Ηλίας Ανδρέου

Το αντίστροφο πρόβλημα της Θεωρίας του Galois

Μεταπτυχιακή Εργασία

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα 10 Σεπτεμβρίου 2019

Εισηγητής: Αριστείδης Κοντογεώργης

Επιτροπή

Δημήτρης Βάρσος

Μιχάλης Μαλιάκας

Αριστείδης Κοντογεώργης

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois, που πρωτοδιατυπώθηκε στις αρχές του δεκάτου ενάτου αιώνα, είναι ένα κεντρικό πρόβλημα στην άλγεβρα και ειδικότερα στη θεωρία Galois. Στην κλασική του μορφή, αφορά το θέμα της ταξινόμησης των πεπερασμένων ομάδων που προκύπτουν ως ομάδες Galois πολυωνύμων πάνω από το σώμα των ρητών, αλλά το πρόβλημα έχει μελετηθεί πάνω από πολλά διαφορετικά σώματα.

Έχει δειχθεί, για παράδειγμα οτι κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι πραγματοποιήσιμη, προκύπτει, δηλαδή ως ομάδα Galois μιας πεπερασμένης Galois επέκτασης πάνω από το σώμα των ρητών συναρτήσεων με μιγαδικούς συντελεστές $\mathbb{C}(z)$ και θα το αποδείξουμε και εδώ. Γενικότερα, αυτό ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $\mathbb{C}$ με οποιοδήποτε αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής μηδέν.

Η σημασία της μελέτης του προβλήματος πάνω από σώματα συναρτήσεων, έγκειται, εν μέρει, στο ότι μία θετική απάντηση του προβλήματος πάνω από το $\mathbb{Q}(t)$ θα συνεπαγόταν το ίδιο για το $\mathbb{Q}$. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος αναγωγιμότητας του Hilbert, που είναι το θέμα του πρώτου μέρους αυτής της εργασίας.

Στο δεύτερο μέρος, θα δείξουμε την αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των πεπερασμένων Galois επεκτάσεων του $\mathbb{C}(z)$ και των διακλαδισμένων Galois επικαλύψεων της προβολικής σφαίρας, που συνεπάγεται την επίλυση του προβλήματος πάνω από το $\mathbb{C}(z)$. Επιπλέον, εκμεταλευόμενοι αυτό το αποτέλεσμα θα συζητήσουμε τα κριτήρια στερεότητας, τα οποία οδηγούν σε πραγματοποιήσεις πολλών ομάδων πάνω από αριθμητικά σώματα, συμπεριλαμβανομένου και του $\mathbb{Q}$.

Τέλος, για να εδραιώσουμε την αντιστοιχία που αναφέραμε, θα χρειαστούμε το θεώρημα ύπαρξης του Riemann για μερομορφικές συναρτήσεις σε επιφάνειες Riemann, το οποίο θα αποδείξουμε πλήρως στο τρίτο μέρος της εργασίας.

Θέλω να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου και ιδιαίτερα, τους κκ. Αριστείδη Κοντογεώργη, Δημήτρη Βάρσο και Μιχάλη Μαλιάκα για την αμέριστη βοήθεια και την υποστήριξη που μου πρόσφεραν από την πρώτη μέρα μου στη σχολή.

Ηλίας Ανδρέου, Αθήνα 2019.

Κεφάλαιο 1

Το θεώρημα αναγωγιμότητας του Hilbert

Δεν είνα δύσκολο να βρούμε μία επέκταση σωμάτων με δεδομένη ομάδα Galois. Αν μία ομάδα G δρα πιστά σε ένα σύνολο X, μπορούμε απλώς να θεωρήσουμε την επέκταση $\mathbb{Q}(X)/\mathbb{Q}(X)^G$, όπου $\mathbb{Q}(X)^G$ είναι το σταθερό σώμα της G υπό τη δράση της στο $\mathbb{Q}(X)$ που επάγεται μεταθέτοντας τα στοιχεία του X. Φυσικά, με αυτόν τον τρόπο δεν μπορούμε να είμαστε επιλεκτικοί με το σταθερό σώμα. Παρόλα αυτά, για κάποιες ομάδες, αυτό μπορεί να οδηγήσει σε πραγματοποιήσεις πάνω από το $\mathbb{Q}$.

Θεωρήστε, για παράδειγμα τη δράση της συμμετρικής ομάδας $\mathcal{S}_n$ στο σώμα των ρητών συναρτήσεων $\mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n)$ επαγόμενη από την κλασική δράση της $\mathcal{S}_n$ στο σύνολο $\{t_1, \dots, t_n\}$. Όπως ήδη ξέρουμε το σταθερό σώμα της $\mathcal{S}_n$ κάτω από αυτήν τη δράση είναι το $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ όπου τα x_i είναι οι συμμετρικές συναρτήσεις των t_i. Συνεπώς, τα ίδια τα x_i είναι ανεξάρτητα υπερβατικά στοιχεία πάνω από το $\mathbb{Q}$ και μπορούμε να τα δούμε σαν μεταβλητές.

Έχουμε, τώρα, έναν απλό τρόπο να πάρουμε επεκτάσεις του $\mathbb{Q}$ από επεκτάσεις του $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$. Απλώς δίνουμε τιμές στα x_i. Αυτό θα αντιστοιχούσε στο να εξειδικεύσουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου

$$\prod_i (y - t_i) = y^n + x_n y^{n-1} + \cdots + x_2 y + x_1 \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$$

και να δούμε το σώμα ριζών του. Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι τετριμμένη, μιας και το εξειδικευμένο πολυώνυμο μπορεί να είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού n, αλλά από τη συζήτηση πριν από την απόδειξη του θεωρήματος θα φανεί ότι, δεδομένου του αναγώγου, η ομάδα Galois θα πρέπει, επιπλέον, να διατηρείται για άπειρες εξειδικεύσεις.

Μετά την προκαταρκτική συζήτηση, που θα είναι αμιγώς αλγεβρική, θα συνεχίσουμε με την απόδειξη του θεωρήματος στην περίπτωση των δύο μεταβλητών. Η απόδειξη αυτή χρειάζεται κάποια βασική ανάλυση. Για να δώσουμε μια ιδέα γιατί γίνεται αυτό, ας θεωρήσουμε το ανάγωγο πολυώνυμο σε δύο μεταβλητές: $p(x, y) = y^2 - x$. Ποιες ακέραιες εξειδικεύσεις της μεταβλητής x μας δίνουν μη ανάγωγα πολυώνυμα ως προς y; Είναι ακριβώς οι ακέραιοι που είναι τέλεια τετράγωνα (που ξέρουμε ότι δεν είναι όλοι). Και για να το κάνουμε πιο φανταχτερό, είναι οι ακέραιοι στους οποίους η συνάρτηση $y = \sqrt{x}$, που είναι η ρίζα του $p(x, y)$ αν το θεωρήσουμε ως πολυώνυμο ως προς τη μεταβλητή y, παίρνει ακέραιες τιμές. Γενικότερα, οι ρίζες ενός πολυωνύμου σε δύο μεταβλητές μπορούν να οριστούν σαν ολόμορφες συναρτήσεις μίας εκ των μεταβλητών, τουλάχιστον τοπικά, και θα δείξουμε μία πρόταση για την πυκνότητα των ακέραιων τιμών τους που συνεπάγεται το θεώρημα. Μετά θα γενικεύσουμε και το θεώρημα σε περισσότερες μεταβλητές.

1.1 Εξειδικεύοντας τους συντελεστές ενός πολυωνύμου

Λήμμα 1.1.1. *Έστω K/F μια πεπερασμένη επέκταση Galois με ομάδα Galois G. Έστω R ένας υποδακτύλιος του F, που έχει το F ως σώμα πηλίκο. Έστω α ένας γεννήτορας του K πάνω από το F τέτοιος ώστε $f(\alpha) = 0$ για κάποιο μονικό πολυώνυμο $f(y) \in R[y]$ βαθμού $n = [K : F]$. Έστω, τέλος, A ένα πεπερασμένο υποσύνολο του K που να περιέχει το α, αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της G και $S = R[A]$. Τότε υπάρχει $u \neq 0$ in R τέτοιο ώστε για κάθε ομομορφισμό ω από το R σε κάποιο σώμα F' με $\omega(u) \neq 0$ να ισχύουν τα ακόλουθα:*

(1) ο ω επεκτείνεται σε έναν ομομορφισμό $\tilde{\omega} : S \to K'$ όπου K' είναι μια πεπερασμένη επέκταση του F'. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K' παράγεται πάνω από το F' από το $\tilde{\omega}(S)$.

(2) για κάθε τέτοιο $\tilde{\omega}$ το σώμα K' είναι Galois πάνω από το F' και παράγεται από το $\alpha' = \tilde{\omega}(\alpha)$. Έχουμε $f'(\alpha') = 0$, όπου το $f'(y) \in F'[y]$ είναι το πολυώνυμο που παίρνουμε αν εφαρμόσουμε τον ω στους συντελεστές του f. Άρα, $[\mathrm{K}' : F'] = [K : F]$ *αν και μόνο αν το f' είναι ανάγωγο. Σε αυτή την περίπτωση το K' είναι F'-ισόμορφο με το $F'[y]/(f')$.*

(3) Υποθέτουμε τώρα ότι το f' είναι ανάγωγο. Τότε για κάθε $\tilde{\omega}$ όπως στο (1) υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $G \to G' = G(K'/F'), \sigma \mapsto \sigma'$ τέτοιος ώστε $\tilde{\omega}(\sigma(s)) = \sigma'(\tilde{\omega}(s))$ για όλα τα $\sigma \in G, s \in S$.

Απόδειξη. (1) Έστω α' μια ρίζα του $\omega f(y) \in F'[y]$. Θεωρούμε τον ομομορφισμό $\omega' : R[y] \to F'[\alpha']$ που ορίζεται από $y \mapsto \alpha'$ και $\omega'\big|_R = \omega$. Προφανώς, $f(y) \in ker\omega'$ και άρα, έχουμε μια απεικόνιση

$$\omega'' : R[\alpha] \to F'[\alpha']$$

με $\omega''(\alpha) = \alpha'$. Κάθε στοιχείο του A θα γράφεται ως πολυώνυμο του α με συντελεστές στο F αφού $K = F[\alpha]$. Κάθε τέτοιος συντελεστής θα είναι ένα πηλίκο r_1/r_2 με $r_1, r_2 \in R$. Αν $\omega''(r_2) \neq 0$ για κάθε τέτοιο παρονομαστή τότε γνωρίζουμε ότι ο ω'' επεκτείνεται σε έναν ομομορφισμό

$$\tilde{\omega} : U^{-1}R[\alpha] \to F'[\alpha']$$

όπου U είναι το σύνολο αυτών των παρονομαστών. Δεδομένου ότι αυτοί οι συντελεστές είναι πεπερασμένοι το πλήθος, αν u είναι το γινόμενο τους και $\tilde{\omega}(u) \neq 0$ τότε $\tilde{\omega}(r_2) \neq 0$ τότε ικανοποιείται το παραπάνω και έχουμε τον ζητούμενο ομομορφισμό από το $U^{-1}R[\alpha] = S$. Υποθέτουμε ότι $K' = F'[\alpha'] = F'[\tilde{\omega}(S)]$.
(2) Έστω $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ όλες οι ρίζες του $f(y)$. Έχουμε $(y - \tilde{\omega}(\alpha_1)) \ldots (y - \tilde{\omega}(\alpha_n)) = \omega f(y) \in F'[y]$. Συνεπώς, η επέκταση $K' = F'[\alpha']$ είναι Galois αφού παράγεται από όλες τις ρίζες ενός πολυωνύμου με συντελεστές στο F'. Eϊναι $[\mathrm{K}' : F'] = deg(irr_{F'}(\alpha')(y))$ και, αφού $\omega f(\alpha') = 0$, $[K' : F'] = n$ αν και μόνο αν το $\omega f(y)$ είναι ανάγωγο.

(3) Αν το $f' = \omega f$ είναι ανάγωγο τότε τα $\alpha'_i = \tilde{\omega}(\alpha_i)$ είναι όλα συζυγή και υπάρχει μοναδικός αυτομορφίσμός $\sigma'_i \in G(K'/F')$ τέτοιος ώστε $\sigma'_i(\alpha') = \alpha'_i$. Επίσης, διαλέγοντας κατάλληλο $u \in R$ μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το $\omega f(y)$ θα είναι διαχωρίσιμο και άρα τα $\alpha'_i = \tilde{\omega}(\alpha_i)$ θα είναι διαφορετικά ανά δύο. Συνεπώς, η απεικόνιση $G(K/F) \to G(K'/F')$ με $\sigma_i \mapsto \sigma'_i$ όπου $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$ είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός. □

Πρόταση 1.1.2. *Έστω K μια επέκταση Galois του $k(x)$ πεπερασμένου βαθμού $n > 1$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $f(x, y) \in k[x, y]$, μονικό και βαθμού n ως προς y, και γεννήτορας α του K πάνω απο το $k(x)$ με $f(x, \alpha) = 0$. Επιπλέον:*

(i) *για σχεδόν όλα τα $b \in k$ ισχύει το ακόλουθο: Αν το εξειδικευμένο πολυώνυμο $f_b(y) := f(b, y)$ είναι ανάγωγο στο $k[y]$ το σώμα $k[y]/(f_b)$ είναι Galois πάνω από το k με ομάδα Galois ισόμορφη με την $G = G(K/k(x))$.*

(ii) *υποθέτουμε οτι l είναι μια πεπερασμένη επέκταση του k που περιέχεται στο K. Έστω $h(x, y) \in l[x, y]$ ανάγωγο ως πολυώνυμο του y πάνω απο το $l(x)$ και έστω ότι οι ρίζες του περιέχονται στο K. Τότε για όλα σχεδόν τα $b \in K$ ισχύει το ακόλουθο: αν το $f(b, y)$ είναι ανάγωγο στο $k[y]$, τότε το $h(b, y)$ είναι ανάγωγο στο $l[y]$.*

(iii) *Υπάρχει πεπερασμένη συλλογή πολυωνύμων $p_I(x, y) \in k[x][y]$ από ανάγωγα και θετικού βαθμού σαν πολυώνυμα του y πάνω από το $k(x)$ τέτοια ώστε να ισχύει το ακόλουθο: Αν κανένα από τα εξειδικευμένα πολυώνυμα $p_I(b, y) \in k[y]$ δεν έχει ρίζα στο k τότε το $f(b, y)$ είναι ανάγωγο στο $k[y]$.*

Απόδειξη. Αρχικά, έστω F ένα σώμα και R ένας υποδακτύλιος του, που το έχει ως σώμα πηλίκων. Αν α είναι ένα στοιχείο αλγεβρικό πάνω από το F το οποίο ικανοποιεί ένα μονικό πολυώνυμο $p(x) = x^n + (\lambda_{n-1}/\mu_{n-1})x^{n-1} + \dots + (\lambda_1/\mu_1)x \in F[x]$ όπου $\lambda_i, \mu_i \in R$ τότε, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $p(\alpha) = 0$ με $(\mu_1 \dots \mu_{n-1})^n$ βλέπουμε ότι το $\alpha' = \mu_1 \dots \mu_{n-1}\alpha$ είναι ρίζα ενός μονικού πολυωνύμου με συντελεστές από το R. Προφανώς, $F[\alpha'] = F[\alpha]$. Αν $F = k(x)$ και $R = k[x]$ έχουμε, αφού κάθε πεπερασμένη επέκταση του F είναι απλή, οτι υπάρχει $\alpha \in$ K και $f(x, y) \in k[x, y]$ μονικό και βαθμού n ως προς y, τέτοια ώστε K $= k(x)(\alpha)$ και $f(x, \alpha) = 0$.
(i) Θεωρούμε τους ομομορφισμούς εκτίμησης $\varphi_b : k[x] \to k, x \mapsto b$. Από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει μη μηδενικό $u(x) \in k[x]$ τέτοιο ώστε, αν $u(b) \neq 0$ τοτε ο φ_b ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω λήμματος και άρα, αν το $f_b(y)$ είναι ανάγωγο, έχουμε το ζητούμενο. Για κάθε μη μηδενικό $u(x) \in k[x]$,όμως, και σχεδόν όλα τα $b \in k$, $u(b) \neq 0$ και άρα έχουμε το (i).
(ii) Έστω m ο βαθμος του $h(x, y)$ ως προς y και $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ οι ρίζες του ως πολυώνυμο πάνω από το $l(x)$. Εκτός από πεπερασμένα $b \in k$ μπορούμε να επεκτείνουμε τον φ_b και στα $\beta_1, \dots, \beta_m$. Αφού το $h(x, y)$ είναι ανάγωγο πάνω από το $l(x)$ τότε η $Gal(K/l(x))$ δρα μεταβατικά στις ρίζες $\beta_1, \dots, \beta_m$. Οι αντίστοιχοι, μέσω του ισομορφισμού σ του παραπάνω λήμματος, αυτομορφισμοί της $Gal(K'/k)$ όπου $K' = k[y]/(f_b)$ θα δρουν μεταβατικά στα $\varphi_b(\beta_1), \dots, \varphi_b(\beta_m)$ τις ρίζες, δηλαδή, του $h(b, y)$. Αυτοί οι αυτομορφισμοί είναι ακριβώς η $Gal(K'/l)$ και, συνεπώς, το $h(b, y)$ θα είναι ανάγωγο στο $l(x)$.
(iii) Ένα πολυώνυμο για να είναι ανάγωγο θα πρέπει κάθε υποσύνολο των ριζών του να μην έχει όλες τις συμμετρικές παραστάσεις του στο k. Άρα, αν θεωρήσουμε, για ένα ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in R[x]$ τα ανάγωγα πολυώνυμα των συμμετρικών αυτών παραστάσεων και έχουμε ένα ομομορφισμό $\omega : R \to F$ όπως στο Λήμμα 1.1.1 τότε αν οι εικόνες αυτών των πολυωνύμων μέσω του ω δεν έχουν ρίζα στο F, το $\omega f(x) \in F[x]$

θα είναι ανάγωγο. Εφαρμόζοντας το αυτό, όπου για ω θεωρούμε τον ομομορφισμό φ_b του *(ii)* έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 1.1.1. *Για ένα σώμα k τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(1) για κάθε ανάγωγο πολυώνυμο δύο μεταβλητών $f(x, y) \in K[x, y]$ με βαθμό ως προς $y \geq 1$ υπάρχουν άπειρα $b \in K$ τέτοια ώστε το εξειδικευμένο πολυώνυμο μιας μεταβλητής $f(b, y)$ να είναι ανάγωγο.

(2) για μια πεπερασμένη επέκταση l/k και πολυώνυμα $h_1(x, y), \dots, h_m(x, y) \in l[x][y]$ ανάγωγα ως πολυώνυμα του y πάνω από το $l(x)$ υπάρχουν άπειρα $b \in k$ τέτοια ώστε τα εξειδικευμένα πολυώνυμα $h_1(b, y), \dots, h_m(b, y)$ να είναι ανάγωγα στο $l[y]$.

(3) για κάθε $p_1(x, y), \dots, p_t(x, y) \in k[x][y]$ ανάγωγα και βαθμού > 1 σαν πολυώνυμα πάνω απο το $k(x)$ υπάρχουν άπειρα $b \in k$ τέτοια ώστε κανένα απο τα εξειδικευμένα πολυώνυμα $p_1(b, y), \dots, p_t(b, y)$ να μην έχει ρίζα στο k.

Απόδειξη. $(1) \implies (2)$ Όπως στην παραπάνω πρόταση απλώς επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού του φ_b να περιέχει τις ρίζες των $h_i(x, y)$. Η $(2) \implies (3)$ και $(3) \implies (1)$ φαίνονται, επίσης, από την προηγούμενη πρόταση. $\square$

Ορισμός 1.1.2. *Ένα σώμα που ικανοποιεί μία από τις ιδιότητες του θεωρήματος 1.1.1., λέγεται **Hilbertian** ή σώμα **Hilbert**.*

1.2 Το $\mathbb{Q}$ είναι Hilbertian

Θα δείξουμε τώρα οτι το $\mathbb{Q}$ είναι Hilbertian μέσω του (3) του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ θετικού βαθμού n ως προς y. Έστω $c_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε το πολυώνυμο $f(c_0, y) \in \mathbb{C}[y]$ να είναι διαχωρίσιμο βαθμού n. Τότε υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις $\psi_1, \dots, \psi_n$ ορισμένες σε μια περιοχή U του c_0 τέτοιες ώστε για κάθε $c \in U$ το πολυώνυμο $f(c, y)$ να έχει τις διακεκριμένες ρίζες $\psi_1(c), \dots, \psi_n(c)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι εφαρμογή του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης για μιγαδικές συναρτήσεις. Αφού το $f(c_0, y)$ είναι διαχωρίσιμο τότε

$$(\partial f/\partial y)(c_0, \gamma_i) \neq 0$$

για όλες τις ρίζες γ_i του $f(c_0, y)$. Άρα, για κάθε γ_i υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση ψ_i ορισμένη γύρω από το c_0 με $\psi(c_0) = \gamma_i$ και τέτοια ώστε, για (c, d) σε μια περιοχή του (c_0, γ_i), αν $f(c, d) = 0$ τότε $d = \psi_i(c)$. Αυτές είναι οι ζητούμενες συναρτήσεις. $\square$

Ορισμός 1.2.2. *Ένα υποσύνολο* M *των φυσικών αριθμών λέγεται **sparse** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός κ με $0 < \kappa < 1$ τέτοιος ώστε $|M \cap \{1, \dots, N\}| \leq N^k$ για σχεδόν όλους τους φυσικούς* N.

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω $i_0 \in \mathbb{Z}$ και*

$$\varphi(t) = \sum_{i=i_0}^{\infty} \alpha_i t^i$$

μια σειρά Laurent με μιγαδικούς συντελεστές, που συγκλίνει για όλα τα $t \neq 0$ σε μια περιοχή του 0 στο $\mathbb{C}$. Έστω $\mathrm{B}(\varphi)$ *το σύνολο των $b \in \mathbb{N}$ για τα οποία το $\varphi(1/b)$ υπάρχει και είναι ακέραιος. Τότε το* $\mathrm{B}(\varphi)$ *είναι sparse εκτός και αν η φ είναι Laurent πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα μέσης τιμής του H.A. Schwarz:

Λήμμα 1.2.1. *Εστω $s_0 < s_1 < \cdots < s_m$ πραγματικοί αριθμοί, με $m \geq 1$ και $\chi(s)$ μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη για $s_0 < s < s_m$ και μ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Έστω V_m η ορίζουσα Vandermonde*

$$V_m = \begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & \dots & s_0^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & s_m & s_m^2 & \dots & s_m^m \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(s_i - s_j).$$

Τότε, υπάρχει σ με $s_0 < \sigma < s_m$ τέτοιος ώστε

$$\frac{\chi^{(m)}(\sigma)}{m!} = \frac{1}{V_m}\begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & \dots & s_0^{m-1} & \chi(s_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & s_m & s_m^2 & \dots & s_m^{m-1} & \chi(s_m) \end{vmatrix}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(s) = \begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_0^2 & \dots & s_0^{m-1} & \chi(s_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & s & s^2 & \dots & s^{m-1} & \chi(s) \end{vmatrix}$$

και θέτουμε

$$c = \frac{F(s_m)}{(s_m - s_0)\dots(s_m - s_{m-1})}$$

και

$$G(s) = F(s) - c(s - s_0)\dots(s - s_{m-1}).$$

Η G μηδενίζεται στα $(m+1)$ σημεία $s_0, \dots, s_m$ και άρα, η $G^{(m)}$ θα μηδενίζεται σε τουλάχιστον ένα σημείο σ μεταξύ s_0 και s_m. Αφού $G^{(m)}(s) = F^{(m)} - m!c$, έχουμε

$$F^{(m)}(\sigma) = m!c.$$

Επίσης, έχουμε

$$F(s) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i s^i + V_{m-1}\chi(s)$$

όπου τα c_i είναι σταθερές και V_{m-1} είναι η ορίζουσα Vandermonde των $s_0, \dots, s_{m-1}$. Άρα,

$$F^{(m)}(\sigma) = V_{m-1}\chi^{(m)}(\sigma).$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\frac{\chi^{(m)}(\sigma)}{m!} = \frac{c}{V_{m-1}} = \frac{F(s_m)}{(s_m - s_0)\dots(s_m - s_{m-1})V_{m-1}} = \frac{F(s_m)}{V_m}.$$

Λόγω του ορισμού της F έχουμε το ζητούμενο. □

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος. Υποθέτουμε ότι το $\varphi(t)$ δεν είναι Laurent πολυώνυμο και ότι το $B(\varphi)$ δεν είναι sparse. Βλέπουμε, αρχικά, ότι οι συντελεστές θα πρέπει να είναι πραγματικοί αριθμοί αφού η συζυγής σειρά

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{i=i_0}^{\infty} \bar{\alpha}_i t^i$$

έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\varphi(t)$ και ταυτίζονται σε όλα τα $1/b, b \in B(\varphi)$ τα οποία, τελικά, είναι άπειρα το πλήθος σημεία σε μία συμπαγή περιοχή του 0.

