Εισαγωγή στην άκαμπτη αναλυτική γεωμετρία

Α. Κοντογεώργης

2 Νοεμβρίου 2006

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Με τον όρο *μιγαδική αναλυτική γεωμετρία* οι μαθηματικοί αναφέρονται στην θεωρία των μιγαδικών διαφορισίμων πολλαπλοτήτων που οι αλλαγές χαρτών είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

Γενικά είναι γνωστή ο λεγόμενη GAGA αρχή:

Οι κατηγορίες των μιγαδικών αναλυτικών πολλαπλοτήτων και των αλγεβρικών συνόλων ορισμένων υπέρ του σώματος των μιγαδικών αριθμών είναι ισοδύναμες

[9] [11].

Το γεγονός αυτό είχε πάρα πολλές ευχάριστες συνέπειες στην αλγεβρική γεωμετρία όπου κάποιος μπορεί να εναλλάσει τις μεθόδους του από αλγεβρικές σε αναλυτικές. Ως ένα παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την απόδειξη του θεωρήματος προπαρασκευής του Weierstrass το οποίο μπορεί να αντιμετωπιστεί με την βοήθεια του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η θεωρία uniformization των επιφανειών Riemann, όπου είναι γνωστό ότι κάθε επιφάνεια Riemann γένους $g \geq 0$, μπορεί να εκφραστεί ως πηλίκο του υπερβολικού επιπέδου modulo κατάλληλη διακριτή υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών του επιπέδου.

Στον τελευταίο αιώνα είχαμε πολλά οφέλη από το να θεωρήσουμε αλγεβρικά σύνολα, δηλαδή σύνολα που ορίζονται ως ο τόπος μηδενισμού ενός συνόλου πολυωνύμων, όχι μόνο πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών, αλλά πάνω από οποιοδήποτε σώμα ή δακτύλιο. Έτσι για παράδειγμα η θεωρία αλγεβρικών πολλαπλοτήτων πάνω από πεπερασμένα σώματα αποδείχτηκε να έχει εφαρμογές στην θεωρία κωδίκων και στην κρυπτογραφία, ενώ η θεώρηση αλγεβρικών συνόλων πάνω από σώματα αριθμών έδωσε μια νέα ώθηση στη μελέτη διοφαντικών προβλημάτων με αποκορύφωμα ίσως την απόδειξη του τελευταίου Θεωρήματος του Fermat από τον A. Wiles ή την απόδειξη της εικασίας του Mordel από τον G. Faltings.

Στην αλγεβρική γεωμετρία πάνω από ένα τυχαίο σώμα μπορούμε να ορίσουμε την τοπολογία του Zariski η οποία όμως έχει πολύ μεγάλα ανοιχτά σύνολα (κάθε ανοιχτό είναι πυκνό) και πολλά θεωρήματα που θα θέλαμε να ισχύουν είναι λάθος όπως για παράδειγμα το θεώρημα αντιστρόφου απεικονίσεως.

Μια λύση είναι να ορίσουμε τις etale περιοχές, όπου θεωρήματα όπως αυτό της αντιστρόφου απεικονίσεως ισχύουν διά της βίας [7]. Μάλιστα αυτή η θεώρηση έδωσε πολλούς καρπούς όπως η απόδειξη των εικασιών του A. Weil σχετικά με το ίχνος του Frobenious και την εικασία του Riemann για ζήτα συναρτήσεις αλγεβρικών πολλαπλοτήτων. Επίσης, αποδείξεις που βασίζονται σε εργαλεία της μιγαδικής ανάλυσης δεν είναι πια στην διαθεσή μας.

Μια άλλη προσέγγιση για την αλγεβρική γεωμετρία των σωμάτων αριθμών θα ήταν να είχαμε μία θεωρία αναλυτικών συναρτήσεων πάνω από πλήρη τοπικά σώματα.

Στις αρχές του 20ου αιώνα ο Hensel όρισε τα σώματα των p-αδικών αριθμών και ο Hasse πρώτος τα χρησημοποίησε στην επίλυση διοφαντικών προβλημάτων. Το πώς θα κατασκευάσουμε το ανάλογο των επιφανειών Riemann και το πως θα αποδείξουμε θεωρήματα uniformization για αυτές δεν ήταν καθόλου σαφές. Ένα από τα κυριότερα προβήματα ήταν το γεγονός ότι οι τοπολογικοί χώροι που προκύπτουν είναι *totally disconnected* οπότε βασικά θεωρήματα της μιγαδικής ανάλυσης όπως το θεώρημα ταυτότητας, φαίνεται να μην έχουν ανάλογο στα ultametric σώματα.

Ο J. Tate κατάφερε να δώσει μία uniformization θεωρία για τις ελλειπτικές καμπύλες, θεωρία που στην συνέχεια γενίκευσε ο D. Mumford στην περίπτωση των καμπύλων γένους $g \geq 2$. Η βασική ιδέα πίσω από την άκαμπτη αναλυτική γεωμετρία βασίζεται στην κατασκευή ενός sheaf συναρτήσεων πάνω στην αλγεβρική πολλαπλότητα. Ο Grothendieck στην προσπάθεια του να ορίσει την etale συνομολογία, έδωσε έναν πιο γενικό ορισμό τοπολογικού χώρου, που σήμερα φέρει το όνομα του. Στην πραγματικότητα εξασθένησε τον ορισμό της τοπολογίας· έδειξε ότι προκειμένου να ορίσουμε sheaf χρειαζόμαστε μιά συλλογή συνόλων που να ικανοποιούν λιγότερες απαιτήσεις από το να αποτελούν ανοιχτά σύνολα μιας τοπολογίας. Στην περίπτωση της άκαμπτης γεωμετρίας τα σύνολα αυτά είναι τα λεγόμενα *επιτρεπτά ανοιχτά* και πρόκειται για σύνολα που θα αντικαταστήσουν την έννοια του ανοιχτού δίσκου, οι δε συναρτήσεις που θα τοποθετήσουμε να ορίζονται υπέρ αυτών θα αποτελούν αφινοειδείς άλγεβρες.

Η θεωρία αυτή πέρασε σε μία νέα φάση μετά από τις εργασίες του V. Berkovich που κατάφερε, με την βοήθεια τεχνικών από την p-αδική συναρτησιακή ανάλυση, να «συμπληρώσει» τα κενά στους p-αδικούς χώρους, ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τις τεχνικές της ομοτοπικής θεωρίας και των καλυπτικών απεικονίσεων. Θα έλεγε κανείς διαισθητικά ότι οι δύο τεχνικές που χρησιμοποιούμε στον ορισμό των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς, δηλαδή η *πλήρωση* και οι *τομές Dedekind* στην περίπτωση της p-αδικής ανάλυσης οδηγούν σε διαφορετικούς χώρους. Η πρώτη οδηγεί στα σώματα $\mathbb{Q}_p$ που είναι πλήρως μη συνεκτικά (totally disconected) ενώ η δεύτερη στους χώρους Berkovich που είναι τοπικά δρομοσυνεκτικοί.

Οι καμπύλες του Mumford αποδείχτηκε ότι έχουν πολλές εφαρμογές όπως στην θεωρία των αυτομορφισμών αλγεβρικών καμπύλων και ότι πολλές ενδιαφέρουσες καμπύλες που προκύπτουν από αριθμητικά προβλήματα (Shimura curves) δέχονται uniformization κατα Mumford.

Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο νέος μαθηματικός που θέλει να μελετήσει τις παραπάνω κατασκευές, είναι ότι η υπάρχουσα βιβλιογραφία μπορεί να τον «τρομάξει» με το μέγεθός της και τις απαιτήσεις της. Οι παρακάτω σημειώσεις έχουν σαν στόχο να εισαγάγουν τον αναγνώστη στην θεωρία της uniformization θεωρίας των καμπύλων του Mumford και να τον βοηθήσουν να αποκτήσει κάποια διαίσθηση στην θεωρία αυτή. Τα κεφάλαια που αναφέρονται στους *κλασικούς άκαμπτους χώρους* έχουν βασιστεί στο βιβλίο των S. Bosch, G. Guntzer, R. Remmert [3] και στις σημειώσεις του Hans Schoutens [8]. Το κεφάλαιο σχετικά με τους χώρους Berkovich είναι βασισμένο στο βιβλίο του [2] και στην διδακτορική διατριβή του P.E. Bradley [4]

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν με την ευκαρία της διδασκαλίας του ομώνυμου μεταπτυχιακού μαθήματος στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου το εαρινό εξάμηνο του 2006.

Ευχαριστίες: Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δάσκαλο μου Γιάννη Αντωνιάδη για το έξτρα προπτυχιακό μάθημα *τοπικών σωμάτων* που δίδαξε το χειμερινό εξάμηνο του 1992. Οι μέθοδοι της p-αδικής ανάλυσης ήταν για μένα, εκείνη την εποχή, ένα εντυπωσιακό παράθυρο σε έναν νέο κόσμο. Οι όποιες γνώσεις μου στην άκαμπτη γεωμετρία οφείλονται σε ένα μεγάλο βαθμό στις συζητήσεις που είχα με τους F. Kato και G. Cornelissen κατά την διάρκεια της επίσκεψης του στο ινστιτούτο Max-Planck στην Βόννη το ακαδημαϊκό έτος 1998-1999. Τέλος θερμές ευχαριστίες στους μεταπτυχιακούς φοιτητές Καρανικολόπουλο Σωτήρη και Δημοκλή Γκουνταρούλη, που χωρίς το ενδιαφέρον τους το μάθημα αυτό δεν θα είχε ποτέ διδαχθεί.

Κεφάλαιο 2

Πλήρη σώματα ως προς **ultrametric** μετρικές

2.1 Απόλυτες τιμές σε σώματα αριθμών.

Ορισμός 2.1.1 *Μία νόρμα ή απόλυτη τιμή* $||\cdot||_K$ *σε ένα σώμα* K *είναι μία συνάρτηση*

$$K \to \mathbb{R}^+,$$
$$x \mapsto ||x||_K$$

έτσι ώστε

1. $||x||_K \geq 0$,
2. $x = 0 \Leftrightarrow ||x||_K = 0$,
3. $||x+y||_K \leq ||x||_K + ||y||_K$

Αν επιπλέον ισχύει $||x \cdot y||_K = ||x||_K \cdot ||y||_K$ *τότε η νόρμα λέγεται πολλαπλασιαστική. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις 1,3, εκτός από την δεύτερη τότε έχουμε μία ημινόρμα.*

Ορισμός 2.1.2 *Μία ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *θα λέγεται ακολουθία Cauchy, αν και μόνο αν*

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0, \ \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}, \ \text{ώστε } n, m \geq n_0 \Rightarrow ||a_n - a_m||_K < \epsilon.$$

Ορισμός 2.1.3 *Μία ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *θα λέγεται συγκλίνουσα στο* K *αν υπάρχει* $\ell \in K$ *ώστε*

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0, \ \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}, \ \text{ώστε } n \geq n_0 \Rightarrow ||a_n - \ell||_K < \epsilon.$$

Όπως και στις ακολουθίες στο σώμα $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο με την συνηθισμένη μετρική, μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy.

Το αντίστροφο δεν συμβαίνει πάντα, για παράδειγμα στο σώμα των ρητών αριθμών εφοδιασμένο με την συνηθισμένη μετρική, η ακολουθία των δεκαδικών προσεγγύσεων του $\sqrt{2}$ είναι Cauchy χωρίς να είναι συγκλίνουσα.

Ορισμός 2.1.4 *Ένα σώμα K θα λέγεται πλήρες ως προς μία νόρμα αν και μόνο αν κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα.*

Παραδείγματα: Το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη νόρμα είναι πλήρες. Το $\mathbb{C}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη νόρμα είναι πλήρες. Το $\mathbb{Q}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη μετρική δεν είναι πλήρες.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε σώμα μπορεί να θεωρηθεί ως υπόσωμα ενός πλήρους σώματος. Η κατασκευή η οποία έχει αρκετές τεχνικές λεπτομέρειες γίνεται ως εξής: Θεωρούμε το σύνολο των ακολουθιών Cauchy το οποίο το μετατρέπουμε σε δακτύλιο με πράξεις τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλ/σμού ακολουθιών. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ακολουθίες που συγκλίνουν στο μηδέν αποτελούν ένα μέγιστο ιδεώδες του παραπάνω αυτού δακτυλίου, οπότε ορίζουμε ως πλήρωση του K ως προς την μετρική $||\cdot||$ το σώμα

$$\tilde{K} := \frac{\text{ακολουθίες Cauchy}}{\text{ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0}}.$$

Για όλες τις τεχνικές λεπτομέρειες της κατασκευής αυτής παραπέμπουμε στις διδακτικές σημειώσεις του προπτυχιακού μαθήματος [16].

Το σώμα K μπορούμε να το θεωρήσουμε ως υπόσωμα του $\tilde{K}$ με την βοήθεια του μονομορφισμού:

$$\begin{aligned}&K \hookrightarrow \tilde{K}\\ &x \mapsto (a_n), a_n = x, \text{ σταθερή ακολουθία}\end{aligned}$$

Ορισμός 2.1.5 *Θα λέμε ότι δύο νόρμες $||\cdot||_1$,$||\cdot||_2$ στο σώμα K είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί c_1, c_2 ώστε*

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_2.$$

Είναι σαφές ότι ισοδύναμες μετρικές επάγουν την ίδια τοπολογία στο K.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι αν οι μετρικές $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ είναι ισοδύναμες και (a_n) είναι ακολουθία στοιχείων του K, τότε $a_n \xrightarrow{||\cdot||_1} \ell$ αν και μόνο αν $a_n \xrightarrow{||\cdot||_2} \ell$.

Παραδείγματα: Θεωρούμε το σώμα των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$. Το σώμα αυτό είναι εφοδιασμένο με την γνωστή νόρμα $||\cdot||$ την οποία θα την συμβολίζουμε με $||\cdot||_\infty$. Αν πλήρώσουμε το $\mathbb{Q}$ με την νόρμα $||\cdot||_\infty$ τότε καταλήγουμε στο σώμα των πραγματικών αριθμών.

Μπορούμε όμως να ορίσουμε και άλλες νόρμες στο σώμα των ρητών αριθμών τις p-αδικές. Είναι σαφές ότι κάθε ακέραιος αριθμός x μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$x = p^{v_p(x)}a, (a,p) = 1$$

όπου το $v_p(x) \in \mathbb{Z}$ είναι ο μη αρνητικός αριθμός που εκφράζει την δύναμη με την οποία βρίσκεται ο πρώτος αριθμός p στην ανάλυση του x σε πρώτους παράγοντες.

Ορίζουμε λοιπόν ότι

$$||x||_p = \frac{1}{p}^{v_p(x)},$$

και έχουμε μία συνάρτηση από το $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Την συνάρτηση αυτή μπορούμε να την επεκτείνουμε σε μία συνάρτηση

$$||\cdot||_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},$$

ορίζοντας ως

$$||\frac{a}{b}||_p = \frac{||a||_p}{||b||_p}.$$

Μπορούμε να δούμε ότι η παραπάνω συνάρτηση ορίζει όντως μια νόρμα στο $\mathbb{Q}$. (άσκηση). Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αντί της τριγωνικής ανισότητας ισχύει η πιο ισχυρή ανιστότητα

$$||x+y||_p \leq \max\{||x||_p, ||y||_p\}.$$

Μία μετρική που ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα θα λέγεται ultrametric.

Παρατήρηση: Οι απόλυτες τιμές $||\cdot||_\infty, ||\cdot||_p$ είναι μη ισοδύναμες, όπως και οι $||\cdot||_p$ δεν είναι ισοδύναμη με την $||\cdot||_q$ για $p \neq q$. Πράγματι η ακολουθία p^n έχει όριο

$$\lim p^n = \begin{cases} +\infty & \text{στην } ||\cdot||_\infty \\ 1 & \text{στην } ||\cdot||_q,\ p \neq q \\ 0 & \text{στην } ||\cdot||_p. \end{cases}$$

Παρατήρηση: Βασικό ρόλο στην ανάπτυξη της *αριθμητικής αλγεβρικής γεωμετρίας* έπαιξαν οι αναλογίες ανάμεσα στα *αλγεβρικά σώματα αριθμών* και στα *αλγεβρικά σώματα συναρτήσεων μιάς μεταβλητής*. Τα πρώτα ορίζονται ως αλγεβρικές, πεπερασμένες επεκτάσεις του $\mathbb{Q}$ ενώ τα δεύτερα ως αλγεβρικές, πεπερασμένες επεκτάσεις του σώματος $k(x)$. Τα σώματα συναρτήσεων επιπλέον στην περίπτωση που το k είναι το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα σώματα μερομόρφων συναρτήσεων από συμπαγείς επιφάνειες Riemann [17]. Η θεώρηση αυτή μας έδωσε αρκετά γεωμετρικά και αναλυτικά εργαλεία για την μελέτη τόσο των σωμάτων συναρτήσεων όσο και των σωμάτων αριθμών.

