω  $\tilde{C}'$  ένα μονοπάτι στο  $Y$  από την  $(a, 1)$  στην  $(a, \mu_0)$  και έστω  $C'$  η προβολή του  $\tilde{C}'$  στο  $X$ . Οι κορυφές  $(a, \mu_0), (a, \mu_1), (b, \kappa)$  και  $(b, \lambda)$  του  $Y$  είναι τότε οι τελικές κορυφές των ανυψώσεων των μονοπατιών

$$C', C'C, C'C^{r-1}p_1, C'C^r p_1,$$

αντίστοιχα σε μονοπάτια του  $Y$  που αρχίζουν στην κορυφή  $(a, 1)$ . Τότε από το λήμμα 4.4.2, έχουμε

$$\mu_0 = \sigma(C'), \mu_1 = \sigma(C'C) = \sigma(C')\sigma(C)$$

$$\kappa = \sigma(C'C^r p_1) = \sigma(C')\sigma(C)^{r-1}\sigma(p_1)$$

$$\lambda = \sigma(C'C^r p_1) = \sigma(C')\sigma(C)^r\sigma(p_1).$$

Έπεται ότι το  $[Y/X, D]$  δίνεται από το

$$\lambda\kappa^{-1} = \mu_1\mu_0^{-1} = \sigma(C')\sigma(C)\sigma(C')^{-1}.$$

Αυτό αποδεικνύει το (i). Επίσης αποδεικνύει το (iii) στην περίπτωση που  $\tau = \mu_0^{-1} = \sigma(C')^{-1}$ , και αυτό αρκεί για να αποδειχτεί το (iii) και στην γενική περίπτωση.

Για το (ii) βλέπουμε ότι για κάθε  $j$ ,

$$\mu_j = \sigma(C'C^j) = \sigma(C')\sigma(C)^j$$

οπότε

$$(4.4) \quad \mu_j\mu_0^{-1} = \sigma(C')\sigma(C)^j\sigma(C')^{-1} = [Y/X, D]^j.$$

Αυτό αποδεικνύει το (ii).

Για το μέρος (v) υπενθυμίζουμε ότι  $\tau \in Z(D)$  σημαίνει ότι  $\tau \circ D$  είναι ισοδύναμο με το  $D$  με την έννοια της σχέσης ισοδυναμίας με κλάση ισοδυναμίας  $[D]$ . Ας υποθέσουμε ότι  $\tau \circ D$  είναι ισοδύναμο με  $D$  τότε, αφού  $\tau \circ D$  ξεκινά, επίσης, σε μια κορυφή που προβάλλεται από την  $\pi : Y \rightarrow X$  στην  $a$ , πρέπει να έχουμε ότι  $\tau\mu_0 = \mu_j$  για ένα από τα  $\mu_j$ . Ετσι, για κάποιο  $j$ , έχουμε  $\tau = \mu_j\mu_0^{-1} = [Y/X, D]^j$  από την εξίσωση 4.4. Αντίστροφα, για οποιοδήποτε τέτοιο  $\tau$   $[\tau \circ D] = [D]$ .

Για να δούμε ότι η τάξη της ομάδας ανάλυσης  $Z(D)$  είναι  $f = f(D, Y/X)$ , αρκεί να παρατηρήσουμε ότι  $1 = \mu_j\mu_0^{-1} = [Y/X, D]^j$  αν το  $f$  διαιρεί το  $j$ .

Για το μέρος (vi) η ομάδα Galois  $G = G(Y/X)$  τάξης  $d$  δρά μεταβατικά στους πρώτους  $[D]$  πάνω από  $[C]$ . Η υποομάδα  $Z(D)$  είναι η υποομάδα της  $G$  που σταθεροποιεί τον  $[D]$ . Αφού η  $Z(D)$  έχει τάξη  $f$ , έπεται ότι ο αριθμός  $g$  των διαφορετικών  $[D]$  είναι  $|G/Z(D)| = d/f$ .  $\square$

Μένει μόνο να συζητήσουμε την συμπεριφορά του Frobenius αυτομορφισμού ως προς τα ενδιάμεσα καλύμματα.

**Θεώρημα 4.4.6** (Περισσότερες ιδιότητες του αυτομορφισμού Frobenius). (i)

Ας υποθέσουμε ότι το  $\tilde{X}$  είναι ένα ενδιάμεσο κάλυμμα του  $Y/X$  που αντιστοιχεί στην υποομάδα  $H$  της  $G = G(Y/X)$ . Έστω  $[D]$  μια κλάση ισοδυναμίας των πρώτων κύκλων του  $Y$  τέτοια ώστε το  $D$  να βρίσκεται πάνω από το  $\tilde{C}$  στο  $\tilde{X}$ . Έστω  $f = f(D, Y/X) = f_1 f_2$ , όπου  $f_2 = f(D, Y/\tilde{X})$  και  $f_1 = f(\tilde{C}, \tilde{X}/X)$ . Τότε  $f_1$  είναι η ελάχιστη δύναμη του  $[Y/X, D]$  που βρίσκεται στην  $H$ , και έχουμε

$$(4.5) \quad [Y/X, D]^{f_1} = [Y/\tilde{X}, D].$$

(ii) Αν, επιπλέον, το  $\tilde{X}$  είναι κανονικό πάνω από το  $X$  τότε ως στοιχείο του  $H \setminus G$  έχουμε το

$$[\tilde{X}/X, \tilde{C}] = H[Y/X, D].$$

*Απόδειξη.* Για το μέρος (i) Έστω  $C$  να είναι ο πρώτος του  $X$  κάτω από το  $\tilde{C}$ . Ο αυτομορφισμός Frobenius  $[Y/\tilde{X}, D]$  προκύπτει από την ανύψωση του  $\tilde{C}$  από το  $\tilde{X}$  στο  $Y$ . Αυτό είναι το ίδιο με το να ανυψώσουμε το  $C^{f_1}$  από το  $X$  στο  $Y$ , καθώς δείχνει η ανάλυση στην απόδειξη της Πρότασης 4.4.5 η εξίσωση 4.4, ειδικότερα δίνει την εξίσωση 4.5. Το γεγονός ότι η  $f_1$  είναι η ελάχιστη δύναμη του  $[Y/X, D]$ , η οποία ανήκει στην  $H$  προκύπτει από το ότι η  $Z(Y/\tilde{X}, D) = Z(Y/X, D) \cap H$ , η οποία γνωρίζουμε ότι είναι κυκλική τάξης  $f_2$ . Ως εκ τούτου, δεδομένου ότι  $[Y/X, D]$  είναι τάξης  $f_1 f_2$ , βλέπουμε ότι  $[Y/X, D]^j$  δεν μπορεί να ανήκει στην  $H$  αν  $j < f_1$ .

Για το μέρος (ii) έστω το  $\tilde{X}$  να είναι κανονικό πάνω από το  $X$ . Θεωρούμε το  $X$  να έχει ως κορυφές του τις  $(v, H\tau)$  για  $v \in X, \tau \in G$ . Έστω  $D$  με αρχή και τέλος την  $(a, \mu_0)$  στο  $Y$  και έστω  $\tilde{C}$  με αρχή και τέλος στην  $(a, H\mu_0)$  στο  $\tilde{X}$ . Εάν το  $C$  στο  $X$  ανυψώνεται σε ένα μονοπάτι στο  $Y$  που ξεκινά στην  $(a, \mu_0)$  και τελειώνει στην  $(a, \mu_1)$ , τότε το  $C$  ανυψώνεται σε ένα μονοπάτι στο  $\tilde{X}$  που ξεκινά στην  $(a, H\mu_0)$  και τελειώνει στην  $(a, H\mu_1)$ . Στη συνέχεια, η πρόταση ακολουθεί από τον ορισμό του αυτομορφισμού Frobenius.  $\square$

#### 4.4α' Κατασκευή ενδιάμεσων καλυμμάτων με χρήση του αυτομορφισμού Frobenius

Ας εξηγήσουμε πώς να κατασκευάσουμε ενδιάμεσα καλύμματα. Πρώτα ας θυμηθούμε το παράδειγμα 4.2.1, σχήμα 4.8. Τα παρακάτω λήμματα και το θεώρημα δίνουν την γενική κατασκευή που ακολουθήσαμε στο παράδειγμα 4.2.1. Επιπλέον μας επιτρέπει να αντιστρέψουμε την διαδικασία και, ξεκινώντας από ένα κάλυμμα  $Y$ , να κατασκευάσουμε το ελάχιστο κανονικό κάλυμμα  $Z$  με το  $Y$  ενδιάμεσο στο  $Z/X$ .

**Λήμμα 4.4.7.** *Ας υποθέσουμε ότι το  $Y/X$  είναι κανονικό με ομάδα Galois  $G$ . Επιλέγουμε έναν δέντροπαράγοντα  $T$  του  $X$ . Έστω  $e_1, \dots, e_r$  οι ακμές του  $X$  που δεν ανήκουν στον δέντροπαράγοντα (δηλαδή, εκείνες που αντιστοιχούν στους γεννήτορες της θεμελιώδους ομάδας) με τις κατευθύνσεις που τους προσδώσαμε. Οι  $r$  κανονικοποιημένοι αυτομορφισμοί Frobenius  $\sigma(e_j), j = 1, \dots, r$ , παράγουν την  $G$ .*

*Απόδειξη.* Επειδή  $\sigma(t) = 1$  για όλες τις ακμές  $t$  στο δέντρο  $T$  του  $X$ , για κάθε μονοπάτι  $p$  στο  $X$ ,  $\sigma(p)$  είναι ένα γινόμενο των  $\sigma(e_j)$  και των αντιστρόφων τους από το Λήμμα 4.4.2. Το γράφημα  $Y$  είναι συνεκτικό. Έτσι, μπορούμε να πάμε σε κάθε φύλλο του  $Y$  με ανύψωση μονοπατιών του  $X$  σε μονοπάτια με αρχή στο φύλλο 1 του  $Y$ . Επομένως, κάθε  $g \in G$  είναι ένα γινόμενο των  $\sigma(e_j)$ .  $\square$

**Λήμμα 4.4.8.** *Ας υποθέσουμε ότι το  $Y/X$  είναι κανονικό με ομάδα Galois  $G$  και  $\tilde{X}$  ένα ενδιάμεσο κάλυμμα που αντιστοιχεί στην υποομάδα  $H$  της  $G$ . Έστω  $H_0 = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ . Τότε,  $H_0 = \{1\}$  αν και μόνο αν δεν υπάρχουν ενδιάμεσα καλύμματα, πλην του  $Y$ , τα οποία να είναι κανονικά πάνω από το  $\tilde{X}$  και ενδιάμεσα στο  $Y$  και το  $\tilde{X}$ .*

*Απόδειξη.* Ένα κανονικό ενδιάμεσο κάλυμμα  $\tilde{X}'$ , ανάμεσα στα  $Y, \tilde{X}$ , θα αντιστοιχούσε σε μια κανονική υποομάδα της  $G$  (μια υποομάδα η οποία πρέπει να περιέχεται στην  $H$ ) και αντιστρόφως. Οποιαδήποτε κανονική υποομάδα της  $G$  που περιέχεται στην  $H$  περιέχεται επίσης σε κάθε συζυγή υποομάδα της  $H$  και επομένως περιέχεται στην  $H_0$ . Αφού η  $H_0$  είναι μια κανονική υποομάδα της  $G$ , έχουμε το ζητούμενο.  $\square$

**Λήμμα 4.4.9.** Έστω ότι το  $\tilde{X}$  είναι ένα κάλυμμα του  $X$  και ότι το  $Y/X$  είναι ένα κανονικό κάλυμμα του  $X$  ελαχίστου βαθμού τέτοιο ώστε το  $\tilde{X}$  να είναι ενδιάμεσο στο  $Y/X$ . Έστω  $G = G(Y/X)$ ,  $H = G(Y/\tilde{X})$  και  $Hg_1, \dots, Hg_n$  να είναι τα δεξιά σύμπλοκα της  $H$ . Τότε υπάρχει ένας ένα προς ένα αντι-ομομορφισμός ομάδων  $G$  από την ομάδα  $G$  στην συμμετρική ομάδα  $S_n$  που ορίζεται θέτοντας  $\mu(g)(i) = j$  όταν  $Hg_i g = Hg_j$ .