Θεωρούμε, τώρα την πραγματική συνάρτηση

$$\chi(s) = \varphi(s^{-1}) = \sum_{i=i_0}^{\infty} \bar{\alpha}_i s^{-i}$$

ορισμένη και αναλυτική για μεγάλες πραγματικές τιμές του s. Θα αποδείξουμε οτι υπάρχει $\lambda > 0$ και $m, s \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε: αν $s_0, \dots, s_m \in \mathbb{Z}$ με $\chi(s_0), \dots, \chi(s_m) \in \mathbb{Z}$ και $S < s_0 < \cdots < s_m$ τότε $s_m - s_0 \geq s_0^{\lambda}$. Για μεγάλα m η σειρά $\chi^{(m)}(s) = \sum_{i=\mu}^{\infty} d_i s^{-i}$ έχει μόνο όρους με αρνητικό εκθέτη, δηλαδή $\mu > 0$. Οι συντελεστές d_i θα είναι πραγματικοί και αφού η φ δεν είναι πολυώνυμο Laurent μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d_\mu \neq 0$. Τότε το $s^\mu \chi^{(m)}(s)$ θα τείνει στο d_μ καθώς το s τείνει στο άπειρο. Άρα υπάρχει $S > 0$ τέτοιο ώστε $0 < |s^\mu \chi^{(m)}(s)| < |2d_\mu|$ για $s \geq S$. Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε $s_0, \dots, s_m$ όπως παραπάνω και διαλέγουμε σ όπως στο λήμμα στην αρχή της απόδειξης. Τότε το $\frac{V_m \chi^{(m)}(\sigma)}{m!}$ είναι μη μηδενικός ακέραιος και άρα έχει απόλυτη τιμή ≥ 1. Άρα, $V_m \geq \frac{1}{|\chi^{(m)}(\sigma)|}$ και έτσι

$$(s_m - s_0)^{(m+1)(m+2)/2} \geq V_m \geq \frac{1}{|\chi^{(m)}(\sigma)|} \geq \frac{1}{2d_\mu} \sigma^\mu \geq \frac{1}{2d_\mu} s_0^\mu.$$

Συνεπώς,

$$s_m - s_0 \geq (\frac{1}{|2d_\mu|})^{2/(m+1)(m+2)} s_0^{2\mu/(m+1)(m+2)}$$

και άρα κάθε $\lambda < 2\mu/(m+1)(m+2)$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

Έστω, λοιπόν, τώρα μια άπειρη (αύξουσα) ακολουθία θετικών ακεραίων

$$\mathrm{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$$

τέτοια ώστε $\chi(b_i) \in \mathbb{Z}$ για κάθε i. Τότε υπάρχουν λ, m, S όπως παραπάνω τέτοια ώστε για $b_i > S$, $b_{i+m} - b_i > b_i^\lambda$. Συνεπώς, μπορούμε, αν για $i \geq i_0, b_i > S$, να δούμε την Β σαν ένωση ενός πεπερασμένου συνόλου, του $\{b_1, \dots, b_{i_0-1}\}$, και m το πλήθος ακολουθιών, $B_j = \{b_{i_0+j+km}\}, j = 0, \dots, m-1$. Αυτές είναι ακολουθίες για τις οποίες ισχύει $c_{i+1} - c_i > c_i^\lambda$ και θα αποδείξουμε οτι μία τέτοια ακολουθία, είναι sparse. Το Β τότε, ως πεπερασμένη ένωση sparse συνόλων θα είναι και αυτό sparse και θα έχουμε αυτό που θέλουμε.

Έχουμε, λοιπόν, μια αύξουσα ακολουθία $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ θετικών ακεραίων για την οποία ισχύει $c_{i+1} - c_i > c_i^\lambda$ για κάποιο $\lambda > 0$. Έστω $C_n = |C \cap \{1, \dots, n\}|$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $0 < \kappa < 1$ τέτοιο ώστε $C_n < n^k$ για κάθε n τελικά. Ισοδύναμα, αφού για $n < c_{i+1}, C_n < i$ και $C_{c_i} = i$ αρκεί να δείξουμε ότι $c_n > n^{1/\kappa}$ για κάθε n τελικά. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει κ τέτοιος ώστε για κάποιο n_0 να ισχύει

$$c_{n_0} > n_0^{1/\kappa}$$

Τότε,

$$c_{n_0+1} > c_{n_0}^\lambda + c_{n_0} > n_0^{\lambda/\kappa} + n_0^{1/\kappa}.$$

Θα θέλαμε:

$$n_0^{\lambda/\kappa} + n_0^{1/\kappa} > (n_0+1)^{1/\kappa}$$

ή ισοδύναμα:

$$n_0^\lambda + 1 > (1 + \frac{1}{n_0})^{1/\kappa}$$

που προφανώς ισχύει αν το n_0 είναι αρκετά μεγάλο. Κάτι τέτοιο μπορούμε να το εξασφαλίσουμε αγνοώντας αρχικούς όρους της C και ξεκινώντας την αρίθμηση της ακολουθίας από εκεί και πέρα. Συνεπώς, η C είναι sparse και έχουμε το ζητούμενο του θεωρήματος. □

Λήμμα 1.2.2. *Έστω $p(x, y) \in \mathbb{Q}[x][y]$ ανάγωγο πάνω από το $\mathbb{Q}(x)$ και βαθμού $r > 1$ ως προς y. Τότε για σχεδον όλα τα $x_0 \in \mathbb{Z}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α΄) Υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ολόμορφες συναρτήσεις $\psi_1(t), \dots, \psi_r(t)$ ορισμένες για $t \in \mathbb{C}, |t| < \varepsilon$ έτσι ώστε οι $\psi_1(t), \dots, \psi_r(t)$ να είναι οι ρίζες του πουωνύμου $p(x_0 + t, y) \in \mathbb{Q}[y]$.

(β΄) Αν κάποια απο τις $\psi_i(t)$ είναι ρητή συνάρτηση του t τότε υπάρχουν πεπερασμένα το πολύ $q \in \mathbb{Q}$ με $\psi_i(q) \in \mathbb{Q}$.

(γ΄) Αν $\mathrm{B}(p, x_0)$ είναι το σύνολο όλων των $b \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $p(\chi_0 + \frac{1}{b}, c) = 0$ για κάποιο $c \in \mathbb{Q}$, το $\mathrm{B}(p, x_0)$ είναι sparse.

Απόδειξη. Το p είναι ανάγωγο πάνω από το $\mathbb{Q}(x)$ και άρα διαχωρίσιμο. Ισοδύναμα, η διακρίνουσα του, που είναι ένα πολυώνυμο $\Delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ είναι μη μηδενική. Άρα, για σχεδόν κάθε $x_0 \in \mathbb{Z}, \Delta(x_0) \neq 0$. Η $\Delta(x_0)$, όμως, είναι η διακρίνουσα του $p(x_0, y) \in \mathbb{Q}[y]$ και, άρα, για σχεδόν όλα τα $x_0 \in \mathbb{Z}$ το $p(x_0, y)$ είναι διαχωρίσιμο. Από εδώ και πέρα θεωρούμε μόνο τέτοια x_0.

Τό (a), λοιπόν, έπεται άμεσα απο το Θεώρημα 1.2.1.

Έστω, τώρα ότι η $\psi = \psi_i$ είναι ρητή συνάρτηση του t (δηλαδή πηλίκο δύο πολυωνύμων). Τότε, το $p(x_0 + x, \psi(x))$ είναι μια ρητή συνάρτηση ως προς x με μιγαδικούς συντελεστές και αφού $p(x_0 + t, \psi(t)) = 0$ για $|t| < \varepsilon$, $p(x_0 + x, \psi(x)) = 0$. Άρα, αφού $p(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ και $x_0 \in \mathbb{Z}$, η $\psi(x)$ είναι αλγεβρική πάνω από το $\mathbb{Q}(x)$ και συνεπώς, πάνω απο το $\bar{\mathbb{Q}}(x)$. Το τελευταίο, όμως, είναι αλγεβρικά κλειστό στο $\mathbb{C}(x)$ και άρα $\psi(x) \in \bar{\mathbb{Q}}(x)$.

Αν, λοιπόν, τα $q \in \mathbb{Q}$ με $\psi(q) \in \mathbb{Q}$ είναι άπειρα το πλήθος τότε για κάθε $\beta \in G(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ η ψ^β (που είναι η συναρτήση που παίρνουμε αν εφαρμόσουμε τον αυτομορφισμό β στους συντελεστες της ψ) και η ψ ταυτίζονται σε άπειρα σημεία. Αυτό γιατί αν $\psi(q) \in \mathbb{Q}$ τότε $\beta(\psi(q)) = \psi(q)$. Ομως, $\beta(\psi(q)) = \psi^\beta(q)$. Άρα, $\psi^\beta = \psi$ για κάθε $\beta \in G(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ και άρα $\psi(x) \in \mathbb{Q}(x)$. Αυτό είναι άτοπο γιατί, τότε, η $\psi(x_0 - x) \in \mathbb{Q}(x)$ θα είναι ρίζα του $p(x, y)$, το οποίο δεν γίνεται γιατί το τελευταίο είναι ανάγωγο πάνω από το $\mathbb{Q}(x)$. Άρα έχουμε και το (b).

Για να αποδείξουμε το (c) τώρα, υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $p(x, y) \in \mathbb{Z}[x.y]$ και γράφουμε

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{r} p_i(x) y^i$$

με $p_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Για αρκετά μεγάλο R η έκφραση

$$x^R p(x_0 + \frac{1}{x}, y) = \sum_{i=0}^{r} x^R p_i(x_0 + \frac{1}{x}) y^i$$

ανήκει στο $\mathbb{Z}[x,y]$. Έστω p'_i ο συντελεστής του y^i. Τότε το $h(x) = p'_r(x)$ είναι ένα μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{Z}[x]$. Ομοίως με την Προταση 1.1.2., θεωρούμε το

$$p'(x,Z) = Z^r + \sum_{i=0}^{r-1} p'_i(x)h(x)^{r-i-1}Z^i$$

που ανήκει στο $\mathbb{Z}[x,Z,]$ και είναι μονικό ως προς Z.

Αν για κάποια $c \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Z}$ είναι $p(x_0 + \frac{1}{b}, c) = 0$ τότε $p'(b, h(b)c) = 0$. Αφού το $p'(b,Z) \in \mathbb{Z}[Z]$ είναι μονικό, έχουμε ότι το $h(b)c$ θα είναι ακέραιο πάνω απο το $\mathbb{Z}$ και άρα, αφού είναι και ρητός, $h(b)c \in \mathbb{Z}$. Άρα, αφού αν $|1/b| < \varepsilon$ το c θα είναι κάποιο από τα $\psi_i(1/b)$, εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο, το $B(p,x_0)$ θα είναι στην ένωση των $B_i = \mathrm{B}(\varphi_i)$ όπου $\varphi(t) = h(1/t)\psi_i(t)$. Όμως, από το Θεώρημα 1.2.3., κάθε B_i είναι sparse, εκτός κι αν η φ_i είναι ρητή συνάρτηση. Σε αυτήν την περίπτωση, η ψ_i θα είναι ρητή και, άρα, από το (b), το B_i θα είναι πεπερασμένο. Τελικά, λοιπόν, το $B(p,x_0)$ θα είναι sparse και έχουμε το (c). □

Θεώρημα 1.2.4. *Το $\mathbb{Q}$ είναι Hilbertian.*

Απόδειξη. Θεωρούμε πολυώνυμα p_j όπως στο (3) του Θεωρήματος 1.1.3. και x_0 όπως στην αρχή του λήμματος που προηγήθηκε για όλα τα p_j ταυτόχρονα. Έστω C το σύνολο των $b \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε κανένα από τα $p_j(x_0 + \frac{1}{b}, y)$ να μην έχει ρίζα στο $\mathbb{Q}$. Τότε το συμπληρωμα του C περιέχεται στην πεπερασμένη ένωση των $B(p_j, x_0)$ τα οποία, όπως δείξαμε είναι sparse. Άρα, το συμπλήρωμα του C είναι sparse και συνεπώς, το C είναι άπειρο. □

Αφού αποδείξαμε, επιτέλους, ότι το $\mathbb{Q}$ είναι Hilbertian θα δείξουμε ότι η ιδιότητα αυτή γενικεύεται σε περισσότερες απο δύο μεταβλητές.

Λήμμα 1.2.3. *Έστω k ένα Hilbertian σώμα και $f(x_1,\dots,x_s)$ ένα ανάγωγο πάνω από το k, πολυώνυμο σε $s > 2$ μεταβλητές βαθμού ≥ 1 ως προς x_s.*

(i) Τότε υπάρχουν άπειρα $b \in k$ τέτοια ώστε το πολυώνυμο $f(b,x_2,\dots,x_s)$ σε $s-1$ μεταβλητές να είναι ανάγωγο πάνω από το k.

(ii) Για κάθε μη μηδενικό $p \in k[x_1,\dots,x_{s-1}]$ υπάρχουν $b_1,\dots,b_{s-1} \in k$ τέτοια ώστε $p(b_1,\dots,b_{s-1}) \neq 0$ και το $f(b_1,\dots,b_{s-1},x_s)$ να είναι ανάγωγο.

Απόδειξη. Θα ήταν πάρα πολύ βολικό αν είχαμε έναν ισομορφισμό(η ακόμα και μονομορφισμό) $k[x_1,\dots,x_s] \to k[x_1,x_2]$. Φυσικά, τέτοιος ισομορφισμός δεν υπάρχει, υπάρχει όμως ένα ομομορφισμός ο οποίος μας εξυπηρετεί με παρόμοιο τρόπο στη συγκεκριμένη περίπτωση. Αυτός είναι η εξειδίκευση Kronecker (Kronecker specialization):

$$S_d f(x,y) = f(x,y,y^d,\dots,y^{d^{(s-2)}}),$$

όπου d είναι ένας ακέραιος μεγαλύτερος από τη μεγαλύτερη δύναμη μεταβλητής που εμφανίζεται στο πολυώνυμο f. Είναι ομομορφισμός και περιορισμένος στο σύνολο των πολυωνύμων με μεγαλύτερο εκθέτη μικρότερο του d, είναι και 1-1. Αυτό έπεται, από τη μοναδικότητα της d-αδικής παράστασης ενός ακεραίου.

Έστω, λοιπόν,

$$S_d f(x,y) = g(x)\prod_i g_i(x,y)$$

με $g_i(x,y)$ ανάγωγα πολυώνυμα θετικού βαθμού ως προς y και $g(x) \in k[x]$. Αφού το k είναι Hilbertian, τότε υπάρχουν άπειρα $b \in k$ τέτοια ώστε τα $g_i(b,y)$ να είναι ανάγωγα και $g(b) \neq 0$. Αν, τώρα, το $f(b, x_2, \dots, x_s)$ δεν είναι ανάγωγο, θα έχουμε $f(b, x_2, \dots, x_s) = h(x_2, \dots, x_s)h'(x_2, \dots, x_s)$ με h, h' μη σταθερά και άρα, $S_d f(b, y) = S_d h(y) S_d h'(y)$. Άρα, τα $S_d h(y)$ και $S_d h'(y)$ θα είναι γίνομενα κάποιων από τα $g_i(b, y)$. Έστω $H(x, y)$ και $\mathrm{H}'(x, y)$ τα γινόμενα των αντίστοιχων $g_i(x, y)$. Άρα, $S_d(x, y) = g(x)H(x, y)H'(x, y)$.

Λόγω μοναδικότητας του d-αδικού αναπτύγματος ενός ακεραίου, υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $\tilde{h}(x_1, \dots, x_s), \tilde{h}'(x_1, \dots, x_s)$ με $S_d\tilde{h} = gH, S_d\tilde{h}' = H'$ και τέτοια ώστε ο εκθέτης κανενός από τα $x_2, \dots, x_s$ σε αυτά να μην ξεπερνά το d. Αν αυτό ίσχυε και για το γινόμενο $\tilde{f} = \tilde{h}\tilde{h}'$ τότε θα είχαμε $f = \tilde{f}$ κάτι που θα ήταν άτοπο αφού το f είναι ανάγωγο.

Τα $\tilde{h}(b, x_2, \dots, x_s)$ και $h(x_2, \dots, x_s)$ έχουν εξειδικεύσεις Kronecker που είναι η μία βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης. Αφου και τα δύο έχουν εκθέτες κάθε μεταβλητής μικρότερους από d τότε έιναι το ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Ομοίως για τα $\tilde{h}'$ και h' και κατά συνέπεια, για τα $\tilde{f}(b, x_2, \dots, x_s)$ και $f(b, x_2, \dots, x_s)$. Αν, λοιπόν, το $\tilde{f}$ περιέχει ένα μονώνυμο $\kappa(x_1)x_2^{i_2} \dots x_s^{i_s}$ με κάποιο $i_j \geq d$ τότε αυτό θα πρέπει να μηδενίζεται όταν εξειδικεύουμε $x_1 = b$, δηλαδή $\kappa(b) = 0$. Αφού το πλήθος των $\kappa(x_1)$ που μπορούν να προκύψουν είναι πεπερασμένο (εξαρτάται από την παραγοντοποίηση $S_d(x, y) = g(x)H(x, y)H'(x, y)$), μπορούμε να διαλέξουμε b έτσι ώστε $\kappa(b) \neq 0$. Για αυτά τα b, το $f(b, x_2, \dots, x_s)$ θα είναι ανάγωγο. Αποδείξαμε, λοιπόν, το (i)

Το (ii) για $s = 2$ ισχύει εξ ορισμού. Υποθέτουμε οτι ισχύει για $s - 1 \geq 2$ και έστω μη μηδενικό $p(x_1, \dots, x_s) \in k[x_1, \dots, x_s]$. Από το (i) και αφού το p είναι μη μηδενικό, υπάρχουν άπειρα $b \in k$ τέτοια ώστε $p(b, x_2, \dots, x_s) \neq 0$ και το $f(b, x_2, \dots, x_s)$ να είναι ανάγωγο. Από την επαγωγική υπόθεση για το $p(b, x_2, \dots, x_s) \neq 0$ και το ανάγωγο $f(b, x_2, \dots, x_s)$ έχουμε το (ii). $\square$

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα πάνω από το $\mathbb{C}(x)$ και τα κριτήρια στερεότητας

Αφού είδαμε πόσο σημαντικό είναι το αντίστροφο πρόβλημα του Galois πάνω από σώματα ρητών συναρτήσεων, περνάμε τώρα στο δεύτερο μέρος της εργασίας που αφορά τη μελέτη του προβλήματος πάνω από το $\mathbb{C}(x)$. Πολλές φορές το πρόβλημα πάνω από σώματα ρητών συναρτήσεων λέγεται και γεωμετρικό αντίστροφο πρόβλημα του Galois (geometric IGP). Θα δούμε σε αυτό το κομμάτι ότι αυτός ο χαρακτηρισμός είναι δικαιολογημένος.

2.1 Χώροι επικάλυψης και αλγεβρικές επεκτάσεις

Ορισμός 2.1.1. *Έστω Y τοπολογικός χώρος. Ένας **χάρτης συντεταγμένων** στον Y είναι ένα ζεύγος (V, φ) όπου $V \subset Y$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο και $\varphi : V \to U$ είναι ένας ομοιομορφισμός σε ένα ανοιχτό $U \subset \mathbb{C}$. Δύο χάρτες συντεταγμένων $(V_j, \varphi_j), (j = 1, 2)$ λέγονται **συμβατοί** αν οι απεικονίσεις $\varphi_1\varphi_2^{-1} : \varphi_2(V_1 \cap V_2) \to \varphi_1(V_1 \cap V_2)$ και $\varphi_2\varphi_1^{-1} : \varphi_2(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2(V_1 \cap V_2)$ είναι ολόμορφες. Ένας **άτλας** είναι μια συλλογή από συμβατούς χάρτες συντεταγμένων (v_i, φ_i) έτσι ώστε τα v_i να καλύπτουν τον Y και δύο άτλες λέγονται ισοδύναμοι αν η ένωση τους είναι άτλας. Μία **μιγαδική δομή** στον Y είναι μία κλάση ισοδυναμίας από άτλες. Τέλος, μία **επιφάνεια Riemann** είναι ένας συνεκτικός χώρος Hausdorff με μία μιγαδική δομή. Όταν μιλάμε για ένα χάρτη σε μία πολλαπλότητα Riemann εννοούμε ένα χαρτη συμβατό με τη μιγαδική δομή.*

Παράδειγμα 2.1.2. *Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ γίνεται επιφάνεια Riemann με χάρτη την ταυτοτική απεικόνιση.*

Παράδειγμα 2.1.3. *Η προβολική σφαίρα $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \infty$ αποκτάει δομή επιφάνειας Riemann με τους χάρτες $\varphi_1 = id\big|_{\mathbb{C}}$ και $\varphi_2 στο \mathbb{P}^1 \backslash \{0\}$, με $\varphi_2(z) = 1/z$ αν $z \neq 0$ και $\varphi_2(z) = 0$ αν $z = \infty$. Την προβολική σφαίρα μετά από αφαίρεση πεπερασμένου πλήθους σημείων της θα τη λέμε διάτρητη η τρυπημένη σφαίρα.*

Ορισμός 2.1.4. *(i) Μία συνεχής απεικόνιση $f : Y \to Z$ μεταξύ δύο επιφανειών Riemann λέγεται αναλυτική αν για κάθε χάρτη συντεταγμένων (V, φ) στο Y και (V', φ') στο Z με $f(V) \subset V'$ η απεικόνιση $\varphi' f \varphi^{-1} : \varphi(V) \to \varphi'(V')$ είναι ολόμορφη.*

(ii) *Έστω Y επιφάνεια Riemann. Μια **μερομορφική συνάρτηση** στην Y είναι μία αναλυτική συνάρτηση $Y \to \mathbb{P}^1$ διαφορετική από την σταθερή απεικόνιση ∞. Με $\mathcal{M}(Y)$ συμβολιζουμε το σύνολο των μερομορφικών συναρτήσεων στην Y.*

Για ένα συνεκτικό $D \subset \mathbb{C}$ μια μερομορφική συνάρτηση στην επιφάνεια Riemann D είναι το ίδιο με μία μερομορφική συνάρτηση στο χωρίο του επιπέδου D με την κλασική έννοια, δηλαδή μια συνάρτηση που γύρω από κάθε σημείο $p \in D$ αναπτύσσεται σε σειρά Laurent $\sum_{i=N}^{\infty} a_i(z-p)^i$ (για κάποιο $N \in \mathbb{Z}$). Αν, λοιπόν, (V, z) είναι ένας χάρτης συντεταγμένων σε μία επιφάνεια Riemann Y και $v_0 \in V$, τότε κάθε μερομορφική συνάρτηση g στην Y θα έχει ένα ανάπτυγμα της μορφής

$$g(u) = \sum_{i=N}^{\infty} a_i(z(u) - z(v_0))^i$$

γύρω από το v_0. Για συντομία γράφουμε $g = \sum_{i=N}^{\infty}(z - z(v_0))^i$.

Έστω $f, f' \in \mathcal{M}(Y)$. Τα σημεία του Y όπου η f παίρνει την τιμή ∞ λέγονται πόλοι της f και αποτελούν ένα διακριτό υποσύνολο του Y. Αν η Y, συγκεκριμένα, είναι συμπαγής η f έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος πόλων.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f \pm f'$ και $f \cdot f'$ στα σημεία που δεν αποτελούν πόλο της f ή της f' με πράξεις κατά σημείο και τις επεκτείνουμε σε όλη την Y προσθαφαιρώντας και πολλαπλασιάζοντας τα αναπτύγματα Laurent τους γύρω από τους πόλους. Έτσι, το $\mathcal{M}(Y)$ αποκτά τη δομή δακτυλίου.

Αφού, η $1/z : \mathbb{P}^1 :\to \mathbb{P}^1$ είναι μερομορφική μπορούμε να ορίσουμε $1/f = (1/z) \circ f$. Αν $f \neq 0$ τότε η $1/f \neq \infty$ και είναι μερομορφική. Άρα, το $\mathcal{M}(Y)$ είναι σώμα, το **σώμα των μερομορφικών συναρτήσεων στην** Y.