Η αναλογία αυτή είναι αρκετά βαθειά και σχεδόν κάθε θεώρημα που αφορά σώματα συναρτήσεων μπορεί να μεταφερθεί στην περίπτωση των σωμάτων αριθμών και αντιστρόφως. Στην κατεύθηνση αυτή αξίζει να αναφέρουμε ότι η υπόθεση του Riemann σχετικά με τις ρίζες της ζ-συνάρτησης του Riemann έχει αποδειχθεί [14] για σώματα συναρτήσεων ενώ μια απόδειξη για σώματα αριθμών δεν είναι ακόμα διαθέσιμη. Είναι χαρακτηριστικό ότι αρκετές από τις προσπάθειες για την απόδειξη της εικασίας του Riemann για σώματα αριθμών κάνουν χρήση της αναλογίας αυτής. [5]

Το ανάλογο σώμα του $\mathbb{Q}$ στα σώματα συναρτήσεων είναι το σώμα $k(x)$ των ρητών συναρτήσεων. Αν $k = \mathbb{C}$ τότε το σώμα $\mathbb{C}(x)$ αποτελεί το σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων της απλούστερης συμπαγούς επιφάνειας Riemann, της προβολικής ευθείας $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Ας θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο σημείο στην $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ το $a \in \mathbb{C}$. Κάθε ρητή συνάρτηση $f \in \mathbb{C}(x)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$f(x) = (x-a)^{v_a(f)} p(x),$$

όπου $v_a(f) \in \mathbb{Z}$, $p(x) \neq 0$, και $p(x)$ είναι ρητή συνάρτηση καλά ορισμένη στο a, δηλαδή το a δεν αποτελεί πόλο της p. Αν το $v_a(f) \geq 0$ τότε το $v_a(f)$ ονομάζεται *τάξη της ρίζας της f στο a* ενώ αν το $v_a(f) < 0$ τότε το $v_a(f)$ ονομάζεται *τάξη του πόλου της f στο a* Έστω $0 < c < 1$. Τότε έχουμε ότι

$$||\cdot||_{a,c}(f) = c^{v_a(f)} : \mathbb{C}(x) \to \mathbb{R}^+$$

είναι μία μετρική στο $\mathbb{C}(x)$.

Ασκήση: Αποδείξτε τον παραπάνω ισχυρισμό. Τι θα συμβεί αν θεωρήσουμε το σώμα $k(x)$ των ρητών συναρτήσεων υπεράνω ενός τυχαίου σώματος;

Άσκηση: Δείξτε ότι για $0 < c_1, c_2 < 1$ οι μετρικές $||\cdot||_{c_1,a}, ||\cdot||_{c_2,a}$ είναι ισοδύναμες, ενώ για $a \neq b$ οι μετρικές $||\cdot||_{c,a}, ||\cdot||_{c',b}$ δεν είναι ισοδύναμες.

Άσκηση: Έστω μια ρητή συνάρτηση f/g, όπου $f(x), g(x) \in k(x)$ Δείξτε ότι για $0 < c < 1$ η συνάρτηση

$$||\cdot||_{\infty,c} : k(x) \to \mathbb{R}^+,$$

που ορίζεται ως

$$||f/g||_{\infty,c} = c^{\deg(f)-\deg(g)}$$

είναι μία μετρική. Δείξτε ότι διαφορετικά c οδηγούν σε ισοδύναμες μετρικές. Δείξτε ότι καμία μετρική $||\cdot||_{\infty,c}$ δεν είναι ισοδύναμη με την $||\cdot||_{a,c'}$.

Άσκηση: Δείξτε ότι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας μετρικών στο $k(x)$ είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα σημεία του $\mathbb{P}^1(k)$.

Παρατήρηση: Ισχύει ότι για $x \in \mathbb{Q}$

$$||x||_\infty \cdot \prod_p ||x||_p = 1.$$

Ο τύπος αυτός αντιστοιχεί στον γνωστό θεώρημα για συμπαγείς επιφάνειες Riemann: *μία μερόμορφη συνάρτηση σε συμπαγή επιφάνεια Riemann έχει, μετρημένης της πολλαπλότητας, τόσες ρίζες όσες και πόλους.*

Παρατήρηση: Το λεγόμενο θεώρημα του Ostrowski εξασφαλίζει ότι οι $||\cdot||_\infty$, $||\cdot||_p$ είναι όλες οι δυνατές μή ισοδύναμες απόλυτες τιμές που μπορούμε να έχουμε στο σώμα των ρητών αριθμών.

Τα σώματα $\mathbb{Q}$ και $k(x)$ με τις παραπάνω μετρικές δεν είναι πλήρη. Μπορούμε να σχηματισούμε τις πληρώσεις τους. Η πλήρωση του $\mathbb{Q}$ ως προς την συνηθισμένη μετρική οδηγεί στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, το οποίο δεν είναι αλγεβρικά κλειστό. Η αλγεβρική κλειστότητα του $\mathbb{C}$ είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών το οποίο είναι αλγεβρικά κλειστό και πλήρες.

Αν θεωρήσουμε την πλήρωση του $\mathbb{Q}$ ως προς μια από τις μετρικές $||\cdot||_p$ σχηματίζουμε το σώμα των p-αδικών αριθμών $\mathbb{Q}_p$ το οποίο είναι πλήρες αλλά όχι αλγεβρικά κλειστό. Η αλγεβρική κλειστότητα του είναι αλγεβρικά κλειστό αλλά όχι πλήρες σε αντίθεση με πριν. Αν σχηματίσουμε την πλήρωση της αλγεβρικής κλειστότητας του $\mathbb{Q}_p$ καταλήγουμε στο σώμα $\mathbb{C}_p$ το οποίο είναι και αλγεβρικά κλειστό και πλήρες.

Έστω $a \in k$. Αν θεωρήσουμε την πλήρωση του $k(x)$ ως προς το $||\cdot||_a$ σχηματίζουμε τον χώρο των *τυπικών δυναμοσειρών* $k\langle x\rangle$, που περιέχει τυπικά αθροίσματα της μορφής $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$.

2.2 Κλειστές Μπάλες

Θεωρούμε ένα δακτύλιο A, εφοδιασμένο με μιά απόλυτη τιμή $||\cdot||$, και έστω το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n),\ a_i \in A\}$, εφοδιασμένο με την απόλυτη τιμή

$$||(a_1, \ldots, a_i)|| = \max_i ||a_i||_A.$$

Ορίζουμε την κλειστή μπάλα με κέντρο a και ακτίνα $\epsilon \in \mathbb{R}^+$

$$B_{A^n}(a, \epsilon) = \{x \in A^n : ||x - a|| \leq \epsilon\}.$$

Παρατήρηση: Μία από τις πολλές ιδιαιτερότητες των ultrametric μετρικών είναι ότι η κλειστή μπάλα $B_{A^n}(a, \epsilon)$ είναι τοπολογικά ανοιχτή. Πράγματι, έστω $y \in A^n$ που να ανήκει στο σύνορο της $B_{A^n}(a, \epsilon)$, δηλαδή $||y - a|| = \epsilon$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ανοιχτή μπάλα κέντρου y που να ανήκει εξολοκλήρου στην $B_{A^n}(a, \epsilon)$.

Θεωρούμε το σύνολο των σημείων $b \in A^n$, ώστε $||y-b||_A < \epsilon/2$. Παρατηρούμε ότι

$$||b - a|| = ||(y - b) + (a - y)|| \leq \max\{||y - b||, ||a - y||\} = \max\{\epsilon/2, \epsilon\} = \epsilon,$$

δηλαδή το ζητούμενο!

Ένα από τα πολλά προβλήματα που έχουν οι χώροι A^n είναι ότι απέχουν πολύ από το να είναι συνεκτικοί.

Ορισμός 2.2.1 *Ένας τοπολογικός χώρος θα λέγεται πλήρως ασυνεκτικός (totally disconnected) αν και μόνο αν οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι τα σημεία.*

Οι χώροι A^n εφοδιασμένοι με την τοπολογία των ultrametric απόλυτων τιμών είναι πλήρως ασυνεκτικοί χώροι.

2.2.1 Δακτύλιοι Εκτίμησης

Ορισμός 2.2.2 *Θα λέμε ότι μία ακεραία περιοχή R είναι δακτύλιος εκτίμησης του σώματος $K = Quot(R)$, αν και μόνο αν για κάθε $x \in K$ ισχύει $x \in R$ ή $x^{-1} \in R$.*

Άσκηση Αποδείξτε ότι κάθε δακτύλιος εκτίμησης είναι *τοπικός* δηλαδή έχει μοναδικό μέγιστο ιδεώδες.

Παρατηρούμε ότι σε ένα πλήρες ultametric σώμα η κλειστή μπάλα

$$R := B_K(0, 1) = \{x \in K : ||x||_K \leq 1\}$$

αποτελεί δακτύλιο εκτίμησης, και ότι το μέγιστο ιδεώδες είναι το

$$p_R := \{x \in K : ||x||_K < 1\}.$$

Κεφάλαιο 3

Αφινοειδείς Άλγεβρες

3.1 Ελεύθερες Άλγεβρες Tate

Ορισμός 3.1.1 *Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to K$ είναι φραγμένη, όταν υπάρχει $M \in \mathbb{N}$, ώστε*

$$\forall x \in X : ||f(x)|| \leq M.$$

Αν συμβολίζουμε με $Func(X, K)$ το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων $X \to K$, τότε το $Func(X, K)$ έχει την δομή άλγεβρας. Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε μια νόρμα στο $Func(X, K)$ ως

$$|f| := \sup_{x \in X} ||f(x)||_K.$$

Έστω ότι R^n συμβολίζει τον μοναδιαίο πολυδίσκο του K^n. Θα συμβολίζουμε με S την n-άδα των μεταβλητών $(S_1, \ldots, S_n)$.

Θεωρούμε το τυπικό άθροισμα:

$$p := \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu S^n.$$

Το p δεν έχει έννοια συνάρτησης αν δεν μελετήσουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης ως προς την σύγκλιση. Παρόλα αυτά, είναι ένα αντικείμενο το οποίο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αλγεβρικά χωρίς πρόβλημα. Το σύνολο $K[[S]]$ των τυπικών αθροισμάτων της παραπάνω μορφής αποκτά με φυσιολογικό τρόπο δομή δακτυλίου.

Θα λέμε ότι η σειρά $p \in K[[S]]$ είναι strictly συκλίνουσα, αν και μόνο αν $a_\nu \to 0$ όταν $|\nu| \to \infty$. Αυτή η παραδοχή μας εξασφαλίζει ότι για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$ στον πολυδίσκο R^n η δυναμοσειρά

$$||p(x)|| := \sum_{\nu} a_n x^n,$$

ορίζει συνάρτηση: $R^n \to K$.

Ορισμός 3.1.2 *Η ελεύθερη Tate άλγεβρα $K\langle S \rangle$ αποτελείται από τις strictly συγκλίνουσες δυναμοσειρές με φυσιολογικά ορισμένες πράξεις.*

Στην άλγεβρα $K\langle S\rangle$ μπορούμε να ορίσουμε την απόλυτη τιμή (άσκηση: δείξτε ότι όντως είναι απόλυτη τιμή) του Gauss ως:

$$|p|_{Gauss} := \max_{\nu\in\mathbb{N}^n}\{|a_\nu|\}.$$

Η απόλυτη τιμή του Gauss είναι καλά ορισμένη αφού η ακολουθία των όρων της δυναμοσειράς συγκλίνει στο 0 και συνεπώς είναι φραγμένη.

Επίσης είναι σαφές ότι

$$p(x) \leq ||p||_{Gauss}.$$

Για μία δυναμοσειρά $p \in K\langle S\rangle$ μπορούμε να κάνουμε το παρακάτω τέχνασμα κανονικοποίησης: Υπάρχει $\pi \in K$ ώστε $||p||_{Gauss} = \pi$. Συνεπώς αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της σειράς p με π^{-1} έχουμε ότι

$$||\pi^{-1}p||_{Gauss} = 1.$$

Θεώρημα 3.1.3 (Maximum Modulus principle) *Για κάθε $p \in K\langle S\rangle$ υπάρχει $x \in R^n$ ώστε $||p||_{sup} = ||p(x)||$.*

Απόδειξη: Από το τέχνασμα κανονικοποίησης μπορούμε να υποθέσουμε ότι το p έχει απόλυτη τιμή 1. Ας συμβολίζουμε με $\bar{R} = R/p_R$ το σώμα πηλίκο του δακτύλιου εκτίμησης R προς το μέγιστο ιδεώδες του. Αν $\bar{p}$ συμβολίζει την αναγωγή του p modulo p_R, δηλαδή την εικόνα του p στο σώμα πηλίκο $\bar{R}$, τότε είναι σαφές ότι το $\bar{p} \in \bar{R}[S]$, δηλαδή ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\bar{R}$. Πράγματι, αφού οι ακολουθία των συντελεστών της δυναμοσειράς τείνει στο 0, είναι σαφές ότι για μεγάλα $n \in \mathbb{N}^n$ η απολύτη τιμή των $||a_n||_K < 1$ ή ισοδύναμα $a_n \in p_R$.

Αφού υποθέσαμε ότι το σώμα $\bar{R}$ είναι αλγεβρικά κλειστό (και κατά συνέπεια άπειρο) έχουμε ότι υπάρχει $\bar{x} \in \bar{R}^n$ ώστε $\bar{p}(\bar{x}) \neq 0$. Αν $x \in R^n$ είναι ένα οποιοδήποτε lift του $\bar{x}$ θα πρέπει $p(x) = 1$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.1.4 *Σε κάθε Tate άλγεβρα $K\langle S\rangle$ η απόλυτη τιμή του Gauss είναι πλήρης και πολλαπλασιαστική και ταυτίζεται με την απόλυτη τιμή supremum.*

Απόδειξη: Αφού $||p(x)|| \leq ||p||_{Gauss}$ για κάθε $x \in R^n$ με βάση το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι οι supremum και Gauss απόλυτες τιμές ταυτίζονται. □

Στην μιγαδική περίπτωση ισχύει ότι

Θεώρημα 3.1.5 (Θεώρημα ταυτότητας) *Έστω f, g δύο ολόμορφες συναρτήσεις σε ένα συνεκτικό ανοιχτό σύνολο D και ας υποθέσουμε ότι $f = g$ σε μία γειτονιά του $z \in D$. Τότε οι συναρτήσεις f, g ταυτίζονται σε ολόκληρο το D.*

Δυστυχώς στα ultrametric σώματα δεν μπορούμε να ορίσουμε *αναλυτικές συναρτήσεις* με τον ίδιο τρόπο όπως και στην μιγαδική ανάλυση. Αν ορίσουμε για παράδειγμα ως αναλυτικές συναρτήσεις, τις συναρτήσεις f που για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού τους υπάρχει γειτονιά U ώστε ο περιορισμός της $f|_U$ να εκφράζεται με δυναμοσειρά τότε το θεώρημα ταυτότητας δεν μπορεί να ισχύει. Το κλασικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση:

$$f : K \to K, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$$

Η συνάρτηση, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό είναι αναλυτική, και ο περιορισμός της στο $B(0,1)$ ταυτίζεται με την ταυτοτική συνάρτηση $x \mapsto 1$. Πράγματι η συνάρτηση f έχει περιοχές για $|x| \neq 1$ στις οποίες ο περιορισμός της είναι δυναμοσειρά, ενώ για τον κρίσιμο κύκλο $|x| = 1$ παρατηρούμε ότι αν $|x - y| < \epsilon < 1$, τότε

$$|y| = |y - x + x| \leq \max\{|y - x|, |x|\} = 1,$$

δηλαδή $B(x, \epsilon) \subset B(0,1)$, και συνεπώς η f είναι αναλυτική παντού!

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα η στρατηγική μας είναι να περιορίσουμε τα *επιτρεπτά ανοιχτά* σύνολα. Ο περιορισμός που θα κάνουμε θα είναι στα πλαίσια μίας τοπολογίας του Grothendieck μια κατασκευή που θα εξηγήσουμε στην συνέχεια. Περιορίζοντας τα ανοιχτά περιορίζουμε και τα σύνολα που είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους δηλαδή τις «κινήσεις» που μπορεί να κάνει ένα σύνολο παραμένοντας ομοιομορφικό, και στο γεγονός αυτό οφείλεται και το όνομα της θεωρίας «άκαμπτη γεωμετρία» (rigid geometry).

Θεώρημα 3.1.6 (Θεώρημα ταυτότητας, άκαμπτη γεωμετρία) *Δύο στοιχεία στο $K\langle S\rangle$ τα οποία παίρνουν ίδιες τιμές σε κάθε σημείο του μοναδιαίου πολυδίσκου ταυτίζονται ως στοιχεία του $K\langle S\rangle$.*

Απόδειξη: Αν δύο στοιχεία $p, q \in K\langle S\rangle$ ισχύει $p(x) = q(x)$ για κάθε $x \in R^m$ τότε προφανώς $|p - q|_{sup} = 0$. Όμως η supremum απόλυτη τιμή ταυτίζεται με την απόλυτη τιμής του Gauss, οπότε οι συντελεστές της σειράς $p - q$ είναι όλοι μηδέν, άρα $p = q$. □

Λήμμα 3.1.7 *Μία strictly συγκλίνουσα σειρά στο $K\langle S\rangle$ είναι μονάδα του δακτυλίου $K\langle S\rangle$ αν και μόνο αν $|a_0| = |p|$ και $|a_n| < |p|$ για κάθε $n \geq 1$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $|p| = 1$. Υποθέτουμε ότι $|a_0| = 1$, $|a_n| < 1$, άρα υπάρχει ένα $\pi \in K$ ώστε $|\pi| < 1$ και $q \in K\langle S\rangle$ ώστε $p = 1 - \pi q$. Η σειρά $1 + \pi q + \pi^2 q^2 + \cdots$, συγκλίνει και είναι το αντίστροφο του π.

Αντστρόφως, έστω ότι $a_0 = 1$ και ότι q είναι το αντίστροφο του p. Αν $|p| > 1$ τότε $|q| < 1$ αφού $pq = 1$. Όμως ο σταθερός όρος του q πρέπει να είναι 1, άρα δεν γίνεται το q να έχει απόλυτη τιμή Gauss μικρότερη της μονάδας. Άρα $|p| = |q| = 1$ και συνεπώς $p, q \in R\langle S\rangle$. Αν $\bar{R} = R/pR$ τότε η συνάρτηση αναγωγής modulo το μέγιστο ιδεώδες του R δίνει ότι το p^{-1} είναι αντιστρέψιμο πολυώνυμο στο $\bar{R}[S]$ άρα σταθερά, άρα $|a_n| < 1$ για όλα τα $n \geq 1$. □

Υπάρχει και ένας τρίτος υποψήφιος για τον ορισμό απόλυτης τιμής:

Ορισμός 3.1.8 *Ας θεωρήσουμε ένα K-ρητό μέγιστο ιδεώδες του $K\langle S\rangle$, δηλαδή ένα ιδεώδες m ώστε $K\langle S\rangle/m \cong K$. Ας συμβολίζουμε με*

$$\pi^m : K\langle S\rangle \to K$$

τον κανονικό επιμορφισμό. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την νόρμα στο m του p ώς

$$|p|_m := |\pi^m(p)|.$$

Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει για κάθε K-ρητό μέγιστο ιδεώδες του $K\langle S\rangle$ και στην συνέχεια μπορούμε να θεωρήσουμε το supremum πάνω σε όλες αυτές τις τιμές ώστε να ορίσουμε την K-ρητή supremum απόλυτη τιμή την οποία θα συμβολίζουμε (προς το παρόν) με $|p|_{ratsup}$.