*Απόδειξη.* Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι  $\mu(g')\mu(g) = \mu(gg')$ . Ο πυρήνας του  $\mu$  είναι το σύνολο των  $g \in G$  έτσι ώστε  $Hg'g = Hg' \forall g' \in G$ . Αυτό σημαίνει ότι  $Hg'gg'^{-1} = H \forall g' \in G$ , το οποίο είναι ισοδύναμο με  $g \in g'^{-1}Hg' \forall g' \in G$ . Από το Λήμμα 4.4.8,  $g = 1$  και ο  $\mu$  είναι ένα προς ένα.  $\square$

Τώρα θα βάλουμε αυτά τα τρία λήμματα μαζί.

**Θεώρημα 4.4.10.** Έστω τα γραφήματα  $Y, \tilde{X}, X$ , οι ομάδες  $G, H$  και η αναπαράσταση  $\mu$  να είναι όπως στο Λήμμα 4.4.9. Έστω  $T$  ένας επιλεγμένος δένδροπαράγοντας του  $X$ . Ας υποθέσουμε ότι  $e$  είναι μία από τις ακμές που δεν ανήκουν στο  $T$ . Έστω  $\sigma(e)$  να είναι ο αντίστοιχος κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius της  $G$ . Ας υποθέσουμε ότι  $o(e) = v$  είναι η αρχική κορυφή της  $e$  και ότι  $t(e) = v'$  είναι η τερματική κορυφή της. Εάν  $\mu = \mu(\sigma(e))$  είναι η μετάθεση του  $1, \dots, n$  ώστε  $\mu(i) = \mu(\sigma(e))(i) = j$  τότε η κατευθυνόμενη ακμή  $e$  ανυψώνεται σε μια ακμή στο  $\tilde{X}$  που ξεκινά στην κορυφή  $(v, Hg_i)$  και καταλήγει στην  $(v', Hg_j)$ .

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό του  $\mu$ ,  $Hg_i\sigma(e) = Hg_j$ . Αυτό σημαίνει ότι  $g_i\sigma(e) = hg_j$  για κάποιο στοιχείο  $h \in H$ . Από τον ορισμό του  $\sigma(e)$ , η ακμή  $e$  ανυψώνεται σε μία ακμή στο  $Y$  από την κορυφή  $(v, 1)$  στην  $(v', \sigma(e))$ . Αν εφαρμόσουμε το  $g_i$  σε αυτή την ακμή, παίρνουμε μία ακμή που αρχίζει στην  $(v, g_i)$  και τελειώνει στην  $(v, g_i\sigma(e)) = (v', hg_j)$ . Οπότε η ακμή  $e$  ανυψώνεται σε μία κατευθυνόμενη ακμή του  $\tilde{X}$  από την  $(v, Hg_i)$  στην  $(v', Hg_j)$ .  $\square$

Αυτό το θεώρημα μας δείχνει πώς να δημιουργήσουμε ενδιάμεσα καλύμματα αν μας δοθεί ένα κανονικό κάλυμμα, και επίσης μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε το ελάχιστο κανονικό κάλυμμα  $Y$  του  $X$ , δεδομένου ενός ενδιάμεσου καλύμματος  $\tilde{X}$  του  $X$ , καθώς και την ομάδα Galois  $G(Y/X)$ .

**Παραδείγμα 4.4.1** (Κατασκευή του ελάχιστου κανονικού καλύμματος  $Z$  του κυβικού καλύμματος  $Y_3/X$  του σχήματος 4.8). Έστω  $G$  η ομάδα Galois  $G(Z/X)$  και  $H$  είναι η υποομάδα που αντιστοιχεί στο  $Y_3$ . Υπάρχουν τρία σύμπλοκα  $Hg_i, i = 1, 2, 3$ . Δίνουμε ετικέτες στα σύμπλοκα έτσι ώστε τα  $Hg_1, Hg_2, Hg_3$  να αντιστοιχούν στα φύλλα του  $Y_3$  με ετικέτες έναν, δύο και τρεις τόνους. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.4.9, η μετάθεση που αντιστοιχεί στο  $\sigma(c)$  είναι η  $(1)(23)$ , και η μετάθεση που αντιστοιχεί στο  $\sigma(d)$  είναι  $(12)(3)$ . Από τα λήμματα 4.4.7 και 4.4.9, αυτές οι μεταθέσεις παράγουν ένα ισόμορφο αντίγραφο της  $G$  στην  $S_3$ . Αλλά οι μεταθέσεις  $(12)$  και  $(23)$  παράγουν την  $S_3$ . Οπότε  $G = S_3$ . Επομένως, το ελάχιστο κανονικό κάλυμμα  $Z$  έχει έξι φύλλα. Στις κορυφές του  $Z$  δίνονται ετικέτες  $(v, g)$  με

$v \in V(X)$  και  $g \in G$ . Ανυψώνουμε την ακμή  $c$  συνδέοντας την  $(2, g)$  με την  $(4, g\sigma(c))$ . Ανυψώνουμε την ακμή  $d$  συνδέοντας την  $(4, g)$  με την  $(4, g\sigma(d))$ . Το αποτέλεσμα είναι το γράφημα  $Z = Y_6$  που απεικονίζεται στο σχήμα 4.8. Δεν μπορούμε να πούμε ποιά υποομάδα της  $S_3$  αντιστοιχεί στο  $Y_3$ . Μπορούμε μόνο να την προσδιορίσουμε ως προς συζυγία γιατί δεν ξέρουμε ποιο σύμπλοκο από τα  $Hg_1, Hg_2, Hg_3$  περιλαμβάνει το ταυτοτικό. Οι τρεις επιλογές δίνουν τις τρεις εμβαπτύνσεις του  $Y_3$  στο  $Y_6$ . Ισοδύναμα, μπορούμε να μετονομάσουμε τα φύλλα της  $Y_3$  ως τα τρία σύμπλοκα. Στην  $S_3$  αυτή η μετονομασία είναι ισοδύναμη με μία συζυγία.

Περισσότερα παραδείγματα αυτού του θεωρήματος μπορούν να βρεθούν στο σχήμα του παραδείγματος 4.1.3, και στα σχήματα 4.6, και 4.7.

## Κεφάλαιο 5

# Οι Artin-Ihara $L$ -σειρές

### 5.1 Ορισμοί

**Ορισμός 5.1.1.** Υποθέτουμε ότι το  $Y$  είναι ένα κανονικό αδιακλάδιστο κάλυμμα του  $X$  με ομάδα Galois  $G = G(Y/X)$ . Αν  $\rho$  είναι μία αναπαράσταση του  $G$  με βαθμό  $d = d_\rho$  και  $u$  είναι μια μιγαδική μεταβλητή με  $|u|$  αρκούντως μικρό, ορίζουμε την **Artin-Ihara  $L$ -συνάρτηση**

$$L(u, \rho, Y/X) = \prod_{[C]} \det \left( I - \rho([Y/X, D])u^{v(C)} \right)^{-1},$$

όπου το γινόμενο διατρέχει τους πρώτους  $[C]$  του  $X$  και  $[D]$  είναι αυθαίρετα επιλεγμένο από τους πρώτους στο  $Y$  πάνω από το  $C$ . Εδώ  $[Y/X, D]$  είναι ο αυτομορφισμός Frobenius και  $v(C)$  το μήκος του μονοπατιού  $C$  αντιπροσώπου του πρώτου  $[C]$ .

Ο αυτομορφισμός Frobenius είναι μοναδικός μέχρι συζυγίας αλλά αυτο εν προκειμένω δεν μας ενοχλεί γιατί λαμβάνουμε την ορίζουσα η οποία είναι ίδια για όλα τα συζυγή στοιχεία. Όταν η αναπαράσταση  $\rho$  είναι η τετριμμένη η  $L$ -συνάρτηση γίνεται απλά η Ihara ζ-συνάρτηση δηλαδή:

$$(5.1) \quad L(u, 1, Y/X) = \zeta_X(u)$$

Όπως και στην περίπτωση της Ihara ζ-συνάρτησης οι αντίστροφες των  $L$ -συναρτήσεων που ορίσαμε είναι πολυώνυμα που οφείλονται στην ύπαρξη αναλόγων τύπων με ορίζουσες όπως θα δείξουμε στην συνέχεια

**Ορισμός 5.1.2.** Ορίζουμε τον **Artinized πίνακα γειτνίασης** να είναι ο πίνακας που κατασκευάζεται από block  $d_\rho \times d_\rho$  που αντιστοιχούν στις κατευθυνόμενες ακμές  $e, f$ , όπου το block  $(W_{1,\rho})_{e,f}$  που αντιστοιχεί στις ακμές  $e, f$  είναι το

$$(W_{1,\rho})_{e,f} = (W_1)_{e,f} \cdot \rho(\sigma(e)) = \begin{cases} \rho(\sigma(e)) & \text{αν } t(e) = o(f) \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου ο  $\sigma(e)$  είναι ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius που αντιστοιχεί στην κατευθυνόμενη ακμή  $e$  και  $W_1$  είναι ο πίνακας ακμών του  $X$ .

**Θεώρημα 5.1.3.** Ισχύει ότι  $L(u, \rho, Y/X)^{-1} = \det(I - uW_{1,\rho})$ .

*Απόδειξη.* Μπορούμε να μιμηθούμε την αντίστοιχη απόδειξη για τις Ihara  $\zeta$ -συναρτήσεις. Αφού  $\exp \operatorname{Tr} A = \det \exp A$  για κάθε πίνακα  $A$  έχουμε

$$\begin{aligned} \log L(u, r, Y/X)^{-1} &= - \sum_{[P]} \log \det(I - \rho(\sigma(P))u^{v(P)}) \\ &= - \sum_{[P]} \operatorname{Tr} \log(I - \rho(\sigma(P))u^{v(P)}) \\ &= \operatorname{Tr} \left( \sum_{[P]} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \rho(\sigma(P))^j u^{jv(P)} \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left( \sum_P \sum_{j \geq 1} \frac{1}{v(P^j)} \rho(\sigma(P^j)) u^{v(P^j)} \right) \\ &= \sum_C \frac{1}{v(C)} \chi_\rho(\sigma(C)) u^{v(C)}, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία παράσταση τα  $C$  είναι κλειστά μονοπάτια χωρίς πισογυρίσματα και ουρές, όχι μόνο πρώτοι. Έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η κλάση ισοδυναμίας  $[P]$  περιέχει ακριβώς  $v(P)$  πρώτα μονοπάτια, το ότι ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius  $\sigma(C)$  είναι πολλαπλασιαστικός όπως επίσης και το γεγονός ότι οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι  $C$  χωρίς ουρές και πισογυρίσματα έχει την μορφή  $C = P^j$  για κάποιο πρώτο  $[P]$  και κάποιο θετικό ακέραιο  $j$ . Στην συνέχεια θέτουμε  $B = W_{1,\rho}$  και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} B^m &= \operatorname{Tr} \left( \sum_{e_1, \dots, e_m} b_{e_1 e_2} b_{e_2 e_3} \cdots b_{e_{m-1} e_m} b_{e_m e_1} \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left( \sum_{e_1, \dots, e_m} \rho(\sigma(e_1)) \rho(\sigma(e_2)) \cdots \rho(\sigma(e_{m-1})) \rho(\sigma(e_m)) \right) \\ &= \sum_{C, v(C)=m} \operatorname{Tr}(\rho(\sigma(C))). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο άθροισμα λαμβάνεται πάνω από τα  $e_1, \dots, e_m$  έτσι ώστε το  $e_1 \cdots e_m$  είναι ένα κλειστό μονοπάτι χωρίς πισογυρίσματα και ουρά. Τέλος χρησιμοποιώντας το  $\exp \operatorname{Tr} A = \det \exp A$  έχουμε

$$\begin{aligned} \log L(u, \rho, Y/X) &= \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \sum_{v(C)=m} \chi_\rho(\sigma(C)) u^m \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \sum_{v(C)=m} \operatorname{Tr}(\rho(\sigma(C))) u^m \\ &= \operatorname{Tr} \left( \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} W_{1,\rho}^m u^m \right) \\ &= \operatorname{Tr} (\log(I - uW_{1,\rho})^{-1}) \\ &= \log \det(I - uW_{1,\rho}). \end{aligned}$$

Και η αποδειξη έχει ολοκληρωθεί.  $\square$

**Παραδείγμα 5.1.1** (Το κάλυμμα του αλτήρα με ομάδα Galois την ομάδα του Klein και ενδιάμεσα καλύματα, συνέχεια του παραδείγματος 4.1.3). Αρχικά χρειαζόμαστε τον πίνακα  $W_1$  του βασικού γραφήματος, δηλαδή του αλτήρα  $X$  όπου οι ακμές του  $X$  διατάσσονται ως εξής:  $a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η ζ-συνάρτηση του αλτήρα είναι

$$\begin{aligned} \zeta_X(u)^{-1} &= \det(I - uW_1) = \det \begin{pmatrix} 1-u & 0 & -u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-u & 0 & 0 & 0 & -u \\ 0 & -u & 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & -u & 1-u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-u & -u \\ -u & 0 & 0 & -u & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -4u^6 + 8u^5 - 3u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 4u + 1 \\ &= -(u+1)(u-1)^2(2u-1)(2u^2-u+1). \end{aligned}$$

Τώρα χρειαζόμαστε τον κανονικοποιημένο αυτομορφισμό Frobenius για τα τρία ενδιάμεσα τετραγωνικά καλύματα  $Y', Y'', Y'''$ . Γράφουμε την ομάδα Galois ως  $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1(\text{ mod } 2)\}$ . Τότε

$$\begin{aligned} Y' : \sigma(a) &= 1(\text{ mod } 2) & \sigma(b) &= 1(\text{ mod } 2) & \sigma(c) &= 0(\text{ mod } 2). \\ Y'' : \sigma(a) &= 0(\text{ mod } 2) & \sigma(b) &= 1(\text{ mod } 2) & \sigma(c) &= 0(\text{ mod } 2). \\ Y''' : \sigma(a) &= 1(\text{ mod } 2) & \sigma(b) &= 0(\text{ mod } 2) & \sigma(c) &= 0(\text{ mod } 2). \end{aligned}$$

Έστω οι δύο αναπαραστάσεις του  $G$  να είναι η  $1$ , δηλαδή η περιμεμένη, και  $\rho$ , όπου  $\rho(0(\text{ mod } 2)) = 1$  και όπου  $\rho(1(\text{ mod } 2)) = -1$ . Βρίσκουμε τους πίνακες  $W_\sigma$  για κάθε ένα από τα τρία ενδιάμεσα καλύματα.