Παράδειγμα 2.1.5 ($\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$). *Θα δείξουμε εδώ ότι $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z)$. Προφανώς, η ταυτοτική συνάρτηση z στην $\mathbb{P}^1$ είναι μερομορφική. Κατα συνέπεια, αφού το $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ είνα σώμα, περιέχει το σώμα $\mathbb{C}(z)$. Έστω τώρα $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$. Τότε, αφού η $\mathbb{P}^1$ είναι συμπαγής, η f έχει πεπερασμένο πλήθος πόλων και άρα, μπορούμε να βρούμε $f' \in \mathbb{C}(z)$ που να έχει ακριβώς τους ίδιους πόλους με την f και τέτοια ώστε η $f - f'$ να μην έχει κανέναν πόλο (για παράδειγμα η f' μπορεί να είναι το (πεπερασμένο) άθροισμα των μερών με αρνητικό εκθέτη στα αναπτύγματα της f γύρω από τους πόλους της). Δηλαδή, η $f - f'$ είναι μερομορφική στο $\mathbb{P}^1$ και δεν έχει κανένα πόλο. Περιορισμένη, λοιπόν, στο $\mathbb{C}$, είναι μία ολόμορφη συνάρτηση η οποία είναι φραγμένη και άρα, από το θεώρημα του Liouville, είναι σταθερή. Συνεπώς, $f = c + f'$ για κάποιο $c \in \mathbb{C}$ και άρα $f \in \mathbb{C}(z)$.*

Θα δείξουμε τώρα πως από ένα χώρο επικάλυψης της διάτρητης σφαίρας παίρνουμε μία συμπαγή επιφάνεια Riemann και θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες αυτής της επικάλυψης. Θεωρούμε γνωστές βασικές γνώσεις της αλγεβρικής τοπολογίας για τους χώρους επικάλυψης.

Θυμόμαστε, συγκεκριμένα, τι σημαίνει μια επικάλυψη Galois: είναι μία προβολή επικάλυψης $f : R \to S$ με τον χώρο R συνεκτικό και τέτοια ώστε η δράση της ομάδας μετασχηματισμών $Deck(f)$ σε κάθε ένα $f^{-1}(p), p \in S$ να είναι μεταβατική. Με $\mathbb{K}(r)$ συμβολίζουμε τον δίσκο ακτίνας r στο $\mathbb{C}$ χωρίς το 0.

Λήμμα 2.1.1. *Η απεικόνιση $f : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to \mathbb{K}(r), z \mapsto z^e$ είναι προβολή επικάλυψης Galois, βαθμού e, για κάθε $e \in \mathbb{N}$. Η ομάδα μετασχηματισμών της είναι κυκλική και αποτελείται από όλες τις απεικονίσεις $z \mapsto \zeta z, \zeta \in \mu_e$ όπου μ_e είναι οι e-οστές ρίζες της μονάδας.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $f_e(\zeta z) = f_e(z)$ και άρα οι $z \mapsto \zeta z$ είναι μετασχηματισμοί επικάλυψης. Αφού δρουν, προφανώς, μεταβατικά στις ίνες της f_e τότε αυτές είναι όλοι οι μετασχηματισμοί και η επικάλυψη είναι Galois. □

Πρόταση 2.1.6. *Έστω $f : E \to \mathbb{K}(r)$ μία προβολή επικάλυψης πεπερασμένου βαθμού e με E συνεκτικό.*

(α΄) Τότε η f είναι ισοδύναμη με την προβολή επικάλυψης $f_e : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to \mathbb{K}(r), z \mapsto z^e$. Δηλαδή, υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi : E \to \mathbb{K}(r^{1/e})$ με $f \circ \varphi(u) = \varphi(u)^e = f(u)$ για κάθε $u \in E$. Η φ αυτή είναι μοναδική ως προς πολλαπλασιασμό με κάποιο $\zeta \in \mu_e$, δηλαδή κάθε άλλο φ' που ικανοποιεί τη σχέση $\varphi^e = f$ θα είναι της μορφής $\varphi' = \zeta\varphi$.

(β΄) Η ομάδα $Deck(f)$ είναι κυκλική τάξης e και υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο σ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε ομοιομορφισμό $\varphi : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to E$ με $\varphi^e = f$ έχουμε $\varphi \circ \sigma^{-1} = \zeta_e \varphi$, όπου $\zeta_e = exp(2\pi\sqrt{-1/e})$. Αυτό το σ παράγει τη $Deck(f)$ και ονομάζεται ***distinguised generator****.*

(γ΄) Έστω $u \in E, p = f(u)$ και σ όπως στο (b). Τότε, το $\gamma(t) = pexp(2\pi i t), t \in I$ είναι ένα κλειστό μονοπάτι στο $\mathbb{K}(r)$ και η ανύψωση του μεσω της f με αρχικό σημείο $\sigma(u)$ έχει τελικό σημείο u.

(δ΄) Έστω $0 < \hat{r} < r, \hat{E} = f^{-1}(\mathbb{K}(\hat{r})$ και $\hat{f} = f\big|_{\hat{E}}$. Τότε, το $\hat{E}$ είναι συνεκτικό, η $\hat{f} : \hat{E} \to \mathbb{K}(\hat{r})$ είναι προβολή επικάλυψης βαθμού e και περιορισμός του distinguised generator της $Deck(f)$ είναι ο distinguised generator της $Deck(\hat{f})$.

Απόδειξη. Κάθε συνεκτικός χώρος επικάλυψης βαθμού e του $\mathbb{K}(r)$ θα προκύπτει σαν χώρος πηλίκο του καθολικού χώρου επικάλυψης modulo τη δράση κάποιας υποομάδας της $\pi_1(\mathbb{K}(r)) \simeq \mathbb{Z}$ δείκτη e. Εφόσον υπάρχει μοναδική τέτοια υποομάδα, κάθε δύο τέτοιοι χώροι είναι ισοδύναμοι. Αν τώρα φ' είναι άλλος ένας ομοιομορφισμός που ικανοποιεί την $f \circ \varphi'(u) = f(u)$ τότε $\varphi' \circ \varphi^{-1} \in Deck(f_e)$ και άρα $\varphi' = \zeta\varphi$ για κάποιο $\zeta \in \mu_e$. Αν, συγκεκριμένα, $\varphi' = \zeta_e\varphi$, ο $\varphi'^{-1}\varphi \in Deck(f)$ ικανοποιεί τη συνθήκη του *(b)* και άρα είναι το ζητούμενο σ.

Για το *(c)* βλέπουμε οτι αν ανυψώσουμε το γ μέσω της f_e με αρχικό σημείο $u' \in \mathbb{K}(r^{1/e})$ το τελικό σημείο θα είναι το $\zeta_e u'$. Αν, λοιπόν, έχουμε έναν φ όπως παραπάνω με $\varphi(\sigma(u)) = u'$(μπορούμε να βρούμε έναν τέτοιο γιατί τα u, u' ανήκουν και τα δύο στις αντίστοιχες ίνες του p και οι προβολές επικάλυψης είναι Galois) τότε, η εικόνα της ανύψωσης του γ μέσω του φ^{-1} είναι ανύψωση του γ μέσω της f με αρχικό σημείο $\sigma(u)$ και τελικό σημείο $\varphi^{-1}(\zeta_e u') = \sigma^{-1}(\varphi^{-1}(u')) = \sigma^{-1}(\sigma(u)) = u$.

Τέλος, για το *(d)*, βλέπουμε ότι αν ήταν $E = \mathbb{K}(r)$ και $f = f_e$, τότε:

$$\hat{E} = \mathbb{K}(\hat{r}^{1/e}), \hat{f}_e = z^n$$

και $\hat{\sigma} = \sigma\big|_{\hat{E}} = \zeta_e^{-1}$. Λόγω της ισοδυναμίας των χώρων επικάλυψης έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ μία πεπερασμένη προβολή επικάλυψης Galois και έστω $p \in P$.*

(i) Έστω $D = D(p, r)$ ένας δίσκος γύρω από το p που δεν περιέχει άλλα σημεία του P. Έτσι, ο $D^* = D \backslash p$ περιέχεται στο $\mathbb{P}^1 \backslash P$. Έστω $\kappa_p : D^* \to \mathbb{K}(r)$ ο ομοιομορφισμός $z \mapsto z - p$(αντίστοιχα $1/z$) αν $p \neq \infty$ (αντίστοιχα $p = \infty$). Τότε

για κάθε συνεκτική συνιστώσα E του $f^{-1}(D^*)$ η απεικόνιση $f_E = \kappa_p \circ f\big|_E$ είναι μία προβολή επικάλυψης $f_E : E \to \mathbb{K}(r)$(πεπερασμένου βαθμού). Το E λέγεται ***circular component*** *επιπέδου r πάνω από το p.*

(ii) *Έστω $0 < \hat{r} < r$. Τότε υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των circular components E επιπέδου r και των circular components $\widehat{E}$ επιπέδου $\hat{r}$ πάνω από το p, που δίνεται από τη σχέση του υποσυνόλου (δηλαδή για κάθε E υπάρχει ακριβώς ένα $\widehat{E}$ με $\widehat{E} \subset E$). Αν $\widehat{E} \subset E$ τότε $f\big|_{\widehat{E}}$ είναι ο περιορισμός της f_E στο $\widehat{E}$ και $\widehat{E} = f_E^{-1}(\mathbb{K}(\hat{r}))$.*

(iii) *Η $H := Deck(f)$ δρα στις συνιστώσες E του $f^{-1}(D^*)$ μεταβατικά. Έστω H_E η σταθεροποιούσα του E. Περιορίζοντας τη δράση της H_E στο E έχουμε έναν ισομορφισμό $H_E \to Deck(f_E)$. Άρα, η H_E είναι κυκλική. Έστω $h_E \in \mathrm{H}_E$ το στοιχείο που αντιστοιχεί στον distinguished generator της $Deck(f_E)$. Το h_E λέγεται ο distinguished generator της H_E.*

(iv) *Έστω $h \in H$ και $\mathrm{E}' = h(E)$. Τότε $hh_Eh^{-1} = h_{E'}$ και άρα, τα h_E αποτελούν μία κλάση συζυγίας C_p στην H. Η C_p εξαρτάται μόνο από το p (και την f) και όχι από την επιλογή του δίσκου D. Η τάξη e των στοιχείων της C_p ισούται με τον βαθμό της επικάλυψης $f_E : E \to \mathbb{K}(r)$, για κάθε συνιστώσα E του $f^{-1}(D^*)$. Συγκεκριμένα, $C_p = \{1\}$ αν και μόνο αν η f_E είναι ομοιομορφισμός.*

(v) *Έστω $p^* \in D^*, \bar{p} = \kappa_p(p^*)$ και $\lambda(t) = \kappa_p^{-1}(\bar{p}exp(2\pi it))$ ένα κλειστό μονοπάτι στο D^* με βάση p^* (που κάνει μια αριστερή στροφή γύρω από το p). Έστω $b \in R$ και $q_0 = f(b)$. Τέλος, έστω δ ένα μονοπάτι στο $\mathbb{P}^1 \backslash P$ που ενώνει το q_0 με το p^* και $\Phi_b : \pi_1(\mathbb{P}^1 \backslash P, q_0) \to H$ η απεικόνιση που για ένα βρόχο g με βάση το q_0, το $\Phi_b[g]$ είναι ο (μοναδικός) μετασχηματισμός επικάλυψης που στέλνει το τελικό σημείο της ανύψωσης του g μέσω της f με αρχικό σημείο το b, στο b. Τότε, αν $\gamma = \delta^{inv}\lambda\delta$, το $\Phi_b[\gamma]$ ανήκει στην C_p.*

Απόδειξη. (1) Η απεικόνιση $f\big|_{f^{-1}(D^*)} : f^{-1}(D^*) \to D^*$ είναι προβολή επικάλυψης και άρα και ο περιορισμός της σε κάποια συνεκτική συνιστώσα Ε. Συνθέτοντας με τον ομοιομορφισμό κ_p έχουμε ότι η f_E είναι προβολή επικάλυψης.

(2) Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι κάθε E περιέχει ένα $\widehat{E}$ ίδιου βαθμού που, άρα, είναι μοναδικό και ότι $f_{\widehat{E}} = f_E\big|_{\widehat{E}}$.

(3) Αφού η Η δρα μεταβατικά στις ίνες της f τότε θα δρα μεταβατικά και στα Ε αφού έχουν την ίδια εικόνα. Ομοίως, η επαγώμενη απεικόνιση $H_E \to Deck(f_E)$ είναι επιμορφισμός. Αφού για κάθε δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in R$ που ανήκουν στην ίδια ίνα της f υπάρχει μοναδικό $h \in H$ με $h(\alpha) = \beta$ η απεικόνιση είναι και 1-1 και άρα ισομορφισμός.

(4) Αν έχουμε δύο χώρους επικάλυψης R_1, R_2 του $\mathbb{K}(r)$ και μία ισοδυναμία $g : R_1 \to R_2$ τότε αν ο distinguinshed generator του R_1 είναι ο σ_1, ο distinguished generator του R_2 θα είναι ο $\sigma_2 = g^{-1}\sigma_1 g$, γιατί αν $\varphi : R_2 \to \mathbb{K}(r^{1/e})$ είναι μία ισοδυναμία επικαλύψεων τότε $\varphi\sigma_2^{-1}\varphi^{-1} = \varphi g^{-1}\sigma_1^{-1}g\varphi^{-1} = \varphi g^{-1}\sigma_1^{-1}(\varphi g^{-1})^{-1} = \zeta_e$ αφού η φg^{-1} είναι ισοδυναμία επικαλύψεων $R_1 \to \mathbb{K}(r^{1/e})$. Το ζητούμενο, λοιπόν, έπεται από το ότι η $h\big|_E : E \to E'$ επάγει ισοδυναμία μεταξύ των προβολών επικάλυψης f_E και $f_{E'}$.

(5) Έστω b' το τελικό σημείο της ανύψωσης του γ με αρχικό σημείο το b. Μέσω της ανύψωσης του γ, το λ θα ανυψώνεται σε ένα μονοπάτι σε κάποιο Ε circular component του p. Έστω y και y' το αρχικό και τελικό σημείο αυτής της ανύψωσης. Μέσω της $\Phi_b[\gamma]$

η ανύψωση του δ με βάση το b' θα πηγαίνει στην ανύψωση του δ με βάση το b. Συνέπως, το τελικό σημείο του πρώτου, που είναι το y' θα πηγαίνει στο τελικό σημείο του δεύτερου που είναι το y'. Γνωρίζουμε, όμως, από το (c) της προηγούμενης πρότασης ότι αυτός ο μετασχηματισμός επικάλυψης είναι ο h_E και άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Ορισμός 2.1.8. *Έστω $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ πεπερασμένη επικάλυψη Galois. Λέμε ότι το r είναι αρκετά μικρό αν το $D(p,r) \cap P = \{p\}$, για κάθε $p \in P$ και έστω $p \in P$. Ορίζουμε μία σχέση στους circular components επιπέδου r πάνω από το p (για αρκετά μικρό r) ως εξής: $E \equiv \hat{E}$ αν $\mathrm{E} \subset \hat{E}$ ή $\hat{E} \subset E$. Από την προηγούμενη πρόταση, αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης λέγονται τα **ideal points** του R πάνω από το p.*

Τα ideal points πάνω από κάποιο p είναι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών Ε του $f^{-1}(D^*)$ και κάθε ένα αναπαρίσταται από μία τέτοια. Συνεπώς, το πλήθος τους είναι λιγότερο από την τάξη της Η. Συγκεκριμένα, είναι $|\mathrm{H}|/e$ όπου e είναι ο βαθμός της f_E. Διαισθητικά, αυτά τα σημεία είναι τα κέντρα των E που λείπουν. Αυτό που θα κάνουμε τώρα είναι να βάλουμε αυτά τα σημεία στον R παίρνωντας, έτσι, έναν συμπαγή χώρο.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ πεπερασμένη επικάλυψη Galois. Έστω $\bar{R}$ η (ξένη) ένωση του R και όλων των ideal points πάνω από όλα τα $p \in P$. Ορίζουμε ένα $V \subset \bar{R}$ να είναι ανοιχτό αν το $V \cap R$ είναι ανοιχτό στο R και για κάθε ideal point $\pi \in V$ υπάρχει $\mathrm{E} \in \pi$ με $\mathrm{E} \subset V$. Ο $\bar{R}$ με αυτή την τοπολογία είναι ένας συνεκτικός χώρος Hausdorff. Η f επεκτείνεται σε έναν συνεχή επιμορφισμό $\bar{f} : \bar{R} \to \mathbb{P}^1$ με $\bar{f}(\pi) = p$ για κάθε ideal point π πάνω από το p και κάθε $\alpha \in Deck(f)$ επεκτείνεται σε με μοναδικό τρόπο σε έναν ομοιομορφισμό $\bar{\alpha} : \bar{R} \to \bar{R}$ με $\bar{f} \circ \bar{\alpha} = \bar{f}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την $f : \bar{R} \to \mathbb{P}^1$, ένα ideal point $\pi \in \bar{R}$ και τα ανοιχτά σύνολα $A_r = \{\pi\} \cup E_r$ όπου E_r ένα circular component επιπέδου r πάνω από το $p = f(\pi)$. Καθώς τα r γίνονται αρκετά μικρά, τα $f(A_r) = D(p,r) \cup \{p\}$ τείνουν στο $\{p\}$. Συνεπώς, η f επεκτείνεται συνεχώς στο $\{\pi\}$ με $f(\pi) = p$. Προφανώς, η $\bar{f}$ είναι επί. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε το ανάλογο για τα $\alpha \in H$. Αφού αποτελούν ομάδα, κάθε $\bar{\alpha}$ θα είναι ομοιομορφισμός.

Ο $\bar{R}$ είναι συνεκτικός αφού περιέχει τον συνεκτικό R σαν πυκνό υπόχωρο.

Έστω $a, b \in \bar{R}, a \neq b$. Αν $\bar{f}(a) \neq \bar{f}(b)$, τότε, αφού ο $\mathbb{P}^1$ είναι Hausdorff, υπάρχουν ανοιχτά του $\mathbb{P}^1$, Α, Β που να διαχωρίζουν τα $\bar{f}(a), \bar{f}(b)$. Τότε τα $\bar{f}^{-1}(A), \bar{f}^{-1}(B)$ θα διαχωρίζουν τα a, b. Αν πάλι $\bar{f}(a) = \bar{f}(b)$ τότε τα a, b θα ανήκουν στον R και άρα θα διαχωρίζονται από ανοιχτά του αφού ο R είναι Hausdorff, θα είναι ideal points που θα ανήκουν σε διαφορετικά circular components. Άρα, τελικά, ο $\bar{R}$ είναι Hausdorff.

Τέλος, για τη συμπάγεια, θεωρούμε γύρω από κάθε $x \in \mathbb{P}^1 \backslash P$ μία admissible περιοχή U_x τέτοια ώστε και η κλειστότητα της να περιέχεται σε μία admissible περιοχή. Η αντίστροφη εικόνα της κλειστότητας $\bar{U}_x$ μίας τέτοιας περιοχής μέσω της $\bar{f}$ είναι συμπαγής, γιατί θα είναι ένωση πεπερασμένων συνιστωσών ομοιομορφικών με το $\bar{U}_x$. Ομοίως, για τα σημεία $p \in P$ θεωρούμε περιοχές $D(p,r)$ με r αρκετά μικρό ώστε η αντίστροφη εικόνα της κλειστότητας τους μέσω της $\bar{f}$ να είναι συμπαγής. Αφού, ο $\mathbb{P}^1$ είναι συμπαγής και καλύπτεται από τα $U_x, D(p,r)$, θα καλύπτεται και από μία πεπερασμένη συλλογή αυτών, άρα και των κλειστοτήτων τους. Συνεπώς, οι αντίστροφες εικόνες τους θα καλύπτουν τον $\bar{R}$. Άρα, ο $\bar{R}$ θα είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους συμπαγών υποσυνόλων του και συνεπώς, συμπαγής.

$\square$

Λήμμα 2.1.2. *Έστω ανοιχτά υποσύνολα $U \subset \mathbb{P}^1 \backslash P$ admissible για την f, δηλαδή για κάθε συνιστώσα V του $f^{-1}(U)$ η $f\big|_V$ να είναι ομοιομορφισμός και τέτοια ώστε $\{0, \infty\} \not\subset U$. Θέτουμε $\varphi = f\big|_V$, αν $\infty \notin U$ και $\varphi = 1/(f\big|_V)$ αν $\infty \in U$. Τότε οι (V, φ) είναι χάρτες στον R και αποτελούν άτλα. Άρα, ο R γίνεται επιφάνεια Riemann και η απεικόνιση $f : R \to \mathbb{P}^1$ είναι αναλυτική. Ακόμα περισσότερο, κάθε $\alpha \in$ Η γίνεται αναλυτική απεικόνιση $\alpha : R \to R$.*

Απόδειξη. Αν έχουμε δύο χάρτες $(V_1, \varphi_1), (V_2, \varphi_2)$ όπως στην εκφώνηση, τότε η $\varphi_1\varphi_2^{-1} : \varphi_2(V_1 \cap V_2) \to \varphi_1(V_1 \cap V_2)$ θα είναι η ταυτοτική απεικόνιση ή η $1/z$. Αφού και οι δύο είναι ολόμορφες τότε όλοι αυτοί οι χάρτες είναι συμβατοί και άρα αποτελούν έναν άτλαντα. Επίσης, για κάθε $\alpha \in H$ $\varphi_1\alpha\varphi_2^{-1} = id$ και η $f\varphi^{-1}$ θα είναι η ταυτοτική ή η $1/z$. Άρα, οι α, f είναι αναλυτικές. ☐

Τώρα θα επεκτείνουμε τη δομή επιφάνειας Riemann στον χώρο $\bar{R}$. Για να γίνει αυτο, αρκεί να κατασκευάσουμε (συμβατούς) χάρτες γύρω από κάθε ideal point π. Έχουμε δει ότι για κάθε circular component $E \in \pi$ επιπέδου r πάνω από το $p = \bar{f}(\pi)$ υπάρχει ομοιομορφισμός φ : E $\to \mathbb{K}(r^{1/e})$ που επάγει ισοδυναμία μεταξύ των επικαλύψεων $f_E : E \to \mathbb{K}(r)$ και $z^e : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to \mathbb{K}(r)$. Αυτός ο ομοιομορφισμός επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό $\varphi_\pi : V_\pi = E \cup \{\pi\} \to D(0, r^{1/e})$. Αυτοί οι φ_π είναι οι ζητούμενοι χάρτες.

Λήμμα 2.1.3. *Οι (V_π, φ_π) μαζί με τους (V, φ) αποτελούν έναν άτλαντα. Με αυτή τη δομή, ο R είναι μια συμπαγής επιφάνεια Riemann και οι απεικονίσεις $\bar{f}$: P $\to \mathbb{P}^1$ και $\bar{\alpha} : R \to R, \alpha \in Deck(f)$ είναι αναλυτικές.*

Απόδειξη. Έστω $(V, \varphi), (V_\pi, \varphi_\pi)$ με $\infty \notin V$ και άρα $\varphi = f$. Για την $\varphi_\pi : V_\pi \to D(r^{1/e})$ ισχύει $\kappa_p \circ \bar{f}\big|_E = z^e \circ \varphi_\pi$, όπου $p = f(\pi)$. Συνεπώς, η $\varphi\varphi_\pi^{-1}$ θα είναι η απεικόνιση $\kappa_p^{-1} \circ z^e : \varphi_\pi(V_\pi \cap V) \to \varphi(V_\pi \cap V)$. Άρα, για $p \neq \infty, \varphi\varphi_\pi^{-1} = z^e + p$ και για $p = \infty, \varphi\varphi_\pi^{-1} = 1/z^e$. Και στις δυο περιπτώσεις οι συναρτήσεις είναι ολόμορφες. Για να δείξουμε οτι έχουν και ολόμορφη αντίστροφη αρκεί να δείξουμε οτι έχουν συνεχή αντίστροφη (στα πεδία που έχουν οριστεί), το οποίο όμως το γνωρίζουμε αφού οι φ, φ_π είναι ομοιομορφισμοί.

Δείξαμε, λοιπόν, οτι οι καινούριοι χάρτες είναι συμβατοί με τους παλιούς. Θα δείξουμε, τώρα, οτι οι $\bar{f}, \bar{\alpha}$ είναι αναλυτικές.

Αρκεί να το ελέγξουμε γύρω από τα ideal points, για τα υπόλοιπα το ξέρουμε ήδη. Όπως και πριν, έχουμε $\kappa_p \circ \bar{f} \circ \varphi_\pi^{-1} = z^e$. Αν $p \neq \infty$, ένας χάρτης γύρω από το $p \in \mathbb{P}^1$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση id και έχουμε $id \circ \bar{f} \circ \varphi_\pi^{-1} = z^e + p$. Αν $p = \infty$ τότε ένας χάρτης γύρω από το p είναι η $1/z = \kappa_p$ και αφού, $\kappa_p \circ \bar{f} \circ \varphi_\pi^{-1} = z^e$ η $\bar{f} : \bar{R} \to \mathbb{P}^1$ είναι αναλυτική.