3.2 Η αλγεβρική δομή του δακτυλίου $K\langle S\rangle$

Θα διατυπώσουμε το θεώρημα προπαρασκευής του Weierstrass το οποίο και θα αποτελέσει ένα βασικό εργαλείο στην μελέτη της δομής του δακτυλίου $K\langle S\rangle$. Στην περίπτωση της μιγαδικής αναλυτικής γεωμετρίας, η μέθοδος απόδειξης που συναντάμε στην βιβλιογραφία [6, σελ. 8] βασίζεται στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

Ορισμός 3.2.1 (Κανονικές Σειρές) *Θα λέμε μία γνήσια συγκλίνουσα σειρά p κανονική στο S_m βαθμού d, αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:*

- $|p| = |p_d| > |p_k|$ *για κάθε* $k > d$,
- p_d *είναι μία μονάδα στον δακτύλιο* $K\langle S'\rangle$,

όπου

$$p = \sum_k p_k(S')S_m^k,$$

είναι η ανάλυση της p ως δυναμοσειρά στην μεταβλητή S_m με συντελεστές p_k στον δακτύλιο $K\langle S'\rangle$. (Με S' θα συμβολίζουμε το μπλοκ των μεταβλητών $(S_1, \ldots, S_{m-1})$.)

Ορισμός 3.2.2 *Ένα μονικό πολυώνυμο P στο S_m υπέρ το $K\langle S'\rangle$ δηλαδή ένα πολυώνυμο του οποίου ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι μονάδα, και το οποίο αν αναπτυχθεί ως πολυώνυμο στην μεταβλητή S_m έχει νόρμα Gauss μονάδα θα λέγεται ένα πολυώνυμο Weierstrass. Τα πολυώνυμα Weierstrass αποτελούν ειδικές περιπτώσεις κανονικών σειρών.*

Θεώρημα 3.2.3 (Προπαρασκευής του Weierstrass) *Έστω $p, q \in K\langle S\rangle$ και ας υποθέσουμε ότι το p είναι κανονικό στην μεταβλητή S_m βαθμού d, $S = (S_1, \ldots, S_m)$. Τότε υπάρχει μοναδικό $Q \in K\langle S\rangle$ και $r \in K\langle S'\rangle[S_m]$ τέτοιο ώστε:*

$$q = pQ + r,$$

όπου $\deg_{S_m}(r) < d$, όπου κάνουμε την σύμβαση ότι το μοναδικό πολυώνυμο έχει βαθμό -1. Επιπλέον υπάρχει μοναδική μονάδα $u \in K\langle S\rangle$ και μοναδικό πολυώνυμο Weierstrass P στο S_m, ώστε

$$p = uP.$$

Απόδειξη: Η πλήρης απόδειξη δίνεται στο [3, 5.2.1 Θ2,5.2.2 Θ1]. Θα αποδείξουμε μόνο το πρώτο κομμάτι. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|p| = 1$ και $|q| = 1$ κάνοντας χρήση του τεχνάσματος κανονικοποίησης. Γράφουμε το p ως

$$p = \sum_i p_i S_m^i,$$

όπου $p_i \in K\langle S'\rangle$. Εξ υποθέσεως το p_d είναι μονάδα και διαιρώντας με την μονάδα αυτή όλους τους όρους της δυναμοσειράς μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο συντελεστής του S_m^d είναι μονάδα.

Αφού $|p| = 1$ έχουμε ότι $p \in R\langle S\rangle$. Θέτουμε $\epsilon = \sup_{i>d} |p_i|$, και εξ υποθέσεως έχουμε ότι $\epsilon < 1$. Θεωρούμε την δυναμοσειρά modulo το ιδεώδες

$$\mathcal{P}_\epsilon = \{x \in R : |x| \leq \epsilon\} = B_R(0; \epsilon).$$

Παρατηρούμε ότι $R\langle S\rangle/\mathcal{P}_\epsilon R\langle S\rangle \cong \bar{R}_\epsilon[S]$, όπου $\bar{R}_\epsilon = R/\mathcal{P}_\epsilon$. Επιπλέον, η κανονικότητα του p επιβάλλει ότι η εικόνα του στο $\bar{R}_\epsilon[S]$ είναι ένα μονικό πολυώνυμο στο S_m βαθμού d. Τώρα όμως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ευκλείδιο αλγόριθμο διαίρεσης για να πάρουμε

$$\bar{q} = \bar{p}\bar{Q}_0 + \bar{r}_0,$$

όπου $\deg_{S_m} \bar{r}_0 < d$. Ας είναι Q_0, r_0 οι ανυψώσεις στον δακτύλιο $R\langle S\rangle$ των $\bar{Q}_0$ και $\bar{r}_0$. όπου $\deg_{S_m}(r_0) < d$. Θέτουμε $q_1' = q - Q_0 p - r_0$, και προφανώς $|q_1'| \leq \epsilon$. Άρα μπορούμε να γράψουμε $q_1' = \lambda_1 q_1$, όπου $\lambda_1 \in \mathcal{P}_\epsilon$ και q_1 είναι μια γνήσια συγκλίνουσα δυναμοσειρά με νόρμα 1. Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία με q_1 στην θέση του q και έχουμε

$$q_2' = q_1 - pQ_1 - r_1 \in \mathcal{P}_\epsilon.$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $q_2' = \lambda_2 q_2$, $\lambda_2 \in \mathcal{P}_\epsilon$, με αντικατάσταση έχουμε

$$q = (Q_0 + \lambda_1 Q_1)p + (r_0 + \lambda_1 r_1) + \lambda_1\lambda_2 q_2.$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά για να καταλήξουμε στο

$$Q = Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \lambda_1\lambda_2 Q_2 + \cdots,$$

$$r = r_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_1\lambda_2 r_2 + \cdots$$

όπου $\lambda_i \in \mathcal{P}_\epsilon$. Οι παραπάνω δυναμοσειρές συγκλίνουν, και ειδικότερα οι Q, r είναι γνήσια συγκλίνουσες δυναμοσειρές με $\deg_{S_m}(r) < d$. Επιπλέον, το $q - Qp - r$ ανήκει σε όσο μεγάλη δύναμη του ιδεώδους $\mathcal{P}_\epsilon$ θέλουμε, οπότε πρέπει να είναι μηδέν. □

Το παραπάνω θεώρημα το χρησιμοποιούμε σε συνδιασμό με το λεγόμενο *τέχνασμα προπαρασκευής*:

Πρόταση 3.2.4 *Έστω $p = \sum_\nu a_\nu S^\nu \in K\langle S\rangle$ μία μη μηδενική γνήσια συγκλίνουσα δυναμοσειρά στις μεταβλητές $S = (S_1, \ldots, S_m)$. Τότε υπάρχει ένας K αυτομορφισμός αλγεβρών $\sigma : K\langle S\rangle \to K\langle S\rangle$, ώστε το $\sigma(p)$ να γίνει κανονική σειρά στην μεταβλητή S_m για κάποιο βαθμό d.*

Ορισμός 3.2.5 *Ένας μορφισμός δακτυλίων $f : A \to B$ θα λέγεται* πεπερασμένος *αν ο B γίνεται πεπερασμένο A-module μέσω αυτού. Η διάσταση Krull ενός δακτυλίου ορίζεται ως το μέγιστο* ύψος *πρώτου ιδεώδους, ενώ* ύψος *ενός πρώτου ιδεώδους p ορίζεται ως το μήκος της μέγιστης αλυσίδας πρώτων ιδεωδών*

$$p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_l = p.$$

Οι τοπικοί δακτύλιοι της Noether έχουν πάντα πεπερασμένη διάσταση Krull ενώ οι διαστάσεις τοπικών δακτυλίων εκτίμησης είναι 1, αφού κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο. Η διάσταση Krull του δακτυλίου $K\langle S\rangle$, όπου $S = (S_1, \ldots, S_m)$ είναι m αφού η αλυσίδα πρώτων ιδεωδών

$$0 \subsetneq (S_1) \subsetneq (S_1, S_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (S_1, \ldots, S_m),$$

δείχνει ότι η διάσταση είναι τουλάχιστον m, ενώ μπορεί να αποδείξει κανείς ότι [3, 7.1.1] κάθε μέγιστο ιδεώδες παράγεται από m το πλήθος στοιχεία οπότε το ύψος του είναι το πολύ m. Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι κάθε μέγιστο ιδεώδες στο

$K\langle S\rangle$ είναι πάντα της μορφής $(S_1-r_1,\ldots,S_m-r_m)$ αρκεί το K να είναι αλγεβρικά κλειστό.

Στην συνηθισμένη θεωρία των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων σημαντικό ρόλο παίζουν οι δακτύλιοι πηλίκα της πολυωνυμικής άλγεβρας $K[x_1,\ldots,x_n]$ ως προς κάποιο ιδεώδες P. Ανάλογα ορίζουμε

Ορισμός 3.2.6 *Μία αφινοειδής άλγεβρα είναι το πηλίκο μιας ελεύθερη άλγεβρας Tate ως προς ένα ιδεώδες της.*

Θεώρημα 3.2.7 (Κανονικοποίησης της Noether) *Αν A είναι μία αφινοειδής άλγεβρα τότε υπάρχει μία ελεύθερη Tate άλγεβρα $K\langle T\rangle$, και ένας πεπερασμένος μονομορφισμός*

$$\phi : K\langle T\rangle \hookrightarrow A.$$

Επιπλέον αν $T=(T_1,\ldots,T_d)$, τότε η διάσταση $d=\dim A$, όπου $\dim A$ είναι η διάσταση Krull.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για άλγεβρες που είναι πεπερασμένες πάνω από από την ελεύθερη άλγεβρα Tate $K\langle S\rangle$. Πράγματι, εξ ορισμού όλες οι αφινοειδείς άλγεβρες προκύπτουν ως πηλίκα ελεύθερων αλγεβρών μέσω ενός επιμορφισμού

$$K\langle S\rangle \to A,$$

και συνεπώς είναι πεπερασμένα παραγώμενα $K\langle S\rangle$-modules. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό m των μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουμε.

Αν $m=0$ τότε $K\langle S\rangle$ είναι το σώμα K και προφανώς το A γίνεται μία πεπερασμένα παραγώμενη K-άλγεβρα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε αποδείξει το θεώρημα για όλες τις A-άλγεβρες που είναι πεπερασμένα παραγώμενα $K\langle S'\rangle$- modules. Θεωρούμε τον μορφισμό

$$K\langle S\rangle \xrightarrow{\phi} A.$$

Αν ο ϕ είναι μονομορφισμός το θεώρημα έχει αποδειχτεί. Αν όχι θεωρούμε ένα πρώτο στοιχείο στον πυρήνα της ϕ. Προφανώς το A γίνεται μέσω του

$$B := \frac{K\langle S\rangle}{p} \to A,$$

μια πεπερασμένα παραγώμενη B-άλγεβρα. Όμως το τέχνασμα και το θεώρημα προπαρασκευής δείχνουν ότι το p μπορεί να επιλεχθεί να είναι μία κανονική δυναμοσειρά και συνεπώς μπορεί να γραφεί ως γινόμενο μίας μονάδας επί ενός μονικού πολυωνύμου στην μεταβλητή S_m με συντελεστές από το $K\langle S'\rangle$. Ένα standard τέχνασμα «ακεραίων αλγεβρικών» αποδεικνύει ότι το B είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο $K\langle S'\rangle$-module και η απόδειξη τελειώνει με την επαγωγική υπόθεση. □

Θεώρημα 3.2.8 (Βάσης του Hilbert) *Κάθε αφινοειδής άλγεβρα είναι, είναι δακτύλιος της Noether.*

Απόδειξη: Έστω A μία αφινοειδής άλγεβρα. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε ιδεώδες της A είναι πεπερασμένα παραγώμενο. Θα δώσουμε μία επαγωγική απόδειξη, κάνοντας επαγωγή στην διάσταση της A. Αν $m = 0$ τότε το A είναι ένα πεπερασμένο K-module συνεπώς δακτύλιος της Noether.

Ας υποθέσουμε ότι $m > 0$. Θα αποδείξουμε πρώτα το θεώρημα για $A = K\langle S\rangle$, $S = (S_1, \ldots, S_m)$. Έστω P ένα μη μηδενικό ιδεώδες του A και ας είναι $0 \neq p \in A$. Από την επαγωγική υπόθεση ο δακτύλιος A/p είναι δακτύλιος της Noether, αφού η διάσταση του $A/p < m$. Συνεπώς η εικόνα του a στο A/p είναι πεπερασμένα παραγώμενη, από τις εικόνες των $p_2, \ldots, p_s \in A$. Αυτό όμως έχει ως συνέπεια ότι $a = (p, p_2, \ldots, p_s)$, δηλαδή το ζητούμενο.

Στην γενική περίπτωση, το θεώρημα κανονικοποίησης της Noether εξασφαλίζει ότι το A είναι πεπερασμένο $K\langle S\rangle$-module υπέρ της άλγεβρας $K\langle S\rangle$ που αποδείξαμε ότι είναι Noether, άρα και το A είναι δακτύλιος της Noether.

□

Πως θα κατασκευάσουμε μέγιστα ιδεώδη του $K\langle S\rangle$; Ένας τρόπος να το πετύχουμε είναι να θεωρήσουμε ένα σημείο $x = (x_1, \ldots, x_n)$ στο R^m και να θεωρήσουμε το ιδεώδες m_x που παράγεται από τα στοιχεία $S_i - x_i$. Περισσότερο συγκεκριμένα, η συνάρτηση

$$\pi_x : K\langle S\rangle \to K : S_i \mapsto x_i,$$

είναι μία συνάρτηση επί με πυρήνα m_x άρα το m_x είναι ένα K-ρητό μέγιστο ιδεώδες. Το παρακάτω λήμμα μας λέει ότι όλα τα K-ρητά μέγιστα ιδεώδη είναι αυτής της μορφής

Λήμμα 3.2.9 *Υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα K-ρητά μέγιστα ιδεώδη του $K\langle S\rangle$, με $S = (S_1, \ldots, S_n)$ και στα σημεία του R^m.*

Απόδειξη: Έχουμε δει ήδη πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα K-ρητό μέγιστο ιδεώδες του $K\langle S\rangle$ από ένα σημείο $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Αντιστρόφως έστω ότι m είναι ένα μέγιστο K-ρητό ιδεώδες του $K\langle S\rangle$. και θεωρούμε τον κανονικό επιμορφισμό

$$\pi^m : K\langle S\rangle \to K\langle S\rangle/m \cong K.$$

Θέτουμε $x_i^m = \pi^m(S_i)$. Αφού $S_i - x_i^m$ ανήκει στον πυρήνα του π^m, δεν μπορεί να είναι μονάδα. Συνεπώς το λήμμα 3.1.7 εξασφαλίζει ότι $|x_i^m| \leq 1$. Με άλλα λόγια, $x_m := (x_1^m, \ldots, x_n^n) \in R^m$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι οι δύο αυτές κατασκευές $x \mapsto m_x$ και $m \mapsto x^m$ είναι η μία αντίστροφη της άλλης. □

Από το ασθενές θεώρημα ριζών του Hilbert (Nullstellensatz!) κάθε μέγιστο ιδεώδες του $K\langle S\rangle$ είναι K-ρητό (υπό την προϋπόθεση ότι το σώμα K είναι αλγεβρικά κλειστό) άρα υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα σε μέγιστα ιδεώδη του $K\langle S\rangle$ και σημεία του R^m.

Ας επιστέψουμε στην θεωρία της K-ρητής απόλυτης τιμής supremum, οι παρακάτω ισότητες είναι άμεσες:

$$|p|_{m_x} = |\pi_x(p)| = |p(x)|,$$

οπότε βλέπουμε ότι $|p|_{ratsup} = |p|$.

Η τελευταία νόρμα έχει ένα περισσότερο *εσωτερικό* χαρακτήρα. Αντί να αναφερόμαστε σε σημεία (όπως στην supremum απόλυτη τιμή) ή σε αναπτύγματα δυναμοσειρών (όπως στην απόλυτη τιμή Gauss) κάνουμε χρήση των μεγίστων ιδεωδών του $K\langle S\rangle$.

3.3 Φάσματα Αφινοειδών Αλγεβρών

Ορισμός 3.3.1 *Αν A είναι μία αφινοειδής άλγεβρα, τότε με $Max(A)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των μέγιστων ιδεωδών της.*

Παρατηρούμε ότι αν $A = K\langle S\rangle$ $S = (S_1, \ldots, S_m)$ είναι μία ελεύθερη άλγεβρα Tate τότε υπάρχει μία ένα προς ένα ταύτιση του $Max(A)$ με τον μοναδιαίο πολυδίσκο R^m. Για μία τυχαία άλγεβρα Tate θεωρούμε μία παράσταση της $A = K\langle S\rangle/a$. Η προηγούμενη ταυτοποίηση μας δίνει ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα $Max(A)$ και στο σύνολο

$$V(a) = \{x \in R^m : p(x) = 0 \quad \forall p \in a\}.$$

Φυσικά αυτή η αντιστοιχία εξαρτάται από την παράσταση της άλγεβρας A ως πηλίκο μιας ελεύθερης άλγεβρας Tate, η οποία δεν είναι μοναδική.