Για το  $Y'$  παίρνουμε την Artin  $L$ -συνάρτηση

$$\begin{aligned} L(u, \rho, Y'/X)^{-1} &= \det(I - uW_{1,\rho}) = \det \begin{pmatrix} 1+u & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+u & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & -u & 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & u & 1+u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+u & u \\ -u & 0 & 0 & -u & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -4u^6 - 8u^5 - 3u^4 + 4u^3 + 6u^2 + 4u + 1 \\ &= -(u+1)^2(u-1)(2u+1)(2u^2+u+1). \end{aligned}$$

Για το  $Y''$  παίρνουμε την Artin  $L$ -συνάρτηση

$$\begin{aligned} L(u, \rho, Y''/X)^{-1} &= \det(I - uW_{1,\rho}) = \det \begin{pmatrix} 1-u & 0 & -u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+u & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & -u & 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & -u & 1-u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+u & u \\ -u & 0 & 0 & -u & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -4u^6 + 5u^4 + -2u^2 + 1 \\ &= (u+1)(u-1)(-4u^4 + u^2 - 1). \end{aligned}$$

Για το  $Y'''$  παίρνουμε την Artin  $L$ -συνάρτηση

$$\begin{aligned} L(u, \rho, Y'''/X)^{-1} &= \det(I - uW_{1,\rho}) = \det \begin{pmatrix} 1+u & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-u & 0 & 0 & 0 & -u \\ 0 & -u & 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & u & 1+u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-u & -u \\ -u & 0 & 0 & -u & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -4u^6 + 5u^4 + -2u^2 + 1 \\ &= (u+1)(u-1)(-4u^4 + u^2 - 1). \end{aligned}$$

Οπότε βρίσκουμε ότι οι  $\zeta$ -συναρτήσεις των τριών καλυμμάτων είναι

$$\begin{aligned} \zeta_{Y'}(u)^{-1} &= \zeta_X(u)^{-1} L(u, \rho, Y'/X)^{-1} \\ &= (u+1)^3(u-1)^3(2u+1)(2u-1)(2u^2+u+1)(2u^2-u+1), \\ \zeta_{Y''}(u)^{-1} &= \zeta_X(u)^{-1} L(u, \rho, Y''/X)^{-1} \\ &= (u+1)^2(u-1)^3(2u-1)(2u^2-u+1)(-4u^4+u^2-1), \\ \zeta_{Y'''}(u)^{-1} &= \zeta_X(u)^{-1} L(u, \rho, Y'''/X)^{-1} \\ &= (u+1)^3(u-1)^2(2u+1)(2u^2+u+1)(-4u^4+u^2-1), \end{aligned}$$

Τώρα έστω το γράφημα που προκύπτει ως Galois κάλυμμα του αλτήρα με ομάδα Galois

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

Οι αναπαραστάσεις είναι οι  $\chi_c$ , όπου  $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  και για  $x = (x_1, x_2)$ ,

$$\chi_c(x) = e^{2\pi i(c_1 x_1 + c_2 x_2)/2} = (-1)^{c_1 x_1 + c_2 x_2}.$$

Ταυτίζουμε το φύλλο 1 (το χαμηλότερο φύλλο στο σχήμα) με το στοιχείο  $(0, 0)$  της ομάδας Galois. Στην συνέχεια ταυτίζουμε το φύλλο 2 (το αμέσως ψηλότερο φύλλο) με το στοιχείο  $(0, 1)$ , το φύλλο 3 με το στοιχείο  $(1, 0)$  και το φύλλο 4 με το στοιχείο  $(1, 1)$ . Οι κανονικοποιημένοι αυτομορφισμοί του Frobenius είναι

$$\sigma(a) = (0, 1) \quad \sigma(b) = (1, 1) \quad \sigma(c) = (0, 0).$$

Τότε

$$\begin{aligned} \chi_{(0,1)}(\sigma(a)) &= (-1)^1 = -1 & \chi_{(0,1)}(\sigma(b)) &= (-1)^1 = -1 & \chi_{(0,1)}(\sigma(c)) &= (-1)^1 = 1 \\ \chi_{(0,1)}(\sigma(a)) &= (-1)^0 = 1 & \chi_{(0,1)}(\sigma(b)) &= (-1)^0 = 1 & \chi_{(0,1)}(\sigma(c)) &= (-1)^0 = 1 \\ \chi_{(1,1)}(\sigma(a)) &= (-1)^1 = -1 & \chi_{(1,1)}(\sigma(b)) &= (-1)^2 = 1 & \chi_{(0,1)}(\sigma(c)) &= (-1)^0 = 1 \end{aligned}$$



Ξέρουμε ότι

$$L(u, \chi_{(0,0)}, Z/X) = \zeta_X(u) = -(u+1)(u-1)^2(2u-1)(2u^2-u+1).$$

Οι τρεις νέες  $L$ -συναρτήσεις του  $Z/X$  από την μη τετριμμένη αναπαράσταση μπορούν να βρεθούν εύκολα. Παρατηρούμε ότι  $\chi_{(0,1)}(\sigma(e)) = \rho(\sigma(e))$  για το γράφημα  $Y'$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$L(u, \chi_{(0,1)}, Z/X)^{-1} = L(u, \rho, Y'/X) = -(u-1)(u+1)^2(2u+1)(2u^2+u+1)$$

επίσης  $\chi_{(1,0)}(\sigma(e)) = \rho(\sigma(e))$  για το γράφημα  $Y''$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$L(u, \chi_{(1,0)}, Z/X)^{-1} = L(u, \rho, Y''/X) = (u-1)(u+1)(-4u^4+u^2-1)$$

Τέλος  $\chi_{(1,1)}(\sigma(e)) = \rho(\sigma(e))$  για το γράφημα  $Y'''$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$L(u, \chi_{(1,1)}, Z/X)^{-1} = L(u, \rho, Y'''/X) = (u-1)(u+1)(-4u^4+u^2-1).$$

Παρατηρούμε ότι οι  $L$ -συναρτήσεις που αντιστοιχούν στα καλύμματα  $Y''$  και  $Y'''$  ταυτίζονται. Αυτά τα γραφήματα είναι ισόμορφα ως γραφήματα, ενώ το  $Y'$  δεν είναι ισόμορφο με το  $Y''$ . Η  $L$ -συνάρτηση για το  $Y'$  προκύπτει από την την αντίστοιχη της τετριμμένης αναπαράστασης αν αντικαταστήσουμε το  $u$  με το  $-u$ . Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε, χρησιμοποιώντας τον τύπο με την ορίζουσα, ότι η  $\zeta$ -συνάρτηση του 4-καλύμματος  $Z$  είναι το γινόμενο των  $L$ -συναρτήσεων της ομάδας Galois του, όπως θα αποδείξουμε σε επόμενη πρόταση

$$\begin{aligned} \zeta_Z(u) &= L(u, \chi_{(0,0)}, Z/X)L(u, \chi_{(0,1)}, Z/X)L(u, \chi_{(1,0)}, Z/X)L(u, \chi_{(1,1)}, Z/X) = \\ &= (u+1)^5(u-1)^5(2u+1)(2u-1)(2u^2+u+1)(2u^2-u-1)(-4u^2+u^2-1). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το  $Z$  αποτελείται από έναν 8-κύκλο αντικαθιστώντας κάθε ακμή εκτός των φύλλων με μία διπλή ακμή. Προκύπτει ότι

$$\zeta_X(u)^2 \zeta_Z(u) = \zeta_{Y'}(u) \zeta_{Y''}(u) \zeta_{Y'''}(u).$$

## 5.2 Ιδιότητες

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των  $L$ -συναρτήσεων των κανονικών καλυμμάτων.

**Θεώρημα 5.2.1** (Ιδιότητες της Artin-Ihara  $L$ -συνάρτησης). Έστω  $Y/X$  ένα κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois  $G$ . Τότε:

(i)  $L(u, \rho_1 \oplus \rho_2) = L(u, \rho_1)L(u, \rho_2)$ .

(ii) Έστω ότι το  $\tilde{X}$  είναι ένα ενδιάμεσο κάλυμμα στο  $Y/X$  και υποθέτουμε ότι  $\tilde{X}/X$  είναι κανονικό,  $G = \text{Gal}(Y/X)$ ,  $H = \text{Gal}(Y/\tilde{X})$ . Έστω  $\rho$  η αναπαράσταση της  $G/H \cong \text{Gal}(\tilde{X}/X)$ . Οπότε η  $\rho$  μπορεί να ειπωθεί ως μία αναπαράσταση της  $G$  (η ανύψωση της  $\rho$ ). Τότε

$$L(u, \rho, Y/X) = L(u, \rho, \tilde{X}/X)$$

- (iii) (επαγωγική ιδιότητα) Αν  $\tilde{X}$  είναι ένα ενδιάμεσο κάλυμμα στο κανονικό κάλυμμα  $Y/X$  και  $\rho$  είναι μία αναπαράσταση του  $H = \text{Gal}(Y/\tilde{X})$  θα συμβολίζουμε με  $\rho^\# = \text{Ind}_H^G \rho$  την αναπαράσταση που επάγεται από την  $\rho$  από την  $H$  στην  $G$ . Τότε

$$L(u, \rho^\#, Y/X) = L(u, \rho, Y/\tilde{X})$$

Εδώ δεν υποθέτουμε ότι το  $\tilde{X}$  είναι κανονικό πάνω από το  $X$ .