Τέλος, για τις $\bar{\alpha} \in H$ έστω π_1, π_2 δύο ideal points στον $\bar{R}$. Αφού οι απεικονίσεις $\alpha, \varphi_{\pi_1}\big|_E, \varphi_{\pi_2}\big|_E$ είναι ισοδυναμίες επικαλύψεων τότε και η $\varphi_{\pi_2}\big|_E \circ \alpha \circ \varphi_{\pi_1}\big|_E^{-1} : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to \mathbb{K}(r^{1/e})$ θα είναι ισοδυναμία επικαλύψεων, δηλαδή θα είναι μετασχηματισμός επικάλυψης της $z^e : \mathbb{K}(r^{1/e}) \to \mathbb{K}(r)$. Συνεπώς, $\varphi_{\pi_2}\big|_E \circ \alpha \circ \varphi_{\pi_1}\big|_E^{-1} = \zeta_e$ για κάποιο $\zeta_e \in \mu_e$ και αφού $\varphi_{\pi_2} \circ \bar{\alpha} \circ \varphi_{\pi_1}^{-1}(0) = 0$, $\varphi_{\pi_2} \circ \bar{\alpha} \circ \varphi_{\pi_1} - 1 = \zeta_e$. Άρα, κάθε $\bar{\alpha}$ είναι αναλυτική και έχουμε το ζητούμενο. ☐

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω P ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{P}^1$ και $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ μια πεπερασμένη επικάλυψη Galois. Με f συμβολίζουμε, επίσης, και την επέκταση της σε μια αναλυτική συνάρτηση $\bar{R} \to \mathbb{P}^1$ από την συμπαγή επιφάνεια Riemann $\bar{R}$. Ομοίως, θεωρούμε την $H = Deck(f)$ σαν μια ομάδα αναλυτικών ισομορφισμών του $\bar{R}$. Έστω*

$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\bar{R})$ το σώμα των μερομορφικών συναρτήσεων στο $\bar{R}$ και $\mathbb{C}(f)$ το υπόσωμα που παράγεται από τις σταθερές συναρτήσεις και την f. Τότε, για κάθε $\alpha \in H$ η απεικόνιση

$$\iota_\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \qquad g \mapsto g \circ \alpha^{-1}$$

είναι ένας αυτομορφισμός του $\mathcal{M}$. Το $\mathcal{M}$ είναι Galois πάνω από το $\mathbb{C}(f)$ και η απεικόνιση

$$\iota : Deck(f) \to G(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)), \qquad \alpha \mapsto \iota_\alpha$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Είναι προφανές οτι κάθε ι_α είναι ένας αυτομορφισμός του $\mathcal{M}$, όπως, επίσης και το οτι η απεικόνιση $\iota : Deck(f) \to G(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))$ είναι ομομορφισμός. Αρκεί να δείξουμε οτι είναι 1-1 και οτι το σταθερό υπόσωμα του $\mathcal{M}$ κάτω από αυτή τη δράση είναι το $\mathbb{C}(f)$. Θα δείξουμε το δεύτερο πρώτα.

Αφού, $f \circ \alpha^{-1} = f$ για κάθε α τότε κάθε $g \in \mathbb{C}(f)$ μένει σταθερό από τις ι_α. Έστω $g \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε $\iota_\alpha(g) = g \Leftrightarrow g \circ \alpha^{-1} = g$ για κάθε $\alpha \in H$. Δηλαδή, η g μένει αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της H. Συνεπώς, παραγοντοποιείται μέσω του χώρου πηλίκου $\mathrm{H}/\bar{R} = \mathbb{P}^1$, δηλαδή, $g = \bar{g} \circ f$ όπου $\bar{g}$ είναι μία μερομορφική συνάρτηση στον $\mathbb{P}^1$.

Για να δείξουμε οτι η $\bar{g}$ είναι αναλυτική έστω $y \in \mathbb{P}^1 \backslash P \cup \{\infty\}$. Η $\bar{g}$ είναι αναλυτική σε κάθε τέτοιο y γιατί, γύρω από κάθε τέτοιο y, σε μια admissible πειροχή V, η f αντιστρέφεται σε αναλυτική συνάρτηση $f^{-1} : V \to \bar{R}$ και συνεπώς, $\bar{g} = g \circ f^{-1}$ και άρα, είναι αναλυτική. Αφού στα σημεία, $P \cup \{\infty\}$ επεκτείνεται συνεχώς, τότε, από το θεώρημα επέκτασης του Riemann, είναι και αναλυτική σε αυτά.

Συνεπώς, $\bar{g} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ και άρα, $\bar{g} \in \mathbb{C}(z)$. Συνεπώς, $g = \bar{g} \circ f \in \mathbb{C}(f)$

Τέλος για να αποδείξουμε οτι η δράση είναι 1-1 πρέπει να δείξουμε οτι αν για κάποιο $\alpha \in H$ έχουμε $g \circ \alpha^{-1} = g$ για κάθε $g \in \mathcal{M}$ τότε $\alpha = 1$. Για αυτό θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.11 (Θεώρημα Ύπαρξης του Riemann (RET)-Αναλυτική Εκδοχή)**.** *Έστω Y μία συμπαγής επιφάνεια Riemann. Τότε, για οποιαδήποτε διαφορετικά $p_1, \ldots, p_s$ στην Y και μιγαδικούς αριθμούς $c_1, \ldots, c_s$, υπάρχει $g \in \mathcal{M}(Y)$ με $g(p_i) = c_i$ για $i = 1, \ldots, s$.*

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα είναι το τελευταίο μέρος αυτής της εργασίας. Προς το παρόν, θα το χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη.

Είναι προφανές, τώρα οτι αν $\alpha \in H, \alpha \neq 1$ τότε αρκεί να διαλέξουμε $g \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε η $g(y) \neq g(\alpha(y))$ και θα είναι $g \circ \alpha^{-1} \neq g$. Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να βρούμε τέτοια g. Άρα, αν $\iota_\alpha = id : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ τότε $\alpha = 1$ και άρα η $\iota : Deck(f) \to G(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))$ είναι 1-1. Τελικά, μαζί με τα παραπάνω, έχουμε πως η ι είναι ισομορφισμός. □

Βλέπουμε, λοιπόν, οτι για κάθε πεπερασμένη, Galois επικάλυψη της τρυπημένης σφαίρας, η ομάδα των μετασχηματισμών της εμφανίζεται ώς ομάδα Galois πάνω από το $\mathbb{C}(x)$.

Θυμόμαστε από την αλγεβρική τοπολογία οτι κάθε τέτοιος χώρος προκύπτει ως πηλίκο του καθολικού χώρου επικάλυψης κάτω από τη δράση κάποιας υποομάδας των μετασχηματισμών επικάλυψης του τελευταίου και αντίστοιχα η ομάδα μετασχηματισμών του θα είναι ένα πηλίκο της ομάδας του καθολικού χώρου επικάλυψης. Δηλαδή, αν $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ μια επικάλυψη Galois και $f' : R' \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ είναι η καθολική επικάλυψη, τότε υπάρχει επικάλυψη $\varphi : R' \to R$ με $f' = f \circ \varphi$ και $Deck(f) = Deck(f')/Deck(\varphi)$.

Αφού η ομάδα μετασχηματισμών του καθολικού χώρου επικάλυψης είναι ισόμορφη με τη θεμελιώδη ομάδα της τρυπημένης σφαίρας και η θεμελιώδης ομάδα της σφαίρας μείον $n \geq 2$ το πλήθος σημεία είναι η ελεύθερη σε $n-1$ γεννήτορες, βλέπουμε οτι κάθε πεπερασμένη ομάδα εμφανίζεται ώς ομάδα Galois πάνω από το $\mathbb{C}(x)$ και έτσι έχουμε θετική απάντηση στο αντίστροφο πρόβλημα του Galois πάνω από το $\mathbb{C}(x)$. Ακόμα περισσότερο, θα δείξουμε οτι κάθε πεπερασμένη Galois επέκταση του $\mathbb{C}(x)$ είναι ισόμορφη με μία επέκταση τέτοιας μορφής.

Δηλαδή θα δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.12. *Έστω $L/\mathbb{C}(x)$ μία πεπερασμένη επέκταση Galois. Τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $P \subset \mathbb{P}^1$ και πεπερασμένη Galois επικάλυψη $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ τέτοια ώστε τα σώματα L και $\mathcal{M}(\bar{R})$ να είναι $\mathbb{C}(x)$-ισόμορφα, μέσω ισομορφισμού που στέλνει το x στο f. Εδώ, όπως και παραπάνω, με f συμβολίζουμε και την επέκταση της προβολής στον $\bar{R}$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, ανάγωγο σαν πολυώνυμο του y πάνω από το $\mathbb{C}(x)$, που να έχει το L ως σώμα ριζών. Έστω n ο βαθμός του F ως προς y. Ξέρουμε οτι υπάρχουν πεπερασμένα το πολύ $p \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε το πολυώνυμο $F(p,y)$ να έχει λιγότερες από n διαφορετικές ρίζες. Έστω P το σύνολο αυτών των p μαζί με το ∞.

Θεωρούμε τον υπόχωρο R' του $\mathbb{C}^{n+1}$ που αποτελείται από τις $n+1$-άδες της μορφής $(u, v_1, \ldots, v_n)$, με $u \in \mathbb{C}\backslash P$ και $v_1, \ldots, v_n$ να είναι οι, διαφορετικές ανά δύο, ρίζες του $F(u,y) \in \mathbb{C}(y)$.

Αρχικά, θα δείξουμε οτι η απεικόνιση $f : R' \to \mathbb{C}\backslash P, (u, v_1, \ldots, v_n) \mapsto u$ είναι προβολή επικάλυψης. Από το Θεώρημα 1.2.1 θυμόμαστε οτι σε μία περιοχή U γύρω από κάθε u_0 τέτοιο ώστε το $F(u_0, y)$ να είναι διαχωρίσιμο, οι ρίζες του $F(u,y), u \in U$ ορίζονται σαν ολόμορφες συναρτήσεις $\psi_i(u), i = 1, \ldots, n$, διαφορετικές ανά δύο. Η αντίστροφη εικόνα του U μέσω της f θα είναι η (ξένη) ένωση των

$$\{(u, \psi_{i_1}(u), \ldots, \psi_{i_n}(u)), u \in U\}$$

όπου $i_1, \ldots, i_n$ είναι μία μετάθεση των $1, \ldots, n$ και η f περιορισμένη σε κάθε τέτοια περιοχή είναι ομοιομορφισμός.

Η συμμετρική ομάδα $\mathcal{S}_n$ δρα στον R' μεταθέτοντας τα v_i. Είναι προφανές οτι κάθε τέτοια μετάθεση επάγει έναν μετασχηματισμό επικάλυψης της f και οτι η $\mathcal{S}_n$ δρα μεταβατικά στις ίνες κάθε σημείου. Συνεπώς, περιορισμένη σε μία R, συνεκτική συνιστώσα του R', η f είναι μία πεπερασμένη επικάλυψη Galois με ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης της $\mathrm{H} = \{\alpha \in Deck(f\big|_{R'}) : \alpha(R) \cap R \neq \emptyset\}$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_i : R \to \mathbb{C}, (u, v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_i$. Οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν το πολυώνυμο $F(f,y) \in \mathbb{C}(f)$. Θα δείξουμε οτι οι συναρτήσεις αυτές επεκτείνονται σε μερομορφικές συναρτήσεις στο $\bar{R}$ και οτι παράγουν το $\mathrm{M}(\bar{R})$. Κατά συνέπεια, θα έχουμε οτι το $\mathrm{M}(\bar{R})$ είναι το σώμα ρίζων του $F(f,y) \in \mathbb{C}(f)$ και άρα θα είναι ισόμορφο με το L.

Αρχικά βλέπουμε οτι οι τοπικές παραστάσεις της g_i, διαλέγοντας για χάρτη στον R την f^{-1}, είναι η $\psi_i(u)$ που είναι ολόμορφη. Άρα, οι g_i είναι αναλυτικές στον R. Για να δείξουμε οτι επεκτείνεται στον $\bar{R}$ θα χρειαστούμε ένα λήμμα:

Λήμμα 2.1.4. *Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, $p_0 \in D$ και $D_0 = D \backslash p_0$. Θεωρώντας το σώμα $\mathcal{M}(D)$ ως υπόσωμα του $\mathcal{M}(D_0)$ μέσω περιορισμού των συναρτήσεων, το $\mathcal{M}(D)$ είναι αλγεβρικά κλειστό στο $\mathcal{M}(D_0)$.*

Απόδειξη. Έστω $g \in \mathcal{M}(D_0)$ αλγεβρικό πάνω από το $\mathcal{M}(D)$. Δηλαδή,

$$a_n g^n + \ldots a_1 g + a_0 = 0$$

για κάποια $a_i \in \mathcal{M}(D)$ με $a_n \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση αυτή με αρκετά μεγάλη δύναμη του $z - p_0$ μπορούμε να υποθέσουμε οτι τα a_i δεν έχουν πόλο στο p_0. Συνεπώς, οι a_i είναι φραγμένες γύρω από το p_0. Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας με a_1^{n-1} (παίρνωντας αντίστοιχη σχέση για την $g' = a_n g$), μπορούμε να υποθέσουμε οτι $a_n = 1$. Από την σχέση $g^n + ... ga_1 + 1 + a_0 = 0$, λοιπόν, αφού οι a_i είναι φραμένες, έπεται οτι και η g θα είναι φραγμένη γύρω από το p_0. Άρα, από το Θεώρημα Επέκτασης του Riemann, η g επεκτείνεται αναλυτικά στο p_0, δηλαδή $g \in \mathcal{M}(D)$. □

Αφού τα $\bar{R}$ και R διαφέρουν σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία, βλέπουμε οτι αν θεωρήσουμε το $\mathcal{M}(\bar{R})$ ως υπόσωμα του $\mathcal{M}(R)$ μέσω περιοσρισμού των συναρτήσεων, το $\mathcal{M}(\bar{R})$ θα είναι αλγεβρικά κλειστο στο $\mathcal{M}(R)$. Συνεπώς, αφού οι g_i είναι ρίζες του πολυωνύμου $F(f, y) \in \mathbb{C}(f) \subset \mathcal{M}(\bar{R})$ θα ανήκουν στο $\mathcal{M}(\bar{R})$ δηλαδή θα επεκτείνονται σε αναλυτικές συναρτήσεις στο $\bar{R}$.

Μένει να δείξουμε τώρα, οτι οι g_i παράγουν το $\mathcal{M}(\bar{R})$. Αφού το τελευταίο είναι Galois επέκταση του $\mathbb{C}(f)$, αρκεί να δείξουμε οτι αν ένας αυτομορφισμός της $G(\mathcal{M}(\bar{R})/\mathbb{C}(f))$ αφήνει αναλλοίωτα τα g_i τότε είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός. Αυτό ισχύει γιατί οι αυτομορφισμοί της $G(\mathcal{M}(\bar{R})/\mathbb{C}(f))$ είναι της μορφής $\iota_\alpha, \alpha \in Deck(f\big|_R)$ και οι g_i διαχωρίζουν τα σημεία κάθε ίνας της f. Επομένως, αν $\iota_\alpha(g_i) = g_i \circ \alpha^{-1} = g_i$ για κάθε i, για κάποιο $\alpha \in Deck(f\big|_R)$, τότε $\alpha = id\big|_R$ και, άρα $\iota_\alpha = 1$. □

Υπό το φως αυτού του θεωρήματος, και βασιζόμενοι στην προηγούμενη μελέτη μας, θα μπορούσαμε, ίσως να ορίσουμε κάποιες αναλλοίωτες των πεπερασμένων επεκτάσεων Galois του $\mathbb{C}(x)$. Αυτές είναι το σύνολο P των σημείων διακλάδωσης της επικάλυψης f, ο βαθμός της επικάλυψης στους circular components γύρω από κάθε $p \in P$ και ακόμα περισσότερο, η κλάση συζυγίας της $G(L/\mathbb{C}(x)) \simeq Deck(f)$ που αποτελείται από τους distinguished generators (η τελευταία μας δίνει και τον βαθμό επικάλυψης).

Δεν είναι, φυσικά, σαφές ακόμα αν είναι αναλλοίωτες, ειδικά η τελευταία. Στην επόμενη παράγραφο θα φτάσουμε σε αυτές μέσω μίας πιο αλγεβρικής μελέτης.

2.2 Οι επεκτάσεις του $k(x)$

Μία πεπερασμένη επέκταση Galois του $k(x)$ καθορίζεται από ένα πολυώνυμο

$$F(x, y) \in k.$$

Προηγουμένως, οι λύσεις της εξίσωσης ήταν μερομορφικές συναρτήσεις σε μία επιφάνεια Riemann. Εδώ, θα θέλαμε να εκφράσουμε τις ρίζες του πολυωνύμου ως τυπικές σειρές Laurent σε $x - p$ για $p \in k \cup \{\infty\}$ όπου, για $p = \infty$, έχουμε σειρές ως προς $1/x$. Αν και αυτό δεν γίνεται πάντα, μπορούμε να βρούμε λύση που να είναι σειρά Laurent ως προς $(x-p)^{1/e}$, για κάποιον ακέραιο e.

Θεωρούμε, λοιπόν, το

$$\Lambda = k((t)) = \{\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i t^i N \in \mathbb{Z}\}$$

που αποτελείται από όλες τις τυπικές σειρές Laurent σε t με συντελεστές από το k, με τις πράξεις της τυπικής πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού σειρών Laurent. Μένει να επαληθεύσουμε οτι το Λ είναι, όντως, σώμα, δηλαδή οτι κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει αντίστροφο.

Έστω $\alpha = \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i t^i \in \Lambda$ με $\alpha_N \neq 0$. Για να είναι ένα $b = \sum_{i=\mathrm{M}}^{\infty} b_i t^i \in \Lambda$ αντίστροφο του α θα πρέπει αρχικά να έχουμε $M = -N$ και $b_M = \alpha_N^{-1}$ ώστε όλοι οι συντελεστές των t^i για $i < 0$ να είναι 0 και ο σταθερός όρος να είναι 1. Ομοίως για τους υπόλοιπους όρους, θα πρέπει να έχουμε:

$$b_{-N}\alpha_{\mathrm{N}+1} + \alpha_{\mathrm{N}} b_{-N+1} = 0,$$

$$b_{-N}\alpha_{N+2} + b_{-N+1}\alpha_{-\mathrm{N}+1} + b_{-N+2}\alpha_N = 0$$

$$\vdots$$

και τα λοιπά.

Αφού, $b_{-N} = \alpha_N^{-1}$ και ο συντελεστής του $b_{-N+\nu}$ στην ν-οστή εξίσωση είναι $\alpha_N \neq 0$ μπορούμε να λύσουμε κάθε εξίσωση, ως προς b_i, επαγωγικά και τελικά να έχουμε $\alpha b = 1$.

Το Λ, λοιπόν, είναι το σώμα των τυπικών σειρών Laurent με συντελεστές από το k. Περιέχει τον δακτύλιο των πολυωνύμων $k[x]$ και κατα συνέπεια, το σώμα των ρητών συναρτήσεων $k(x)$ και είναι το σώμα πηλίκων του δακτυλίου των δυναμοσειρών με συντελεστές από το k, $k[[t]]$.

Όπως είπαμε, θα έχουμε λύσεις που είναι σειρές Laurent σε $(x-p)^{1/e}$. Με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε το Λ ορίζεται και το σώμα των τυπικών σειρών Laurent ως προς $\tau, \tau^e = t$,

$$\Lambda_e = \{\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i t^{i/e}, N \in \mathbb{Z}\} = k((t^{1/e})) = k((\tau))$$

Τα Λ, Λ_e είναι ισόμορφα μέσω του ισομορφισμού που στέλνει το t στο τ. Αν, πάλι ορίσουμε απεικόνιση $\Lambda \to \Lambda_e$ με $t \mapsto \tau^e$ τότε το Λ περιέχεται στο Λ_e σαν υπόσωμα. Με αυτήν την απεικόνιση, το Λ ταυτίζεται με το υπόσωμα του Λ_e που περιέχει τις σειρές $\sum b_i \tau^i$ οι οποίες έχουν (πιθανόν) μη μηδενικούς συντελεστές μόνο όταν το i είναι πολλαπλάσιο του e. Αν το k περιέχει κάποια πρωταρχική ρίζα της μονάδας, η επέκταση αυτή είναι Galois.

Λήμμα 2.2.1. *Υποθέτουμε οτι το k περιέχει κάποια πρωταρχική ρίζα της μονάδας ζ_e. Τότε το Λ_e είναι Galois πάνω από το Λ βαθμού e. Η ομάδα Galois είναι κυκλική και παράγεται από το στοιχείο $\omega : \sum b_i \tau^i \mapsto \sum (b_i \zeta_e^i)\tau^i$. Επίσης, $\Lambda_e = \Lambda(\tau)$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι η ω είναι ένας αυτομορφισμός του Λ_e που διατηρεί σταθερό το Λ, αφού αν το i είναι πολλαπλάσιο του e, τότε $\zeta_e^i = 1$. Αντιστρόφως, αν $\omega(\sum b_i \tau^i) = \sum b_i \tau^i \Leftrightarrow \sum b_i \zeta_e^i \tau^i = \sum b_i \tau^i$ τότε $b_i = \zeta_e^i$ για κάθε i. Συνεπώς, αν $\zeta_e^i \neq 1$, δηλαδή το i δεν είναι πολλαπλάσιο του e, τότε $b_i = 0$. Άρα, η επέκταση Λ_e/Λ είναι Galois και η $G(\Lambda_e/\Lambda)$ παράγεται από το ω.

Αφού $\zeta_e \in k$ τότε όλα τα συζυγή του τ, που είναι τα $\zeta_e^\lambda(\tau)$ περιέχονται στο $\Lambda(\tau)$. Συνεπώς, η επέκταση $\Lambda(\tau)/\Lambda$ είναι Galois. Αν τώρα, $\omega^\lambda(\tau) = \tau \Leftrightarrow \zeta_e^\lambda = \zeta_e$ για κάποιο λ τότε $\zeta_e^\lambda = 1 \to \omega^\lambda = 1$ και άρα $\Lambda_e = \Lambda(\tau)$. □

Αυτό που θα δείξουμε τώρα είναι οτι, όταν το k είναι αλγεβρικά κλειστό, κάθε πεπερασμένη Galois επέκταση του Λ είναι αυτής της μορφής.

Λήμμα 2.2.2. *Θεωρούμε τον ομομορφισμό $k[[t]] \to k$ που στέλνει κάθε δυναμοσειρά με συντελεστές από το k στον σταθερό της όρο. Έστω F ένα μονικό πολυώνυμο ως προς y με συντελεστές από το $k[[t]]$ και έστω F_0 το πολυώνυμο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε στους συντελεστές του F τον παραπάνω ομομορφισμό.*

Τότε, αν το F_0 παραγοντοποιείται

$$F_0 = g \cdot h$$

όπου g, h είναι μονικά και πρώτα μεταξύ τους, το F θα έχει μια παραγοντοποίηση

$$F = G \cdot H$$

όπου $G, H \in k[[t]][y]$ μονικά, με $G_0 = g, H_0 = h$.

Απόδειξη. Έστω n ο βαθμός του F ως προς y. Γράφουμε το F σαν δυναμοσειρά

$$F = \sum F_i t^i,$$

όπου τα F_i είναι πολυώνυμα ως προς y με βαθμό $\leq n-1$ και $degF_0 = n$. Έστω, r και s οι βαθμοί των g και h αντίστοιχα. Θέλουμε να βρούμε

$$G = \sum G_i t^i, H = \sum H_i t^i$$

τέτοια ώστε:

$$G_0 = g, H_0 = h$$
$$G_1 H_0 + G_0 H_1 = F_1$$
$$G_2 H_0 + G_1 H_1 + G_0 H_2 = F_2$$
$$\vdots$$

και $degG_i < r, degH_i < s$ για κάθε $i > 1$. Οι εξισώσεις αυτές λύνονται επαγωγικά αφού τα g, h είναι πρώτα μεταξύ τους. Για παράδειγμα, στην δεύτερη εξίσωση, γνωρίζοντας τα $G_0 = g$ και $H_0 = h$ έχουμε:

$$G_1 h + g H_1 = F_1.$$

Αφού τα $g, h \in k[y]$ είναι πρώτα μεταξύ τους τότε παράγουν τον $k[y]$ και η εξίσωση έχει πάντα λύση. Δηλαδή, μπορούμε να βρούμε τα ζητούμενα G_1, H_1. Παρατηρούμε οτι η επιλογή των G_1, H_1 είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των G_0, H_0 υπό την έννοια οτι δεν περιέχουν ίδιους συντελεστές (το G_i είναι το άθροισμα των συντελεστών του t^i στο G). Επαγωγικά, έχοντας βρει όλα τα προηγούμενα, σε κάθε βήμα θα έχουμε $G_\kappa h + gH_\kappa = F_\kappa - \sum_{i+j=\kappa, i,j>0} G_i H_j = U_\kappa$ και με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τα G_κ, H_κ.