Παρατηρούμε ότι η αντιστοιχία $A \mapsto Max(A)$ είναι συναρτησιακή:

Λήμμα 3.3.2 *Αν $\phi : A \to B$ είναι ένας ομομορφισμός από K-αφινοειδείς άλγεβρες, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $f^{\#} : Max(B) \to Max(A)$.*

Απόδειξη: Ο φυσιολογικός υποψήφιος για μια τέτοια συνάρτηση θα ήταν η συνάρτηση $f^{\#}(P) = f^{-1}(P)$. Εν γένει βέβαια μια συνάρτηση μεταξύ δακτυλίων αντιστρέφει πρώτα σε πρώτα και συνεπώς μέγιστα σε πρώτα που δεν είναι κατανάγκη μέγιστα. Παρόλα αυτά στην περίπτωση μας, για ένα στοιχείο $P \in Max(B)$ έχουμε

$$K \subset A/f^{-1}(P) \to B/P = K,$$

και αφού η σύνθεση πρέπει να είναι ισομορφισμός έχουμε ότι το $A/f^{-1}(P)$ πρέπει να είναι σώμα, ισοδύναμα $f^{\#}(P) := f^{-1}(P) \in Max(A)$. □

Θέλουμε να δούμε την άλγεβρα A ως μία άλγεβρα συναρτήσεων στο $Max(A)$. Πράγματι, στην περίπτωση που το K είναι αλγεβρικά κλειστό [1] μπορούμε να πούμε ότι κάθε $f \in A$, ορίζει μία συνάρτηση

$$f : Max(A) \to K, P \mapsto f(P) = f \mod P.$$

Είναι σωστό ότι δύο στοιχεία $p, q \in A$ επάγουν την ίδια συνάρτηση στο $Max(A)$; Η απάντηση είναι όχι! Για παράδειγμα μία συνάρτηση $p \in A$ επάγει την μηδενική συνάρτηση στο $Max(A)$ αν και μόνο αν η p ανήκει στην τομή όλων των μεγίστων ιδεωδών του A. Θα δούμε στην συνέχεια ότι το θεώρημα ριζών του Hilbert (Nullstellensatz) μας δίνει ένα χαρακτηρισμό της παραπάνω τομής.

Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι στο A η τομή όλων των μεγίστων ιδεωδών του A είναι το μηδενικό στοιχείο. Τότε η A είναι μία υποάλγεβρα της $Func_K(Max(A))$ και μπορούμε να την εφοδιάσουμε με την νόρμα supremum.

$$|f|_{\sup} = \sup_{m \in Max(A)} |f \mod m|.$$

Ένας άλλος υποψήφιος για μία νόρμα στο A προκύπτει από την παρατήρηση ότι τα ιδεώδη αφινοειδών αλγεβρών είναι κλειστά [3, 6.2.5 Θ1]. Οπότε γράφουμε

[1] Αν το K δεν είναι αλγεβρικά κλειστό μπορούμε να αντικαταστήσουμε το K με την αλγεβρική κλειστότητά του.

$A = K\langle S\rangle/a$ και θεωρούμε τον κανονικό επιμορφισμό $\alpha : K\langle S\rangle \to A$. Ορίζουμε ως νόρμα

$$|f|_a = \inf_{P\in a^{-1}(f}|P|.$$

Για διαφορετικές επιλογές της παράστασης του A ως πηλίκο ελεύθερης Tate άλγεβρας έχουμε και διαφορετικές νόρμες στο A. Ευτυχώς είναι όλες ισοδύναμες [3, 6.1.1]..

Θεώρημα 3.3.3 (Nullstellensatz) *Έστω A μια αφινοειδής άλγεβρα και P ένα ιδεώδες του A. Το ριζικό* $\mathrm{rad}(P)$ *ταυτίζεται με την τομή των μεγίστων ιδεωδών που περιέχουν το P.*

Απόδειξη: Προφανώς το παραπάνω θεώρημα ανάγεται στο να αποδείξουμε ότι το $\mathrm{rad}(0)$ μιας αφινοειδούς άλγεβρας ταυτίζεται με την τομή όλων των μεγίστων ιδεωδών της. Ας είναι N η τομή όλων των μεγίστων ιδεωδών της A.

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στην διάσταση m της άλγεβρας A. Αν $m = 0$ τότε το θεώρημα κανονικοποίησης της Noether μας δίνει ότι το A είναι μια πεπερασμένη K-άλγεβρα συνεπώς ένας δακτύλιος του Artin.

Το λήμμα του Nakayama [1] μας εξασφαλίζει ότι

$$N^k \subsetneq N^{k-1},$$

στην περίπτωση φυσικά που $N^{k-1} \neq 0$. Αλλά η συνθήκη του Artin δεν επιτρέπει να έχουμε άπειρη φθίνουσα ακολουθία δυνάμεων άρα για κάποιο k θα πρέπει να ισχύει $N^k = 0$.

Για την γενική περίπτωση θα θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση της ελεύθερης άλγεβρας Tate $K\langle S\rangle$. Έστω ένα $p \in N$. Η νόρμα $|p| = \max_m |p \mod m| = 0$ και συνεπώς $p = 0$. Φυσικά η άλγεβρα μας δεν έχει μηδενοδύναμα και έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

Στην γενική περίπτωση έστω $p \in N$ και ας υποθέσουμε ότι δεν είναι μηδενοδύναμο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα πρώτο ιδεώδες P, ώστε $p \notin P$. Αν το P έχει ύψος μεγαλύτερο του μηδενός τότε θεωρούμε την άλγεβρα A/P και εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση. Οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το P είναι ένα ελάχιστο πρώτο ιδεώδες του A.

Το θεώρημα κανονικοποίησης της Noether μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός πεπερασμένου μονομορφισμού

$$\phi : K\langle S\rangle \hookrightarrow A,$$

όπου $S = (S_1, \ldots, S_m)$. Ο περιορισμός του P στο $K\langle S\rangle$ είναι το μηδενικό ιδεώδες αφού το $K\langle S\rangle$ είναι ακεραία περιοχή, μπορούμε να εργαστούμε στον δακτύλιο A/P. οπότε χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι A είναι ακεραία περιοχή και ότι το p είναι ένα μη μηδενικό στοιχείο της τομής όλων των μεγίστων ιδεωδών. Όμως η ϕ είναι πεπερασμένη άρα μπορούμε να βρούμε $q_i \in K\langle S\rangle$ ώστε

$$p^d + \phi(q_1)p^{d-1} + \cdots + \phi(q_d) = 0.$$

Αν d είναι ο ελάχιστος βαθμός μιας τέτοιας εξίσωσης, τότε $\phi(q_d) \neq 0$ (αφού το A είναι ακαίρεα περιοχή). Άρα το $\phi(q_d)$ ανήκει στην τομή των μεγίστων ιδεωδών του A, και συνεπώς το q_i ανήκει στην τομή των μεγίστων ιδεωδών του $K\langle S\rangle$ και σύμφωνα με τα παραπάνω είναι 0, άτοπο. □

3.4 Αφινοειδείς πολλαπλοτήτες

Ορισμός 3.4.1 (Αφινοειδής Πολλαπλότητα) *Για κάθε αφινοειδή άλγεβρα θα λέμε το ζευγάρι $(Max(A), A)$ την αφινοειδή πολλαπλότητα που αντιστοιχεί στο A, και θα την συμβολίζουμε με $Sp(A)$.*

Δηλαδή τα μέγιστα ιδεώδη της άλγεβρας είναι τα σημεία του χώρου και η A είναι μια άλγεβρα συναρτήσεων επί αυτού του χώρου, όπου το $f \in A$ μας δίνει την συνάρτηση $m \mapsto f \mod m$. Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση της ελεύθερης άλγεβρας Tate, το να θεωρήσουμε ένα στοιχείο $f = \sum_\nu a_\nu S^\nu$ modulo $m = (S_1 - r_1, \ldots, S_m - r_m)$ είναι το ίδιο με το να αντικαταστήσουμε τις τιμές $S_i = r_i$.

Ορισμός 3.4.2 (Συναρτήσεις μεταξύ Αφινοειδών Πολλ/των) *Μία συνάρτηση μεταξύ αφινοειδών πολλαπλοτήτων είναι ένα ζευγάρι (f, ϕ) όπου η συνάρτηση $f : SpB \to SpA$ επάγεται από τον ομομορφισμό αλγεβρών $\phi : A \to B$, δηλαδή $f(m) = \phi^{-1}(m)$.*

Θα δούμε στην συνέχεια ότι η κατηγορία των αφινοειδών πολλαπλοτήτων έχει ινώδη γινόμενα. Ας ξεκινήσουμε από μία ειδική περίπτωση: Ο μοναδιαίος πολυδίσκος R^n είναι η αφινοειδής πολλαπλότητα που αντιστοιχεί στην ελεύθερη άλγεβρα Tate $K\langle S\rangle$, $S = (S_1, \ldots, S_n)$. Ας είναι A μία τυχαία αφινοειδής άλγεβρα. Τότε το σύνολο

$$SpA \times R^n,$$

είναι και πάλι μία αφινοειδής πολλαπλότητα που αντιστοιχεί στην αφινοειδή άλγεβρα $A\langle S\rangle$. Δηλαδή αν $A = K\langle T\rangle/I$ τότε η άλγεβρα $A\langle S\rangle$ έχει την παρακάτω γραφή:

$$A\langle S\rangle = \frac{K\langle S, T\rangle}{IK\langle S, T\rangle}.$$

Στην γενική περίπτωση ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις συναρτήσεις $f : X = SpA \to Z = SpC$ και $g : Y = SpC \to Z$ μεταξύ αφινοειδών πολλαπλοτήτων. Το ινώδες γινόμενο $X \times_Z Y$ είναι μία αφινοειδής πολλαπλότητα ώστε το διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & X \times_Z Y \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd} ,$$

και οποιαδήποτε άλλη αφινοειδής πολλαπλότητα Ω για την οποία υπάρχουν συναρτήσεις p_Ω, q_Ω ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \Omega \arrow[dl, "q_\Omega"'] \arrow[dr, "p_\Omega"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd} ,$$

να είναι αντιμεταθετικό συνδέεται με με την $X \times_Z Y$ με την βοήθεια του παρακάτω αντιμεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
& \Omega \arrow[d] \arrow[ddl, "q_\Omega"'] \arrow[ddr, "p_\Omega"] & \\
& X \times_Z Y \arrow[dl, "q"] \arrow[dr, "p"'] & \\
X \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "g"'] \\
& Z &
\end{tikzcd},$$

Σε μια οποιαδήποτε κατηγορία δεν υπάρχουν κατανάγκη ινώδη γινόμενα. Στην κατηγορία των αφινοειδών πολλαπλοτήτων υπάρχουν ινώδη γινόμενα. Το γινόμενο $X \times_Z Y$ είναι το $Sp(A \widehat{\otimes}_C B)$.

Θα περιγράψουμε την κατασκευή της άλγεβρας $A \widehat{\otimes}_C B$. Θεωρούμε ότι όλες οι αφινοειδείς άλγεβρες A, B, C είναι εφοδιασμένες με την νόρμα πηλίκο που επάγεται από τις αναπαραστάσεις τους ως πηλίκα ελευθέρων αλγεβρών. Στην συνέχεια θεωρούμε το συνηθισμένο τανυστικό γινόμενο $A \otimes_C B$. Θα ορίσουμε μία νόρμα στο $A \otimes_C B$ ως εξής: Το τυχαίο $d \in A \otimes_C B$ γράφεται

$$d = \sum_{i=1}^{d} a_i \otimes b_i, \tag{3.1}$$

για κατάλληλα a_i, b_i. Ας είναι $\delta = \max\{|a_i| \cdot |b_i|\}$ Φυσικά η αναπαράσταση του d στην (3.1) δεν είναι μοναδική. Θέτουμε λοιπόν $|d| = \inf \delta$, όπου το δ διατρέχει όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις του d. Μπορεί να αποδειχτεί ότι το $|\cdot|$ είναι πράγματι μία νόρμα στο $A \otimes_C B$ [3, 2.1.7]. Τέλος $A \widehat{\otimes}_C B$ συμβολίζει την πλήρωση της $A \otimes_C B$ ως προς την νόρμα $|\cdot|$.

Για παράδειγμα αν $C = K$ τότε $Sp(A \widehat{\otimes}_K B) = SpA \times SpB$ είναι το συνηθισμένο καρτεσιανό γινόμενο. Το προηγούμενο παράδειγμα ήταν αυτής της μορφής, $Y = R^n$, $X = Sp(A)$, και $X \times Y = Sp(A\langle S \rangle)$.

3.5 Ρητές υποπεριοχές

Έστω $X = SpA$ μία αφινοειδής πολλαπλότητα. Ένα υποσύνολο $U \subset X$ θα λέγεται ρητή υποπεριοχή αν υπάρχουν στοιχεία $p_0, p_1, \ldots, p_m \in A$, ώστε να παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες και επιπλέον

$$U = \{x \in X : |p_i(x)| \leq |p_0(x)|, \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Το θεώρημα μηδενισμού του Hilbert εξασφαλίζει ότι το να παράγουν τα p_i το μοναδιαίο ιδεώδες είναι το ίδιο με το να μην έχουν κοινή ρίζα στο X. Το p_0 δεν μπορεί να έχει ρίζα στο U.

Οι ρητές υποπεριοχές είναι και αυτές αφινοειδείς πολλαπλότητες. Πράγματι, θεωρούμε το

$$C = A\langle p/p_0 \rangle = A\langle T \rangle / (p_1 - p_0 T_1, \ldots, p_m - p_0 T_m),$$

όπου $T = (T_1, \ldots, T_m)$ και $p = (p_1, \ldots, p_m)$. Το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} SpC & \xrightarrow{\theta} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times R^n & \xrightarrow[\pi]{} & X \end{array}$$

όπου π είναι η προβολή στον πρώτο παράγοντα (που επάγεται από την εμφύτευση $A \subset A\langle T \rangle$.), $\theta = \pi|_{SpC}$ είναι ο περιορισμός της π και τα κάθετα βέλη είναι οι εγκλεισμοί. Πράγματι, αρκεί να αποδείξουμε ότι το π απεικονίζει το Spec$C$ εντός του U. Έστω $(x,t) \in X \times R^m$ ένα σημείο στο Spec$C$. Αυτό σημαίνει ότι το (x,t) ικανοποιεί τις εξισώσεις ορισμού του C, δηλαδή $p_i(x) = t_i p_0(x)$. Αφού όμως $|t_i| \leq 1$, έχουμε ότι $|p_i(x)| \leq |p_0(x)|$, δηλαδή το $x \in U$.

Στην συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι το θ είναι 1-1 και επί. Αυτό όμως είναι σαφές αφού τα t_i είναι μονοσήμαντα ορισμένα από το σημείο $x \in U$ ως το πηλίκο $p_i(x)/p_0(x)$. Καταλήγουμε ότι μπορούμε να δούμε το U ως μία αφινοειδής πολλαπλότητα.

Παρατηρούμε ότι αφου το p_0 δεν μηδενίζεται στο U, θα πρέπει να είναι μία μονάδα στο C. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή μεγίστου στην συνάρτηση $1/p_0$ για να βρούμε ένα x_0 ώστε

$$\left|\frac{1}{p_0(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{p_0(x_0)}\right| \text{ για κάθε } x \in U.$$

Θέτοντας $\delta = |p_0(x)|$ έχουμε ότι $\delta \leq |p_0(x)|$ για όλα τα $x \in U$.

Μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες για ρητές υποπεριοχές [3, 7.2,73]: Η συνάρτηση $A \to C$ είναι 1-1 και flat. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι αν το X είναι ανάγωγο τότε και το U είναι ανάγωγο. Επιπλέον η τομή δύο ρητών υποπεριοχών είναι πάντα ρητή υποπεριοχή. Μία ρητή υποπεριοχή μιας αφινοειδούς πολλαπλότητας που είναι ρητή υποπεριοχή μιας μεγαλύτερης πολλαπλότητας είναι ρητή υποπεριοχή και στην μεγαλύτηρη πολλαπλότητα.

Πρόταση 3.5.1 (Συνέχεια) *Η αντίστροφη εικόνα μιάς ρητής περιοχής μέσω μίας συνάρτησης αφινοειδών πολλαπλοτήτων είναι ρητή υποπεριοχή. Ακριβέστερα αν το U είναι μια ρητή υποπεριοχή του $X = SpA$, με αφινοειδή άλγεβρα C, και αν $f : SpB \to X$ είναι μία απεικόνιση αφινοειδών πολλαπλοτήτων, τότε $f^{-1}(U)$ ισούτε με το ινώδες γινόμενο $Y \times_X U$ και έχει αφινοειδή άλγεβρα $B\widehat{\otimes}_A C$.*

Απόδειξη: Η σχέση της προεικόνας με το ινώδες γινόμενο είναι συνηθισμένη πρακτική στα σχήματα. Για μία πλήρη απόδειξη στην περίπτωση μας παραπέμπουμε στο [, 7.2.2,7.3]. □

Θα θεωρήσουμε στην επόμενη πρόταση τις αφινοειδείς πολλαπλότητες X με την τοπολογία που επάγει η μετρική. Ακριβέστερα, μπορούμε να θεωρήσουμε το X ως το κλειστό αναλυτικό υποσύνολο του $V(a) \subset R^n$, αναπαριστώντας το $A \cong K\langle S \rangle / a$. Αν θεωρήσουμε διαφορετική αναπαράσταση της άλγεβρας τότε οι τοπολογίες που προκύπτουν είναι οι ίδιες. Αυτή η μονοσήμαντα ορισμένη τοπολογία στο X θα λέγεται η *κανονική τοπολογία*.