Απόδειξη. (i)

$$\begin{aligned} L(u, \rho_1 \oplus \rho_2) &= \prod_{[C]} \det \left( I - (\rho_1 \oplus \rho_2)([Y/X, D])u^{v(C)} \right)^{-1} \\ &= \prod_{[C]} \det \left( I - \rho_1([Y/X, D])u^{v(C)} \right)^{-1} \det \left( I - \rho_2([Y/X, D])u^{v(C)} \right)^{-1} \\ &= \prod_{[C]} \det \left( I - \rho_1([Y/X, D])u^{v(C)} \right)^{-1} \prod_{[C]} \det \left( I - \rho_2([Y/X, D])u^{v(C)} \right)^{-1} \\ &= L(u, \rho_1)L(u, \rho_2) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} L(u, \rho, Y/X) &= \prod_{[C]} \det \left( I - \rho([Y/X, D])u^{v(C)} \right)^{-1} \\ &= \prod_{[C]} \det \left( I - \rho([\tilde{X}/X, \tilde{C}])u^{v(C)} \right)^{-1} \\ &= L(u, \rho, \tilde{X}/X) \end{aligned}$$

όπου το  $\tilde{C}$  είναι ένας πρώτος του  $\tilde{X}$  πάνω από το  $C$  που ανυψώνεται στον  $D$  στο  $Y$

- (iii) Την απόδειξη της επαγωγικής ιδιότητας θα την δώσουμε στην σελίδα 80 για την γενικότερη περίπτωση των  $L$ -συναρτήσεων ακμών. □

**Πόρισμα 5.2.2** (Η παραγοντοποίηση της  $\zeta$ -συνάρτησης του Ihara). Υποθέτουμε ότι το  $Y/X$  είναι κανονικό με Galois ομάδα  $G = G(Y/X)$ . Έστω  $\hat{G}$  να είναι ένα πλήρες σύνολο από μη ισοδύναμες ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της  $G$ . Τότε

$$\zeta_Y(u) = L(u, 1, Y/Y) = \prod_{\rho \in \hat{G}} L(u, \rho, Y/X)^{d_\rho}.$$

Απόδειξη. Από την επαγωγική ιδιότητα του προηγούμενου θεωρήματος για  $Y = \tilde{X}$  η αντίστοιχη υποομάδα  $H$  της  $G$  είναι  $H = \{e\}$ . Οπότε για  $\rho = 1$  την τετριμμένη αναπαράσταση της  $H$  έχουμε ότι  $\rho^\# = \text{Ind}_{\{e\}}^G 1 \cong \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \pi$ . Χρησιμοποιώντας τα μέρη (i) και (ii) της προηγούμενης πρότασης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \zeta_Y(u) &= L(u, 1, Y/Y) = L(u, \rho^\#, Y/X) \\ &= L \left( u, \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \pi, Y/X \right) = \prod_{\rho \in \hat{G}} L(u, \rho, Y/X)^{d_\rho}. \end{aligned}$$

□

Στην συνέχεια ορίζουμε μερικούς πίνακες που αντιστοιχίζονται στην αναπαράσταση  $\rho$  της  $G(Y/X)$  όπου το  $Y/X$  είναι ένα αδιακλάδιστο κανονικό κάλυμμα.

**Ορισμός 5.2.3.** Για  $\sigma, \tau \in G$  και κορυφές  $a, b \in X$ , ορίζουμε τον πίνακα  $A(\sigma, \tau)$  να είναι ο  $n \times n$  πίνακας με στοιχείο  $A(\sigma, \tau)_{a,b}$  ίσο με τον αριθμό των κατευθυνόμενων ακμών στο  $Y$  από το  $(a, \sigma)$  στο  $(b, \tau)$ . Εδώ σε κάθε μη κατευθυνόμενη ακμή του  $Y$  δίνουμε και τις δύο κατευθύνσεις.

Εκτός και αν τα  $(a, \sigma)$  και  $(b, \tau)$  είναι η ίδια κορυφή στο  $Y$  (δηλαδή αν  $a = b$  και  $\sigma = \tau$ ), αλλά ακόμα και τότε μόνο αν δεν υπάρχουν βρόχοι στο  $(a, \sigma) = (b, \tau)$ ,  $A(\sigma, \tau)_{a,b}$  είναι απλά ο αριθμός των μη κατευθυνόμενων ακμών στο  $Y$  που συνδέουν το  $(a, \sigma)$  με το  $(b, \tau)$ . Ωστόσο αν υπάρχει βρόχος στο  $(a, \sigma) = (b, \tau)$  αυτός προσμετράται και στις δύο κατευθύνσεις οπότε σε αυτήν την περίπτωση ο μη κατευθυνόμενος βρόχος προσμετράτε δύο φορές. Παρατηρούμε ότι λόγω μεταβατικότητας

$$(5.2) \quad A(\sigma, \tau) = A(1, \sigma^{-1}\tau) \equiv A(\sigma^{-1}\tau)$$

**Ορισμός 5.2.4.** Αν  $\rho$  είναι μία αναπαράσταση της  $G(Y/X)$  και  $A(\sigma, \tau)$  δίνεται από τον ορισμό 5.2.3, ορίζουμε τον Artinized πίνακα γεινίασης  $A_\rho$  ως

$$A_\rho = \sum_{\sigma \in G} A(\sigma) \otimes \rho(\sigma).$$

επίσης θέτουμε

$$Q_\rho = Q \otimes I_d,$$

όπου  $Q$  είναι ο  $|X| \times |X|$  διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου που αντιστοιχούν στις ενδιάμεσες ακμές που αντιστοιχούν στο  $a \in X$  και δίνονται από το  $q_a = (\text{βαθμός του } a) - 1$  και  $d$  είναι ο βαθμός της  $\rho$ .

**Θεώρημα 5.2.5** (Η block διαγωνιοποίηση του πίνακα γεινίασης ενός κανονικού καλύμματος). Υποθέτουμε ότι το  $Y/X$  είναι κανονικό με ομάδα Galois  $G = G(Y/X)$ . Έστω  $\hat{G}$  ένα πλήρες σύνολο από μη ισοδύναμες, ανάγωγες, μοναδιαίες αναπαραστάσεις του  $G$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα γεινίασης του  $Y$  ως block διαγώνιο πίνακα με block τους πίνακες  $A_\rho$ , ο καθένας επαναλαμβανόμενος  $d_\rho$  φορές καθώς οι  $\rho$  διατρέχουν το  $\hat{G}$

*Απόδειξη.* Μπορούμε να δούμε τον πίνακα γεινίασης του  $Y$  ως προερχόμενο από την αναπαράσταση  $\text{Ind}_e^G 1$  με αναπαράσταση όπως περιγράφεται στο θεώρημα 3.1.2. Διατάσσουμε τις κορυφές του  $Y$  ως  $(x, \tau)$ ,  $x \in X$ ,  $g \in G$ . Οπότε ο  $A_Y$  αποσυντίθεται σε  $n \times n$  blocks, όπου  $n = |X|$ , με blocks  $A(\sigma, \tau) = A(\sigma^{-1}\tau)$  όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Δηλαδή το  $\sigma \in G$  δρα στην συνάρτηση  $A : G \rightarrow \mathbb{R}$  ως  $\lambda(\sigma)A(\tau) = A(\sigma^{-1}\tau)$  με  $\sigma, \tau \in G$ . Τότε η  $\lambda$  είναι η αριστερή κανονική αναπαράσταση της  $G$  και άρα ισοδύναμη με την  $\text{Ind}_e^G 1$ . Συνεπάγεται από το θεώρημα 3.1.2 ότι ο  $A_Y$  αποσυντίθεται σε blocks  $A_\rho$  που αντιστοιχούν στις  $\rho \in \hat{G}$ , από  $d_\rho$  φορές την κάθε μία.  $\square$

Τώρα μπορούμε να γενικεύσουμε το θεώρημα 1.2.2.

**Θεώρημα 5.2.6** (Θεώρημα του Ihara-Bass για  $L$ -συναρτήσεις). Με τις παραπάνω υποθέσεις και όρισμους έχουμε

$$L(u, \rho, Y/X)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - A_\rho + Q_\rho u^2).$$

Εδώ  $r$  είναι ο βαθμός της θεμελιώδους ομάδας του  $X$ .

Απόδειξη. Αναβάλλουμε την απόδειξη για όταν θά παρουσιάσουμε τις  $L$ -συναρτήσεις ακμών.  $\square$

### Παραδείγματα παραγοντοποιήσεων $\zeta$ -συναρτήσεων

**Παράδειγμα 5.2.1** (Ο κύβος ως κάλυμμα του τετραέδρου). Στο σχήμα 4.4 η δράση της ομάδας  $G = G(Y/X) = \{1, \sigma\}$  στο  $Y$  δίνεται από τους τόνους, δηλ.  $x' = (x, 1)$  και  $x'' = (x, \sigma)$ , για  $x \in X$ . Σε αυτήν την περίπτωση οι αναπαράστασεις της ομάδας  $G$  είναι η τετριμμένη αναπαράσταση  $\rho_0 = 1$  και η αναπαράσταση  $\rho$  που ορίζεται ως  $\rho(1) = 1, \rho(\sigma) = -1$ . Οπότε  $Q_\rho = 2I_4$ . Έχουμε για τις δύο αναπαραστάσεις.

- (i) Η αναπαράσταση  $\rho_0 = 1$ .  
Εδώ  $A_1 = A(1) + A(\sigma) = A$ , όπου

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και  $A_1$  είναι ο πίνακας γειτνίασης του πίνακα  $X$

- (ii) Η αναπαράσταση  $\rho$ . Εδώ βρίσκουμε

$$A_\rho = A(1) - A(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια ελέγχουμε τα αποτελέσματα μας σε αυτήν την περίπτωση. Γνωρίζουμε από το πόρισμα 5.2.2 ότι

$$(5.3) \quad \zeta_Y(u) = L(u, 1, Y/Y) = L(u, 1, Y/X)L(u, \rho, Y/X) = \zeta_X(u)L(u, \rho, Y/X).$$

Ο τύπος με ορίζουσα του Ihara μας δίνει ότι

$$\zeta_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^2(1 - u)(1 - 2u)(1 + u + 2u^2)^3$$

και

$$\zeta_Y(u)^{-1} = (1 - u^2)^2(1 + u)(1 + 2u)(1 - u + 2u^2)^3 \zeta_X(u)^{-1}.$$

Το θεώρημα 5.2.6 μας δίνει ότι (αφού το  $r = 3$ )

$$\begin{aligned} L(u, \rho, Y/X)^{-1} &= (1 - u^2)^2 \det(I_4 + A'_\rho u + 2u^2 I_4) \\ &= (1 - u^2)^2 (1 + u)(1 + 2u)(1 - u + 2u^2)^3. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι από το θεώρημα 5.2.6 η εξίσωση (5.3) είναι μία παραγοντοποίηση μίας  $8 \times 8$  ορίζουσας σε γινόμενο  $4 \times 4$  ορίζουσών:

$$\det(I_8 - A_Y u + 2I_8 u^2) = \det(I_4 - A_X u + 2I_4 u^2) \det(I_4 - A_\rho u + 2I_4 u^2).$$

Στην παρακάτω πρόταση παρουσιάζουμε ξεχωριστά την περίπτωση των 2-καλυμμάτων.

**Πρόταση 5.2.7.** *Αν το  $Y/X$  είναι ένα 2-κάλυμμα τότε ο πίνακας γειτνίασης  $A_Y$  μπορεί να γραφεί ως διαγώνιος δύο block πίνακας, ένα block το  $A_X$  (ο πίνακας γειτνίασης του  $X$ ) και ένα άλλο block το  $A_A$ . Ο πίνακας  $A_A$  έχει ως στοιχεία που αντιστοιχούν σε δύο κορυφές  $a, b$  του  $X$  τα:*

$$(A_A)_{a,b} = \begin{cases} +1 & \text{αν οι } a \text{ και } b \text{ ενώνονται με μία ακμή στο } X \text{ η οποία ανυψώνεται} \\ & \text{σε μία ακμή του } Y \text{ της οποίας τα άκρα βρίσκονται στο ίδιο φύλλο} \\ & \text{αν οι } a \text{ και } b \text{ ενώνονται με μία ακμή στο } X \text{ η οποία ανυψώνεται} \\ -1 & \text{σε μία ακμή του } Y \text{ της οποίας τα άκρα βρίσκονται σε διαφορετικό} \\ & \text{φύλλο} \\ 0 & \text{αν οι } a \text{ και } b \text{ δεν ενώνονται με ακμή στο } X \end{cases}$$

Θα δώσουμε τώρα την εικασία των Bilu, Linial [8] που αναφέραμε όταν μιλούσαμε για τα Ramanujan γραφήματα στην παράγραφο 1.3.

**Εικασία 5.2.1.** *Κάθε  $d$ -κανονικό γράφημα  $X$  έχει ένα 2-κάλυμμα  $Y$  έτσι ώστε*

$$\text{Spectrum } A_Y - \text{Spectrum } A_X \subset \left[ -2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1} \right]$$

όπου  $A_Y$  είναι ο πίνακας γειτνίασης του  $Y$ .

Αυτή η εικασία θα μας επέτρεπε να κατασκευάσουμε οικογένειες Ramanujan γραφημάτων οποιουδήποτε βαθμού με οσοδήποτε μεγάλο αριθμό ακμών ξεκινώντας από το  $d$ -πλήρες γράφημα και ανυψώνοντας διαδοχικά. Απο την πρόταση 5.2.7 αυτή είναι μία εικασία που αφορά το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $A_A$ . Όπως προαναφέραμε το ανάλογο αυτής της εικασίας για διμερή γράφηματα αποδείχτηκε τον Απρίλιο(2013) από τους οι Adam Marcus, Daniel Spielman και Nikhil Srivastava [26] κάτι που αποδεικνύει ότι υπάρχουν άπειρες οικογένειες Ramanujan γραφημάτων για κάθε  $d$  ξεκινώντας από το πλήρες  $d$ -κανονικό διμερές γράφημα, που ως γνωστόν είναι Ramanujan αφού οι ιδιοτιμές του εκτός των  $d$  και  $-d$  είναι 0, και ανυψώνοντας κατάλληλα. Ωστόσο η απόδειξη που έδωσαν είναι υπαρξιακή και έτσι δεν μας δίνει ακόμα αλγόριθμο για αυτό.