Όσον αφορά, τώρα, τους βαθμούς των G_i, H_i βλέπουμε για τα G_1, H_1 π.χ. οτι αν G'_1, H'_1 είναι τα μέρη τους που αποτελούνται από όρους σε δυνάμεις μεγαλύτερες από $r-1$ και $s-1$ αντίστοιχα τότε, αφού $degF_1 < n-1$ θα πρέπει $G'_1 h + gH'_1 = 0$. Αφού, όμως, τα g, h είναι πρώτα μεταξύ τους αυτό συνεπάγεται οτι $G'_1 = H'_1 = 0$ και συνεπώς $degG_1 \leq r-1, degH_1 \leq s-1$. Επαγωγικά, αφού θα είναι και $degU_\kappa < n-1$, έχουμε τη ζητούμενη συνθήκη. □

Πόρισμα 2.2.1. *Έστω k ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής 0 και F ένα μονικό πολυώνυμο ως προς y βαθμού $n \geq 2$ με συντελεστές από το $k[[t]]$. Υποθέτουμε οτι ο y^{n-1}-συντελεστής του F_0 είναι 0 και $F_0(y) \neq y^n$. Τότε το F γράφεται σαν γινόμενο $F = GH$ όπου G, H μονικά, μη σταθερά πολυώνυμα ως προς y με συντελεστές από το $k[[t]]$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε, από το παραπάνω λήμμα, οτι το F_0 μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο, πρώτων μεταξύ τους μη σταθερών πολυωνύμων. Αφού το k είναι αλγεβρικά κλειστό τότε το $F_0 \in k[y]$ θα γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων και η μόνη περίπτωση να μην ισχύει το ζητούμενο είναι να είναι όλοι ίδιοι. Δηλαδή, να έχουμε $F_0 = (y-\alpha)^n$ για κάποιο $\alpha \in k$ τότε όμως ο συντελεστής του y^{n-1} θα είναι $-n\alpha$. Άρα, θα πρέπει $\alpha = 0$(αφού το k έχει χαρακτηριστική 0). Σε αυτήν την περίπτωση $F_0 = y^n$ που δεν γίνεται. □

Μπορούμε, τώρα να αποδείξουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω k αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής 0 και F ένα μονικό, μη σταθερό πολυώνυμο ως προς y με συντελεστές από το $k[[t]]$. Τότε το F έχει μια ρίζα σε κάποιο Λ_e.*

Απόδειξη. Έστω F ελάχιστου βαθμού πολυώνυμο που να μην ικανοποιεί το ζητούμενο. Προφανώς, $n = deg(F) \geq 2$. Έστω $F(y) = y^n + \lambda_{n-1}y^{n-1} + \cdots + \lambda_1 y + \lambda_0$ όπου $\lambda_i \in k[[t]]$. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\lambda_{n-1} = 0$ αλλιώς θεωρούμε το

$$\tilde{F} = F(y - \frac{\lambda_{n-1}}{n}).$$

Αν, τώρα, $F_0(y) \neq y^n$ τότε το F παραγοντοποιείται, από το παραπάνω πόρισμα και άρα δεν είναι ελάχιστου βαθμού. Συνεπώς, $F_0(y) = y^n$, που σημαίνει οτι ο σταθερός όρος των λ_ν είναι 0. Δεν μπορούν, όμως, όλα να είναι 0 αφού τότε θα είχαμε $F = y^n$.

Συνεπώς, κάθε (μη μηδενικό) λ_ν θα είναι της μορφής

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu t^{m_\nu} + \ldots$$

όπου $m_\nu \geq 1$ θα είναι η ελάχιστη δύναμη στην οποία εμφανίζεται το t στο λ_ν για $\nu \geq 1$. Δηλαδή,

$$F(y) = y^n + y^{n-2}(\alpha_{n-2}t^{m_{n-2}} + \ldots) + \cdots + y(\alpha_1 t^{m_1} + \ldots) + \lambda_0(t)$$

Θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής σε $y' = t^d y$, για κάποιο d που θα διαλέξουμε κατάλληλα, ώστε κάποιος από τους συντελεστές να μείνει με θετικό σταθερό όρο.

Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο $\bar{F} = t^{nd}F(y/t^d)$ τότε αυτό είναι μονικό και ο συντελεστής του y^ν για $\nu \geq 1$ θα είναι

$$\alpha_\nu t^{m_\nu - d\nu + dn}.$$

Αυτό που θέλουμε, αρχικά, είναι ένα d τέτοιο ώστε όλες αυτές οι δυνάμεις να είναι μη αρνητικές και τουλάχιστον μία να είναι 0. Δηλαδή,

$$d \leq m_\nu/(n-\nu)$$

για κάθε ν αλλά

$$d = m_\nu/(n-\nu)$$

για κάποιο ν. Άρα, $d = min\{m_\nu/(n-\nu)\}$ Προφανώς, το d θα είναι ρητός. Αν $d = a/e$ τότε βλέπουμε οτι ο συντελεστής κάθε y^ν στο $\bar{F}$ θα γράφεται σαν δυναμοσειρά ως προς $\tau = t^{1/e}$. Συνεπώς, ικανοποιούνται τα κριτήρια του πορίσματος για το $\bar{F}(y) \in k[[\tau]]$ δηλαδή έχει μία ρίζα σε κάποια επέκταση $\Lambda_{e'}$ του $k((\tau))$. Τελικά, αφού μια ρίζα του $\bar{F}$ είναι και ρίζα του F, θα έχουμε μία ρίζα του F σε κάποια επέκταση $\Lambda_{ee'}$ του $k((t))$. □

Πόρισμα 2.2.3. *Έστω k αλγεβρικά κλειστό σώμα, χαρακτηριστικής 0 και Δ μια πεπερασμένη επέκταση του $\Lambda = k((t))$ βαθμού e. Τότε $\Delta = \Lambda(\delta)$ για κάποιο δ με $\delta^e = t$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι το πολυώνυμο που παράγει τη Δ ανήκει στο $k[[t]]$ και άρα έχει μία ρίζα σε κάποιο $\Lambda_{e'}$. Συνεπώς, αφού το τελευταίο είναι Galois πάνω από το Λ το Δ θα είναι κάποιο υπόσωμα του $\Lambda_{e'}$. Αφού η ομάδα $G(\Lambda_{e'}/\Lambda)$ είναι κυκλική, τότε έχει μοναδική υποομάδα δείκτη e και άρα το μόνο υπόσωμα του $\Lambda_{e'}$ βαθμού e είναι το Λ_e. Συνεπώς, $\Delta = \Lambda_e$. □

Ξέρουμε, λοιπόν, ποιες είναι οι επεκτάσεις του $\Lambda = k((t))$. Ο αρχικός μας στόχος, όμως, ήταν οι επεκτάσεις του $k(x)$.

Στην προηγούμενη ενότητα μία πεπερασμένη επέκταση Galois του $\mathbb{C}(x)$ αντιστοιχούσε σε μία προβολή επικάλυψης της τρυπημένης σφαίρας. Θυμόμαστε ότι οι αναλλοίωτες που ορίσαμε, αν και δεν έχουμε αποδείξει ακόμα αυτόν τον χαρακτηρισμό, εξαρτώνταν μόνο από την τοπική συμπεριφορά της επικάλυψης.

Αντιστοιχα εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη μελέτη για το $\Lambda = k((t))$ για να ορίσουμε κάποιες αναλλοίωτες μιας επέκτασης $L/k(x)$, μέσω του 'μέρους' της πάνω από το Λ.

Θεωρούμε ένα σύστημα πρωταρχικών ριζών της μονάδας $(\zeta_e)_{e\in\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε $\zeta_{e'e''}^{e'} = \zeta_{e''}$. Στην περίπτωση που $k = \mathbb{C}$ ένα τέτοιο σύστημα είναι το $(exp(2\pi i/e))_{e\in\mathbb{N}}$.

Έστω Δ/Λ μία πεπερασμένη επέκταση Galois, όπως και παραπάνω, βαθμού e. Τότε $\Delta = \Lambda(\delta)$ με $\delta^e = t$. Το στοιχείο ω της $G(\Delta/\Lambda)$ με $\omega(\delta) = \zeta_e\delta$ που έχουμε δει οτι την παράγει, λέγεται distinguished generator της $G(\Delta/\Lambda)$. Αν $\delta' \in \Delta$ είναι ένα άλλο στοιχείο με την ίδια ιδιότητα, τότε αυτό διαφέρει από το δ κατα μία ρίζα της μονάδας και άρα $\omega(\delta') = \zeta_e\delta'$. Επίσης, αν $\Lambda \subset \Delta' \subset \Delta$ είναι μια ενδιάμεση επέκταση βαθμού e' τότε $\Delta' = \Lambda(\delta^{e'/e})$ και άρα, αφού $\zeta_e^{e'/e} = \zeta_e'$, ο περιορισμός του distinguished generator της $G(\Delta/\Lambda)$ στο Δ' είναι ο distinguished generator της $G(\Delta'/\Lambda)$.

Θέτουμε $\mathbb{P}_k^1 = k \cup \{\infty\}$ (χωρίς κάποια τοπολογία), με $\infty \notin k$ και επεκτείνουμε κάθε $\alpha \in Aut(k)$ θέτοντας $\alpha(\infty) = \infty$. Τέλος, για $p \in \mathbb{P}_k^1$, ορίζουμε τον ισομορφισμό $\partial_p : k(x) \to k(t)$ που είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο k και στέλνει το x στο $t + p$ για $p \in k$ και στο $1/t$ για $p = \infty$.

Πρόταση 2.2.4. *Έστω $L/k(x)$ μία πεπερασμένη επέκταση Galois και $G = G(L/k(x))$. Επίσης, έστω $p \in \mathbb{P}^1$.*

(α') Μπορούμε να επεκτείνουμε κάθε $\partial_p : k(x) \to k(t)$ σε έναν ισομορφισμό $\partial : L \to L_\partial$, όπου L_∂ είναι ένα υπόσωμα κάποιας πεπερασμένης Galois επέκτασης Δ του Λ και ως επέκταση Galois μένει σταθερό κάτω από τη δράση της $G(\Delta/\Lambda)$. Ορίζουμε το $g_\partial \in G$ ως:

$$g_\partial = \partial^{-1} \circ \omega \circ \partial$$

*όπου ω είναι ο distinguished generator της $G(\Delta/\Lambda)$. Αν $\tilde{\Delta}$ είναι μια άλλη πεπερασμένη Galois επέκταση του Λ με υπόσωμα $L_{\tilde{\partial}}$ και $\tilde{\partial} : L \to L_{\tilde{\partial}}$ ένας ισομορφισμός που επεκτείνει τον ∂, τότε τα g_∂ και $g_{\tilde{\partial}}$ βρίσκονται στην ίδια κλάση συζυγίας στην G. Η κλάση συζυγίας αυτή, C_p, εξαρτάται μόνο από το p(και το L, φυσικά) και είναι η **κλάση της** $G(L/k(x))$ **που σχετίζεται με το** p.*

*(β') Η τάξη $e = e_{L,p}$ των στοιχείων της C_p λέγεται **δείκτης διακλάδωσης** της επέκτασης L στο p και έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Έστω γ ένα πρωταρχικό στοιχείο για την επέκταση $L/k(x)$ που ικανοποιεί ένα ανάγωγο πολυώνυμο $F(y) \in k(x)[y]$. Έστω $\partial_pF(y) \in k(t)[y]$ το πολυώνυμο που παίρνουμε αν εφαρμόσουμε τον ∂_p*

στους συντελεστές του F. Τότε όλοι οι ανάγωγοι παράγοντες H του $\partial_p F$ στο Λ έχουν τάξη $e = e_{L,p}$ και στο (α) μπορούμε να θεωρήσουμε $\Delta = \Lambda_e$.

(γ΄) *Στο (b) μπορούμε να επιλέξουμε γ τέτοιο ώστε $F(y) = F(x,y) \in k[x,y]$ και F μονικό στο y. Τότε, η διακρινουσα $D(x)$ του F πάνω από το $k(x)$ είναι ένα μη μηδενικό στοιχείο του $k[x]$ και αν $D(p) \neq 0$ για κάποιο $p \in k$, τότε $e_{L,p} = 1$.*

(δ΄) *Αν $L'/k(x)$ είναι μια πεπερασμένη Galois επέκταση με $L' \subset L$, τότε ο περιορισμός των αυτομορφισμών στο L' απεικονίζει την C_p της $G(L/k(x))$ στην κλάση C'_p της $G(L'/k(x))$ που σχετίζεται με το p.*

Απόδειξη. Λόγω του θεωρήματος 2.2.4., ξέρουμε οτι ένα σώμα ριζών, έστω L_∂, του πολυωνύμου $\partial_p F \in k(t)[y]$ θα περιέχεται σε κάποια επέκταση Δ του Λ (αφού μπορούμε να το δούμε σαν πολυώνυμο με συντελεστές από το Λ). Αφού ο ∂_p είναι ισομορφισμός τότε επεκτείνεται σε ισομορφισμό $\partial : L \to L_\partial$. Έστω οτι έχουμε και έναν δεύτερο τέτοιο ισομορφισμό $\tilde{\partial} : L \to L_{\tilde{\partial}}$, που περιέχεται σε κάποια επέκταση $\tilde{\Delta}$ του Λ. Μπορούμε να θεωρήσουμε οτι τα Δ και $\tilde{\Delta}$ είναι ισόμορφα μέσω ενός ισομορφισμού $\varphi : \Delta \to \tilde{\Delta}$ που είναι η ταυτική στο Λ.

Έστω $\tilde{\omega}$ ο distinguished generator της $G(\tilde{\Delta}/\Lambda)$. Τότε $\tilde{\omega} = \varphi \circ \omega \circ \varphi^{-1}$. Για να το δούμε αυτό, έστω $\Delta = \Lambda(\delta), \delta^e = t$ και $\tilde{\Delta} = \Lambda(\tilde{\delta}), \tilde{\delta}^e = t$. Μπορούμε να θεωρήσουμε οτι $\varphi(\delta) = \tilde{\delta}$ αφού ετσι κι αλλιώς το $\varphi(\delta)$ θα είναι καποιο πολλαπλάσιο του $\tilde{\delta}$ με κάποια πρωταρχική e-οστή ρίζα της μονάδας. Βλέπουμε, τότε οτι $\varphi\omega\varphi^{-1}(\tilde{\delta}) = \zeta_e \tilde{\delta}$ και άρα, $\varphi\omega\varphi^{-1} = \tilde{\omega}$.

Αφού η φ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο Λ και άρα στο $k(t)$, τότε $\varphi \circ \partial_p = \partial_p$ και άρα $\varphi \circ \partial_p F = F$. Συνεπώς, $\varphi(L_\partial) = L_\partial$. Έχουμε, λοιπόν:

$$g_{\tilde{\partial}} = \tilde{\partial}^{-1} \circ \tilde{\omega} \circ \tilde{\partial} = \tilde{\partial}^{-1} \circ \varphi \circ \omega \circ \varphi^{-1} \tilde{\partial}$$

$$= (\tilde{\partial}^{-1} \circ \varphi \circ \partial) \circ \partial^{-1} \circ \omega \circ \partial \circ (\partial^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\partial}) = \alpha^{-1} \circ g_\partial \circ \alpha$$

όπου $\alpha = \partial^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\partial} \in G(L/k(x))$.

Για κάθε ρίζα γ' του πολυωνύμου $\partial_p F \in k(x)[y]$ θα είναι $k(x)(\gamma') = L_\partial$. Συνεπώς, $\Lambda(\gamma') = L_\partial \Lambda$. Άρα, κάθε ρίζα του $\partial_p F$ πάνω από το Λ έχει τον ίδιο βαθμό $e = |L_\partial \Lambda / \Lambda|$ και συνεπώς το $\partial_p F$ διασπάται, πάνω από το Λ σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων βαθμού e.

Προφανώς, θα έχουμε $e = |G(L_\partial \Lambda / \Lambda)|$. Η $G(L_\partial \Lambda/\Lambda)$ παράγεται από το $\omega = \omega\big|_{L_\partial \Lambda}$. Αφού $\omega\big|_\Lambda = id$, τότε η τάξη του ω στην $G(L_\partial \Lambda / \Lambda)$ θα είναι ο ελάχιστος φυσικός n, για τον οποίο $\omega^n\big|_{L_\partial} = id$, δηλαδή η τάξη του $g_\partial \in G(L/k(x))$ και έτσι έχουμε το (b).

Έχουμε δείξει πολλές φορές (π.χ. στο Λήμμα 1.1.1.) ότι μπορούμε να θεωρήσουμε γ στο (b) με $F(x,y) \in k[x,y]$ μονικό ως προς y. Τότε θα είναι $D(x) \in k[x]$ και $\partial_p D(t) = D_{\partial_p F}(t) = D(t+p) \in k[t]$. Άρα, $D(p) \neq 0 \Rightarrow D_{\partial_p F}(0) \neq 0$. Επίσης, αφού $\partial_p F \in k[t,y]$, τότε $D_{\partial_p F}(0) = \partial_p F(0,y) = D_{(\partial_p F)_0}$ με την ορολογία του λήμματος 2.2.2. Έστω $G = \partial_p F(y)$

Αφού $D_{G_0} \neq 0$ τότε όλες οι ρίζες του $G_0(y) \in k[y]$ θα είναι διαφορετικές ανά δύο και, αφού το k είναι αλγεβρικά κλειστό, το G_0 θα αναλύεται σε γραμμικούς παράγοντες πάνω από το k πρώτους μεταξύ τους ανά δύο. Από το λήμμα 2.2.2. έπεται οτι το G θα αναλύεται σε γραμμικούς παράγοντες πάνω από το Λ και, συνεπώς, σύμφωνα με το (b), θα είναι $e_{L,p} = 1$ και έχουμε το (c).

Αν $L'_\partial \subset L_\partial$ τότε $g_\partial^{(L)}\big|_{L'} = g_\partial^{(L')}$. Αν τώρα, έχουμε μια άλλη εμφύτευση $\partial' : L \to L_{\partial'}$ τότε τα $g_\partial^{(L')}$ και $g_{\partial'}^{(L')}$ θα είναι συζυγή. Σε κάθε περίπτωση το $g_\partial^{(L)}\big|_{L'}$ θα είναι συζυγές του $g_{\partial'}^{(L')}$ για κάθε ∂, ∂'. □

Ορισμός 2.2.5. *Έστω $L/k(x)$ μία πεπερασμένη επέκταση Galois και $p \in \mathbb{P}_k^1$. Το p λέγεται σημείο διακλάδωσης (η τόπος διακλάδωσης) του L αν $e_{L,p} > 1$ ή, ισοδύναμα, η C_p της $G(l/k(x))$ είναι μη τετριμμένη.*

Από το (c) της παραπάνω πρότασης έπεται ότι το σύνολο των σημείων διακλάδωσης είναι πεπερασμένο.

Λήμμα 2.2.3. *Έστω $L/k(x)$ και $L/k(x)$ δύο πεπερασμένες επεκτάσεις Galois, βαθμού n. Για κάθε $p \in \mathbb{P}_k^1$, έστω C_p και C'_p οι κλάσεις των $G = G(L/k(x))$ και $G' = G(L'/k(x))$ αντίστοιχα, που σχετίζονται με το p. Έστω $\alpha \in Aut(k)$ και έστω m ακέραιος τέτοιος ώστε $\alpha^{-1}(\zeta_n) = \zeta_n^m$. Υποθέτουμε οτι ο α επεκτείνεται σε ένα ισομορφισμό $\lambda : L \to L'$ με $\lambda(x) = x$. Έστω λ^* ο επαγόμενος ισομορφισμός των ομάδων Galois: $\lambda^* : G \to G', g \to \lambda g \lambda^{-1}$. Τότε:*

$$C'_{\alpha(p)} = \lambda^*(C_p)^m,$$

όπου $C_p^m = \{g^m, g \in C_p\}$

Απόδειξη. Έστω $\partial' : L' \to L'_{\partial'}$ ένας ισομορφισμός που επεκτείνει τον $\partial_{\alpha(p)}$ και έστω ότι το L'_∂ περιέχεται σε κάποιο $\Lambda_e = \Lambda(\tau), \tau^e = t$. Έστω $\tilde{\alpha} : \Lambda_e \to \Lambda_e, \sum(b_i)\delta^i \mapsto \sum(\alpha(b_i))\delta^i$ και έστω $L_\partial = \tilde{\alpha}^{-1}(L'_{\partial'})$. Τότε ο $\partial = \tilde{\alpha}^{-1} \circ \partial' \circ \lambda : L \to L_\partial$ είναι ένας ισομορφισμός που επεκτείνει τον ∂_p.

Είναι:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}\omega^m\tilde{\alpha}^{-1}(\sum b_i\tau^i) &= \tilde{\alpha}\omega^m(\sum \alpha^{-1}(b_i)\tau^i)\\ = \tilde{\alpha}(\sum \alpha^{-1}(b_i)(\zeta_e^m\tau)^i) &= \sum b_i(\alpha(\zeta_e^m)\tau)^i\\ = \sum b_i(\zeta_e\tau)^i &= \omega(\sum b_i\tau^i).\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\tilde{\alpha}\omega^m\tilde{\alpha}^{-1} = \omega$. Έχουμε, τώρα,

$$\lambda {g_\partial}^m \lambda^{-1} = \lambda\lambda^{-1}\partial'^{-1}\tilde{\alpha}\omega^m\tilde{\alpha}^{-1}\partial'\lambda\lambda^{-1} = \partial'^{-1}\omega\partial' = g_{\partial'}.$$

Συνεπώς, $\lambda^*({C_p}^m) = C'_{\alpha(p)}$.

□

Θα διατυπώσουμε τώρα την αλγεβρική εκδοχή του θεωρήματος ύπαρξης του Riemann για το σώμα $k = \mathbb{C}$.

Ορισμός 2.2.6. *Θεωρούμε τριάδες $(G, P, \boldsymbol{C})$ όπου G είναι μία πεπερασμένη ομάδα, P ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{P}^1$ και $\boldsymbol{C} = (C_p)_{p\in P}$ μία οικογένεια από κλάσεις συζυγίας της G. Δύο τέτοιες τριάδες $(G, P, \boldsymbol{C}), (G', P', \boldsymbol{C'})$ λέγονται ισοδύναμες αν $P = P'$ και υπάρχει ισομορφισμός $G \to G'$ που να απεικονίζει κάθε C_p στην C'_p. Ορίζεται, έτσι, μία σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των παραπάνω τριάδων. Την κλάση ισοδυναμίας της $(G, P, \boldsymbol{C})$ την συμβολίζουμε με $\mathcal{T} = [G, P, \boldsymbol{C}]$ και κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας λέγεται **τύπος διακλάδωσης** ή απλά **τύπος**.*

Ο τύπος διακλάδωσης μίας επέκτασης Galois $L/k(x)$ είναι ο τύπος διακλάσωσης της $G = G(L/k(x))$ και είναι μία αναλλοιώτη της επέκτασης, δηλαδή $k(x)$-ισόμορφες επεκτάσεις έχουν τον ίδιο τύπο.

Θα δούμε, τώρα, την ταύτιση μεταξύ του τοπολογικού και του αλγεβρικού μέρους της μελέτης μας για τις επεκτάσεις του $\mathbb{C}(x)$. Όπως, και στο προηγούμενο μέρος, έστω $f : R \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ μία πεπερασμένη Galois προβολή επικάλυψης και $H = Deck(f)$ η ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης.