Πρόταση 3.5.2 *Ας είναι X μία αφεινοειδής πολλαπλότητα. Μία ρητή υποπεριοχή είναι ανοιχτή στην κανονική τοπολογία του X.*

Απόδειξη: [3, 7.2.5] □

3.6 Άκαμπτες αναλυτικές πολλαπλότητες

Οι αφινοειδείς πολλαπλότητες θα είναι τα τοπικά στοιχεία τα οποία θα «κολλήσουμε» μεταξύ τους ώστε να πάρουμε τις αφινοειδείς πολλαπλότητες. Θα πρέπει να ορίσουμε ένα structure sheaf πάνω σε αυτές. Το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι ότι «παραδοσιακά» τα sheafs απαιτούν μία *τοπολογία* για να οριστούν. Στην περίπτωσή μας η τοπολογία της νόρμας είναι πολύ άσχημη αφού οι χώροι μας γίνονται totally disconnected. Η ιδέα είναι να αδυνατήσουμε την τοπολογία θεωρώντας ως επιτρεπτά ανοιχτά μόνο τις ρητές υποπεριοχές. Όμως οι ρητές υποπεριοχές δεν είναι σχηματίζουν τοπολογία (γιατί;)

Την λύση την έδωσε ο Grothendieck ο οποίος κατάφερε να γενικεύσει την έννοια της τοπολογίας σε μία γενικότερη έννοια, αυτή της Grothendieck τοπολογίας, η οποία έχει όλα τα απαραίτητα συστατικά ώστε να μπορούμε να ορίσουμε sheaf. Ιστορικά, ο Grothendieck, προσπαθούσε να ενισχύσει την τοπολογία Zariski προκειμένου να κάνει το θεώρημα *αντιστρόφου συνάρτησης* να ισχύει «δια της βίας». Με αυτό τον τρόπο προέκυψε η τοπολογία etale. Οι ρητές υποπεριοχές αποτελούν τοπολογία κατά Grothendieck οπότε μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό της πολλαπλότητας.

Ας ξεκινήσουμε από τον ορισμό της τοπολογίας Grothendieck όχι στην απόλυτη γενικότητά της. Για τον γενικό ορισμό παραπέμπουμε στο [7].

Ορισμός 3.6.1 *Ένα κάλυμμα ενός συνόλου U είναι μία συλλογή υποσυνόλων του U των οποίων η ένωση είναι ίση με U. Μία τοπολογία Grothendieck $\mathbb{G}$ στο X αποτελείται από*

1. *Ένα σύστημα υποσυνόλων $\mathcal{S}$ του X που ονομάζονται* επιτρεπτά ανοιχτά.
2. *Για κάθε $U \in \mathcal{S}$, ένα σύστημα καλυμμάτων $Cov(U)$ του U (τα οποία τα ονομάζουμε* επιτρεπτά καλύμματα*), όπου κάθε κάλλυμα έχει στοιχεία στο $\mathcal{S}$, ώστε οι παρακάτω συνθήκες να ικανοποιούνται:*

   (α') *Το κενό $\emptyset$ σύνολο και όλος ο χώρος να είναι στοιχεία του $\mathcal{S}$.*

   (β') *Αν $U, V \in \mathcal{S}$ τότε και $U \cap V \in \mathcal{S}$*

   (γ') *Για κάθε $U \in \mathcal{S}$ έχουμε $\{U\} \in Cov(U)$.*

   (δ') *Για κάθε $U \in \mathcal{S}$ αν $\mathcal{U} \in Cov(U)$ και για κάθε $V \in \mathcal{U}$ έχουμε ένα κάλλυμα $\mathcal{V}_V \in Cov(V)$ τότε η ένωση τους $\bigcup_{V \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_V$ είναι ένα στοιχείο του $Cov(U)$.*

   (ε') *Αν $U, V \in \mathcal{S}$ με $V \subset U$ και $\mathcal{U} \in CovU$ τότε $V \cap \mathcal{U} \in Cov(V)$.*

Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία τοπολογία του Grothendieck θα λέγεται G-τοπολογικός χώρος.

Μία τοπολογία είναι μία Grothendieck τοπολογία όπου όλα τα ανοιχτά είναι επιτρεπτά και όλα τα καλλύματα από ανοιχτά σύνολα είναι επιτρεπτά. Όλες οι έννοιες της τοπολογίας διατηρούνται και στις τοπολογίες του Grothendieck αλλά εκτός από συνθήκες στα ανοιχτά σύνολα, πρέπει να βάλουμε συνθήκες και στα επιτρεπτά καλλύματα. Για παράδειγμα:

Ορισμός 3.6.2 *Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ μεταξύ δύο G-τοπολογικών χώρων, θα λέγεται G-συνεχής αν μόνο αν*

- *Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(V)$ ενός επιτρεπτού ανοιχτού $V \subset Y$, είναι επιτρεπτό ανοιχτό του X.*
- *Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\mathcal{V})$ ενός επιτρεπτού καλλύματος $\mathcal{V}$ ενός επιτρεπτού ανοιχτού V είναι ένα επιτρεπτό κάλλυμα του επιτρεπτού ανοιχτού $f^{-1}(V)$.*

Ορισμός 3.6.3 *Ένας χώρος θα λέγεται ημισυμπαγής αν και μόνο αν κάθε επιτρεπτό κάλλυμα έχει πεπερασμένο επιτρεπτό υποκάλλυμα.*

Ορισμός 3.6.4 *(G-χώρος δακτυλίων.) Ένα ζευγάρι $(X, \mathcal{O}_X)$ αποτελούμενο από έναν G-τοπολογικό χώρο μαζί με ένα sheaf $\mathcal{O}_X$ από K-άλγεβρες στο X θα λέγεται ένας G χώρος δακτυλίων. Θα λέγεται ένας τοπικά G-χώρος δακτυλίων αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ η κοτσάνα (stalk) $\mathcal{O}_{X,x}$ είναι ένας τοπικός δακτύλιος. Ένας μορφισμός από G χώρους δακτυλίων $(X, \mathcal{O}_X)$ και $(Y, \mathcal{O}_Y)$ είναι ένα ζευγάρι (ψ, ψ^*), όπου $\psi : X \to Y$ είναι μία συνεχής απεικόνιση, ενώ το ψ^* είναι μία συλλογή από ομομορφισμούς K-αλγεβρών*

$$\psi_Y^* : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(V)),$$

για κάθε επιτρεπτό ανοιχτό V του Y, ώστε η οικογένεια αυτή να είναι συμβατή με τους ομομορφισμούς περιορισμού που επάγονται από τους εγκλεισμούς $W \subset V$. Με άλλα λόγια απαιτούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "\psi_V^*"] \arrow[d, "rest_{W,V}"'] & \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(V)) \arrow[d, "rest_{W,V}"] \\
\mathcal{O}_Y(W) \arrow[r, "\psi_W^*"] & \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(W))
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Ορισμός 3.6.5 (Rigid analytic Variety.) *Ένας τυχαίος τοπικά G χώρος δακτυλίων $(X, \mathcal{O}_X)$ υπέρ το K θα λέγεται* άκαμπτη αναλυτική πολλαπλότητα *αν το X επιδέχεται ένα επιτρεπτό κάλλυμα $\mathcal{U}$ ώστε κάθε ζευγάρι $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ με $U \in \mathcal{U}$ να είναι μία αφινοειδής πολλαπλότητα. Ένα τέτοιο κάλλυμα θα λέγεται* επιτρεπτό αφινοειδές κάλλυμα. *Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ μεταξύ άκαμπτων αναλυτικών πολλαπλοτήτων είναι ένας μορφισμός από τοπικούς G-χώρους δακτυλίων.*

Ειδικότερα, οι αφινοειδείς πολλαπλότητες γίνονται άκαμπτες αφινοειδείς πολλαπλότητες.

Παραδείγματα: Άκαμπτες αναλυτικές πολλαπλότητες μπορούν να κολληθούν μεταξύ τους και να δώσουν νέες. Για παράδειγμα έχουμε

- Ο αφινικός χώρος $\mathbb{A}_K^n$ ο οποίος μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των σημείων του *κανονικού* αφινικού χώρου K^n. Για να δώσουμε αναλυτική δομή στον αφινικό χώρο $\mathbb{A}_K^n$ εργαζόμαστε ως εξής: Διαλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων $T = (T_1, \ldots, T_n)$ Από την πλευρά της κλασικής αλγεβρικής γεωμετρίας ο αφινικός χώρος είναι το σύνολο $\mathrm{Spec} K[T_1, \ldots, T_n]$. Η ελεύθερη άλγεβρα Tate είναι το σύνολο των συγκλινουσών δυναμοσειρών $\sum_\nu a_\nu T_\nu$, και το σύνολο των μεγίστων ιδεωδών αυτής της άλγεβρας είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με την μπάλα $B(0,1)$.

Διαλέγουμε ένα $c \in K$ με $|c| > 1$ και ορίζουμε τις άλγεβρες

$$A_i = \left\{ \sum_\nu a_\nu \left(\frac{T}{c^i} \right)^\nu, \lim a_\nu = 0 \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι οι άλγεβρες αυτές ορίζουν ρητές υποπεριοχές και το σύνολο των μεγίστων ιδεωδών είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με την μπάλα $B(0, |c^i|)$. Έχουμε δηλαδή μία ακολουθία από μπάλες που καλύπτει όλο τον χώρο των σημείων του $\mathbb{A}^n_K$.

Στην γλώσσα των αλγεβρών, έχουμε την ακολουθία

$$K\langle T \rangle = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset K[T].$$

Φυσικά $\cap A_i = k[T]$, δηλαδή μία γενίκευση του θεωρήματος του Liouville σχετικά με τις συναρτήσεις που είναι ολόμορφες σε όλο το $\mathbb{A}^n_K$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε μία συνάρτηση $A_i \to A_{i+1}$ που ορίζεται ως

$$\sum_\nu a_\nu \left(\frac{T}{c^i} \right)^\nu \mapsto \sum_\nu a_\nu c \left(\frac{T}{c^{i+1}} \right)^\nu,$$

και είναι καλά ορισμένη αφού $\lim a_\nu = 0 \Rightarrow \lim a_\nu c = 0$. Η παραπάνω συνάρτηση επάγει ένα εγκλεισμό $SpA_i \to SpA_{i+1}$. Η ένωση όλων των ρητών υποπεριοχών A_i δίνει στο A_i την δομή άκαμπτης αναλυτικής πολλαπλότητας την οποία θα την συμβολίζουμε με $\mathbb{A}^{n,an}_K$.

- Αλγεβρικές Πολλαπλότητες. Με τον ίδιο τρόπο που δώσαμε αναλυτική δομή στον αφινικό χώρο $\mathbb{A}^n_K$ μπορούμε να δώσουμε σε κάθε αλγεβρική πολλαπλότητα. Πράγματι, έστω B μία πεπερασμένα παραγόμενη K-άλγεβρα η οποία αντιστοιχεί σε μία αφινική αλγεβρική πολλαπλότητα $X = \mathrm{Spec} B$ Η B δέχεται παράσταση

  $$B = \frac{K[T_1, \ldots, T_n]}{a}, \text{ για κατάλληλο ιδεώδες } a \text{ της άλγεβρας } K[T_1, \ldots, T_n].$$

  Αν A_i είναι η ακολουθία των αλγεβρών που ορίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, τότε μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία

  $$\frac{A_0}{aA_0} \leftarrow \frac{A_1}{aA_1} \leftarrow \cdots \leftarrow B,$$

  η οποία επάγει τους εγκλεισμούς

  $$Sp\frac{A_0}{aA_0} \hookrightarrow Sp\frac{A_1}{aA_1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow SpB,$$

  Η ακολουθία $\left(Sp\frac{A_i}{aA_i} \right)_i$ αποτελεί ένα επιτρεπτό κάλλυμα του $X = SpB$ το οποίο θα το συμβολίζουμε με X^{an}.

- Αναλυτικοποίηση. Αν το U είναι ένα ανοιχτό Zariski του $\mathrm{Spec} B$ τότε το $U \cap Sp(A_i/aA_i)$ είναι επιτρεπτά ανοιχτά του X^{an}, άρα και το U είναι επιτρεπτό ανοιχτό. Δηλαδή τα Zariski ανοιχτά είναι επτρεπτά ανοιχτά. Όμως κάθε σχήμα που είναι τοπικά πεπερασμένου K τύπου, (δηλαδή προκύπτει από κολλήματα αφινικών σχημάτων που είναι φάσματα πεπερασμένα παραγόμενων K-αλγεβρών, κολλώντας κατά μήκος ανοιχτών Zariski) μπορεί να πάρει δομή άκαμπτης αναλυτικής πολλαπλότητας με βάση το παραπάνω παράδειγμα. Ο συναρτητής που στέλνει σχήματα X σε άκαμπτες αναλυτικές πολλαπλότητες X^{an} λέγεται *αναλυτικοποίηση*,

Σαν παράδειγμα μίας τέτοιας κατασκευής μπορούμε να αναφέρουμε τον προβολικό χώρο $\mathbb{P}_K^{n,an}$.

3.7 Η συνάρτηση της αναγωγής του Tate

Ας θεωρήσουμε μια K-αφινοειδή άλγεβρα A. Θεωρούμε σε αυτήν την νόρμα

$$|f|_{\sup} = \max_{x \in Max(A)} |f(x)|.$$

Σχηματίζουμε τα παρακάτω σύνολα

$$A^{\circ} = \{f \in : |f|_{\sup} \leq 1\},$$

$$A^{\circ\circ} = \{f \in A : |f|_{\sup} < 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι το A° είναι ένας δακτύλιος, και το $A^{\circ\circ}$ είναι ένα ιδεώδες του. Σχηματίζουμε το πηλίκο

$$\bar{A} := A^{\circ}/A^{\circ\circ}.$$

Κάθε μορφισμός $\phi : B \to A$ επάγει μια συνάρτηση

$$\phi^{\circ} : B^{\circ} \to A^{\circ},$$

και έναν ομομορφισμό k-αλγεβρών

$$\bar{\phi} : \bar{B} \to \bar{A}.$$

Πράγματι, αν έχουμε ένα σημείο $x \in Max(A)$, ώστε $|\phi(f)(x)| = |\phi(f) \mod x| = \epsilon$, τότε $|f(\phi^{-1}(x))| = |f \mod \phi^{-1}(x)| = \epsilon$, αφού

$$B/\phi^{-1}(x) \hookrightarrow A/x.$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω μορφισμός είναι συναρτησιακός, δηλαδή έχουμε ένα συναρτητή αναγωγής:

$$K - \text{αφινοειδείς πολλαπλότητες} \to k - \text{αφινικά αλγεβρικά σύνολα},$$

$$Max(A) \mapsto Max(\bar{A}), \phi \mapsto \bar{\phi}.$$

Έστω $x \in Max(A)$. Θεωρούμε την κανονική προβολή

$$\sigma : A \to A/x.$$

Αυτή επάγει μέσω του συναρτητή αναγωγής, μία συνάρτηση

$$\bar{\sigma} : \bar{A} \to \overline{A/m_x}.$$

Επειδή το A/x είναι πεπερασμένη αλγεβρική επέκταση του K είναι και το $\overline{A/x}$ αλγεβρική επέκταση του $k = \bar{K}$. Οπότε

$$\ker \bar{\sigma} \in Max(\bar{A}).$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει μία σύναρτηση (την συνάρτηση αναγωγής του Tate)

$$\pi_A : Max(A) \to Max(\bar{A}), \;\; x \mapsto \bar{x}.$$

Η συνάρτηση π_A είναι συμβατή με τους μορφισμούς αφινοειδών αλγεβρών, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} Max(A) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_A"] & Max(B) \arrow[d, "\pi_B"'] \\ Max(\bar{A}) \arrow[r, "\bar{\phi}"'] & Max(\bar{B}) \end{tikzcd}$$

Ισχύει το παρακάτω

Θεώρημα 3.7.1 *Η συνάρτηση του Tate* $\pi_A : Max(A) \to Max(\bar{A})$ *ϵίναι ϵπί του* $Max(\bar{A})$.

Απόδειξη: [15],[3, 7.1.5] □

Δεν είναι βολικό ότι η συνάρτηση αναγωγής του Tate δεν είναι επί του πλήρες φάσματος $\mathrm{Spec}(\bar{A})$. Στην συνέχεια θα δούμε πως ο Berckovitch έδωσε μία καλύτερη συνάρτηση αναγωγής.

Παραδείγματα:

1. Θεωρούμε το $Max(K) = (pt, K)$ και $\overline{Max(K)} = Max(k)$.

2. Θεωρούμε το $Max(K\langle T\rangle) = \mathbb{D}$ και $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{A}^1_k$. Έχουμε δείξει ότι το σύνολο των μεγίστων ιδεωδών της άλγεβρας $K\langle T\rangle$ είναι ομοιομορφικό με τα σημεία του δίσκου $\mathbb{D} := \{|z| \leq 1\}$. Θα δείξουμε ότι το εσωτερικό του δίσκου συρρικνώνεται στο 0 στην αναγωγή μαζί με ένα σημείο της περιφέρειας και απομένει μόνο η περιφέρεια εκτός από ένα σημείο.

   Πράγματι έστω m_a το ιδεώδες που αντιστοιχεί στο σημείο a. Έχουμε τον κανονικό επιμορφισμό

   $$K\langle T\rangle \to \frac{K\langle T\rangle}{(T-a)K\langle T\rangle},$$

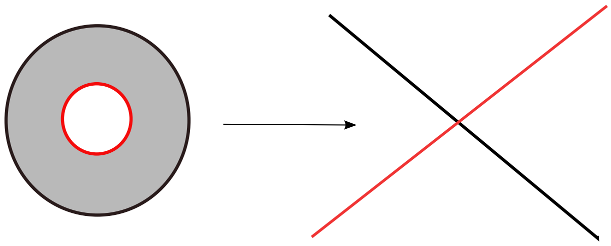
   και θεωρούμε σε όλα τα μέλη την αναγωγή

   $$\bar{\pi} : K[T] = \overline{K\langle T\rangle} \to \frac{K[T]}{\overline{(T-a)K[T]}}.$$

   Παρατηρούμε ότι

   $$\overline{(T-a)K\langle T\rangle} = \begin{cases} TK[T] & \text{αν } |a| < 1, \\ (T-a)K[T] & \text{αν } |a| = 1. \end{cases}$$

   Συνεπώς ο πυρήνας της συνάρτησης $\bar{\pi}$ είναι διαφορετικός του 0 μόνο όταν $|a| = 1$



Σχήμα 3.1: Αναγωγή του $K\langle T, \pi/T\rangle$.