**Παραδείγμα 5.2.2.** *Ο κύβος ως κάλυμμα του αλτήρα. Το κάλυμμα στο οποίο αναφερόμαστε εδώ είναι το κάλυμμα στο σχήμα 4.6. Η ομάδα επικάλυψης  $G(Y/X)$  είναι οι ακέραιοι  $\pmod{4}$ ,  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3(\pmod{4})\}$ . Βάζουμε ετικέτες στα φύλλα ως εξής*

$$\begin{aligned} x'_1 &= (x, 0(\pmod{4})), & x'_2 &= (x, 1(\pmod{4})) \\ x''_1 &= (x, 2(\pmod{4})), & x''_2 &= (x, 3(\pmod{4})). \end{aligned}$$

Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις είναι όλες μονοδιάστατες και μπορούν να γραφούν ως  $\chi_v(j) = \exp(2\pi i v j / 4) = i^{vj}$  για  $j, v \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Παρατηρούμε ότι αν και το  $X$  έχει βρόχους το  $Y$  δεν έχει. Συνεπάγεται ότι

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(1) = A(3) = I_2, \quad A(2) = 0$$

Οπότε

$$A_{\chi_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{\chi_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_{\chi_3}, \quad A_{\chi_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

Οι αντίστοιχες  $L$ -συναρτήσεις είναι

$$\begin{aligned} L(u, \chi_0, Y/X)^{-1} &= (1-u^2) \det \begin{pmatrix} 1-2u+2u^2 & -u \\ -u & 1-2u+2u^2 \end{pmatrix} \\ &= (1-u^2)(1-u)(1-2u)(1-u+2u^2) \\ L(u, \chi_1, Y/X)^{-1} &= L(u, \chi_3, Y/X)^{-1} = (1-u^2) \det \begin{pmatrix} 1+2u^2 & -u \\ -u & 1+2u^2 \end{pmatrix} \\ &= (1-u^2)(1+u+2u^2)(1-u+2u^2) \\ L(u, \chi_2, Y/X)^{-1} &= (1-u^2) \det \begin{pmatrix} 1+2u+2u^2 & -u \\ -u & 1+2u+2u^2 \end{pmatrix} \\ &= (1-u^2)(1+u)(1+2u)(1+u+2u^2) \end{aligned}$$

οπότε βλέπουμε ότι όπως στο πόρισμα 5.2.2,

$$\zeta_Y(u)^{-1} = L(u, \chi_0, Y/X)L(u, \chi_1, Y/X)L(u, \chi_2, Y/X)L(u, \chi_3, Y/X).$$

Μπορούμε όπως και προηγουμένως να δούμε την τελευταία ισότητα ως μια παραγοντοποίηση της ορίζουσας ενός πίνακα  $8 \times 8$  σε γινόμενο τεσσάρων οριζουσών  $2 \times 2$  πινάκων.

**Παράδειγμα 5.2.3.** Ένα  $S_3$  κάλυμμα. Από το παράδειγμα στο σχήμα 4.8 μπορούμε να δούμε την ομάδα  $S_3$  ως την διεδρική ομάδα  $D_3$ , που είναι η ομάδα συμμετριών ενός ισοπλεύρου τριγώνου και παράγεται από την συμμετρία  $F$  και από την στροφή  $R$ :

$$\begin{aligned} A(I) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(FR^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A(FR^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A(R^2) = 0 \quad A(R) = 0 \quad A(F) = 0 \end{aligned}$$

Στην συνέχεια χρειαζόμαστε να δούμε τις ανάγωγες αναπαράστασεις της  $S_3$ . Η μη τετριμμένη μονοδιάστατη αναπαράσταση της  $S_3$  έχει τιμές  $\chi_1(FR) = -1$  και  $\chi_1(FR^2) = -1$ . Οι δύο διαστάσεων ανάγωγη αναπαράσταση  $\rho$  έχει τις τιμές

$$\rho(FR) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \rho(FR^2) = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = e^{2\pi i/3}.$$

Τώρα μπορούμε να υπολογισούμε τους πίνακες που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των  $L$ -συναρτήσεων:

$$A_{\chi_0} = A, \quad A_{\chi_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_\rho &= A_1(I) \otimes \rho(I) + A_1(FR) \otimes \rho(FR^2) + A_1(FR^2) \otimes \rho(FR^2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & \omega^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ακολουθεί ότι

$$\begin{aligned}
L(u, \chi_0, Y_6/X)^{-1} &= (1-u^2) \det \begin{pmatrix} 1+2u^2 & -u & -u & -u \\ -u & 1+2u^2 & 0 & -u \\ -u & 0 & 1+u^2 & u \\ -u & -u & -u & 1+2u^2 \end{pmatrix} \\
&= (1-u^2)(1-u)(1+u^2)(1-u+2u^2)(1-u^2-2u^3), \\
L(u, \chi_1, Y_6/X)^{-1} &= (1-u^2) \det \begin{pmatrix} 1+2u^2 & -u & -u & -u \\ -u & 1+2u^2 & 0 & u \\ -u & 0 & 1+u^2 & u \\ -u & u & u & 1+2u^2 \end{pmatrix} \\
&= (1-u^2)(1+u)(1+u^2)(1-u+2u^2)(1-u^2+2u^3), \\
L(u, \rho, Y_6/X)^{-1} &= (1-u^2) \det(I_8 - A_\rho u + u^2 Q_\rho) \\
&= (1-u^2)(1+u+2u^2+u^3)(1+u+u^3+2u^4) \\
&\quad (1-u+2u^2-u^3+2u^4)(1-u-u^3+2u^4).
\end{aligned}$$

Απο τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\zeta_X(u)^{-1} &= L(u, \chi_0, Y_6/X)^{-1} \\
&= (1-u^2)(1-u)(1+u^2)(1+u+2u^2)(1-u^2-2u^3), \\
\zeta_{Y_2}(u)^{-1} \zeta_X(u) &= L(u, \chi_1, Y_2/X)^{-1} = L(u, \chi_1, Y_6/X)^{-1} \\
&= (1-u^2)(1+u)(1+u^2)(1-u+2u^2)(1-u^2+2u^3), \\
\zeta_{Y_3}(u)^{-1} = L(u, \rho, Y_6/X)^{-1} &= (1-u^2)(1+u+2u^2+u^3)(1+u+u^3+2u^4) \\
&\quad (1-u+2u^2-u^3+2u^4)(1-u-u^3+2u^4), \\
\zeta_{Y_6}(u) &= L(u, \chi_0, Y_6/X) L(u, \chi_1, Y_6/X) L(u, \rho, Y_6/X)^2 \\
&= \zeta_X(u) \frac{\zeta_{Y_2}(u)}{\zeta_X(u)} \left[ \frac{\zeta_{Y_3}(u)}{\zeta_X(u)} \right]^2.
\end{aligned}$$

Οπότε ως συνέπεια έχουμε ότι

$$\zeta_X(u)^2 \zeta_{Y_6}(u) = \zeta_{Y_2}(u) \zeta_{Y_3}(u)^2.$$

**Παραδείγμα 5.2.4.** Το κάλυμμα με ομάδα  $G = G(Y/X)$  την ομάδα του Klein με τέσσερα στοιχεία δηλαδή την  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , σχήμα 4.7. Η αντιστοιχία είναι η εξής  $x'_1 = (x, (1, 0)), x''_1 = (x, (1, 1)), x'_2 = (x, (0, 0)), x''_2 = (x, (0, 1))$ . Οι αναπαραστάσεις της  $G$  δίνονται από την  $\chi_{r,s}(w, v) = (-1)^{rw+sv}$  για  $r, s, w, v \in \mathbb{Z}_2$ . Βρίσκουμε

ότι

$$\begin{aligned} L(u, \chi_{0,0}, Y/X)^{-1} &= (1 - u^2) \det \begin{pmatrix} 1 + 2u^2 & -3u \\ -3u & 1 + 2u^2 \end{pmatrix} \\ &= \zeta_X(u)^{-1} = (1 - u^2)(1 - u)(1 + u)(1 - 2u)(1 + 2u) \end{aligned}$$

όμοια

$$\begin{aligned} L(u, \chi_{0,1}, Y/X)^{-1} &= (1 - u^2) \det \begin{pmatrix} 1 + 2u^2 & -u \\ -u & 1 + 2u^2 \end{pmatrix} = L(u, \chi_{1,1}, Y/X)^{-1} \\ &= (1 - u^2)(1 - u + 2u^2)(1 + u + 2u^2) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(u, \chi_{1,0}, Y/X)^{-1} &= (1 - u^2) \det \begin{pmatrix} 1 + 2u^2 & u \\ u & 1 + 2u^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - u^2)(1 - u + 2u^2)(1 + u + 2u^2). \end{aligned}$$

Οπότε και οι τρεις L-συναρτήσεις για τις μη τετριμμένες αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες. Αυτό συμβαίνει επειδή και τα τρία ενδιάμεσα τετραγωνικά καλύμματα του X είναι ισόμορφα ως γραφήματα και άρα έχουν ίδιες ζ-συναρτήσεις. Κάθε μία από αυτές είναι της μορφής  $\zeta_{\tilde{X}} = \zeta_X(u)L(u, \chi, Y/X)$  όπου  $\chi$  διατρέχει τις τρεις μη τετριμμένες αναπαραστάσεις της G καθώς η  $\tilde{X}$  διατρέχει τα τρία ενδιάμεσα τετραγωνικά καλύμματα του X. Για την  $\zeta_Y(u)$  έχουμε

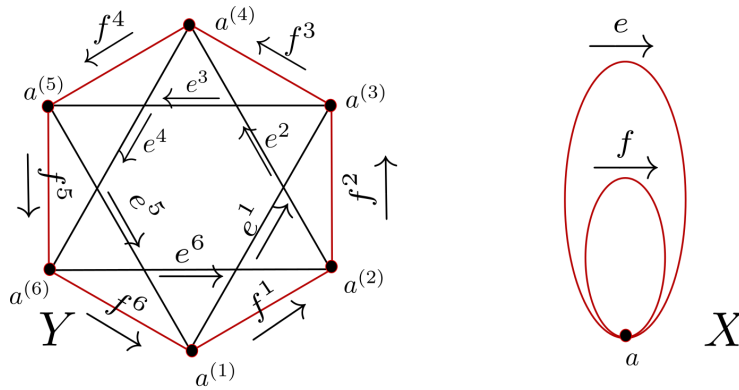
$$\begin{aligned} \zeta_Y(u)^{-1} &= \prod_{\chi \in \hat{G}} L(u, \chi, Y/X) \\ &= (1 - u^2)^4(1 - u)(1 + u)(1 - 2u)(1 + 2u)(1 - u - 2u^2)^3(1 + u + 2u^2)^3 \end{aligned}$$

και επίσης έχουμε ότι

$$\zeta_{\tilde{X}}^2 \zeta_Y(u) = \zeta_{\tilde{X}}(u)^3$$

το οποίο ισχύει και για τα τρία ενδιάμεσα καλύμματα  $\tilde{X}$  του X.