Θεώρημα 2.2.7. *Για κάθε $p \in P$ έστω ${C_p}^{top}$ η κλάση συζυγίας της H που σχετίζεται με το p όπως την ορίσαμε στην πρόταση 2.1.6.. Για κάθε $p \in \mathbb{P}^1$ έστω ${C_p}^{alg}$ η κλάση συζυγίας της $G = G(\mathcal{M}/\mathbb{C}(f))$ που σχετίζεται με το p όπως την ορίσαμε στην πρόταση 2.2.6. για $x = f$. Τότε, ${C_p}^{alg} = \{1\}$, αν $p \notin P$ και για κάθε $p \in P$ ο ισομορφισμός $\iota : \mathrm{H} \to G$ που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα απεικονίζει την ${C_p}^{top}$ στην ${C_p}^{alg}$. Αυτό σημαίνει την ταύτιση μεταξύ του τοπολογικού τύπου διακλάδωσης της πεπερασμένης Galois επικάλυψης $f : R \to \mathbb{P}\backslash P$ με τον αλγεβρικό τύπο διακλάδωσης της πεπερασμένης Galois επέκτασης $\mathcal{M}/\mathbb{C}(f)$.*

Απόδειξη. Έστω $F(f, y) \in \mathbb{C}(f)[y]$ τέτοιο ώστε το σώμα ριζών του $F(y)$ να είναι το $\mathcal{M}$ και έστω $g_1, \dots, g_n \in M$ οι ρίζες του. Άρα, οι g_i είναι μερομορφικές συναρτήσεις $R \to \mathbb{P}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$F(f, g_i) = 0.$$

Έστω $p \in \mathbb{P}\backslash P$. Τότε το p έχει περιοχή U_p τέτοια ώστε η f να αντιστέφεται αν διαλέξουμε μια συνεκτική συνιστώσα του $f^{-1}(U_p)$ για πεδίο τιμών της f^{-1}. Οι συναρτήσεις $g_i \circ f^{-1} : U_p \to \mathbb{P}^1$ θα είναι μερομορφικές συναρτήσεις στο U_p και θα ικανοποιούν τη σχέση

$$F(x, g_i \circ f^{-1}(x)) = 0, x \in U_p$$

Άρα, $F(x + p, g_i \circ f^{-1}(x + p)) = 0$ (ή $F(1/x, g_i \circ f^{-1}(1/x)) = 0$ αν $p = \infty$) και τελικά:

$$\partial_p F(t, \tilde{g}_i(t)) = 0,$$

όπου η $\tilde{g}_i(t) = g_i \circ f^{-1}(t + p)$ (ή $g_i \circ f^{-1}(1/x)$ αν $p = \infty$) είναι μία μερομορφική συνάρτηση ορισμένη σε μία περιοχή του 0. Συνεπώς, η $\tilde{g}_i$ θα αναπτύσσεται σε σειρά Laurent. Η σειρά Laurent της $\tilde{g}_i$ θα είναι ένα στοιχείο του $\Lambda = \mathbb{C}((t))$ και θα είναι ρίζα του $\partial_p F(t, y)$. Έπεται από την πρόταση 2.2.6. οτι $e_p = 1$.

Έστω, τώρα ότι $p \in P, p \neq \infty$ και $\alpha \in {C_p}^{top}$. Έστω π, ideal point του p με $\alpha(\pi) = \pi$. Για κάθε circular component $E_r \in \pi$ επιπέδου r πάνω από το p, υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi : \mathbb{K}(r^{1/e}) \cup \{0\} \to E_r \cup \{\pi\}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\kappa_p \circ f \circ \varphi = z^e$, όπου κ_p, θυμίζουμε, είναι η απεικόνιση $x \mapsto x - p$. Δηλαδή, $f \circ \varphi(z) = z^e + p$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\partial : \mathcal{M} \to \Lambda_e$ που στέλνει καθε $g \in \mathcal{M}$ στην σειρά Laurent της $\tilde{g} = g \circ \varphi$ ως προς $z^{1/e}$. Η ∂ είναι ένας ισομορφισμός που επεκτείνει τον $\partial_p : \mathbb{C}(f) \to \mathbb{C}(t)$ και απεικονίζει το $\mathcal{M}$ σε ένα υπόσωμα $\mathcal{M}_\partial$ του Λ_e.

Αφού, $\alpha \in H$ και $\alpha(\pi) = \pi$, τότε $\varphi^{-1}\alpha^{-1}\varphi(z) = \zeta_e z$. Έχουμε, λοιπόν, $\partial \circ \iota_\alpha \circ \partial^{-1}(\tilde{g}(z)) = \partial(g \circ \alpha^{-1})(z) = g \circ \alpha^{-1} \circ \varphi(z) = g \circ \varphi(\zeta_e z) = \tilde{g}(\zeta_e z)$. Άρα, η $\partial \circ \iota_\alpha \circ \partial^{-1}$ είναι ο distinguished generator της επέκτασης Λ_e/Λ και συνεπώς, $\iota_\alpha = g_\partial$. Τελικά, αφού η ${C_p}^{alg}$ δεν εξαρτάται από τον ∂ έχουμε το ζητούμενο για $p \neq \infty$. Αν $p = \infty$, θεωρούμε τον $\partial : g(z) \mapsto g(z) \circ \varphi(1/z)$ και η υπόλοιπη απόδειξη είναι ίδια. □

Μπορούμε πλέον να αποδείξουμε πλήρως το παρακάτω:

Θεώρημα 2.2.8 (RET - αλγεβρική εκδοχή). *Έστω* $\mathrm{T} = [G, P, (C_p)_{p \in P}]$ *ένας τύπος διακλάδωσης με* $P = \{p_1, \dots, p_r\}$. *Τότε υπάρχει πεπερασμένη επέκταση Galois του* $\mathbb{C}(x)$ *με τύπο* T *αν και μόνο αν υπάρχουν γεννήτορες* $g_1, \dots, g_r$ *της* G *με* $g_1 \dots g_r = 1$ *και* $g_i \in C_{p_i}$ *για* $i = 1, \dots, r$.

Απόδειξη. Έστω $q \in \mathbb{P}^1 \backslash P$ και $\mathrm{H}_0 \simeq \pi_1(\mathbb{P}^1 \backslash P, q)$ η ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης του καθολικού χώρου επικάλυψης που αντιστοιχεί στην προβολή f_0. Θυμίζουμε οτι $\Phi_{f,q}[\gamma] \in H_0$ είναι ο μετασχηματισμός επικάλυψης που στέλνει το τελικό σημείο μιας ανύψωσης του $[\gamma]$ μέσω της f με βάση το q, στο q.

Έστω, γ_i είναι ένα μονοπάτι στο $\mathbb{P}^1 \backslash P$ με βάση το q, που κάνει μία στροφή γύρω από το p_i και από κανένα άλλο. Ξέρουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του $\mathbb{P}^1 \backslash P$ θα έχει παράσταση $\pi_1(\mathbb{P}^1 \backslash P, q) = \langle \gamma_i | \gamma_1, \dots, \gamma_r = 1 \rangle$. Άρα, υπάρχει επιμορφισμός

$$\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \backslash P, q) \to G$$

με $\gamma_i \mapsto g_i$ και συνεπώς, επιμορφισμός $\varphi_0 : \mathrm{H}_0 \to G$ που στέλνει το $\Phi_{f_0,q}[\gamma_i]$ στο g_i.

Επάγεται, έτσι, ισομορφισμός της G με κάποια ομάδα μετασχηματισμών H, κάποιας προβολής επικάλυψης f του $\mathbb{P}^1 \backslash P$ που στέλνει το g_i στο $\Phi_{f,q}[\gamma_i]$. Το τελευταίο ξέρουμε όμως, πλέον, ότι ανήκει στην (αλγεβρική) κλάση συζυγίας της Η που σχετίζεται με το p_i και άρα, $g_i \in C_{p_i}$. Συνεπώς, έχουμε τον ζητούμενο τύπο διακλάδωσης.

Αν, αντιστρόφως η G είναι ομάδα Galois κάποιας επέκτασης $L/k(x)$ με τύπο διακλάδωσης $\mathcal{T}$ τότε από το θεώρημα 2.1.13. θα είναι ισόμορφη με κάποια ομάδα μετασχηματισμών κάποιας πεπερασμένης προβολής επικάλυψης f του $\mathbb{P}^1 \backslash P$ (με τον ίδιο τύπο διακλάδωσης). Η τελευταία ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες για τους γεννήτορες $\Phi_{f,q}[\gamma_i]$ που ορίσαμε παραπάνω. □

2.3 Κριτήρια Στερεότητας

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε τα κριτήρια στερεότητας (rigidity criteria). Αυτά είναι συνθήκες για τον τύπο διακλάδωσης μιας επέκτασης του $\mathbb{C}(x)$ που αν ικανοποιούνται μπορούμε να 'ορίσουμε' (θα δούμε τι σημαίνει αυτό) πάνω από σώματα της μορφής $\kappa(x)$ όπου κ είναι κάποιο υπόσωμα του $\mathbb{C}$.

Ορισμός 2.3.1. *Αν* $(C_1, \dots, C_r)$ *είναι μία* r*-άδα από κλάσεις συζυγίας σε μια ομάδα* G*, τότε λέμε ότι είναι* ***στέρεα*** *(ή αντίστοιχα* ***ασθενώς στέρεα****), αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α΄) Υπάρχουν $g_1, \dots, g_r$ *γεννήτορες της* G *με* $g_1 \dots g_r = 1$ *και* $g_i \in C_i$ *για* $i = 1, \dots, r$

(β΄) Αν $g_1', \dots, g_r'$ *είναι ένα άλλο σύνολο γεννητόρων με τις ίδιες ιδιότητες τότε υπάρχει μοναδικό* $g \in G$ *(ή αντίστοιχα μοναδικός αυτομορφισμός* γ *της* G*), τέτοιο ώστε* $g g_i g^{-1} = g_i'$ *(αντίστοιχα* $\gamma(g_i) = g_i'$*) για* $i = 1, \dots, r$.

Θεώρημα 2.3.2. *Για κάθε ασθενώς στέρεο τύπο διακλάδωσης υπάρχει ακριβώς μία πεπερασμένη Galois επέκταση του* $\mathbb{C}(x)$ *με αυτόν τον τύπο (ως προς* $\mathbb{C}(x)$*-ισομορφισμό).*

Απόδειξη. Η ύπαρξη μιας επέκτασης με τον συγκεκριμένο τύπο δίνεται από το RET. Έστω L_1, L_2 πεπερασμένες Galois επεκτάσεις του $\mathbb{C}(x)$ με τον ίδιο τύπο και G_1, G_2 οι αντίστοιχες ομάδες Galois. Έστω τώρα, L, πεπερασμένη Galois επέκταση του $\mathbb{C}(x)$ που να περιέχει τα L_1, L_2 με ομάδα Galois G και $\rho_{1,2} : G \to G_{1,2}$ οι επιμορφισμοί που επάγονται απο περιορισμό των αυτομορφισμών. Αν $p_1, \dots, p_r$ τα σημεία διακλάδωσης της L με αντίστοιχες κλάσεις C_{p_i} ξέρουμε, από το (d) της πρότασης 2.2.6., ότι $\rho_i(C_{p_i})$ θα είναι η κλάση της G_i που σχετίζεται με το p_i. Συνεπώς, αν $g_1, \dots, g_r$ είναι γεννήτορες της L με $g_1 \dots g_r = 1$ και $g_i \in C_{p_i}$ τότε οι $\rho_1(g_i)$ και $\rho_2(g_i)$ θα ικανοποιούν τις ανάλογες ιδιότητες για τις G_1, G_2 αντίστοιχα.

Αφού οι L_1, L_2 είναι του ίδιου τύπου, τότε θα υπάρχει ισομορφισμός $\varphi : G_1 \to G_2$ έτσι ώστε το $\varphi(\rho_1(g_i))$ να είναι και αυτό ένα σύνολο γεννητόρων της G_2 με τις παραπάνω ιδιότητες. Τώρα, λόγω ασθενούς στερεότητας, θα υπάρχει αυτομορφισμός γ, της G_2, με $\gamma(\varphi(\rho_1(g_i))) = \rho_2(g_i)$. Βλέπουμε, τότε η απεικόνιση $\rho_1(g) \to \rho_2(g)$ είναι καλά ορισμένη (ισούται με $\gamma \circ \varphi$) και συνεπώς, οι ρ_1, ρ_2 θα έχουν τον ίδιο πυρήνα. Άρα και $L_1 = L_2$. □

Δεδομένου του (α) στον ορισμό, το (b) για την στέρεα περίπτωση, είναι ισοδύναμο με την συνθήκη η G να έχει τετριμμένο κέντρο.

Έστω k ένα αλγεβρικά κλειστό υπόσωμα του $\mathbb{C}$, και $L/k(x)$ μία πεπερασμένη επέκταση Galois βαθμού n και κ ένα υπόσωμα του k. Επίσης, έστω $\zeta_e = exp(2\pi i/e)$.

Μία επέκταση L του $\kappa(x)$ λέγεται **κανονική πάνω** από το κ αν δεν περιέχει αλγεβρικά στοιχεία πάνω από το k, δηλαδή $L \cap \bar{\kappa} = \kappa$. Μια ομάδα G λέμε οτι **προκύπτει κανονικά** πάνω από το κ αν είναι η ομάδα Galois κάποιας κανονικής επέκταση $L/\kappa(x)$.

Η $L/k(x)$, η απλώς το L, θα λεμέ οτι **ορίζεται πάνω** το κ αν υπάρχει ένα υπόσωμα L_κ του L Galois πάνω από το $\kappa(x)$ και κανονική πάνω από το κ.

Λήμμα 2.3.1. *Υποθέτουμε οτι το L ορίζεται πάνω από το κ.*

(α΄) *Έστω θ ένα πρωταρχικό στοιχείο για την επέκταση $L_\kappa/\kappa(x)$, δηλαδή $L_\kappa = \kappa(x)(\theta)$. Τότε $L = k(x)(\theta)$ και επίσης το L ορίζεται πάνω από κάθε ενδιάμεσο σώμα, κ', των κ και k και $L_{\kappa'} = \kappa'(x)(\theta)$*

(β΄) *Μέσω περιορισμου των απεικονίσεων, η ομάδα $G = G(L_\kappa/\kappa(x))$ είναι ισόμορφη με την $G(L/k(x))$. Συνεπώς, η G προκύπτει κανονικά πάνω από το κ.*

(γ΄) *Τα, διάφορα του ∞, σημεία διακλάδωσης του L είναι αλγεβρικά πάνω από το κ.*

(δ΄) *Αν υποθέσουμε οτι η G έχει τετριμμένο κέντρο ή το κ είναι αλγεβρικά κλειστό τότε το L_κ είναι μοναδικό. Δηλαδή, είναι το μόνο υπόσωμα του L που είναι κανονικό πάνω από κ και έχει βαθμό n πάνω από το $\kappa(x)$.*

(ε΄) *Αν το κ είναι αλγεβρικά κλειστό τότε οι επεκτάσεις $L_\kappa/\kappa(x)$ και $L/k(x)$ είναι (με φυσιολογικό τρόπο) του ίδιου τύπου.*

Απόδειξη. Έστω $F(y) \in \kappa(x)[y]$ το ανάγωγο πολυώνυμο του θ πάνω από το $\kappa(x)$. Αφού το L_κ είναι κανονικό πάνω από το κ τότε το $F(y)$ είναι ανάγωγο πάνω από το $\bar{\kappa}(x)$. Το τελευταίο είναι αλγεβρικά κλειστό στο $k(x)$ και άρα το $F(y)$ είναι ανάγωγο πάνω από το $k(x)$. Συνεπώς, $L = k(x)(\theta)$. Ομοίως, για κάθε σώμα κ', μεταξύ των κ και k το $F(y)$ θα είναι ανάγωγο πάνω από το $\bar{\kappa}'(x)$ και συνεπώς το $L_{\kappa'} = \kappa'(x)(\theta)$ θα είναι κανονικό πάνω από το κ'.

Αφού μέσω του περιορισμού, η $G(L/k(x))$ δρα μεταβατικά στις ρίζες του $F(y)$ η επαγόμενη απεικόνιση στην G θα είναι επιμορφισμός. Ακόμα περισσότερο, αφού $|G| = |G(L/k(x))| = n$, θα είναι ισομορφισμός.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $F(y) \in \kappa[x][y]$. Έχουμε δει ότι τα (διάφορα του ∞) σημεία διακλάδωσης της επέκτασης L_κ θα μηδενίζουν την διακρίνουσα του $F(y)$ που είναι ένα μη μηδενικό στοιχείο του $\kappa[x]$. Συνεπώς, θα είναι αλγεβρικά πάνω από το κ.

Έστω $L'_\kappa = \kappa(x)(\theta')$ ένα άλλο υπόσωμα του L με τις ίδιες ιδιότητες. Αν το κ είναι αλγεβρικά κλειστό τότε η επέκταση $L'_\kappa L_\kappa/\kappa(x)$ θα είναι κανονική (κάθε Galois επέκταση του $\kappa(x)$ θα είναι κανονική) και θα έχει βαθμό $> n$. Αν $\bar{\theta}$, όμως ένα πρωταρχικό στοιχείο της τότε, όπως δείξαμε παραπάνω, η επέκταση $k(x)(\bar{\theta})/k(x)$, θα έχει και αυτή βαθμό $> n$, άτοπο αφού η τελευταία περιέχεται στο L.

Έστω, τώρα, κ όχι αναγκαστικά αλγεβρικά κλειστό και η G να έχει τετριμμένο κέντρο. Όπως και παραπάνω, η επέκταση $L' = L_\kappa L_{\kappa'}$ δεν μπορεί να είναι κανονική πάνω από το κ. Έστω $\kappa' = L' \cap \kappa$. Έστω $G' = G(L'/\kappa(x))$. Οι υποομάδες της G', $G_1 = G(L/L_\kappa), G_2 = G(L/L'_\kappa)$ και $G(L/\kappa'(x)) \simeq G$ είναι κανονικές και έχουν τετριμμένη τομή. Συνεπώς, τα στοιχεία τους μετατίθενται.

Επίσης, η $G(L/\kappa'(x)) \simeq G$ μαζί με οποιαδήποτε από τις G_1, G_2 παράγει την G' (φαίνεται από τους βαθμούς των επεκτάσεων). Άρα, οι G_1, G_2 και κατά συνέπεια, η G_1G_2 θα ανήκουν στο κέντρο της G'. Αν, όμως, η G έχει τετριμμένο κέντρο τότε θα πρέπει $G \cap G_1G_2 = 1$. Αυτό δεν γίνεται γιατί η G και η G_1(ή η G_2) παράγουν την G'.

Τέλος, έστω $\partial : L \to L_\partial$ ένας ισομορφισμός που επεκτείνει τον ∂_p στο $k(x)$, σε κάποιο $\Delta = \Lambda_e$ όπου $\Lambda = k((t))$. Έστω, επίσης, $\Lambda' = \kappa((t))$. Ο $\partial\big|_{L_\kappa}$ θα είναι ένας ισομορφισμός του L_κ σε κάποιο υπόσωμα του Δ που επεκτείνει τον ∂_p στο $\kappa(x)$. Αφού το κ είναι αλγεβρικά κλειστό, από το Πόρισμα 2.2.5., οι ρίζες του $\partial_p F$ θα περιέχονται στο $\Delta'_e = \Lambda'_e$ (αν υπάρχει αμφιβολία για το e εδώ, απλώς μπορούμε να διαλέξουμε αρκετά μεγάλο e εξ'αρχής) και συνεπώς, $\partial(L_\kappa) \subset \Delta'$. Άρα, ο $\partial\big|_{L_\kappa}$ είναι ένας ισομορφισμός για την επέκταση $L_\kappa/\kappa(x)$ όπως στην πρόταση 2.2.6..

Τώρα, αν το κ είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε, από το (c), τα σημεία διακλάδωσης της $L_\kappa/\kappa(x)$ θα ανήκουν στο κ και μέσω του περιορισμού των αυτομορφισμών, όπως στο (b), επάγεται και η ισοδυναμία των τύπων διακλάδωσης για τις επεκτάσεις $L/k(x)$ και $L_\kappa/\kappa(x)$.

□

Λήμμα 2.3.2. *(i) Το L ορίζεται πάνω από κάποια πεπερασμένα παραγόμενη επέκταση του κ*

(ii) Αν L_0 είναι μία πεπερασμένη Galois επέκταση του $\kappa(x)$, κανονική πάνω από το κ τότε υπάρχει πεπερασμένη Galois επέκταση του $k(x)$, L, με το L_κ $\kappa(x)$-ισομορφικό με το L_0.

Απόδειξη. Έστω θ ένα πρωταρχικό στοιχείο για την επέκταση $L/k(x)$ που ικανοποιεί ένα πολυώνυμο $F(y) \in k(x)[y]$. Τότε, αν κ' είναι το σώμα που προκύπτει αν επισυνάψουμε στο κ τους συντελεστές του F, το L θα ορίζεται πάνω από το κ' με $L_{\kappa'} = \kappa'(x)(\theta)$. Αυτό γιατί, αφού το $F(y)$ είναι ανάγωγο στο $k(y)$ τότε θα είναι ανάγωγο, επίσης, στα $\kappa'(x)$ και $\bar{\kappa}'(x)$, άρα το $\kappa'(x)(\theta)$ θα έχει βαθμό n και θα είναι κανονικό πάνω από το κ'.

Αν, τώρα έχουμε ένα πολυώνυμο $F(y) \in \kappa(x)$ ανάγωγο πάνω από το $\bar{\kappa}(x)$ τότε θα είναι ανάγωγο και πάνω από το $k(x)$ και συνεπώς, αν $L_\kappa = \kappa(x)(\theta)$ είναι μία επέκταση κανονική πάνω από το κ τότε το $k(x)(\theta)$ θα είναι επέκταση ίδιου βαθμού πάνω από το $k(x)$ (και προφανώς κανονική πάνω από το k). □

Πόρισμα 2.3.3. *Έστω k_0 ένα αλγεβρικά κλειστό υπόσωμα του $\mathbb{C}$. Για κάθε ασθενώς στέρεο τύπο διακλάδωσης $\mathcal{T}$, υπάρχει το πολύ μία επέκταση του $k_0(x)$ (ως προς $k_0(x)$-ισομορφισμό) με τύπο $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη. Έστω δύο επεκτάσεις L_{k_0} και L'_{k_0} του k_0 με τύπο $\mathcal{T}$. Αφού το k_0 είναι αλγεβρικά κλειστό τότε αυτές είναι κανονικές πάνω από το k_0 και άρα υπάρχουν επεκτάσεις L και L' αντίστοιχα του $\mathbb{C}$ με τον ίδιο τύπο. Όμως, από το θεώρημα 2.3.2. οι τελευταίες θα είναι ισόμορφες αφού ο $\mathcal{T}$ είναι ασθενώς στέρεος και συνεπώς, μέσω του περιορισμού και αφού τα L, L' ορίζονται με μοναδικό τρόπο πάνω από το αλγεβρικά κλειστό k_0 (λήμμα 2.3.3.) τα L_{k_0} και L'_{k_0} θα είναι $k_0(x)$ ισόμορφα. □

Έστω, τώρα α ένας αυτομορφισμός του k τον οποίο βλέπουμε σαν αυτομορφισμό του $k(x)$ που σταθεροποιεί το x. Ένας ισομορφισμός λ που επεκτείνει τον α, από το L σε κάποια πεπερασμένη Galois επέκταση L' του $k(x)$, λέγεται α-ισομορφισμός. Ένας τέτοιος ισομορφισμός επάγει έναν ισομορφισμό $\lambda^* : G(L/k(x)) \to G(L'/k(x)), g \mapsto \lambda g \lambda^{-1}$.

Λήμμα 2.3.3. *Έστω $L/k(x)$ μία πεπερασμένη επέκταση Galois. Για κάθε $\alpha \in Aut(k)$ υπάρχει α-ισομορφισμός λ από το L σε μία πεπερασμένη επέκταση Galois L' του $k(x)$. Αν το L ορίζεται πάνω από το κ και $\alpha\big|_\kappa = id$, τότε μπορούμε να πάρουμε $L = L'$ και θα είναι $\lambda^* = id$.*

Απόδειξη. Έστω θ ένα πρωταρχικό στοιχείο για την $L/k(x)$ που ικανοποιεί ένα ανάγωγο πολυώνυμο $F(y) \in k(x)[y]$. Προφανώς, ο α επεκτείνεται σε έναν ισομορφισμό $\lambda : L \to L'$ όπου το L' είναι το σώμα ρίζων του πολυωνύμου $\alpha F(y)$.

Αν το L ορίζεται πάνω από το κ τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $F(y) \in \kappa(x)[y]$. Αφού $\alpha\big|_\kappa = id$ τότε $\alpha F(y) = F(y)$ και συνεπώς μπορούμε να διαλέξουμε $L' = L$. Επίσης, ξέρουμε οτι ο περιορισμός των αυτομορφισμών επάγει έναν ισομορφισμό $G(L/k(x)) \to G(L_\kappa/\kappa(x))$ ο οποίος μετατίθεται με τον λ^* (ορίζουμε τον λ^* για την $G(L_\kappa/\kappa(x))$ με τον ίδιο τρόπο μέσω του $\lambda\big|_{L_\kappa}$). Συνεπώς, αφού $\alpha\big|_\kappa = id$ ο λ^* στην $G(L_\kappa/\kappa(x))$ δρα ταυτοτικά και άρα και στην $G(L/k(x))$. □

Πρόταση 2.3.4. *Έστω $L/k(x)$ μια πεπερασμένη επέκταση Galois, της οποίας η ομάδα Galois, G, να έχει τετριμμένο κέντρο και υποθέτουμε ότι $\bar{\kappa} = k$. Τότε το L ορίζεται πάνω από το κ αν και μόνο αν για κάθε $\alpha \in G(\bar{\kappa}/\kappa)$ υπάρχει ένας α-αυτομορφισμός λ του L με $\lambda^* = id$.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει το αναγκαίο της συνθήκης, μένει το ικανό. Έστω, λοιπόν, ότι κάθε κάθε $\alpha \in G(\bar{\kappa}/\kappa)$ επεκτείνεται σε έναν α-αυτομορφισμός λ_α του L με $\lambda_\alpha^* = id$. Από τα λήμματα 2.3.4. και 2.3.3. έπεται οτι θα υπάρχει πεπερασμένη επέκταση Galois κ_1 του κ, πάνω από την οποία θα ορίζεται το L. Ξέρουμε ότι κάθε αυτομορφισμός της $G(\kappa_1(x)/\kappa(x))$ θα είναι μία επέκταση κάποιου $\alpha \in G(\kappa_1/\kappa)$ που σταθεροποιεί το x και επεκτείνεται σε έναν αυτομορφισμό της $Aut(L_{\kappa_1}/\kappa(x))$. Άρα, η επέκταση $L_{\kappa_1}/\kappa(x)$ είναι Galois.