3. Θεωρούμε τώρα την άλγεβρα $A = K\langle T, T^{-1}\rangle$. Το σύνολο $Max(A)$ είναι ομοιομορφικό με το σύνολο $\{z \in K : |z| = 1\}$. Παρατηρούμε ότι

$$K\langle T, T^{-1}\rangle = K\langle x, y\rangle/(xy-1) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T^n : \lim_{|n|\to\infty} |a_n| = 0 \right\}$$

Το σύνολο $\bar{X} = Max(k[t, t^{-1}]) = \mathbb{A}^1_k \backslash \{0\}$.

4. Ας θεωρήσουμε τώρα το $X = Max(K\langle T, \pi/T\rangle)$, όπου $|\pi| = r \in (0,1) \cap |K^*|$. Το X είναι ο χώρος

$$\{x \in K : r \leq |x| \leq 1\} = Max\big(K\langle x, y\rangle/(xy-\pi)\big).$$

Η αναγωγή $\bar{X}$ είναι η τομή δύο ευθειών. Πράγματι, θεωρούμε την κανονική συνάρτηση

$$K\langle x, y\rangle/(xy-\pi) \to \frac{K\langle x, y\rangle/(xy-\pi)}{(x-a, y-b)K\langle x, y\rangle/(xy-\pi)},$$

όπου $|a| \leq 1$, $|b| \geq 1$, $ab = \pi$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{}{(x-a, y-b)K\langle x, y\rangle/(xy-\pi)} = \begin{cases} xyk[x,y]/xy & \text{αν } r < |a| < 1 \\ (x-a)yk[x,y]/xy & \text{αν } |a| = 1, |b| = r \\ a(y-b)k[xy]/xy & \text{αν } |b| = 1, |a| = r \end{cases}$$

Δηλαδή η αναγωγή είναι το γινόμενο δύο ευθειών. Το εσωτερικό $r < |a| < 1$ καταλήγει στην τομή των δύο ευθειών, η εσωτερική περιφέρεια $|a| = r$ καταλήγει στην ευθεία $y = 0$ και η εξωτερική περιφέρεια $|a| = 1$ καταλήγει στην ευθεία $x = 0$.

Κεφάλαιο 4

Ο χώρος του Berckovitch

4.1 Το φάσμα του Gelfand.

Έστω A μία άλγεβρα εφοδιασμένη με μία μετρική, υπέρ ενός σώματος εκτίμησης $K, |\cdot|$.

Ορισμός 4.1.1 *Θα συμβολίζουμε με $M(A)$ το σύνολο των φραγμένων πολλαπλασιαστικών ημινορμών $\chi : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, με $\chi\ |_K = |\cdot|_K$ και θα το ονομάζουμε το* φάσμα του Gelfand *της άλγεβρας A.*

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι μία ημινόρμα είναι μία συνάρτηση $\chi : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ η οποία ικανοποιεί όλες τις συνθήκες της μετρικής εκτός από την συνθήκη $\chi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, και

$$\chi(\lambda f) = |\lambda|_K \chi(f) \text{ για κάθε } \lambda \in K, f \in A.$$

Η ημινόρμα είναι φραγμένη όταν υπάρχει ένα $C > 0$ ώστε $\chi(f) \leq C|f|$ για κάθε $f \in A$. Πολλαπλασιαστική, σημαίνει ότι $\chi(fg) = \chi(f)\chi(g)$ για κάθε $f, g \in A$.

Λήμμα 4.1.2 *Για κάθε μονάδα $f \in A^*$ και κάθε $\chi \in M(A)$ έχουμε $\chi(f) = |f|$.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η ανισότητα $\chi(f^n) \leq C|f^n|$ επάγει την

$$\chi(f) \leq \sqrt[n]{C}|f|.$$

Αφού στην παραπάνω σχέση το n είναι τυχαίο, έχουμε ότι $\chi(f) \leq |f|$. Όμως $f^{-1} \in A$, άρα $\chi(f^{-1}) \leq |f^{-1}|$. Η πολλαπλασιαστική ιδιότητα της f επάγει ότι $\chi(f) = |f|$. □

Ο χώρος $M(A)$ εφοδιάζεται με την ασθενέστερη τοπολογία ώστε οι συναρτήσεις

$$E_f^A : M(A) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \chi \mapsto \chi(f),$$

να είναι συνεχείς.

Μέχρι τώρα το A ήταν μία άλγεβρα εφοδιασμένη με μία μετρική υπέρ του πλήρους σώματος $(K, |\cdot|_K)$. Ένας φραγμένος ομομορφισμός ανάμεσα στις άλγεβρες με νόρμα $\phi : A \to B$ θα λέγεται επιτρεπτός αν και μόνο αν η επαγόμενη πηλικονόρμα στον χώρο $A/\ker\phi$ είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της νόρμας του B στο $\phi(A)$. Με άλλα λόγια ζητούμε ο αλγεβρικός ισομορφισμός

$$A/\ker\phi \cong \phi(B),$$

να είναι και τοπολογικός ομοιομορφισμός.

Ορισμός 4.1.3 *Μία αντιμεταθετική άλγεβρα Banach λέγεται K-αφινοειδής αν υπάρχουν $r_1, \ldots, r_n > 0$ και ένας επιτρεπτός επιμορφισμός*

$$K\left\langle \frac{T_1}{r_1}, \ldots, \frac{T_n}{r_n} \right\rangle \to A.$$

Η K-αφινοειδής άλγεβρα θα λέγεται strict αν και μόνο αν μπορούμε να διαλέξουμε $r_1 = \cdots = r_n = 1$.

Παρατήρηση: Ο χώρος $K\langle \frac{T_1}{r_1}, \ldots, \frac{T_n}{r_n}\rangle$ είναι η K-άλγεβρα των δυναμοσειρών $f = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m T^m$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{|m| \to \infty} |a_m| r_1^{m_1} \cdots r_n^{m_m} = 0$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$.

Παρατήρηση: Οι αφινοειδείς άλγεβρες είναι Noether και όλα τα ιδεώδη τους είναι κλειστά, ενώ για τις strict αφινοειδής άλγεβρες υπάρχει μία κανονική απεικόνιση $Max(A) \to M(A)$, η οποία απεικονίζει το $Max(A)$ ομοιομορφικά σε ένα πυκνό υποσύνολο του $M(A)$.

Έστω $x \in M(A)$ και $|\cdot|_x$ η υπονόρμα που του αντιστοιχεί. Η συνάρτηση $|\cdot|_x$ δεν είναι προφανώς ομομορφισμός αλγεβρών (χαλάει η πρόσθεση), αλλά έχει νόημα να μιλήσουμε για τον πυρήνα της

$$p_x := \ker|\cdot|_x = (|\cdot|_x)^{-1}(\{0\}),$$

που αποτελεί ένα κλειστό πρώτο ιδεώδες του A.

Πράγματι, αν $f, g \in p_x$ τότε $0 \leq |f+g|_x \leq |f|_x + |g|_x = 0$, άρα $f + g \in p_x$. Επίσης αν $f \in p_x$ και $g \in A$, τότε η πολλαπλασιαστική ιδιότητα της $|\cdot|_x$ επιβάλλει ότι $fg \in p_x$. Δηλαδή το p_x είναι ιδεώδες του A.

Για να δείξουμε ότι είναι πρώτο παρατηρούμε ότι αν $fg \in p_x$ τότε $|fg|_x = |f|_x |g|_x = 0$, άρα $|f|_x = 0$ ή $|g|_x = 0$, αφού το $\mathbb{R}$ είναι σώμα.

Έχουμε λοιπόν μία συνεχή συνάρτηση:

$$M(A) \to \mathrm{Spec} A, x \to p_x.$$

Η επαγόμενη νόρμα στο A/p_x, δίνει μία νόρμα στο σώμα $F(x) := Quot(A/p_x)$. Η πλήρωση $\mathcal{H}(x) = \widehat{F(x)}$ θα λέγεται *το αναλυτικό σώμα υπολοίπων.*

Για $f \in A$ θεωρούμε το $f(x) := \chi_x(f)$ την εικόνα του f μέσω της κανονικής απεικόνισης

$$\chi_x : A \to \mathcal{H}(x).$$

Με αυτό τον τρόπο θα βλέπουμε τα στοιχεία του A ως συναρτήσεις στο $M(A)$, όπου οι τιμές τους για διαφορετικά σημεία ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα.

Παράδειγμα: Η γενική θεωρία του Berkovitch δεν περιορίζεται σε άλγεβρες υπέρ πλήρων μη αρχημήδειων σωμάτων. Ας υποθέσουμε ότι $K = \mathbb{C}$. Η $\mathbb{C}$-άλγεβρα των συγκλινουσών σειρών στον μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{C}\langle z\rangle$, εφοδιασμένη με την sup νόρμα είναι μία άλγεβρα Banach. Με την βοήθεια του θεώρηματος των Gelfand-Mazur «εκτός από το $\mathbb{C}$ δεν υπάρχουν άλλες μιγαδικές άλγεβρες Banach με διαίρεση» βλέπουμε ότι το $M(\mathbb{C}\langle z\rangle)$ είναι ομοιομορφικό με το $Max(\mathbb{C}\langle z\rangle)$.

Παράδειγμα: Έστω ότι το K είναι αλγεβρικά κλειστό. Ας θεωρήσουμε το $SpK\langle T\rangle = D(0, 1^+)$ ο κλειστός μοναδιαίος κύκλος. Στον χώρο $M(K\langle T\rangle)$ συναντούμε τις παρακάτω κατηγορίες σημείων:

1. Κάθε $x \in D(0, 1^+)$ δίνει μία πολλαπλασιαστική ημινόρμα:

$$\chi_x : K\langle T\rangle \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto |f(x)|_K.$$

2. Κάθε κυκλικός δίσκος $D(x, r^+) \subset D(0, 1^+)$ με $r \in |K^*|$ δίνει την ημινόρμα

$$\eta_{x,r} : K\langle T\rangle \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto |f|_{D(x,r^+)} := \sup_{\xi \in D(x,r^+)} |f(\xi)|_K.$$

3. Η ίδια κατασκευή δουλεύει ακόμα και αν $r \notin |K^*|$.

4. Ας θεωρήσουμε τέλος μια οικογένεια $\mathcal{D} := \{D_a\}$ μια φθίνουσα (άπειρη) ακολουθία κλειστών κυκλικών δίσκων στο $D(0, 1^+)$. Τότε θέτουμε

$$\chi : K\langle T\rangle \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto |f|_{\mathcal{D}} := \inf_a |f|_{D_a}.$$

Αν η τομή $\sigma := \cap_a D_a \neq \emptyset$ τότε το $\sigma = \{x\}$ είναι ένα σημείο, οπότε $\chi = \chi_x$ δηλαδή μια ημινόρμα της πρώτης μορφής, ή $\sigma = D$ δηλαδή η ημινόρμα είναι της δεύτερης ή τρίτης μορφής. Αν όμως $\sigma = \emptyset$, τότε έχουμε μία ακόμα μορφή σημείων του $M(K\langle T\rangle)$.

Τα σημεία της πρώτης μορφής λέγονται κλασικά σημεία ενώ όλα τα άλλα generic σημεία του Berkovich.

Θα αποδείξουμε ότι πλήν των παραπάνω περιπτώσεων δεν υπάρχουν άλλα σημεία στο $M(K\langle T\rangle)$. Για δεδομένο $|\cdot| \in M(K\langle T\rangle)$, θεωρούμε το $\mathcal{D} := \{D(x, |T-x|^+) \subset D(0, 1^+)\}$. Το $\mathcal{D}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία κυκλικών δίσκων και $|T-x|_{\mathcal{D}} = |T-x|$ για κάθε $x \in K$. Οι πολλαπλασιαστικές ημινόρμες στο $K\langle T\rangle$ προσδιορίζονται μονοσήμαντα από τις τιμές τους στα πολυώνυμα $T-x$, οπότε $|\cdot| = |\cdot|_{\mathcal{D}}$.

Για το σώμα πηλίκων ενός σημείου $x \in M(K\langle T\rangle)$, έχουμε

1. Αν το x είναι ένα κλασικό σημείο τότε $\mathcal{H}(x) = K$.

2. Αν το x είναι τύπου 2, τότε $\overline{\mathcal{H}(x)} = \bar{K}$ και $|\mathcal{H}(x)| = |K|$.

3. Αν το x είναι τύπου 3, τότε $\overline{\mathcal{H}(x)} = \bar{K}$ και $|\mathcal{H}(x)^*|$ είναι η υποομάδα του $\mathbb{R}_{\geq 0}$ που παράγεται από το $|K^*|$ και από το r.

4. Αν το x είναι ένα σημείο τύπου 4, τότε $\mathcal{H}(x)$ είναι μία επέκταση του K με την ίδια ημιομάδα εκτίμησης με το K.

Λήμμα 4.1.4 *Η μη αρχιμήδεια μπάλα*

$$D(0, r^+) := M(K\langle \frac{T_1}{r_1}, \ldots, \frac{T_n}{r_n}\rangle)$$

είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Στην άλγεβρα $A = K\langle \frac{T_1}{r_1}, \ldots, \frac{T_n}{r_n}\rangle$ θεωρούμε την νόρμα του Gauss. Η νόρμα αυτή ικανοποιεί $|f^n| = |f|^n$, οπότε ο μετασχηματισμός του Gelfand

$$A \to \prod_{x \in M(a)} \mathcal{H}(x), f \mapsto (f(x))_{x \in M(A)}$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός [2, 1.2.3,1.3.2] □

Θεώρημα 4.1.5 *Ο χώρος $M(A)$ είναι μη κενός, Hausdorff, συμπαγής.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το A είναι γνήσια αφινοειδές. Έχουμε τον εγκλεισμό:

$$\emptyset \neq Max(A) \subseteq M(A),$$

αφού κάθε μέγιστο ιδεώδες m του A μας δίνει την ημινόρμα:

$$\chi_m : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto |f+m|_{\bar{K}},$$

όπου $\bar{K}$ είναι η αλγεβρική κλειστότητα του $K = A/m$.

Στην περίπτωση που η άλγεβρα A δεν είναι γνήσια αφινοειδής, έχουμε

$$A = K\langle r^{-1}T\rangle,$$

όπου $r = (r_1, \ldots, r_n)$ και $T = (T_1, \ldots, T_n)$. Ας είναι $\rho \in (K^*)^n$ ώστε κάθε συντεταγμένη του ρ να είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερη από την αντίστοιχη συντεταγμένη του r. Τότε έχουμε

$$\emptyset \neq D(0, |\rho|_K^+) \subseteq D(0, r^+),$$

μέσω της συνάρτησης εγκλεισμού:

$$\chi \mapsto \chi|_{K\langle r^{-1}T\rangle}.$$

Αν λοιπόν $A = K\langle r^{-1}T\rangle/a$ για κάποιο ιδεώδες a, τότε

$$M(A) = V(a) := \{x \in D(0, r^+) | \ker|\cdot|_x \supset a\},$$

και για κάποιο $\rho \in (K^*)^n$ με $|\rho|_K \leq r$ ισχύει

$$\emptyset \neq V(aK\langle|\rho|_K^{-1}T\rangle) = V(a) \cap D(0, |\rho|_K^+) \subset M(A).$$

Ας αποδείξουμε τώρα ότι το $M(A)$ είναι Hausdorff. Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία $x \neq y$ στο $M(A)$. Υπάρχει $f \in A$ ώστε

$$|f(x)|_{\mathcal{H}(x)} < |f(y)|_{\mathcal{H}(y)}.$$

Αν διαλέξουμε ένα πραγματικό αριθμό r ώστε

$$|f(x)|_{\mathcal{H}(x)} < r < |f(y)|_{\mathcal{H}(y)},$$

τότε οι

$$U := \{z \in M(A) : |f(z)|_{\mathcal{H}(z)} < r\} \text{ και } V := \{z \in M(A) : r < |f(z)|_{\mathcal{H}(z)}\},$$

είναι δύο ξένες ανοιχτές περιοχές των x, y.

Για την συμπάγεια παρατηρούμε ότι το $A \cong K\langle r^{-1}T\rangle/a$, οπότε $M(A) = V(a) \subset D(0, r^+)$ είναι ένα Zariski κλειστό στην συμπαγή σφαίρα $D(0, r^+)$. Όμως τα Zariski κλειστά είναι και κλειστά σε συμπαγή χώρο άρα συμπαγή. □

Ορισμός 4.1.6 *Ένας μη τετριμμένος και φραγμένος ομομορφισμός αλγεβρών $\chi : A \to \mathbb{F}$ σε ένα σώμα εκτίμισης $\mathbb{F}$, ονομάζεται ένας χαρακτήρας του A. Δύο χαρακτήρες $\chi' : A \to \mathbb{F}'$ και $\chi'' : A \to \mathbb{F}''$ θα θεωρούνται ισοδύναμοι (και θα το* *συμβολίζουμε με $\chi' \sim \chi''$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας χαρακτήρας $\chi : A \to \mathbb{F}$, και εμφυτεύσεις $\mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ και $\mathbb{F} \to \mathbb{F}''$ ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{F}' \\
A \arrow[rru] \arrow[r] \arrow[rrd] & \mathbb{F} \arrow[ru] \arrow[rd] & \\
 & & \mathbb{F}''
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(A)$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας χαρακτήρων.