**Παράδειγμα 5.2.5.** Το κυκλικό 6-κάλυμμα Y/X του σχήματος 5.1. Η ομάδα



Σχήμα 5.1:

$G = G(Y/X) \cong \mathbb{Z}_6$ . Έστω  $\omega = e^{2\pi i/6}$ . Οι αναπαραστάσεις είναι  $\chi_a(b) = \omega^{ab}$  για  $a, b \in \mathbb{Z}_6$ . Εδώ οι πίνακες  $A(\tau)$  είναι  $1 \times 1$ . Οπότε παίρνουμε

$$A(6) = A(3) = 0 \quad A(1) = A(2) = A(4) = A(5) = 1$$



Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A_{\chi_0} &= 4 = A, & \text{ο πίνακας γειννίασης του } X \\ A_{\chi_j} &= 0 & \text{για } j = 1, 3, 5, \\ A_{\chi_j} &= -2 & \text{για } j = 2, 4 \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} L(u, \chi_0, Y/X)^{-1} &= \zeta_X(u)^{-1} = (1-u^2)(1-u)(1-3u) \\ L(u, \chi_j, Y/X)^{-1} &= (1-u^2)(1+3u^2) & \text{για } j = 1, 3, 5, \\ L(u, \chi_j, Y/X)^{-1} &= Z_X(u)^{-1} = (1-u^2)(1+2u+3u^2) & \text{για } j = 2, 4 \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$m = \begin{pmatrix} 1+3u^2 & -u & -u & 0 & -u & -u \\ -u & 1+3u^2 & -u & -u & 0 & -u \\ -u & -u & 1+3u^2 & -u & -u & 0 \\ 0 & -u & -u & 1+3u^2 & -u & -u \\ -u & 0 & -u & -u & 1+3u^2 & -u \\ -u & -u & 0 & -u & -u & 1+3u^2 \end{pmatrix}.$$

Από τον τύπο του Ihara

$$\begin{aligned} \zeta_Y(u)^{-1} &= (1-u^2)^6 \det m \\ &= (1-u^2)^6 (3u-1)(u-1)(3u^2+2u+1)^2 (1+3u^2)^3, \end{aligned}$$

Το οποίο συμφωνεί με το γινόμενο

$$\zeta_Y(u)^{-1} = \prod_{\chi \in \hat{G}} L(u, \chi, Y/X).$$

### 5.3 Η Artin $L$ -συνάρτηση ακμών

Υποθέτουμε ότι το  $Y/X$  είναι ένα κανονικό κάλυμμα

**Ορισμός 5.3.1.** Δεδομένου ενός μονοπατιού  $C$  στο  $X$  που γράφεται ως γινόμενο κατευθυνόμενων ακμών  $C = a_1 a_2 \cdots a_s$  με νόρμα ακμών την

$$N_E(C) = w_{a_1 a_2} w_{a_2 a_3} \cdots w_{a_{s-1} a_s} w_{a_s a_1}$$

η Artin  $L$ -συνάρτηση ακμών που αντιστοιχεί σε μία αναπαράσταση  $\rho$  της ομάδας Galois  $G(Y/X)$  και τον πίνακα ακμών  $W$  είναι

$$L(W, \rho) = L_E(W, \rho, Y/X) = \prod_{[C]} \det \left( I - \rho \left( \frac{Y/X}{D} \right) N_E(C) \right)^{-1}$$

όπου το γινόμενο είναι πάνω από τους πρώτους  $[C]$  στο  $[X]$  και  $[D]$  είναι τυχαία επιλεγμένο από τους πρώτους στο  $Y$  πάνω από το  $[C]$ .

Οι τιμές  $|w_{ef}|$  θα πρέπει να διαλεχτούν αρκούντως μικρές ώστε να συγκλίνει το γινόμενο και  $\left(\frac{Y/X}{D}\right)$  είναι ο αυτομορφισμός Frobenius που δώσαμε στον ορισμό 4.4.3. Η ορίζουσα στον ορισμό δεν εξαρτάται από την επιλογή του πρώτου  $[D]$  στο  $Y$  μιάς και οι διαφορετικοί αυτομορφισμοί Frobenius που αντιστοιχούν σε διαφορετικές επιλογές πρώτου είναι συζυγείς.

Για την παραγοντοποίηση της  $L$ -συνάρτησης των ακμών θα χρειαστούμε τον παρακάτω ορισμό

**Ορισμός 5.3.2.** Υποθέτουμε ότι το  $\tilde{X}$  είναι ένα αδιακλάδιστο κάλυμμα του  $X$  και ότι ο  $\tilde{W}$  και ο  $W$  είναι οι αντίστοιχοι πίνακες ακμών. Υποθέτουμε ότι η  $\tilde{e}$  και η  $\tilde{f}$  είναι δύο ακμές του  $\tilde{X}$  που προβάλλονται στις  $e$  και  $f$  στο  $X$  μέσω της απεικόνισης επικάλυψης  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ . Αν  $t(\tilde{e}) = o(\tilde{f})$  και  $\tilde{e} \neq \tilde{f}^{-1}$  τότε  $t(e) = o(f)$  και  $e \neq f^{-1}$ . Οπότε μπορούμε να θέσουμε την μεταβλητή  $\tilde{w}_{\tilde{e}\tilde{f}} = w_{ef}$ . Ονομάζουμε τον πίνακα που προκύπτει κάνοντας αυτήν την αντικατάσταση για όλες τις μεταβλητές του  $\tilde{W}$   $X$ -εξειδικευμένο πίνακα ακμών και θα τον συμβολίζουμε με  $\tilde{W}_{spec}$ .

**Θεώρημα 5.3.3** (Βασικές ιδιότητες των Artin  $L$ -συναρτήσεων ακμών). Υποθέτουμε ότι το  $\tilde{X}$  είναι ένα κανονικό αδιακλάδιστο κάλυμμα του  $X$ . Τότε:

- (i) Η  $L$ -συνάρτηση ακμών που αντιστοιχεί στην τετριμμένη αναπαράσταση είναι η  $\zeta$ -συνάρτηση ακμών

$$L_E(W, 1, \tilde{X}/X) = \zeta_E(W, X).$$

- (ii) Η  $\zeta$ -συνάρτηση ακμών του  $\tilde{X}$  παραγοντοποιείται ως εξής σε γινόμενο  $L$ -συναρτήσεων ακμών:

$$\zeta_E(\tilde{W}_{spec}, X) = \prod_{\rho \in \tilde{G}} L_E(W, \rho)^{d_\rho}$$

όπου το γινόμενο είναι πάνω από όλες τις μη ισοδύναμες ανάγωγες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της ομάδας Galois  $\text{Gal}(\tilde{X}/X)$  και  $d_\rho$  ο βαθμός της κάθε  $\rho$  αντίστοιχα.

- (iii) Έστω  $m = |E|$  ο αριθμός των μη κατευθυνόμενων ακμών του  $X$ . Αν η αναπαράσταση  $\rho$  του  $G$  έχει βαθμό  $d$ , ορίζουμε τον  $2dm \times 2dm$  **Artin πίνακα** ακμών  $W_\rho$  να έχει block μορφή

$$(W_\rho)_{e,f} = (W)_{e,f} \cdot \rho(\sigma(e)) = \begin{cases} w_{ef} \rho(\sigma(e)) & \text{αν } t(e) = o(f) \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $\sigma(e)$  είναι ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius όπως τον ορίσαμε στον ορισμό 4.4.1 που αντιστοιχεί στην ακμή  $e$ . Τότε

$$L_E(W, \rho, Y/X) = \det(I - W_\rho)^{-1}.$$

*Απόδειξη.* (i) Προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς

- (ii) Αποδεικνύεται αντίστοιχα με την πρόταση για τις  $L$ -συναρτήσεις 5.2.2, δηλαδή χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.1.2 και τα μέρη (ii),(iv) του επόμενου θεωρήματος.

(iii) Το αποδεικνύουμε παρακάτω στην σελίδα 75. □

**Θεώρημα 5.3.4** (Περισσότερες ιδιότητες των Artin L-συναρτήσεων ακμών). Υποθέτουμε ότι το  $Y/X$  είναι ένα αδιακλάδιστο κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois  $G$ . Τότε:

- (i) Αν εξειδικεύσουμε την μη μηδενική μεταβλητή  $w_{ij}$  σε  $u$  η Artin L-συνάρτηση ακμών  $L_E(W, \rho)$  εξειδικεύεται στην Artin L-συνάρτηση ακμών  $L_E(u, \rho)$
- (ii)  $L_E(W, \rho_1 \oplus \rho_2) = L_E(W, \rho_1)L_E(W, \rho_2)$ .
- (iii) Αν  $\tilde{X}$  είναι ενδιάμεσο στο  $Y/X$ , τότε  $G = \text{Gal}(Y/X)$  και  $H = \text{Gal}(Y/\tilde{X})$  και  $H = \text{Gal}(\tilde{X}/X)$ . Υποθέτουμε ότι το  $\tilde{X}/X$  είναι κανονικό. Έστω  $\rho$  μία αναπαράσταση της  $G/H \cong \text{Gal}(\tilde{X}/X)$ . Μπορούμε να δούμε την  $\rho$  ως μία αναπαράσταση της  $G$  (την ανύψωση της  $\rho$ ). Τότε:

$$L_E(W, \rho, Y/X) = L_E(W, \rho, \tilde{X}/X).$$

- (iv) (Επαγωγική ιδιότητα) Υποθέτουμε ότι η  $H$  είναι οποιαδήποτε υποομάδα της  $G$ . Έστω ότι  $\tilde{X}$  το ενδιάμεσο κάλυμμα στο  $Y/X$  που αντιστοιχεί στην  $H$ . Έστω  $\rho$  μία αναπαράσταση της  $H$  και  $\rho^\#$  η αναπαράσταση της  $G$  που επάγεται από την  $\rho$ . Τότε έχουμε ότι

$$L_E(W_{\text{spec}}, \rho, Y/\tilde{X}) = L_E(W, \rho^\#, Y/X).$$

Απόδειξη. (i) Προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς

- (ii) Αποδεικνύεται όμοια με το (i) του θεωρήματος 5.2.1
- (iii) Αποδεικνύεται όμοια με το (ii) του θεωρήματος 5.2.1
- (iv) την επαγωγική ιδιότητα θα την αποδείξουμε παρακάτω στην σελίδα 80 □

**Παραδείγμα 5.3.1.** Οι L-συναρτήσεις ακμών του κύβου ως κάλυμμα του αλτήρα (σχήμα 4.6). Οι L-συναρτήσεις ακμών για τις αναπαραστάσεις της ομάδας Galois του  $Y/X$  που είναι η  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , χρειάζονται τον πίνακα  $W$  που έχει είσοδο την  $w_{ij}$  όπου  $t(e_i) = o(e_j)$ . Για τις ετικέτες των ακμών του αλτήρα βρίσκουμε ότι ο πίνακας  $W$  δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & w_{33} & 0 & w_{35} & 0 \\ 0 & w_{42} & 0 & w_{44} & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{65} & w_{66} \end{pmatrix}.$$

Στην συνέχεια χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τον  $\sigma(e_i)$  για κάθε ακμή  $e_i$ , όπου  $\sigma(C)$  δηλώνει τον κανονικοποιημένο αυτομορφισμό Frobenius. Θα γράψουμε την ομάδα Galois  $G(Y/X)$  ως  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ , όπου  $(x, \sigma_j) = x^{(j)}$  για  $x \in X$ . Μέσω της ταύτισης της  $G$  με την  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  που στέλνει τον  $\sigma_j$  στο  $(j-1 \pmod{4})$ . Οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία της ομάδας Galois που αντιστοιχούν στις

ακμές ως,  $\sigma(e_1) = \sigma_2, \sigma(e_2) = \sigma_1, \sigma(e_3) = \sigma_2$ . Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας μας είναι μονοδιάστατες και δίνονται από τις  $\chi_a(\sigma_b) = i^{a(b-1)}$  για  $a, b \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
L_E(W, \chi_0, Y/X) &= \zeta_E(W, X)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} w_{11} - 1 & w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & w_{33} - 1 & 0 & w_{35} & 0 \\ 0 & w_{42} & 0 & w_{44} - 1 & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{65} & w_{66} - 1 \end{pmatrix} \\
L_E(W, \chi_1, Y/X) &= \det(I - W_{\chi_1}) \\
&= \begin{pmatrix} iw_{11} - 1 & iw_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & iw_{33} - 1 & 0 & w_{35} & 0 \\ 0 & w_{42} & 0 & -iw_{44} - 1 & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -iw_{65} & -iw_{66} - 1 \end{pmatrix} \\
L_E(W, \chi_2, Y/X) &= \det(I - W_{\chi_2}) \\
&= \begin{pmatrix} -w_{11} - 1 & -w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & -w_{33} - 1 & 0 & -w_{35} & 0 \\ 0 & -w_{42} & 0 & -w_{44} - 1 & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{65} & -w_{66} - 1 \end{pmatrix} \\
L_E(W, \chi_3, Y/X) &= \det(I - W_{\chi_3}) \\
&= \begin{pmatrix} -iw_{11} - 1 & -iw_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & -iw_{33} - 1 & 0 & -iw_{35} & 0 \\ 0 & iw_{42} & 0 & iw_{44} - 1 & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & iw_{65} & iw_{66} - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι από το μέρος (ii) του θεωρήματος 5.3.3 το γινόμενο των τεσσάρων οριζουσών των προηγούμενων  $6 \times 6$  πινάκων πρέπει να είναι η ορίζουσα ενός  $24 \times 24$  πίνακα:

$$\det(I - \tilde{W}_{spec}) = \prod_{i=0}^3 \det(I - W_{\chi_i}),$$

όπου ο  $\tilde{W}_{spec}$  προκύπτει εξειδικεύοντας τον πίνακα ακμών του κύβου ως εξής: Για τις μεταβλητές των ακμών του αλτήρα, γράφουμε

$$a = w_{11}, b = w_{12}, c = w_{23}, d = w_{26}, e = w_{33}, f = w_{35},$$

$$g = w_{42}, h = w_{44}, j = w_{51}, k = w_{54}, m = w_{65}, n = w_{66}.$$

Χρησιμοποιώντας την φυσική διάταξη των ακμών του  $Y$  δηλαδή την  $e'_1, e''_1, e_1^{(3)}, e_1^{(4)}, e'_2, e''_2, e_2^{(3)}, e_2^{(4)}, e'_3, e''_3, e_3^{(3)}, e_3^{(4)}$ , και τις αντίστροφες τους με την ίδια διάταξη ο πί-



έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \log L_E(W, \rho, Y/X) &= \sum_C \frac{\text{Tr} \rho(C)}{v(C)} N_E(C) \\
 &= \sum_m \frac{1}{m} \text{Tr} W_\rho^m = \text{Tr}(\log(I - W_\rho)^{-1}) \\
 (5.4) \qquad \qquad \qquad &= \log \det((I - W_\rho)^{-1}).
 \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του μέρους (iii) του Θεωρήματος 5.3.3  $\square$

### Η απόδειξη του Θεωρήματος του Bass για τις Artin $L$ -συναρτήσεις

Δίνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.6 για τις Artin  $L$ -συναρτήσεις. Πρέπει να γενικεύσουμε πρώτα τους πίνακες που χρησιμοποιήσαμε στην πρόταση 1.2.10. Για μία αναπαράσταση  $\rho$  της ομάδας Galois  $G(Y/X)$ , έστω  $d_\rho$  ο βαθμός (δηλαδή το μέγεθος των πινάκων  $\rho(G)$ ). Όταν γράφουμε το ταυστικό γινόμενο  $B \otimes C$  για τον  $p \times p$  πίνακα  $B$  και τον  $r \times r$  πίνακα  $C$  εννοούμε τον  $pr \times pr$  πίνακα με block αναπαράσταση την

$$B \otimes C = \begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1p}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}C & \cdots & b_{pp}C \end{pmatrix}.$$

**Ορισμός 5.3.5.** Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των αρχικού, τελικού και  $J$  πινάκων που δόθηκε στην πρόταση 1.2.10, ορίζουμε τους **Artinized αρχικό**, **τελικό** και  **$J$  πίνακες** ως εξής

$$S_\rho = S \otimes I_{d_\rho}, \quad T_\rho = T \otimes I_{d_\rho}, \quad J_\rho = J \otimes I_{d_\rho}$$

**Ορισμός 5.3.6.** Ορίζουμε τον  $2md_\rho \times 2md_\rho$  block διαγώνιο  $R$ -πίνακα  $R_\rho$  να είναι ο

$$(5.5) \quad R_\rho = \begin{pmatrix} \rho(\sigma(e_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho(\sigma(e_{2m})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$$

όπου οι  $e_1, \dots, e_{2m}$  είναι η αρίθμηση που έχουμε δώσει στις κατευθυνόμενες ακμές του  $X$ . Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι  $\sigma(e)^{-1} = \sigma(e^{-1})$  για τον κανονικοποιημένο αυτομορφισμό Frobenius.

Στην επόμενη πρόταση ο  $W_{1,\rho}$  είναι ο Artinized πίνακας γειτνίασης του ορισμού 5.1.2 και ο  $A_\rho$  είναι ο Artinized πίνακας γειτνίασης που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση  $\rho$  του ορισμού 5.2.4

### Πρόταση 5.3.7 (Ιδιότητες των πινάκων).

- (i)  $W_{1,\rho} = R_\rho(W_1 \otimes I_d)$ .
- (ii)  $A_\rho = S_\rho R_\rho T_\rho^t$ .
- (iii)  $S_\rho J_\rho = T_\rho$ ,  $T_\rho J_\rho = S_\rho$ ,  $Q_\rho + I_{n_{d_\rho}} = S_\rho S_\rho^t = T_\rho T_\rho^t$ .
- (iv)  $A_{1,\rho} + R_\rho J_\rho = R_\rho T_\rho^t S_\rho$ .

$$(v) (R_\rho J_\rho)^2 = I_{2|E|d}.$$

Απόδειξη. (i) Προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τους πίνακες σε block μορφή θέτοντας  $W_1 = B$  με εισόδους  $b_{e,f}$ :

$$\begin{aligned} (W_{1,\rho})_{e,f} &= \rho(\sigma(e))(W_1)_{ef} \\ &= \left( \begin{pmatrix} \rho(\sigma(e_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho(\sigma(e_{2m})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{e_1,e_1}I_{d_\rho} & \cdots & b_{e_1,e_{2m}}I_{d_\rho} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{e_{2m},e_1}I_{d_\rho} & \cdots & b_{e_{2m},e_{2m}}I_{d_\rho} \end{pmatrix} \right)_{e,f} \end{aligned}$$

(ii) Θέτουμε  $d = d_\rho$ . Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} S_\rho R_\rho T_\rho^t &= (S \otimes I_d) = \begin{pmatrix} \rho(\sigma(e_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho(\sigma(e_{2m})) \end{pmatrix} (T \otimes I_d)^t \\ &= \begin{pmatrix} s_{11}I_d & \cdots & s_{1,2m}I_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1}I_d & \cdots & s_{n,2m}I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(\sigma(e_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho(\sigma(e_{2m})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11}I_d & \cdots & t_{1,2m}I_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}I_d & \cdots & t_{n,2m}I_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

οπότε από το block που αντιστοιχεί στις κορυφές  $a, b$  του  $X$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} (S_\rho R_\rho T_\rho^t)_{a,b} &= (S \otimes I_d)_{a,b} = \sum_e s_{a,e} \rho(\sigma(e)) t_{b,e} = \sum_g \in G \rho(g) \sum_{e, \sigma(e)=g} s_{a,e} t_{b,e} \\ &= \sum_{g \in G} (A(g))_{a,b} \rho(g) = (A_\rho)_{a,b}. \end{aligned}$$

και το ζητούμενο προκύπτει.

(iii) Η απόδειξη προκύπτει από τον παρακάτω υπολογισμό:

$$\begin{aligned} (S_\rho J_\rho)_{v,e} &= \left( \begin{pmatrix} s_{11}I_d & \cdots & s_{1,2m}I_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1}I_d & \cdots & s_{n,2m}I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_m \otimes I_d \\ I_m \otimes I_d & 0 \end{pmatrix} \right)_{v,e} = (T)_{v,e}, \\ (S_\rho S_\rho^t)_{a,b} &= \sum_e s_{a,e} I_d s_{b,e} I_d = (\# \text{ακμών με αρχή την } a) \times \delta_{a,b} I_d = (Q + I)_{a,b} I_d. \end{aligned}$$

(iv) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (R_\rho T_\rho S_\rho)_{e,f} &= \left( \begin{pmatrix} \rho(\sigma(e_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho(\sigma(e_{2m})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11}I_d & \cdots & t_{1,2m}I_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}I_d & \cdots & t_{n,2m}I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11}I_d & \cdots & s_{1,2m}I_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1}I_d & \cdots & s_{n,2m}I_d \end{pmatrix} \right)_{e,f} \\ &= \sum_v \rho(\sigma(e)) t_{v,e} s_{v,f} I_d = \rho(\sigma(e))(W_1)_{e,f} + \rho(\sigma(e)) J_{e,f}. \end{aligned}$$

όπου στο άθροισμα  $t(e) = o(f) = v$ . Ο δεύτερος όρος μετά το τελευταίο ίσον αντιστοιχεί στην περίπτωση που  $f = e^{-1}$ , όπου  $(W_1)_{e,f} = 0$ .

(v) Για να αποδείξουμε αυτό απλά παρατηρούμε ότι :

$$\left( \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & U \\ U^{-1} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

□

Είναι εύκολο να ελέγξουμε τις παρακάτω σχέσεις

**Πρόταση 5.3.8** (Βασικοί τύποι της απόδειξης του Θεωρήματος 5.2.6).

$$(i) \quad \begin{pmatrix} I_{nd} & 0 \\ R_\rho T_\rho^t & I_{2nd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{nd}(1-u^2) & 0 \\ 0 & I_{2md} - uW_{1,\rho} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} I_{nd} - A_\rho + Q_\rho u^2 & S_\rho u \\ 0 & I_{2md} + R_\rho J_\rho u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{nd} & 0 \\ R_\rho^t T_\rho - S_\rho^t u & I_{2md} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$I_{2md} + R_\rho J_\rho u = \begin{pmatrix} I_{md} & Uu \\ U^{-1}u & I_{md} \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} I_{md} & 0 \\ -U^{-1}u & I_{md} \end{pmatrix} (I_{2md} + R_\rho J_\rho u) = \begin{pmatrix} I_{md} & Uu \\ 0 & I_{md}(1-u^2) \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 5.2.6

Απόδειξη. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι

$$L(u, \rho, Y/X)^{-1} = (1-u^2)^{(r-1)d} \det(I_{nd} - A_\rho u + Q_\rho u^2).$$

Από το θεώρημα 5.1.3 έχουμε

$$L(u, \rho, Y/X)^{-1} = \det(I - uW_{1,\rho})$$

Οπότε χρειάζεται να δείξουμε ότι

$$\det(I_{2md} - uW_{1,\rho}) = (1-u^2)^{(r-1)d} \det(I_{nd} - A_\rho u + Q_\rho u^2).$$

Παίρνοντας ορίζουσες στα δύο μελη της πρώτης εξίσωσης της πρότασης 5.3.8 έχουμε

$$(1-u^2)^{nd} \det(I_{2md} - uW_{1,\rho}) = \det(I_{nd} - A_\rho u + Q_\rho u^2) \det(I_{2md} + R_\rho J_\rho u).$$

Από τα μερη 2 και 3 της πρότασης 5.3.8 έχουμε ότι

$$\det(I_{2md} + R_\rho J_\rho u) = (1-u^2)^{md}.$$

Το Θεώρημα ακολουθεί από το ότι  $m - n = r - 1$ . □

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την επαγωγική ιδιότητα των Artin  $L$ -συναρτήσεων ακμών δηλαδή το μέρος 4 του Θεωρήματος 5.3.4

**Λήμμα 5.3.9.** Έστω ότι το  $Y/X$  είναι κανονικό κάλυμμα με ομάδα Galois  $G$  και  $H$  μία υποομάδα της  $G$  που αντιστοιχεί σε ένα ενδιάμεσο κάλυμμα  $\tilde{X}$ . Έστω  $\chi = \text{Tr}$  ο χαρακτήρας μίας αναπαράστασης της  $H$  και  $\chi^\# = \text{Tr Ind}_H^G \rho$  ο αντίστοιχος επαγόμενος χαρακτήρας της  $G$ . Για κάθε πρώτο  $[C]$  του  $X$ , έχουμε

$$(5.6) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi^\#(\sigma(C)^j) N_E(C)^j = \sum_{[\tilde{C}]|[C]} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi(\tilde{\sigma}(\tilde{C})^j) N_E(\tilde{C})_{\text{spec}}^j,$$

όπου  $\sigma(C) \in G$  είναι ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius που αντιστοιχεί στο  $C$  στο  $X$  και  $\tilde{\sigma}(\tilde{C}) \in H$  ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius που αντιστοιχεί στο  $\tilde{C}$  στο  $\tilde{X}$ . Ο  $X$ -εξειδικευμένος πίνακας ακμών στην νόρμα στα δεξιά είναι από τον ορισμό 5.3.2.