Έστω ένα $\alpha \in G(\bar{\kappa}/\kappa)$ και λ_α η επέκταση του σε έναν αυτομορφισμο του L Αφού η G έχει τετριμμένο κέντρο τότε το L_{κ_1} ορίζεται μοναδικά και άρα, μπορούμε να δούμε τον λ_α σαν αυτομορφισμό του L_{κ_1} που σταθεροποιεί το $\kappa(x)$. Για κάθε $g \in G(L_{\kappa_1}/\kappa_1(x)) = G_1$ θα έχουμε $\lambda_\alpha g \lambda_\alpha^{-1} = 1$ και άρα το λ_α ανήκει στην κεντροποιούσα C, της $G(L_{\kappa_1}/\kappa_1(x))$ στην $H = G(L_{\kappa_1}/\kappa(x))$.

Άρα, η $G_1 \cap C$ περιέχεται στο κέντρο της $G_1 \simeq G$ και συνεπώς, $G_1 \cap C = \{1\}$. Άρα, αφού μέσω του περιορισμού $H \to G(\kappa_1(x)/\kappa_1)$ η C έχει εικόνα όλη την $G(\kappa_1(x)/\kappa_1)$ (αφού κάθε α στην τελευταία επεκτείνεται σε κάποιο λ_α στην C) η H είναι το ευθύ γινόμενο των C και G_1.

Έστω τώρα, L_κ το σταθερό σώμα της C στο L_1. Τότε το L_κ θα είναι Galois πάνω από το $\kappa(x)$ με ομάδα Galois $H/C \simeq G_1 \simeq G$. Επίσης, η τομή του L_κ με το $\kappa_1(x)$ θα είναι το σταθερό σώμα της $CG_1 = H$, δηλαδή το $\kappa(x)$. Συνεπώς, αφού $L_\kappa \subset L_{\kappa_1}$ και το L_{κ_1} είναι κανονικό πάνω από το κ, το L_κ θα είναι κανονικό πάνω από το κ. □

Ορισμός 2.3.5. *Έστω $\mathcal{T} = [H, P, (C_p)_{p \in P}]$ ένας τύπος διακλάδωσης και $n = |H|$. Ο $\mathcal{T}$ λέγεται κ-**ρητός** αν $P \subset \bar{\kappa} \cup \{\infty\}$ και επίσης, για κάθε $\alpha \in G(\bar{\kappa}/\kappa)$ και $p \in P$, $\alpha(p) \in P$ και*

$$C_{\alpha(p)} = C_p{}^m,$$

όπου m ακέραιος τέτοιος ώστε $\alpha^{-1}(\zeta_n) = \zeta_n^m$.

Μία κλάση συζυγίας C σε μία ομάδα λέγεται ρητή αν $C^m = C$ για κάθε ακέραιο m, πρώτο προς την τάξη της ομάδας. Αν, λοιπόν, σε έναν τύπο διακλάδωσης οι C_p είναι ρητές τότε ικανοποιείται ο παραπάνω ορισμός. Από τα λήμματα 2.2.8. και 2.3.3. έχουμε ότι ένας τύπος διακλάδωσης, για να ορίζεται πάνω από ένα κ, πρέπει να είναι κ-ρητός. Το αντίστροφο ισχύει για τύπους διακλάδωσης που ικανοποιούν την συνθήκη στερεότητας.

Θεώρημα 2.3.6. *Έστω $k = \bar{\kappa}$ και έστω $L/k(x)$ μία πεπερασμένη Galois επέκταση. Αν ο τύπος διακλάδωσης του L είναι στέρεος και κ-ρητός τότε το L ορίζεται πάνω από το κ.*

Απόδειξη. Αφού η G έχει τετριμμένο κέντρο, θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο κριτήριο, για να δείξουμε οτι το L ορίζεται πάνω από το κ.

Έστω $\alpha \in G(\bar{\kappa}/\kappa)$. Ξέρουμε οτι υπάρχει ένας α-ισομορφισμός λ, από το L σε μία πεπερασμένη επέκταση Galois L' του $k(x)$. Από το λήμμα 2.2.8. ξέρουμε ότι αν, $p, q \in \mathbb{P}_k^1$, με $q = \alpha(p)$ τότε $\lambda^*(C_p)^m = C_q'$. Αφού, όμως ο τύπος διακλάδωσης είναι κ-ρητός, θα είναι $(C_p)^m = C_q$ και άρα, $\lambda^*(C_q') = C_q'$. Συνεπώς, ο τύπος της $L'/k(x)$ είναι και αυτός $\mathcal{T}$ (μέσω του λ^*) και από το πόρισμα 2.3.5. έπεται ότι τα L και L' είναι $k(x)$-ισόμορφα, αφού ο $\mathcal{T}$ είναι στέρεος.

Έστω $\mu : L \to L'$ ένας $k(x)$-ισομορφισμός. Τότε ο $\mu\lambda$ είναι ένας αυτομορφισμός του L ο οποίος επεκτείνει τον α. Επίσης, ισχύει, πάλι χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.2.8. για τον μ και την σχέση $\lambda^*(C_q') = C_q'$ για τον λ,

$$(\mu\lambda)^*(C_p) = C_p.$$

Αφού ο $\mathcal{T}$ είναι στέρεος, ο αυτομορφισμός $(\mu\lambda)^*$ της G θα είναι εσωτερικός. Δηλαδή, υπάρχει $g \in G$ με $(\mu\lambda)^* = g^*$. Τελικά, ο $\psi = g^{-1}\mu\lambda$ είναι ένας αυτομορφισμός του L που επεκτείνει τον α και $\psi^* = id$. Άρα, το L ορίζεται πάνω από το κ. □

Ορισμός 2.3.7. *Μία ομάδα λέμε ότι προκύπτει κανονικά πάνω από ένα σώμα k, αν είναι ομάδα Galois κάποιας πεπερασμένης Galois επέκτασης L κάποιου $k(x_1, \dots, x_s)$ με $L \cap \bar{k} = k$.*

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω $\mathcal{T} = [\mathrm{H}, P, \boldsymbol{C}]$ ένας στέρεος και κ-ρητός τύπος διακλάδωσης. Τότε υπάρχει μοναδική πεπερασμένη Galois επέκταση $M/\mathbb{C}(x)$ με τύπο $\mathcal{T}$ και ορίζεται πάνω από μία πλήρως υπερβατική επέκταση $\kappa(t_1, \dots, t_s)$ του κ. Συνεπώς, η ομάδα H προκύπτει κανονικά πάνω από το κ.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι το M υπάρχει και είναι μοναδικό από το θεώρημα 2.3.2.. Επίσης, θα ορίζεται πάνω από κάποια πεπερασμένα παραγόμενη επέκταση κ_1 του κ. Το κ_1 θα είναι πεπερασμένη επέκταση κάποια πλήρως υπερβατικής επέκτασης κ_0, $\kappa_0 = \kappa(t_1, \dots, t_s)$ του κ.

Τότε το M θα ορίζεται πάνω από το $k = \bar{\kappa_0} = \bar{\kappa_1}$. Αφού ο $\mathcal{T}$ είναι κ-ρητός θα είναι και κ_0-ρητός γιατί κάθε αυτομορφισμός της $G(\bar{\kappa_0}/\kappa_0)$ είναι επέκταση κάποιου $G(\bar{\kappa}/\kappa)$ με $x \mapsto x$. Εφαρμόζοντας τώρα, το προηγούμενο θεώρημα έχουμε οτι το M θα ορίζεται πάνω από το $\kappa_0 = \kappa(t_1, \dots, t_s)$. Το M_{κ_0}, λοιπόν, είναι μία κανονική επέκταση του $\kappa_0(x) = \kappa(t_1, \dots, t_s, x)$ και συνεπώς, η $\bar{H} = G(M/\mathbb{C}(x)) \simeq G(M_{\kappa_0}/\kappa_0(x))$ προκύπτει κανονικά πάνω από το κ, αφού το $\kappa(t_1, \dots, t_s, x)$ είναι πλήρως υπερβατικό πάνω από το κ και $\mathrm{M}_{\kappa_0} \cap \bar{\kappa} = \kappa$. □

Παίρνουμε έτσι ένα πρώτο κριτήριο στερεότητας για το $\mathbb{Q}$:

Πόρισμα 2.3.9. *Αν μια πεπερασμένη ομάδα* H *έχει ρητές κλάσεις συζυγίας* $C_1, \ldots, C_r$ *και η* r*-άδα* $(C_1, \ldots, C_r)$ *είναι στέρεα, τότε η* H *προκύπτει κανονικά πάνω από το* $\mathbb{Q}$ *και συνεπώς, αφού το τελευταίο είναι Hilbertian, προκύπτει πάνω από το* $\mathbb{Q}$.

Απόδειξη. Διαλέγοντας $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ έχουμε έναν τύπο διακλάδωσης $\mathcal{T} = [\mathrm{H}, P, \mathbf{C}]$ με $\mathbf{C} = (C_i)$. Αφού οι C_i είναι ρητές και αποτελούν μία στέρεα r-άδα, τότε ο $\mathcal{T}$ είναι $\mathbb{Q}$-ρητός. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Μία πιο ασθενής συνθήκη ρητότητας για τις κλάσεις συζυγίας είναι η παρακάτω:

Ορισμός 2.3.10. *Μία* r*-άδα κλάσεων συζυγίας* $(C_1, \ldots, C_r)$ *μιας ομάδας* H *με* $n = |H|$*, λέγεται* κ*-ρητή αν για κάθε ακέραιο* m *τετοιον ώστε* $\alpha^{-1}(\zeta_n) = \zeta_n^m$ *για κάποιο* $\alpha \in G(\bar{\kappa}/\kappa)$ *οι* $C_1^m, \ldots C_r^m$ *είναι μία αναδιάταξη των* $C_1, \ldots, C_r$.

Στην περίπτωση που $\kappa = \mathbb{Q}$ λέμε απλώς ότι η $(C_1, \ldots, C_r)$ είναι ρητή και σημαίνει ότι οι $C_1^m, \ldots C_r^m$ είναι μία αναδιάταξη των $C_1, \ldots, C_r$ για κάθε ακέραιο m πρώτο προς το n. Αν πάλι το κ περιέχει το ζ_n η συνθήκη είναι τετριμμένη.

Λήμμα 2.3.4. *Αν η* $(C_1 \ldots C_r)$ *είναι* κ*-ρητή στην* H*, τότε υπάρχει ένα υποσύνολο* $P = \{p_1, \ldots, p_r\} \subset \bar{\kappa} \cup \{\infty\}$ *(με* r *στοιχεία), τέτοιο ώστε ο τύπος* $\mathcal{T} = [H, P, (C_p)_{p \in P}]$*, όπου* $C_{p_i} = C_i, i = 1, \ldots, r$*, να είναι* κ*-ρητός.*

Απόδειξη. Μπορούμε να ορίσουμε μία δράση της $G(\bar{\kappa}/\kappa)$ στο $\{C_1, \ldots, C_r\}$ που για κάθε $\alpha \in G(\bar{\kappa}/\kappa)$ με $\alpha^{-1}(\zeta_n) = \zeta_n^m$ θα είναι $\alpha(C_i) = C_i^m$. Αυτό που ψάχνουμε είναι ένα σύνολο $p_1, \ldots, p_r$ σημείων διακλάδωσης ώστε η δράση της $G(\bar{\kappa}/\kappa)$ σε αυτά να είναι ισοδύναμη με την παραπάνω δράση στις κλάσεις συζυγίας. Θα μπορούσαμε, αμέσως, να πούμε ότι αφού η δράση της $G = G(\bar{\kappa}/\kappa)$ στο $\bar{\kappa}$ είναι πιστή, τότε υπάρχουν τέτοια σημεία, αλλά θα τα βρούμε και συγεκριμένα.

Μπορούμε να υποθέσουμε οτι η παραπάνω δράση είναι μεταβατική, γιατί αν δεν είναι κάνουμε τα ίδια για κάθε τροχιά. Η δράση της G στις κλάσεις συζυγίας, αφού είναι μεταβατική, θα είναι ισοδύναμη με τη δράση της στα σύμπλοκα του πυρήνα.

Έστω $K \subset G$ αυτός ο πυρήνας και $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1, \ldots, K_r$ τα σύμπλοκα του, τέτοια ώστε $K_i(C_1) = C_i$ (η $\mathrm{K}_i C_1$ είναι καλώς ορισμένη μέσω αντιπροσώπων αφού τα K_i είναι τα σύμπλοκα του πυρήνα). Έστω κ_1 το σταθερό σώμα του Κ. Αφού το Κ είναι μία κανονική υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη τότε το κ_1 είναι μία πεπερασμένη Galois επέκταση του κ. Έστω p_1 ένα πρωταρχικό στοιχείο αυτής της επέκτασης. Η δράση της G στις εικόνες των p_1 (μέσω της G) θα είναι μεταβατική και θα έχει πυρήνα $G(\bar{\kappa}/\kappa_1) = K$. Αν ορίσουμε, λοιπόν, $p_i = K_i$ όπως παραπάνω, και $C_{p_i} = C_i$ θα έχουμε $\alpha(C_{p_i}) = C_{\alpha(p_i)}$ για κάθε i.

$\square$

Αν συνδυάσουμε, τελικά, αυτό το λήμμα με το θεώρημα 2.3.11. έχουμε:

Θεώρημα 2.3.11 (Γενικό κριτήριο στερεότητας)**.** *Έστω* κ *ένα υπόσωμα του* $\mathbb{C}$ *και* H *μία πεπερασμένη ομάδα. Αν η* H *έχει κλάσεις συζυγίας* $C_1, \ldots, C_r$ *που αποτελούν στέρεη και* κ*-ρητή* r*-άδα, τότε η* H *προκύπτει κανονικά πάνω από το* κ.

Ειδικότερα για το $\mathbb{Q}$ έχουμε:

Πόρισμα 2.3.12 (Κριτήριο στερεότητας για το $\mathbb{Q}$)**.** *Αν η* H *έχει κλάσεις* $C_1, \ldots, C_r$ *που αποτελούν στέρεα* r*-άδα και επιπλέον, για κάθε ακέραιο* m *πρώτο προς την τάξη της* H*, οι* $C_1^m, \ldots, C_r^m$ *είναι μία αναδιάταξη των* $C_1, \ldots C_r$*, τότε η* H *προκύπτει κανονικά πάνω από το* $\mathbb{Q}$ *και κατά συνέπεια, πάνω από κάθε σώμα χαρακτηριστικής* 0*. Ακόμα* *περισσότερο, αφού το* $\mathbb{Q}$ *είναι Hilbertian, η* H *προκύπτει πάνω από το* $\mathbb{Q}$ *και πάνω από κάθε πεπερασμένα παραγόμενη επέκταση του και γενικότερα πάνω από κάθε Hilbertian σώμα χαρακτηριστικής 0.*

Το κριτήριο αυτό έχει δώσει πολλές ομάδες σαν ομάδες Galois πάνω από το $\mathbb{Q}$. Συγκεκριμένα παραδείγματα αποτελούν οι συμμετρικές (αν και το έχουμε δει ήδη αυτό), οι εναλλάσουσες, όλες οι σποραδικές ομάδες εκτός από τις M_{23} και M_{24}. Για την τελευταία έχει αποδειχθεί παρόλα αυτά ότι προκύπτει ως ομάδα Galois πάνω από το $\mathbb{Q}$ και έτσι η μόνη σποραδική ομάδα, για την οποία δεν γνωρίζουμε αν προκύπτει πάνω από το $\mathbb{Q}$, είναι η M_{23}.

Κεφάλαιο 3

Το θεώρημα ύπαρξης του Riemann

3.1 Εισαγωγή

Το τελευταίο μέρος αυτής της εργασίας είναι αφιερωμένο στην απόδειξη του παρακάτω:

Θεώρημα 3.1.1 (RET - Η αναλυτική εκδοχή)**.** *Έστω Y μία συμπαγής επιφάνεια Riemann. Για οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία $a_1, \dots, a_n$ στην Y και μιγαδικούς αριθμούς $c_1, \dots, c_n$, υπάρχει μερομορφική συνάρτηση f στην Y τέτοια ώστε $f(a_i) = c_i$, για $i = 1, \dots, n$.*

Για την απόδειξη του θεωρούμε γνωστές την έννοια και βασικές ιδιότητες των χώρων Hilbert. Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε, χωρίς απόδειξη, ότι αν D είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, τότε ο χώρος $\mathcal{L}^2(D)$, των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων ολόμορφων συναρτήσεων στο D, με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int f\bar{g},$$

είναι χώρος Hilbert.

Μέσω του ορισμού της επιφάνειας Riemann έχουμε την ύπαρξη μερομορφικών συναρτήσεων τοπικά. Τις ορισμένες σε ολόκληρο τον χώρο συναρτήσεις θα τις περιγράψουμε σαν συλλογή τοπικά ορισμένων συναρτήσεων που ταυτίζονται στα κοινά σημεία τους.

3.2 Η απόδειξη

Έστω Y μία συμπαγής επιφάνεια Riemann και $(W_i, z_i)_{i\in I}$ μία πεπερασμένη συλλογή από χάρτες που καλύπτουν την Y. Για $\mathrm{E} \subset W_i$ ανοιχτό ορίζουμε $\mathcal{L}^2(E, z_i)$ να είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων f στο E με $f \circ z_i^{-1} \in D$ όπου $D = z_i(E)$. Με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \langle f \circ z_i^{-1}, g \circ z_i^{-1}\rangle$$

ο $\mathcal{L}^2(E, z_i)$ είναι ένας χώρος Hilbert ισόμορφος με τον $\mathcal{L}^2(D)$

Λήμμα 3.2.1. *Έστω* E *ανοιχτό και σχετικά συμπαγές στο* $W_i \cap W_j$. *Τότε υπάρχει* $\kappa > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε ολόμορφη συνάρτηση στο* E *να ισχύει:*

$$\|f \circ z_i^{-1}\|_{z_i(E)} \leq \kappa \|f \circ z_j^{-1}\|_{z_j(E)}$$

Απόδειξη. Έστω $D_{i,j} = z_{i,j}(E)$. Με αλλαγή μεταβλητών $z \to z_i^{-1} \circ z_j(z)$ έχουμε:

$$\|f \circ z_i^{-1}\|_{D_i}^2 = \int_{D_i} |f \circ z_i^{-1}|^2 = \int_{D_j} |f \circ z_j^{-1}|^2 |\frac{d(z_i \circ z_j^{-1})}{dz}|$$

Η $z_i \circ z_j^{-1}$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο W_j και συνεπώς, η $\frac{d(z_i \circ z_j^{-1})}{dz}$ υπάρχει και είναι συνεχής παντού. Άρα, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του W_j θα είναι φραγμένη. Αφού, το E είναι σχετικά συμπαγές, τότε το $D_j = z_j(E)$ θα είναι συμπαγές στο W_j. Αν,τώρα, διαλέξουμε, κ τέτοιο ώστε $|d(z_i \circ z_j^{-1})/dz| \leq \kappa$ στο D_j, έχουμε το ζητούμενο. □

Λόγω συμμετρίας, έπεται ότι οι συναρτήσεις που ανήκουν στον $\mathcal{L}^2(E, z_i)$ είναι αυτές που ανήκουν στον $\mathcal{L}^2(E, z_j)$. Όταν μας ενδιαφέρουν μόνο τοπολογικές ιδιότητες θα γράφουμε απλώς $\mathcal{L}^2(E)$ αντί για $\mathcal{L}^2(E, z_i)$, με E σχετικά συμπαγές στο W_i.

Έστω, τώρα $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια ανοιχτών συνόλων $U_i \subset W_i$ τέτοια ώστε το U_i να είναι σχετικά συμπαγές στο W_i. Ορίζουμε

$$C^0(\mathcal{U}) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{L}^2(U_i, z_i) \qquad \text{και} \qquad C^1(\mathcal{U}) = \bigoplus_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{L}^2(U_i \cap U_j, z_i),$$

ως ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert. Τα στοιχεία του $C^0(\mathcal{U})$ θα τα γράφουμε σαν οικογένειες $(f_i)_{i \in I}$ και του $C^1(\mathcal{U})$, $(f_{ij})_{i,j \in I}$. Έστω $i, j, k \in I$ (όχι αναγκαστικά διαφορετικά). Θεωρούμε την απεικόνιση

$$C^1(\mathcal{U}) \to \mathcal{L}^2(U_i \cap U_j \cap U_k), (f_{\nu\mu}) \mapsto (f_{ij} - f_{ik} - f_{kj})|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$$

Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής (αφού είναι συνθεση γραμμικής, προβολών σε συντεταγμένες και περιορισμού συναρτήσεων). Έστω $\mathrm{Z}^1(\mathcal{U}) \subset C^1(\mathcal{U})$ ο κοινός πυρήνας όλων αυτών των απεικονίσεων (για τα διάφορα i, j, k). Ως τομή κλειστών υποσυνόλων το $\mathrm{Z}^1(\mathcal{U})$ θα είναι ένας κλειστόςς υπόχωρος του $C^1(\mathcal{U})$ αποτελούμενο από τα $(f_{\nu\mu})$ με

$$f_{ij} = f_{ik} + f_{kj}, \qquad \text{για κάθε} \qquad i, j, k \in I.$$

Αυτή η σχέση λέγεται *σχέση σύκυκλων* και τα στοιχεία του $\mathrm{Z}^1(\mathcal{U})$ λέγονται (τετραγωνικά ολοκληρώσιμοι) σύκυκλοι.

Ορίζουμε, τώρα

$$\partial : C^0(\mathcal{U}) \to Z^1(\mathcal{U}), (g_i)_{i \in I} \mapsto (f_{ij})_{i,j \in I} \text{ όπου}$$

$$(f_{ij}) = (g_i - g_j)\big|_{U_i \cap U_j}.$$

Όπως και πριν, έχουμε οτι η ∂ είναι συνεχής. Μία συνάρτηση στην Y είναι ένα στοιχείο του πυρήνα της ∂.

Για κάθε σημείο της $a \in Y$ μπορούμε να επιλέξουμε χάρτη (W_a, z_a) γύρω από το a τέτοιον ώστε $z_a(W_a) = \mathbb{D}$, όπου $\mathbb{D}$ είναι ο μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{C}$. Αφού η Y είναι συμπαγής μπορούμε να διαλέξουμε $(W_i, z_i) = (W_{a_i}, z_{a_i}), i \in I$ με I πεπερασμένο, που να την καλύπτουν και επιπλέον $a \notin W_i$ αν $W_i \neq W_0 = W_a$. Επίσης, θα υπάρχει $r < 1$ τέτοιο ώστε τα $U_i = |z_i| < r \subset W_i$, να καλύπτουν, επίσης, τον χώρο. Το βασικό μας αποτέλεσμα, θα είναι:

Θεώρημα 3.2.1. *Η εικόνα της* $\partial : C^0(\mathcal{U}) \to Z^1(\mathcal{U})$ *έχει πεπερασμένη συνδιάσταση στον* $Z^1(\mathcal{U})$.

Θα δούμε πρώτα πως αποδεικνύεται το θεώρημα ύπαρξης μέσω του θεωρήματος και μετά θα το αποδείξουμε.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε το παρακάτω:

Πόρισμα 3.2.2. *Έστω* Y *μία συμπαγής επιφάνεια Riemann και* $a_0 \in Y$. *Τότε υπάρχει μία μερομορφική συνάρτηση που να έχει πόλο στο* a_0 *να είναι ολόμορφη στο* $Y \backslash a_0$.

Απόδειξη. Έστω, $z = z_0 - z(a_0)$, ένας χάρτης στο W_0 με $z(a_0) = 0$

Για κάθε $\nu = 0, 1, \ldots$ ορίζουμε τα εξής $\xi_\nu \in Z^1(\mathcal{U})$: $\xi_\nu = ({f^{(\nu)}}_{ij})_{i,j\in I}$ με ${f^{(\nu)}}_{ij} = 0$ αν $i, j \neq 0$, ${f^{(\nu)}}_{00} = 0$, και

$${f^{(\nu)}}_{0i} = -{f^{(\nu)}}_{i0} = z^{-\nu} \text{ στο } U_0 \cap U_j,$$

για $j \neq 0$.