Λήμμα 4.1.7 *Υπάρχει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία ανάμεσα στους χώρους $M(A)$ και $\mathcal{X}(A)$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\alpha : M(A) \to \mathcal{X}(A), x \mapsto \big(\chi_x : A \to \mathcal{H}(x),\ f \mapsto f(x)\big),$$

Δηλαδή στην ημινόρμα x αντιστοιχούμε τον χαρακτήρα χ_x. Επίσης ορίζουμε την

$$\beta : \mathcal{X} \to M(A), (\chi : A \to \mathbb{F}) \mapsto (|\cdot|_\chi : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f \mapsto |\chi(f)|_{\mathbb{F}}).$$

Θα αποδείξουμε ότι $a \circ \beta = Id$. Πράγματι, στέλνουμε τον χαρακτήρα $\chi : A \to \mathbb{F}$ στο $x \in M(A)$

$$x := |\cdot|_\chi : A \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ \ f \mapsto |\chi(f)|_{\mathbb{F}}.$$

Στην συνέχεια στέλνουμε το x, μέσω της α στο χ_x:

$$\chi_x : A \to \mathcal{H}(x),\ f \mapsto f(x).$$

Παρατηρούμε ότι $\ker|\cdot|_\chi = \ker(\chi)$. Πράγματι, εξ' ορισμού για $f \in A$ έχουμε $|f|_\chi = |\chi(f)|_{\mathbb{F}}$, και η $|\cdot|_{\mathbb{F}}$ είναι μετρική. Το χ παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\chi : A \to A/\ker\chi = A/\ker|\cdot|_\chi = F(x) \to \mathbb{F},$$

οπότε το $F(x)$ είναι ισόμορφο με ένα υπόσωμα του $\mathbb{F}$ και $\chi \sim \chi_x$.

Αντιστρόφως, θα αποδείξουμε ότι $\beta \circ \alpha = Id$. Ας είναι $x \in M(A)$. Έχουμε ότι $\alpha(x) = \chi_x \in \mathcal{X}(A)$. Επιπλέον:

$$|\chi_x(f)|_{\mathcal{H}(x)} = |f(x)| = |f|_x$$

και ο ισχυρισμός έχει αποδειχτεί. □

Διαμέσου της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας των συνόλων $M(A)$ και $\mathcal{X}(A)$ μπορούμε να ταυτίσουμε τα παραπάνω δύο σύνολα. Επιπλέον το σύνολο $\mathcal{X}(A)$ εφοδιάζεται με τοπολογία, την τοπολογία του Gelfand, η οποία είναι η ασθενέστερη τοπολογία ώστε οι συνάρτησεις $\chi \mapsto \chi(f)$ να είναι συνεχείς.

4.2 Αφινοειδείς Περιοχές

Για γνήσια αφινοειδείς άλγεβρες είναι γνωστές οι αφινοειδείς περιοχές του $Max(A)$. Έτσι οδηγούμαστε στον παρακάτω

Ορισμός 4.2.1 *Έστω A μια γνήσια αφινοειδής K-άλγεβρα και έστω $X = M(A)$. Μια γνήσια αφινοειδής περιοχή του X είναι η κλειστότητα μιας αφινοειδούς περιοχής του $Max(A)$ στο X. Μια αφινοειδής περιοχή του X είναι ένα κλειστό υποσύνολο $V \subseteq X$, ώστε να υπάρχει μια K-αφινοειδής άλγεβρα A_V και φραγμένος ομομορφισμός $\phi : A \to A_V$ ώστε να ισχύει: για κάθε φραγμένο ομομορφισμό $\psi : A \to B$ από K-αφινοειδείς άλγεβρες ώστε $\psi^* : M(B) \to V \subseteq M(A)$, υπάρχει ένας φραγμένος ομομορφισμός $A_V \to B$, ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & A_V \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Ο ομομορφισμός $A \to A_V$ είναι μονοσήμαντα καθορισμένος από το V. Επιπλέον $M(A_V) \cong V$. Το A_V είναι μιά flat A-άλγεβρα.

Τώρα θα εισαγάγουμε το structure sheaf ενός γνήσια αφινοειδούς χώρου. Έστω $\mathcal{G}(X)$ το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων του X, τα οποία είναι πεπερασμένη ένωση αφινοειδών περιοχών του X. Τα στοιχεία του $\mathcal{G}(X)$ θα τα ονομάζουμε *ειδικά υποσύνολα* του X.

Έστω $V \in \mathcal{G}(X)$ και έστω $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ μία πεπερασμένη κάλυψη του V από αφινοειδείς περιοχές του X. Η τομή δύο αφινοειδών περιοχών είναι πάλι αφινοειδές έχουμε

$$A_V := \ker\left(\prod_{i \in I} A_{V_i} \to \prod_{(i,j) \in I \times I} A_{V_i \cap V_j}\right).$$

Το A_V είναι καλά ορισμένο και δεν εξαρτάται από την κάλυψη $\mathcal{V}$, και μπορούμε να ορίσουμε το structure sheaf επί του X ως το (pre)sheaf

$$U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_X) := \lim_{V \in \mathcal{G}(X), V \subseteq U} A_V,$$

όπου το U διατρέχει τα ανοιχτά υποσύνολα του X.

Ορισμός 4.2.2 *Το ζευγάρι $(X, \mathcal{O}_X)$ λέγεται ένας γνήσια K-αφινοειδής χώρος. Ένας μορφισμός $(M(A), \mathcal{O}_{M(A)}) \to (M(B), \mathcal{O}_{M(B)})$ από γνήσια K-αφινοειδείς χώρους είναι ένας μορφισμός τοπικών ringed spaces ο οποίος προκύπτει μέσω του μορφισμού $\phi : B \to A$. (οι ημινόρμες μετατρέπονται μέσω της συνάρτησης $\chi \mapsto \chi \circ \phi$).*

Η αντιστοιχία $A \mapsto (M(A), \mathcal{O}_{M(A)})$ είναι ένας πιστός contravariant συναρτητής από την κατηγορία των γνήσια K-αφινοειδών αλγεβρών στην κατηγορία των local ringed χώρων.

4.2.1 Η συνάρτηση αναγωγής

Έστω μία αντιμεταθετική άλγεβρα Banach $A, |\cdot|$. Θα συμβολίζουμε με

$$\rho(f) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f^n|}$$

την φασματική ακτίνα του $f \in A$, η οποία είναι μία φραγμένη ημινόρμα στον A. Ο χώρος

$$A^\circ := \{f \in A : \rho(f) \leq 1\},$$

είναι ένας δακτύλιος και το σύνολο

$$t(A) := \{f \in A : \rho(f) < 1\}$$

είναι ένα ιδεώδες του. Σχηματίζουμε το πηλίκο

$$\bar{A} := A^\circ / t(A).$$

Κάθε φραγμένος ομομορφισμός $\phi : A \to B$ από αντιμεταθετικές άλγεβρες Banach επάγει ένα ομομορφισμό δακτυλίων $\phi^\circ : A^\circ \to B^\circ$. Πράγματι, αν $f \in A$ με $\rho(f) \leq 1$ τότε $|\phi(f^n)| \leq C|f^n|$ άρα $\lim \sqrt[n]{\phi(f^n)} \leq \lim \sqrt[n]{C}\sqrt[n]{\phi(f^n)}$, οπότε $\rho(\phi(f)) \leq \rho(f)$ δηλαδή το ζητούμενο.

Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε τον επαγόμενο ομομορφισμό $\bar{\phi} : \bar{A} \to \bar{B}$. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $x \in M(A)$ και τον ομομορφισμό $\chi_x : A \to \mathcal{H}(x)$. Θεωρούμε τον επαγόμενο μορφισμό:

$$\bar{\chi}_x : \bar{A} \to \overline{\mathcal{H}(x)}.$$

Όμως το $\overline{\mathcal{H}(x)}$ είναι ένα σώμα άρα το $\ker(\bar{\chi}_x)$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες του $\bar{A}$. Θέτουμε

$$k(\bar{x}) := Quot(\bar{A}/\ker(\bar{\chi}_x)),$$

και έχουμε την επέκταση σωμάτων $k(\bar{x}) \to \overline{\mathcal{H}(x)}$, και την συνάρτηση

$$\pi : M(A) \to \mathrm{Spec}\bar{A},\ x \mapsto \ker(\bar{\chi}_x),$$

την οποία και θα ονομάζουμε συνάρτηση αναγωγής, ή συνάρτηση Tate.

Παρατηρήσεις:

1. Ας υποθέσουμε ότι το A είναι εφοδιασμένο με την τετριμμένη νόρμα, δηλαδή για $f \in A$ έχουμε
$$|f| = \begin{cases} 1 & \text{αν } f \neq 0 \\ 0 & \text{αν } f = 0 \end{cases}.$$
Τότε $A^\circ = A$ και $t(A) = Nil(A)$. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση αναγωγής όπως ορίστηκε σε αυτή την παράγραφο δεν ταυτίζεται με την συνάρτηση αναγωγής της παραγράφου 3.7.

2. Αν η εκτίμηση στο K δεν είναι τετριμμένη και το A είναι μία γνήσια αφινοειδής K-άλγεβρα τότε η $\pi|_{Max(A)}$ ταυτίζεται με την συνάρτηση Tate $Max(Z) \to Max(\bar{A})$.

3. Σε κάθε περίπτωση το $\bar{A}$ είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη k-άλγεβρα χωρίς nilpotents. Πράγματι, αν $\rho(f) \leq 1$ και $\rho(f^n) < 1$ τότε $\rho(f) < 1$, αφού η ρ είναι πολλαπλασιαστική.

Ορισμός 4.2.3 *Ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο Z ενός αφινοειδούς χώρου $X = M(A)$ λέγεται* σύνορο *του X, αν κάθε $f \in A$ έχει το μέγιστο της στο Z. Το λήμμα του Zorn εξασφαλίζει την ύπαρξη ελαχίστων συνόρων. Αν υπάρχει ένα ελάχιστο σύνορο στο X αυτό θα λέγεται σύνορο Shilov και θα το συμβολίζουμε με $\partial^{sh}(X)$.*

Πρόταση 4.2.4 *Έστω A μία γνήσια αφινοειδής K-άλγεβρα. Θέτουμε $X = M(A)$, $\bar{X} = \mathrm{Spec}\bar{A}$, $\bar{X}_{gen} = \{$ σύνολο των generic points των αναγώγων παραγόντων του $\bar{X}\}$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Η συνάρτηση αναγωγής $\pi : X \to \bar{X}$ είναι επί.*
2. *Για κάθε $\bar{x} \in \bar{X}_{gen}$ υπάρχει ακριβώς ένα $x \in X$ ώστε $\pi(x) = \bar{x}$. Στην περίπτωση $|A|_{sup} = |K|$, τότε η $\bar{K}(\bar{x}) \to \overline{\mathcal{H}(x)}$ είναι ισομορφισμός.*
3. *Το X έχει ένα σύνορο Shilov: $\partial^{sh}(X) = \pi^{-1}(\bar{X}_{gen})$.*

Απόδειξη: Είναι γνωστό ότι [3, 6.2.3] $\rho(f) = |f|_{sup}$.

1. [3, 7.1.5]
2. Ας υποθέσουμε ότι το $\bar{X}$ είναι ανάγωγο με generic σημείο το $\bar{x}$. Η μετρική $|\cdot|_{sup}$ είναι ένα στοιχείο του $Max(A)$ και ο επαγόμενος χαρακτήρας $\chi_{sup} : A \to \mathcal{H}(|\cdot|_{sup})$ είναι 1-1, άρα και το $\bar{\chi}_{sup}$. είναι 1-1 δηλαδή έχει μηδενικό πυρήνα και αντιστοιχεί στο generic point της αναγωγής, δηλαδή $\pi(|\cdot|_{sup}) \in \bar{X}_{gen}$.

   Θεωρούμε ένα $x \in \pi^{-1}(\bar{x})$. Ισχυριζόμαστε ότι $|\cdot|_x = |\cdot|_{sup}$. Στην περίπτωση $|f|_{sup} = 0$ έχουμε ότι το $f \in Nil(A)$ και συνεπώς $|f(x)| = |f|_x = 0$. Αν $|f|_{sup} > 0$ τότε υπάρχει [3, 6.2.1] $a \in K^*$ και $n \geq 1$ ώστε $|f|^n_{sup} = |a|$. Θέτουμε $g := a^{-1}f^n$ και έχουμε $|g|_{sup} = 1$. Αφού $g \in A^\circ \backslash t(A)$ έχουμε $|g(x)| = 1$. Συνεπώς $|f|_x = |f(x)| = |f|_{sup}$. Συνεπώς $\pi^{-1}(\bar{x}) = \{x\}$.

   Στην περίπτωση που $|A|_{sup} = |K|$ τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι ανάγωγο. Τότε το $Quot(A)$ είναι πυκνό στο $\mathcal{H}(x)$. Συνεπώς κάθε στοιχείο του $\overline{\mathcal{H}(x)}$ έχει ένα lift $f/g \in Quot(A)$ με $|f|_{sup} = |g|_{sup}$. Από την υπόθεση υπάρχει $a \in K$ με $|f|_{sup} = |g|_{sup} = |a|$. Συνεπώς το lift μπορεί να γραφτεί ως πηλίκο $\frac{a^{-1}f}{a^{-1}g}$ στοιχείων του $A^\circ \backslash t(A)$. Συνεπώς $\bar{K}(\bar{x}) \cong \overline{\mathcal{H}(x)}$.

   Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $\bar{Q}$ είναι τυχαίο. Για $x \in \bar{X}_{gen}$ θεωρούμε ένα $f \in A^\circ$ με $\bar{f}(\bar{x}) \neq 0$ και ώστε το f να μηδενίζεται σε όλες τις ανάγωγες συνιστώσες του $\bar{X}$ στις οποίες δεν ανήκει το $\bar{x}$. Θέτουμε $B := A\langle f^{-1}\rangle$ και έχουμε

   $$M(B) = X(f^{-1}) = \{x \in X : |f(x)| = 1\}^1$$

   Έχουμε ότι $\pi^{-1}(\bar{x}) \subseteq X(f^{-1})$. Αφού $\bar{B} = \bar{A}[\bar{f}^{-1}]$ και $|B|_{sup} = |A|_{sup}$ [3, 7.2.6] προκύπτει το ζητούμενο.
3. Έστω $f \in A^{circ} \backslash t(A)$. Υπάρχει μία συνιστώσα του $\bar{X}$, πάνω στην οποία δεν μηδενίζεται το $\bar{f}$, συνεπώς ένα $\bar{x} \in \bar{X}_{gen}$ με $\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{0}$. Έστω $x = \pi^{-1}(\bar{x})$. Τότε έχουμε $|f(x)| = 1 = |f|_{sup}$. Δηλαδή κάθε $f \in A$ παίρνει το μέγιστο της κάπου πάνω στον πεπερασμένο χώρο $\pi^{-1}(\bar{X}_{gen})$. Υπάρχει λοιπόν ένα ελάχιστο σύνορο που είναι σύνορο Shilov.

[1] Ο ορισμός αυτός είναι φυσιολογικός αφού όλες οι ημινόρμες πρέπει στα αντιστρέψιμα στοιχεία να έχουν τιμή 1.

$\square$

Παράδειγμα: Έστω $K = \mathbb{C}_p$. Για τον δίσκο $\mathbb{D} = D(0, 1^+)$ έχουμε το σύνορο Shilov $\partial^{sh}(\mathbb{D}) = \{|\cdot|_{sup}\}$ και $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$.

4.3 Πολλαπλότητες

Στην συνέχεια με τον όρο *αφινοειδές* σύνολο θα εννοούμε *γνήσια αφινοειδές* σύνολο. Αν Y είναι τοπολογικός χώρος και $X \subset Y$ με $Int(X/Y)$ θα συμβολίζουμε το τοπολογικό εσωτερικό του X στο Y δηλαδή το εσωτερικό του X εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία από το Y.

Ορισμός 4.3.1 *Ένας ημιαφινοειδής χώρος είναι ένα ζευγάρι $\big((U, \mathcal{O}), \phi\big)$, όπου το $(U, \mathcal{O})$ είναι ένας* τοπικά χώρος δακτυλίων *(locally ringed space), δηλαδή ένας τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με ένα δράγμα δακτυλίων όπου οι κοτσάνες (stalks) είναι τοπικοί δακτύλιοι. Επιπλέον η $\phi : U \to X$ είναι μια ανοιχτή εμφύτευση σε ένα αφινοειδή χώρο. Οι μορφισμοί μεταξύ ημιαφινοειδών χώρων ορίζονται να είναι*

$$\big((U, \mathcal{O}), \phi\big) \to \big((U', \mathcal{O}'), \phi'\big)$$

ορίζονται ως μορφισμοί $\theta : U \to U'$ στην κατηγορία των τοπικών χώρων δακτυλίων όπου για οποιεσδήποτε αφινοειδείς περιοχές $V \subseteq U$ και $V' \subseteq U'$ το θ επάγει μορφισμό στην κατηγορία των αφινοειδών περιοχών και $\theta(V) \subseteq Int(V'/U')$.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $V \to V'$ επάγεται από φραγμένους ομομορφισμούς

$$A'_{V'} \to \mathcal{O}'(Int(V'/U')) \to \mathcal{O}(\theta^{-1}(Int(V'/U')) \to A_V.$$

Ορισμός 4.3.2 *Ας είναι $(X, \mathcal{O}_X)$ ένας τοπικός χώρος δακτυλίων. Ένας K-αναλυτικός άτλας στο X αποτελείται από μια οικογένεια K-ημιαφινοειδών χώρων $\mathcal{U} = \{((U_i, \mathcal{O}_{X|U_i}), \phi_i), i \in I\}$ τα στοιχεία της οποίας τα ονομάζουμε χάρτες, ώστε:*

1. *Η οικογένεια $\mathcal{U}$ να αποτελεί ένα ανοιχτό κάλυμμα του X και*
2. *για κάθε $i, j \in I$ η συνάρτηση $(U_i \cap U_j, \phi_i) \to (U_i \cap U_j, \phi_j)$ να είναι ισομορφισμός ημιαφινοειδών χώρων.*

Ένας ημιαφινοειδής υπόχωρος (U, ϕ) του X θα λέγεται συμβατός με τον άτλαντα $\mathcal{U}$ αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $(U \cap U_i, \phi_i) \to (U \cap U_i, \phi)$ είναι ισομορφισμοί ημιαφινοειδών χώρων για κάθε $i \in I$. Δύο άτλαντες του X θα λέγονται συμβατοί αν όλοι οι χάρτες του ενός άτλαντα είναι συμβατοί με τον άλλο άτλαντα.