Απόδειξη. Έστω  $D_1$  να είναι το πρώτο μονοπάτι του  $Y$  πάνω από το  $C$  που ξεκινά στο φύλλο-1. Τότε  $\sigma(C) = [Y/X, D_1]$ . Χρησιμοποιώντας τον αυτομορφισμό του Frobenius για τον επαγόμενο χαρακτήρα (3.1.3), έχουμε

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi^{\#}(\sigma(C^j)) N_E(C)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{g \in G \\ (g\sigma(C)g^{-1})^j \in H}} \frac{1}{j|H|} \chi((g\sigma(C)g^{-1})^j) N_E(C)^j$$

κάθε πρώτος  $[D]$  του  $Y$  πάνω από το  $[C]$  έχει την μορφή  $D = g \circ D_1$  και συμβαίνει για  $f = f(D, Y/X)$  στοιχεία της  $G$ , όπου το  $f$  είναι ο βαθμός του  $D$  ως προς το  $Y/X$  όπως δίνεται στον ορισμό 4.3.1. Από την πρόταση 4.4.5 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j|H|} \sum_{\substack{g \in G \\ (g\sigma(C)g^{-1})^j \in H}} \chi((g\sigma(C)g^{-1})^j) N_E(C)^j \\ &= \sum_{[D]||[C]} \sum_{\substack{j \geq 1 \\ [Y/X, D]^j \in H}} \frac{f}{j|H|} \chi([Y/X, D]^j) N_E(C)^j. \end{aligned}$$

Ομαδοποιούμε τους διαφορούς  $D$  πάνω από το  $C$  σε αυτούς που είναι πάνω από το  $\tilde{C}$  και στην συνέχεια αθροίζουμε πάνω από τα  $\tilde{C}$ . Για ένα συγκεκριμένο  $\tilde{C}$ , όλα τα  $D$  που διαιρούν το  $\tilde{C}$  έχουν την ίδια ελάχιστη δύναμη  $j = f_1 = f(\tilde{C}, \tilde{X}/\tilde{X})$  έτσι ώστε  $[Y/X, D]^j \in H$ . Αυτή η δύναμη δίνει τον αυτομορφισμό του Frobenius του  $D$  ως προς το  $Y/\tilde{X}$  και από το θεώρημα 4.4.6 το τελευταίο διπλό άθροισμα ισούται με

$$\sum_{[\tilde{C}]||[C]} \sum_{[D]||[\tilde{C}]} \sum_{j \geq 1} \frac{f}{f_1 j |H|} \chi([Y/\tilde{X}, D]^j) N_E(C)^{f_1 j}.$$

Για όλα τα  $[D]||[\tilde{C}]$ , οι  $[Y/\tilde{X}, D]$  είναι μεταξύ τους συζυγείς στην  $H$  και υπάρχουν  $g_2$  τέτοια  $D$ , όπου  $g_2 f_2 = |H|$ . Εδώ  $f_2 = f(D, Y/\tilde{X})$  και  $g_2 = g(D, Y/\tilde{X})$ . Συνεπώς αν διαλέξουμε ένα συγκεκριμένο  $D$  πάνω από το  $\tilde{C}$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{[D]||[\tilde{C}]} \sum_{j \geq 1} \frac{f}{f_1 j |H|} \chi([Y/\tilde{X}, D]^j) N_E(C)^{f_1 j} &= \sum_{j \geq 1} \frac{f g_2}{f_1 j |H|} \chi([Y/\tilde{X}, D]^j) N_E(C)^{f_1 j} \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \chi([Y/\tilde{X}, D]^j) N_E(C)^{f_1 j}. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται βάζοντας την αλυσίδα των ισοτήτων μαζί και χρησιμοποιώντας ότι

$$N_E(C)^{f_1} = N_E(\tilde{C})_{\text{spec}}.$$

□

**Πόρισμα 5.3.10.** Έστω  $Y/X$  κανονικό με ομάδα Galois  $G$  και  $H$  μία υποομάδα της  $G$  που αντιστοιχεί σε ένα ενδιάμεσο κάλυμμα  $\tilde{X}$ . Έστω  $\chi_1^{\#}$  ο χαρακτήρας της αναπαράστασης της  $G$  που επάγεται από την τετριμμένη αναπαράσταση 1 της  $H$ . Τότε ο αριθμός των πρώτων  $[C]$  του  $\tilde{X}$  πάνω από έναν πρώτο  $[C]$  του  $X$  με μήκος  $v(\tilde{C}) = v(C)$  είναι  $\chi_1^{\#}(\sigma(C))$ , όπου  $\sigma(C)$  είναι ο κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius. Αυτό σημαίνει ότι  $\chi_1^{\#}(\sigma(C))$  είναι ο αριθμός των πρώτων του  $\tilde{X}$  με βαθμό αδράνειας 1.

*Απόδειξη.* Θέτουμε  $\chi = \chi_1$  στο λήμμα 5.3.9 και θέτουμε κάθε μη μηδενική μεταβλητή ακμών  $w_{ij}$  ίση με  $u$ . Οπότε  $N_E(C) = u^{v(C)}$  και  $N_E(\tilde{C})_{spec} = u^{v(\tilde{C})}$ . Συνεπώς από την εξίσωση (5.6) ο συντελεστής στο αριστερό μέρος της εξίσωσης του  $u^{v(C)}$  για  $j = 1$  είναι  $\chi^\#(\sigma(C))$ . Ο συντελεστής του  $u^{v(C)}$  στο δεξί μέλος είναι ο αριθμός των  $[\tilde{C}]$  πάνω από το  $[C]$  με  $v(\tilde{C}) = v(C)$  αφού  $\chi_1 = 1$ .  $\square$

Το τελευταίο πορίσμα μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε μη ισόμορφα γραφήματα με την ίδια Ihara ζ-συνάρτηση [39].

*Απόδειξη της ιδιότητας της επαγωγής των  $L$ -συναρτήσεων (θεώρημα 5.3.4).* ) Από τον ορισμό των  $L$ -συναρτήσεων ακμών για το  $Y/X$  έχουμε

$$\log(L_E(W, \rho^\#, Y/X)) = \sum_{[C]} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi^\#(\sigma(C)^j) N_E(C)^j.$$

Εφαρμόζουμε το λήμμα 5.3.9 στο δεξί μέλος και παίρνουμε

$$\sum_{[\tilde{C}]} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi(\tilde{\sigma}(\tilde{C})^j) N_E(\tilde{C})_{spec}^j$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω από όλους τους πρώτους  $\tilde{C}$  του  $\tilde{X}$  και  $\tilde{\sigma}(\tilde{C})$  είναι ο αντίστοιχος κανονικοποιημένος αυτομορφισμός Frobenius της  $H$ . Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας τον ορισμό των  $L$ -συναρτήσεων ακμών για το  $Y/\tilde{X}$ .  $\square$

# Βιβλιογραφία

- [1] N. Alon, *Eigenvalues and expanders*, *Combinatorica*, 6(2):83-96, (1986).
- [2] N. Alon and F.R.K. Chung, *Explicit construction of linear sized tolerant networks*, *Discrete Math.*, 72, 15-19 (1989).
- [3] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, (1976) Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-90163-9
- [4] N. Alon and V. D. Milman,  $\lambda_1$ , *isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators*, *J. Combin. Theory Ser. B*, 38(1):73-88, 1985.
- [5] Artin, Michael; Mazur, Barry *On periodic points*, *Annals of Mathematics. Second Series (Annals of Mathematics)* 81 (1): 82-99 (1965).
- [6] Alireza Salehi Golsefidy, *affine sieve and expanders*, to be published in *Proceedings of MSRI* (2013)
- [7] H. Bass *The Ihara -Selberg zeta function of a tree lattice*, *Int. J. Math.* (3) 717-797 (1992).
- [8] Yonatan Bilu and Nathan Linial *Lifts, discrepancy and nearly optimal spectral gap*, *Combinatorica*, 26(5):495-519, (2006)
- [9] Emmanuel Breuillard, Ben Green, Robert Guralnick, Terence Tao *Expansion in finite simple groups of Lie type* arxiv 1309.1975 (2013)
- [10] Bourgain Jean, Gamburd Alex, Sarnak, Peter *Sieving and expanders*, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343 (2006), no. 3, 155-159.
- [11] P. Buser *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces* Modern Birkhäuser Classics, Springer N. York.
- [12] F.R.K Chung, *Spectral Graph Theory*, CBMS Regional Conf. Series in Math., vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, (1996).
- [13] Debra L. Czarnecki, *Zeta Functions of Finite Graphs*, PhD thesis, LSU, (2005).
- [14] A. Connes *Noncommutative Geometry and the Riemann zeta function* *Mathematics: Frontiers and Perspectives 2000*. IMU, AMS, V. Arnold et al Editors (2000), 35-55.
- [15] C. Deninger *Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces* *Doc. Math. J. DMV. Extra Volume ICM I* (1998), 23-46

- [16] Deligne Pierre, *La conjecture de Weil. I.*, Publications Mathematiques de l'IHES 43: 273-307 (1974).
- [17] J. Dodziuk *Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks*, Trans. Amer. Math. Soc., 284(2):787-794, 1984.
- [18] Dominique Foata , Doron Zeilberger, *A combinatorial proof of Bass's evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for graphs* , Trans. Math. Soc. 351 (1999), 2257-2274.
- [19] J. Friedman, *A proof of Alon's second eigenvalue problem*, Mem. Amer. Math. Soc., vol/ 195, no. 910, Amer. Math. Soc., Providence, (2008).
- [20] F. Harrary *The determinant of the adjacency matrix of a graph*, SIAM Rev. (4) 202-210 (1962).
- [21] M.D. Horton, *Ihara zeta functions of irregular graphs*, PhD thesis, University of California, San Diego, (2006).
- [22] Matthew D. Horton, H. M. Stark, and Audrey A. Terras, *What are zeta functions of graphs and what are they good for? In Quantum graphs and their applications*, volume 415 of Contemp. Math., pages 173-189. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [23] Yasutaka Ihara, *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields*(1966) J. Math. Soc. Japan 18: 219-235.
- [24] M. Kotani, T. Sunada, *Zeta functions of finite graphs*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7-25 (2000).
- [25] Lubotzky, *Expander Graphs in Pure and Applied Mathematics*, arxiv:1105.2389 (2011)
- [26] A. Marcus, D. Spielman, N. Srivastava *Interlacing Families I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees*, arxiv:1304.4132 (2013).
- [27] H.P. McKean *Selberg's Trace Formula as Applied to a Compact Riemann Surface* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXV, 225-246 (1972)
- [28] S.J. Miller, T. Novikoff and A. Sabelli, *The distribution of the largest non-trivial eigenvalues in families of random regular graphs*, Experimental Math. 17(2)231-244 (2008).
- [29] Moshe Morgenstern, *Existence and Explicit Constructions of  $q+1$  Regular Ramanujan Graphs for Every Prime Power  $q$* . J. Combinatorial Theory, Series B 62: 44-62 (1994).
- [30] Artin, Michael; Mazur, Barry *On periodic points*, Annals of Mathematics. Second Series (Annals of Mathematics) 81 (1): 82-99 (1965).
- [31] Alexander Lubotzky, Ralph Phillips, Peter Sarnak, *Ramanujan graphs*, Combinatorica 8 (3): 261-277 (1988).

- 
- [32] *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse. Bernhard Riemann [Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.]* Transcribed by D. R. Wilkins Preliminary Version: December 1998
- [33] D. Ruelle, *Dynamical Zeta functions for piecewise Monotone Maps of the Interval*, Amer. Math. Soc., Providence (1994).
- [34] Selberg, Atle *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, (1956) J. Indian Math. Soc. (N.S.) 20: 47-87, MR0088511
- [35] C. Storm, *Extending the Ihara-Selberg zeta functions to hypergraphs*, PhD thesis, Dartmouth college, (2007).
- [36] C.K. Storm, *Some graph properties determined by edge zeta functions*, arxiv:0708.1923v1[math.CO] 14 August 2007.
- [37] C.Storm, G.Scott, *The coefficients of the Ihara zeta function*, Involve, A Journal of Mathematics , vol. 1, no. 2, pp. 217-233, 2008.
- [38] H. M. Stark and A. A. Terras, *Zeta functions of finite graphs and coverings*, Adv. Math. 121:1 (1996), 124-165. MR 98b:11094 Zbl 0874.11064
- [39] Audrey Terras, *Zeta Functions of Graphs-A stroll through the Garden*, (2011) Cambridge studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-0-11367-0.
- [40] A. Terras, *Fourier Analysis of Finite Groups and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [41] S. Hoory, N. Linial , A. Wigderson, *Expander Graphs and their Applications* Bull. Amer. Math Soc., 43, pp 439–561, 2006.
- [42] A. Weil *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bulletin of the American Mathematical Society 55 (5): (1949), 497-508, doi:10.1090/S0002-9904-1949-09219-4, ISSN 0002-9904, MR 0029393 Reprinted in Oeuvres Scientifiques/Collected Papers by A. Weil ISBN 0-387-90330-5
- [43] Γιάννη Αντωνιάδη, *L-σειρές, έκδοση*, ΕΠΕΑΕΚ «ΠΡΟΜΗΘΕΑΣ» Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο 1999
- [44] Gilbert Strang, *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (1996)