Οι $z^{-\nu}$ είναι φραγμένες γιατί ορίστηκαν σε σύνολά που δεν περιέχουν το a_0. Άρα, όλες οι ${f^{(\nu)}}_{ij}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες ολόμορφες συναρτήσεις. Συνεπώς, τα ξ_ν είναι όντως στοιχεία του $Z^1(\mathcal{U})$. Αφού, η εικόνα του ∂ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση τότε θα υπάρχουν $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε $\sum_{\nu=1}^n c_\nu \xi_\nu = \partial\eta$ για κάποιο $\eta \in C^0(\mathcal{U})$.

Έστω $\eta = (h_i)_{i\in I}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : Y\backslash a_0 \to \mathbb{C}$ με

$$f = \begin{cases} h_j(u) & \text{για } u \in U_j, j \neq 0 \\ h_0(u) + \sum_{\nu=1}^n c_\nu z_{-\nu} & \text{για } u \in U_0 \end{cases}$$

Για να δούμε ότι, όντως, η f είναι συνάρτηση αρκεί να ελέγζουμε τι γίνεται στα $U_0 \cap U_j$ γιατί μόνο στο U_0 αλλάξαμε την η. Στο $U_0 \cap U_j, j \neq 0$ είναι εξορισμού της η: $h_0(u) - h_j(u) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu {f^{(\nu)}}_{0j} = \sum_{\nu=1}^n c_\nu z_{-\nu}$. Άρα, $h_j(u) = h_0(u) + \sum_{\nu=1}^n c_\nu z_{-\nu}$ στο $U_0 \cap U_j$ και συνεπώς η f είναι καλά ορισμένη. Τέλος, είναι προφανές οτι είναι ολόμορφη παντού και οτι έχει πόλο στο a_0 και έχουμε, έτσι το ζητούμενο. □

Έστω, τώρα $a_1, \ldots, a_n$ διαφορετικά σημεία στην Y και για κάθε i $f(i)$ μία συνάρτηση με πόλο στο a_i και ολόμορφη παντού αλλού, όπως παραπάνω. Για κάθε $i, j, i \neq j$, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g^{(ij)} = \frac{f^{(i)} - f^{(i)}(a_j)}{f^{(i)} - f^{(i)}(a_j) + d_{ij}}$$

με $d_{ij} \neq 0$ τέτοια ώστε ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0 στα a_k. Τότε, $g^{(ij)}(a_i) = 1$, $g^{(ij)}(a_j) = 0$ και $g^{(ij)}(a_k) \neq \infty$ για κάθε k. Συνεπώς, για τις συναρτήσεις

$$h^{(i)} = \prod_{i\neq j} g^{(ij)}$$

έχουμε $h^{(i)}(a_j) = \delta_{ij}$ και άρα, για κατάλληλα c_i, η $\sum c_i h^{(i)}$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση στην Y. □

Μένει να αποδείξουμε το θεώρημα 3.2.2., για το οποίο χρειάζεται αρκετή προετοιμασία.

Για μία C^∞ συνάρτηση φ, ορισμένη σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, ορίζουμε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}).$$

Από εδώ και πέρα θα λέμε απλώς διαφορίσιμη αντί για C^∞.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω φ μία διαφορίσιμη συνάρτηση στον μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D}$ με συμπαγές στήριγμα. Τότε υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση ψ στον $\mathbb{D}$ τέτοια ώστε:*

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = \varphi.$$

Απόδειξη. Θεωρώντας την φ σαν συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\psi(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \varphi(z+re^{i\theta})e^{-i\theta}drd\theta, z \in \mathbb{D}$$

Η ψ θα είναι διαφορίσιμη. Αν $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ και $\varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ τότε παραγωγίζοντας έχουμε:

$$-2\pi\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^2 [\varphi_1(z+re^{i\theta}) + i\varphi_2(z+re^{i\theta})]e^{-i\theta}drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 [\varphi_1(z+re^{i\theta})cos\theta + \varphi_2(z+re^{i\theta})sin\theta]drd\theta$$

$$+i\int_0^{2\pi}\int_0^2 [-\varphi_1(z+re^{i\theta})sin\theta + \varphi_2(z+re^{i\theta})cos\theta]drd\theta$$

αφού $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και ότι $Re(z+e^{i\theta}) = Re(z) + rcos\theta, Im(z+e^{i\theta}) = z + rsin\theta$ έχουμε:

$$-2\pi\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{d\varphi(z+re^{i\theta})}{dr}drd\theta$$

$$+i\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^{-1}\frac{d\varphi(z+re^{i\theta})}{d\theta}drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}[\varphi(z+2e^{i\theta})d\theta - \varphi(z)]d\theta$$

$$+i\int_0^2 r^{-1}[\varphi(z+r) - \varphi(z+r)]dr$$

$$= \int_0^{2\pi}[\varphi(z+2e^{i\theta})d\theta - \varphi(z)]d\theta.$$

Όμως, αν $z \in \mathbb{D}$ τοτε $z + 2e^{i\theta} \notin \mathbb{D}$ και άρα $\varphi(z+2e^{i\theta}) = 0$. Συνεπώς, $-2\pi\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z) = \int_0^{2\pi}[-\varphi(z)]d\theta = -2\pi\varphi(z)$ και άρα, η ψ είναι η ζητούμενη συνάρτηση. □

Πόρισμα 3.2.3. *Έστω $\mathbb{D}'$ ένας ανοιχτός δίσκος γύρω από το 0 ακτίνας $r' < 1$. Τότε για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση φ στον $\mathbb{D}$, υπάρχει διαφορίσιμη και φραγμένη συνάρτηση στον $\mathbb{D}'$ τέτοια ώστε*

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \varphi(z),$$

στο $\mathbb{D}'$.

Απόδειξη. Αν $\mathbb{D}''$ είναι ένας δίσκος μεταξύ των $\mathbb{D}'$ και $\mathbb{D}$ μπορούμε να ορίσουμε διαφορίσιμη συνάρτηση φ' τέτοια ώστε $\varphi'\big|_{\mathbb{D}'} = \varphi$ και $\varphi' = 0$ έξω από τον $\mathbb{D}'$. Τότε η ψ του προηγούμενου λήμματος για τον δίσκο $\mathbb{D}''$, ικανοποιεί αυτό που ζητάμε αφού, ως συνεχής θα είναι φραγμένη στο συμπαγές $cl(\mathbb{D}') \subset \mathbb{D}''$ □

Μία μιγαδική συνάρτηση, ψ, δύο μεταβλητών είναι ολόμορφη αν και μόνο αν $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω πόρισμα για να 'διορθώσουμε' κατάλληλα κάποιες διαφορίσιμες συναρτήσεις για να πάρουμε ολόμορφες. Έστω $\mathbb{D}, \mathbb{D}'$ όπως και παραπάνω.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω I ένα πεπερασμένο σύνολο και $\mathbb{D} = \cup_{i\in I} X_i$ όπου X_i είναι ανοιχτά σύνολα. Υποθέτουμε ότι $(\chi_i)_{i\in I}$ είναι μία διαφορίσιμη διαμέριση της μονάδας που σχετίζεται με τα X_i (δηλαδή $supp(\chi_i) \subset X_i$). Υποθέτουμε, επιπλέον ότι έχουμε ολόμορφες συναρτήσεις f_{ij} στα $X_i \cap X_j$ που ικανοποιούν τη σχέση σύκυκλων:*

$$f_{ij} = f_{ik} + f_{kj}, \text{ για κάθε } i, j, k \in I.$$

Έστω $X_i' = X_i \cap \mathbb{D}'$. Αν κάθε f_{ij} είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $X_i' \cap X_j'$ τότε υπάρχουν συναρτήσεις $g_i \in L^2(X_i)$ τέτοιες ώστε

$$f_{ij} = g_i - g_j \text{ στο } X_i' \cap X_j',$$

για όλα τα $i, j, k \in I$.

Απόδειξη. Η χ_i θα μηδενίζεται σε κάποιο ανοιχτό $\tilde{X}_i$ με $\tilde{X}_i \cup X_i = \mathbb{D}$. Βλέπουμε τώρα οτι αν ορίσουμε $f_{ij} = 0$ εκτός του $X_i \cap X_j$ η συνάρτηση $f_{ij}\chi_j$ είναι διαφορίσιμη στο X_i. Αυτό γιατι το X_i θα είναι η ένωση των ανοιχτών $X_i \cap X_j$ και $X_i \cap \tilde{X}_j$ στα οποία η $f_{ij}\chi_j$ είναι διαφορίσιμη, στο πρώτο ως γινόμενο διαφορίσιμων και στο δεύτερο είναι επειδή ισούται με 0.

Έστω, τώρα, $\psi_i = \sum_{k\in I} f_{ik}\chi_k$. Η ψ_i είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση στο X_i, για καθε i και επιπλέον είναι

$$\psi_i - \psi_j = \sum (f_{ik} - fjk)\chi_k = \sum f_{ij}\chi_\kappa = f_{ij}$$

αφού οι f_{ij} ικανοποιούν τη συνθήκη των συκύκλων και $\sum_k \chi_\kappa = 1$.

Οι ψ_i, όμως δεν είναι ολόμορφες. Παρόλα αυτά, αφού $\psi_i - \psi_j = f_{ij}$ και η f_{ij} είναι ολόμορφη θα είναι $\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}}$ στο $X_i \cap X_j$. Δηλαδή, ορίζεται μία συνάρτηση φ στον $\mathbb{D}$ τέτοια ώστε $\varphi = \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}}$ στο X_i για κάθε i. Από το πόρισμα παραπάνω υπάρχει ψ, διαφορίσιμη και φραγμένη στο $\mathbb{D}'$, τέτοια ώστε $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \varphi$.

Οι συναρτήσεις τώρα, $g_i = \psi_i - \psi$ στο $X_i' = X_i \cap \mathbb{D}'$, είναι ολόμορφες και ικανοποιούν $g_i - g_j = f_{ij}$, στο $X_i' \cap X_j'$.

Τέλος, αφού οι f_{ij} είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στα $X_i' \cap X_j'$ τότε και η ψ_i θα είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο X_i' (αφού όλες οι χ_i είναι φραγμένες). Τελικά, $g_i \in L^2(X_i')$ αφού η ψ είναι φραγμένη (και τα X_i' έχουν πεπερασμένο εμβαδόν). □

Αφού η Y είναι συμπαγής μπορούμε να βρούμε διαμέριση της μονάδας όπως στην πρόταση, για κάθε ανοιχτό κάλυμμα της Y.

Θυμόμστε ότι, στην Y έχουμε τους χαρτες (W_i, z_i) με $z_i(W_i) = \mathbb{D}$ και $U_i \subset W_i$ με $z_i(U_i) = \mathbb{D}(r)$ (ο δίσκός ακτίνας r) όπου $r < 1$. Επιλέγουμε ομοίως, V_i τέτοια ώστε $z_i(V_i) = \mathbb{D}(r')$ για κάποιο r' με $r < r' < 1$. Τα V_i, δηλαδή, βρίσκονται ανάμεσα στα U_i και W_i. Έστω $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$

Η απεικόνιση περιορισμού $L^2(V_i \cap V_j) \to L^2(U_i \cap U_j)$ είναι καλά ορισμένη, γραμμική και συνεχής. Συνεπώς, επάγεται μία συνεχής και γραμμική απεικόνιση περιορισμού $Z(\mathcal{V}) \to Z(\mathcal{U}), (g_{ij})_{i,j\in I} \mapsto (g_{ij}\big|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}$. Την απεικόνιση αυτή θα τη συμβολίζουμε $\theta \mapsto \theta\big|_{\mathcal{U}}$.

Πρόταση 3.2.5. *Για κάθε $\xi \in Z(\mathcal{U})$ υπάρχει $\theta \in Z(\mathcal{V})$ και $\eta \in C^0(\mathcal{U})$ έτσι ώστε:*

$$\xi = \theta\big|_{\mathcal{U}} + \partial\eta.$$

Απόδειξη. Έστω $\xi = (f_{ij})_{i,j\in I} \in Z(\mathcal{U})$ και $\alpha \in I$. Στο W_α θεωρούμε το κάλυμμα $U_i \cap W_\alpha$ και μία διαμέριση που αντιστοιχεί σε αυτό, όπως στην παραπάνω πρόταση. Εφαρμόζοντας την, αφού, $z_\alpha(W_\alpha) = \mathbb{D}$ και $z_\alpha(V_\alpha) = \mathbb{D}'$, τότε θα υπάρχουν συναρτήσεις $g_{\alpha i} \in L^2(U_i \cap V_\alpha)$ τέτοιες ώστε $g_{\alpha i} - g_{\alpha j} = f_{ij}$, για κάθε i, j. Κάνοντας το αυτό για κάθε α παίρνουμε τελικά συναρτήσεις $g_{\alpha i}$ τέτοιες ώστε

$$g_{\alpha i} - g_{\alpha j} = f_{ij} = g_{\beta i} - g_{\beta j}, \text{ στο } U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta,$$

για κάθε $i, j, \alpha, \beta \in I$. Μπορούμε, λοιπόν, να ορίσουμε συναρτήσεις $F_{\alpha\beta}$ στο $V_\alpha \cap V_\beta$ με $F_{\alpha\beta} = g_{\alpha i} - g_{\alpha j}$, στο $U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta$, γιατί από παραπάνω έχουμε $g_{\alpha i} - g_{\alpha j} = g_{\beta i} - g_{\beta j}$, στο $U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$. Αφού οι $g_{\alpha i}$ ανήκουν στον $L^2(U_i \cap V_\alpha)$ και το I είναι πεπερασμένο, τότε και $F_{\alpha\beta} \in L^2(V_\alpha \cap V_\beta)$. Από τον ορισμό τους φαίνεται πως οι $F_{\alpha\beta}$ ικανοποιούν τη συνθήκη των συκύκλων και συνεπώς, $\theta = (F_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I} \in Z(\mathcal{V})$.

Έχουμε, τώρα, σε καθε $U_i \cap U_j : f_{ij} = g_{ii} - g_{ij} = g_{ii} - g_{jj} - (g_{ij} - g_{jj}) = g_{ii} - g_{jj} - F_{ij}$. Συνεπώς, αν ορίσουμε $\eta = (h_i)_{i\in I} = (g_{ii}\big|_{U_i})_{i\in I}$, τότε $\eta \in C^0(\mathcal{U})$ και, από τα παραπάνω, έχουμε: $\xi = \partial\eta - \theta\big|_{\mathcal{U}}$ □

Για το επόμενο πόρισμα θα χρησιμοποιήσουμε, χωρίς απόδειξη, το θεώρημα του Banach:

Θεώρημα 3.2.6. *Αν T είναι ένα φραγμένος τελεστής μεταξύ δύο χώρων Banach, ο οποίος είναι 1-1 και επί, τότε ο T^{-1} είναι, επίσης φραγμένος.*

Πόρισμα 3.2.7. *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $\xi \in Z(\mathcal{U})$ υπάρχει $\theta \in Z(\mathcal{V})$ και $\eta \in C^0(\mathcal{U})$ έτσι ώστε:*

$$\xi = \theta\big|_{\mathcal{U}} + \partial\eta$$

και επιπλέον,

$$max(\|\theta\|_{\mathcal{V}}, \|\eta\|_{\mathcal{U}}) \leq C\|\xi\|_{\mathcal{U}}.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathrm{H}_0 = Z(\mathcal{V}) \oplus C^0(\mathcal{U})$ και $\pi_0 : H_0 \to Z(\mathcal{U}), (\theta, \eta) \mapsto \theta\big|_{\mathcal{U}} + \partial\eta$. Η π_0 είναι συνεχής απεικόνιση μεταξύ χώρων Hilbert. Από την πρόταση που προηγήθηκε ξέρουμε ότι είναι επί. Άρα, αν Η είναι ο κάθετος υπόχωρος του πυρήνα τότε ο περιορισμός της π_0 στον Η επάγει έναν ισομορισμό. Από το θεώρημα του Banach ξέρουμε, τότε, ότι και η αντίστροφη της π_0(εννοούμε τον περιορισμό της) θα είναι συνεχής. Αυτό σημαίνει οτι υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\xi \in Z(\mathcal{U})$,

$$\|\pi_0^{-1}(\xi)\|_{H_0} \leq \|\xi\|_{\mathcal{U}}.$$

Όμως, $\|\pi_0^{-1}(\xi)\|_{H_0} = \sqrt{\|\theta\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{U}}^2} \geq max(\|\theta\|_{\mathcal{V}}, \|\eta\|_{\mathcal{U}})$ και άρα, έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 3.2.3. *Έστω $D' \subset A \subset D \subset \mathbb{C}$, με D', D ανοιχτά και A συμπαγές. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του $L^2(D)$, πεπερασμένης συνδιάστασης, τέτοιος ώστε για κάθε $f \in M$*

$$\|f\|_{D'} \leq \varepsilon \|f\|_D.$$

Απόδειξη. Αρχικά, βλέπουμε ότι αν έχουμε μία ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο $D(a,r)$, $f = \sum c_n(z-a)^n$, τότε

$$\|f\|_D^2 = \sum |c_n|^2 \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}.$$

Αυτό γιατί, υπολογίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα των

$$g_n = (n + 1/\pi)^{1/2} r^{-2n-2}(z-a)^n,$$

βλέπουμε ότι αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(D)$.

Αν, λοιπόν, έχουμε μία ολόμορφη συνάρτηση στο $D(a,r)$ με

$$f = \sum_{n \geq m} c_n(z-a)^n,$$

δηλαδή $c_1 = c_2 = \cdots = c_{m-1} = 0$, τότε

$$\|f\|_{D(a,r/2)}^2 = 2^{-2m-2} \sum_{n \geq m} 2^{m-n} |c_n|^2 r^{2m+2} \leq 2^{-2m-2} \|f\|_{D(a,r)}^2.$$

Αν διαλέξουμε, λοιπόν, m αρκετά μεγάλο ώστε $2^{-2m-2} < \varepsilon$ τότε θα είναι $\|f\|_{D(a,r/2)}^2 \leq \varepsilon^2 \|f\|_{D(a,r)}^2$. Επίσης, ο χώρος των f για τις οποίες $c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ είναι ένας κλειστός υπόχωρός του $L^2(D(a,r))$ συνδιάστασης m, αφού είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\langle 1, z-a, \dots, (z-a)^{m-1} \rangle \subset L^2(D(a,r))$.

Επιλέγουμε τώρα, $a_1, \dots, a_s \in A$ και r τέτοια ώστε $D(a_i, r) \subset D$ για κάθε i και $A \subset \cup_i D(a_i, r/2)$. Πάντα μπορούμε να βρούμε τέτοια γιατί, μπορούμε να επιλέξουμε r πρώτα, έτσι ώστε $D(a,r) \subset D$ για κάθε $a \in A$ και μετά, αφού τα $D(a, r/2)$ θα καλύπτουν το A, να διαλέξουμε πεπερασμένα από αυτά ώστε να το καλύπτουν ακόμα (αφού είναι συμπαγές).

Θεωρούμε τον υπόχωρο M που αποτελείται από τις συναρτήσεις με μηδενικές τις πρώτες m παραγώγους στα $a_1, \dots, a_s$, για m με $s2^{-2m-2} < \varepsilon^2$. Ο M είναι ένας κλειστός υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης στον $L^2(D)$. Για κάθε $f \in M$, αφού $D' \subset A \subset \cup_i D(a_i, r/2) \subset \cup_i D(a_i, r) \subset$ έχουμε:

$$\|f\|_{D'}^2 \leq \sum_i \|f\|_{D(a_i,r/2)}^2$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{s} \sum_i \|f\|_{D(a_i,r)}^2 \leq \varepsilon^2 \|f\|_D^2$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

Τέλος, μετά από όλα αυτά αποδεικνύουμε το θεώρημα 3.2.2. Έστω $\varepsilon = 1/2C$, όπου C η σταθερά της πρότασης 3.2.9 Αφού τα $U_i \cap U_j$ είναι σχετικά συμπαγή στα $V_i \cap V_j$, υπάρχει κλειστός υπόχωρος, πεπερασμένης συνδιάστασης, M_{ij} του $L^2(V_i \cap V_j)$ τέτοιος ώστε για κάθε $g \in M_{ij}$ να έχουμε

$$\|g \circ z_i^{-1}\|_{U_i \cap U_j} \leq \varepsilon \|g \circ z_i^{-1}\|_{V_i \cap V_j}.$$

Έστω M' το ευθύ άθροισμα αυτών των M_{ij} και $\mathrm{M} = \mathrm{M}' \cap Z(\mathcal{V})$. Άρα, για κάθε $\theta \in M$ θα ισχύει:

$$\|\theta\big|_{\mathcal{U}}\|_{U_i \cap U_j} \leq \varepsilon \|\theta\big|_{\mathcal{U}}\|_{V_i \cap V_j}.$$

Έστω F ο κάθετος υπόχωρος του M στον $Z(\mathcal{V})$ και π_M, π_F οι αντίστοιχες προβολές. Αφού το I είναι πεπερασμένο και κάθε M_{ij} έχει πεπερασμένη συνδιάσταση στον $L^2(V_i \cap V_j)$, τότε και ο M, και άρα ο F θα έχει πεπερασμένη συνδιάσταση στον $Z(\mathcal{V})$. Θα δείξουμε ότι ο F, μαζί με την εικόνα του ∂ παράγουν τον $Z(\mathcal{U})$.

Έστω $\xi = \xi_1 \in Z(\mathcal{U})$. Γράφουμε το ξ_1 ως $\xi_1 = \theta_1\big|_{\mathcal{U}} + \partial\eta_1$, όπως στο πόρισμα, με $max(\|\theta_1\|_{\mathcal{V}}, \|\eta_1\|_{\mathcal{U}}) \leq C\|\xi_1\|_{\mathcal{U}}$. Θα είναι $\theta_1 = \pi_M(\theta_1) + \pi_F(\theta_1)$. Έστω, $\xi_2 = \pi_M(\theta_1)\big|_{\mathcal{U}}$ και $\varphi_1 = \pi_F(\theta_1)$. Κάνουμε το ίδιο για το ξ_2 και επαγωγικά φτιάχνουμε ακολουθίες, $\xi_n \in M$ για $n > 1$, $\varphi_n \in F$ και $\eta_n \in C^0(\mathcal{U})$ τέτοιες ώστε

$$\xi_n = \xi_{n+1} + \varphi_n\big|_{\mathcal{U}} + \partial\eta_n, \text{ και}$$

$$max(\|\theta_n\|_{\mathcal{V}}, \|\eta_n\|_{\mathcal{U}}) \leq C\|\xi_n\|_{\mathcal{U}}.$$

Για το ξ_n έχουμε:

$$\xi_{n+1} = \pi_M(\theta_n) \Rightarrow \|\xi_{n+1}\|_{\mathcal{U}} = \|\pi_M(\theta_n)\|_{\mathcal{U}}$$

$$\leq \varepsilon\|\pi_M(\theta_n)\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{2C} C\|\xi_n\|_{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}\|\xi_n\|_{\mathcal{U}}.$$

Επαγωγικά, λοιπόν $\|\xi_{n+1}\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|\xi_1\|_{\mathcal{U}}$. Από αυτό έπεται ότι $\xi_n \to 0$ και επίσης, οι ακολουθίες $\sum \varphi_n$ και $\sum \eta_n$ είναι βασικές. Αυτό γιατί

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{V}} \leq \|\theta_n\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|\xi_1\|_{\mathcal{U}}$$

και

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|\xi_1\|_{\mathcal{U}}.$$

Ο F, ως κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert, είναι πλήρης. Επίσης, ο $C^0(\mathcal{U})$ είναι χώρος Hilbert και άρα πλήρης. Συνεπώς, οι $\sum \varphi_n$ και $\sum \eta_n$ συγκλίνουν. Άρα, αν φ και η είναι τα αντίστοιχα όρια τότε θα έχουμε $\varphi \in F, \eta \in C^0(\mathcal{U})$. Τέλος, από τον ορισμό τους και αφού $\xi_n \to 0$ θα έχουμε:

$$\xi = \varphi\big|_{\mathcal{U}} + \partial\eta.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\xi \in Z(\mathcal{U})$ δείξαμε οτι ο F και ο $\partial C^0(\mathcal{U})$ παράγουν τον $\mathrm{Z}(\mathcal{U})$ και συνεπώς, ο $\partial C^0(\mathcal{U})$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση στον $\mathrm{Z}(\mathcal{U})$.

Βιβλιογραφία

[1] Helmut Völklein. *Groups as Galois Groups: An Introduction*. Volume 53 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] David Harbater. *Riemann's Existence Theorem*.

[3] Tamás Szamuely. *Galois groups and fundamental groups.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[4] Serge Lang. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics 211, Springer Verlag, 2005.

[5] Gunter Malle and B. Heinrich Matzat. *Inverse Galois Theory* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999.