Άσκηση: Δείξτε ότι η συμβατότητα ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στον χώρο των ατλάντων.

Ορισμός 4.3.3 *Ένας τοπικός χώρος δακτυλίων εφοδιασμένος με μία κλάση ισοδυναμίας K-αναλυτικών χαρτών θα λέγεται ένας K-αναλυτικός χώρος. Ένας μορφισμός από K-αναλυτικούς χώρους $X \to Y$ είναι ένας μορφισμός $f : X \to Y$ όπου για τον άτλαντα $\{(U_i, \phi_i)\}$ του X να υπάρχουν $\{(V_j, \psi_j)\}$ του άτλαντα του Y ώστε η f να επάγει συναρτήσεις $(U_i \cap f^{-1}(V_j), \phi) \to (V_j, \psi_j)$* που *να είναι μορφισμοί ημιαφινοειδών χώρων. Με τον παραπάνω τρόπο ορίζεται η κατηγορία των K-αναλυτικών χώρων.*

Ορισμός 4.3.4 *Ένας παρασυμπαγής K-αναλυτικός χώρος S, στον οποίο κάθε σημείο έχει μία περιοχή που να είναι ισόμορφη με μία αφινοειδή περιοχή ενός ομαλού αναλυτικού χώρου λέγεται K-πολλαπλότητα. Μία $\mathbb{C}_p$-πολλαπλότητα λέγεται p-αδική πολλαπλότητα.*

Υπενύμιση: Ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται παρασυμπαγής αν κάθε ανοικτή κάλυψη του X έχει τοπικά πεπερασμένη υποκάλυψη. Ένας n-διάστατος K-αναλυτικός χώρος λέγεται ομαλός αν τοπικά υπάρχει τοπικά étale μορφισμός στο $\mathbb{A}^n_K$.

4.4 Δρόμοι και Μονοπάτια

Θα δείξουμε ότι ο χώρος $\mathbb{A}^1 = M(K[X])$ είναι δρομοσυνεκτικός. Σε αντίθεση με την κλασική θεωρία τα σημεία του Berkovich έχουν ακτίνες. Ορίζουμε την ακτίνα $r(x)$ ενός σημείου x να είναι

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν το σημείο είναι τύπου 1} \\ \epsilon & \text{αν το σημείο } x = \eta_{y,\epsilon} \text{είναι τύπου 2,3} \\ \inf r(D_a) & \text{αν το σημείο είναι τύπου 4.} \end{cases}$$

Για $\rho \geq r(x)$ θα ορίσουμε και πάλι κυκλικούς δίσκους:

1. Αν έχουμε $\rho > r(x)$ τότε υπάρχει ακριβώς ένας κλειστός δίσκος D ακτίνας ρ που να περιέχει το x. Θέτουμε λοιπόν $D(x, \rho^+) := D$.
2. Αν $\rho = r(x)$ και $x = \eta_{y,r(x)}$, δηλαδή τύπου 2,3 τότε $D(x, r(x)^+) := D(y, r(x)^+)$ δηλαδή ο κυκλικός δίσκος είναι το ίδιο το σημείο.
3. Αν $\rho = r(x)$ και το x είναι τύπου $1, 4$, τότε $D(x, r(x)^+) = \{x\}$.

Από τους κλειστούς δίσκους θα ξανακατασκευάσουμε ξανά σημεία: Θεωρούμε την οικογένεια δίσκων

$$\mathcal{K} = \{D(x, \rho^+) | x \in \mathbb{A}^1, \rho > \rho(x)\}.$$

Στην συνέχεια θέτουμε

$$p : \mathcal{K} \to \mathbb{A}^1, D(x, \rho+) \mapsto \begin{cases} D(x, \rho^+) & \text{στην πρώτη περίπτωση} \\ \eta_{y,r(x)} & \text{στην δεύτερη περίπτωση} \\ x & \text{στην τρίτη περίπτωση} \end{cases}$$

Για δύο σημεία $x, y \in \mathbb{A}^1$ θα συμβολίζουμε με $r(x, y)$ την ακτίνα του μικρότερου κυκλικού δίσκου που περιλαμβάνει τα x, y. Θεωρούμε τα

$$\ell'_{x,y} := \{p(D, x^+) : r(x) \leq t \leq r(x, y)\},$$

$$\ell''_{x,y} := \{p(D, y^+) : r(x) \leq t \leq r(x, y)\}.$$

Τότε το $\ell_{x,y} := \ell'_{x,y} \cap \ell''_{x,y} \subseteq \mathbb{A}^1$, είναι ένα κλειστό διάστημα ομοιομορφικό με το $[0, 1]$ και είναι ο δρόμος από το x στο y.

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει γενικότερα: οι αναλυτικοί χώροι είναι τοπικά δρομοσυνεκτικοί [2, 3.2.1].

Παρατήρηση: Η ιδέα της παραπάνω κατασκευής βασίζεται στην ιδέα πίσω από την κατασκευή των πραγματικών αριθμών με τομές Dedekind. Πράγματι ως πραγματικό αριθμό ορίσαμε τα αρχικά τμήματα, δηλαδή τα σύνολα $A \subset \mathbb{Q}$ ώστε $x \in A \Rightarrow y \in A \forall y < x$, δηλαδή ένας πραγματικός αριθμός είναι ένα δίσκος των ρητών αριθμών με κέντρο το $-\infty$.

Πρόταση 4.4.1 *Οι πολλαπλότητες είναι τοπικά συστελλόμενες.*

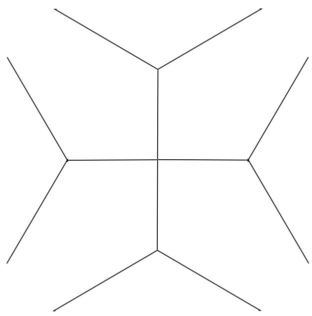
Η κατασκευή του Berkovich μας δίνει ότι εργαλεία χρειαζόμαστε για να έχουμε θεωρία καλυπτικών απεικονίσεων και τον universal covering space. Θα περιοριστούμε στην συνέχεια στην μονοδιάστατη περίπτωση.

4.5 Αναλυτικές Καμπύλες

Ορισμός 4.5.1 *Ένας συνεκτικός, τοπικά συρρικνώσιμος, τοπικά συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος X θα λέγεται ημιπολύεδρο αν και μόνο αν*

1. *Η τοπολογία του X δέχεται μία βάση από ανοιχτά σύνολα ώστε*
   (α′) *$\bar{U}\backslash U$ να είναι πεπερασμένο.*
   (β′) *Για κάθε $x, y \in U$, $x \neq y$ υπάρχει ακριβώς ένα κλειστό υποσύνολο $\ell_{x,y} \subseteq U$ και ένας ομοιομορφισμός $\phi : [0,1] \to \ell_{x,y}$ με $\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$.*
2. *Στην συμπαγοποίηση ενός σημείου $X \cup \{\infty\}$ του τοπικά συμπαγούς χώρου X, το ∞ έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.*

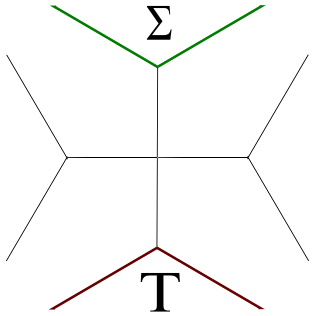
Ένα ημιπολύεδρο θα λέγεται απλά συνεκτικό αν και μόνο αν το 1β′ ισχύει και για $U = X$.



Σχήμα 4.1: Ένα απλά συνεκτικό ημίπολύεδρο

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις για απλά συνεκτικά ημιπολύεδρα:

1. Τοπικά συμπαγή, συνεκτικά υποσύνολα ημιπολύεδρου είναι ημιπολύεδρα.
2. Για δύο ξένα υποσύνολα $\Sigma, T \subset X$ υπάρχει ακριβώς ένα κλειστό υποσύνολο $\ell_{\Sigma,T} \subseteq X$ και ένας ομομορφισμός $\phi : [0,1] \to \ell_{\Sigma,T}$ με $\phi(0) \in \Sigma$, $\phi(1) \in T$, και $\ell_{\Sigma,T} \cap \Sigma = \{x\}$ και $\ell_{\Sigma,T} \cap T = \{y\}$. Επιπλέον ισχύει ότι
$$\ell_{\Sigma,T}\backslash\{x, y\} =$$
$$= \{z \in X : \Sigma, T \text{ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του } X\backslash\{z\}\}.$$
Αν $\Sigma \subseteq X$ είναι συνεκτικό κλειστό, τότε η συνάρτηση retraction
$$\tau_\Sigma : X \to \Sigma, x \mapsto \begin{cases} x & x \in \Sigma \\ \text{δεύτερο τελικό σημείο του } \ell_{x,\Sigma} & x \in X\backslash\Sigma \end{cases}$$
είναι συνεχής.



Σχήμα 4.2: Ένα απλά συνεκτικό ημιπολύεδρο και μια επιλογή Σ, T.

Τα απλά συνεκτικά ημιπολύεδρα X συμπαγοποιούνται με τον ακόλουθο τρόπο: Θεωρούμε το σύνολο:

$$\hat{X} := \left\{ \leq : \begin{array}{l} \leq \text{ είναι μια μερική διάταξη στο } X \text{ και για κάθε } x, y \in X, \\ \text{υπάρχει μοναδικό } \sup(x,y) \text{ ώστε } x \leq y \Rightarrow \forall z \in \ell_{x,y} : x \leq z \leq y \end{array} \right\}$$

Μία εμφύτευση $X \to \hat{X}$ έχουμε ως εξής:

$$i : X \to \hat{X}, x \mapsto \leq_x, \text{ με } y \leq_x z \Leftrightarrow z \in \ell_{x,y}.$$

Με άλλα λόγια στην διάταξη $\leq_x$ το $y \leq_x z$ αν και μόνο αν το το z είναι ανάμεσα στο x, y. Δηλαδή μετράμε «πόσο μακριά είναι τα σημεία από το x». Στα τελικά σημεία σημεία του ημιπολύεδρου που αντιστοιχούν σε ημιευθείες βάζουμε τις επιπλέον διατάξεις που οδηγούν στην συμπαγοποίηση, ανάλογα με το πόσο μακριά στις ημιευθείες αυτές βρίσκονται τα σημεία.

Μία βάση για την τοπολογία του $\hat{X}$ αποτελούν τα συμπαγή υποσύνολα του X και τα $\tilde{U} \subset \hat{X}$ ώστε U συνεκτική συνιστώσα ενός σημείου $x \in X$ με όχι συμπαγή κλειστότητα και $\tilde{U}$ είναι η ένωση των U και των $\leq \in \partial X := \hat{X} \backslash X$ με $\ell_x^{\leq} \cap U \neq \emptyset$. Στα παραπάνω

$$\ell_x^{\leq} := \{y \in X : x \leq y\}.$$

Το $\ell_x^{\leq y}$ είναι ομοιομορφικό με το $[0,1]$ ή ένα σημείο (αν $x \in \partial X$ και για $\leq \in \partial X$ έχουμε $\ell_x^{\leq}$ είναι ομοιομορφικό με το $[0,1)$.

Ορισμός 4.5.2 1. *Ένα απλά συνεκτικό ημιπολύεδρο X θα λέγεται* ειδικό *αν για κάθε $\leq \in \hat{X}$, υπάρχει μια συνάρτηση $\Theta : X \to [0,1]$, η οποία επάγει για κάθε $x \in X$ μια εμφύτευση $\ell_x^{\leq} \to [0,1]$ η οποία διατηρεί την διάταξη.*

2. *Ένα ημιπολύεδρο λέγεται* ειδικό *αν κάθε απλά συνεκτικό υπό-ημιπολύεδρο είναι ειδικό.*

Πρόταση 4.5.3 *Τα απλά συνεκτικά ημιπολύεδρα είναι συρρικνώσιμα.*

Απόδειξη: [2, 4.1.6] □

ὃρολλαρψ 4.5.4 *Το $\mathbb{P}^1$ είναι απλά συνεκτικό.*

Απόδειξη: [2, 4.2.1]. □

4.6 Σκελετοί

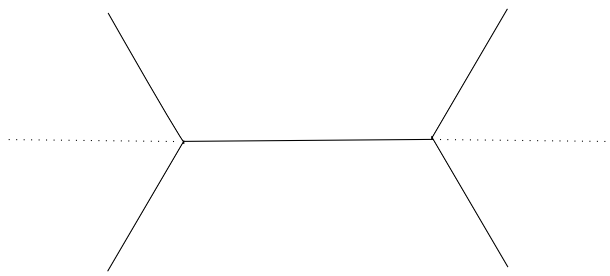
Έστω X ένα απλά συνεκτικό ημιπολύεδρο. Θα συμβολίζουμε την συνεκτική θήκη ενός κλειστού υποσυνόλου $\Sigma \subset X$ με $L_X(\Sigma)$. Προφανώς ισχύει:

$$L_X(\Sigma) = \cup_{x,y\in\Sigma}\ell_{x,y}.$$

Το $\Delta(X) := X \cap L_{\hat{X}}(\partial X)$ είναι ένα συρρικνώσιμο πολύεδρο και υπάρχει ομοιομορφισμός:

$$\partial(\Delta(X)) \to \partial X.$$

Δηλαδή το $\Delta(X)$ αποτελείται από τα σημεία του X που δεν έχουν συνεκτική ανοιχτή περιοχή με ένα μόνο τελικό σημείο. Στην περίπτωση που το X έχει το πολύ ένα τελικό σημείο το $\Delta(X)$ είναι κενό.



Σχήμα 4.3: Ένα ημιπολύεδρο με δυο συνοριακά σημεία.

Ορισμός 4.6.1 *Το σύνολο $\Delta(X)$ θα λέγεται ο σκελετός του X.*

Διαισθητικά θα λέγαμε ότι στον σκελετό εξαφανίζονται όλα τα πεπερασμένα μονοπάτια στο X τα οποία δεν οδηγούν σε τελικό σημείο.

Πρόταση 4.6.2

- *Το $\Delta(X)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X, το οποίο είναι κενό αν και μόνο αν το X είναι ένα απλά συνεκτικό σύνολο με το πολύ ένα τελικό σημείο.*
- *Το $\Delta(X)$ είναι ένα πολύεδρο το οποίο δεν έχει σημείο το οποίο να έχει ανοιχτή γειτονιά ομοιομορφική με το $[0,1)$. Αν το X είναι συμπαγές τότε και το $\Delta(X)$ είναι συμπαγές.*
- *Οι συνεκτικές συνιστώσες του $X\backslash\Delta(X)$ είναι απλά συνεκτικά ημιπολύεδρα με ένα μόνο τελικό σημείο στο $\Delta(X)$.*

Για ένα ειδικό ημιπολύεδρο X το $\Delta(X)$ είναι μια deformation retract του X. Το X έχει ένα universal covering space $\Omega \to X$ το οποίο είναι ένα απλά συνεκτικό ημιπολύεδρο και ισχύει ότι

$$\Delta(\Omega)/\pi_1(X) \cong \Delta(X).$$

Γενικά για προπεπερασμένες ομάδες που δρούν επί του Ω έχουμε ότι [2, 4.1.6]

$$\partial\Omega/G \cong \partial(\Omega/G).$$

4.7 Αναλυτικοί σκελετοί.

Θεωρούμε μία μη ιδιόμορφη ανάγωγη προβολική καμπύλη υπέρ το $\mathbb{C}_p$. Υπάρχει μία γνήσια αφινοειδής κάλυψη του X, $\mathcal{U}$, ώστε $\overline{X_{\mathcal{U}}} = \bar{X}$ να είναι ημιευσταθής. Θεωρούμε την απεικόνιση του Tate $\pi_{\mathcal{U}} : X \to \overline{X_{\mathcal{U}}}$. Ως τοπολογικός χώρος το X^{an} είναι ένα συνεκτικό ειδικό ημιπολύεδρο, του οποίου ο σκελετός είναι ένα συνεκτικό, τοπικά πεπερασμένο γράφημα [2, 4.3.1,4.32].

Μπορούμε να περιγράψουμε τις αντίστροφες εικόνες της συνάρτησης Tate:

$$\pi^{-1}(\bar{x}) \begin{cases} \text{Σημείο} & \text{αν } \bar{x} \in \bar{X}_{gen} \\ \text{Ανοιχτός κυκλικός δίσκος} & \text{αν } \bar{x} \in \bar{X}_{ns} \\ \text{Ανοιχτός δακτύλιος} & \text{αν } \xi \in \bar{X}_{sing}. \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση η προεικόνα είναι ένα ειδικό απλά συνεκτικό ημιπολύεδρο. Στην περίπτωση του σημείου ή του κυκλικού δίσκου ο σκελετός είναι κενός. Στην περίπτωση του ανοιχτού δακτύλιου έχουμε δύο τέλη:

$$\widehat{\pi_U^{-1}(\bar{x})} = \pi^{-1}(\bar{x}) \cap \{x_1, x_2\}, \text{ όπου } x_1, x_2 \in \partial^{sh}(X).$$

Στην περίπτωση αυτή το $\Delta(\pi_U^{-1}(\bar{x})$ είναι ομοιομορφικό με το ανοιχτό διάστημα $(0,1)$. Για την κλειστότητα της προεικόνας στο X διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Το $\bar{x}$ ανήκει σε δύο συνιστώσες του $\bar{X}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\pi_U^{-1}(\bar{x})^{cl} = \widehat{\pi_U^{-1}(\bar{x})}.$$

2. Το $\bar{x}$ ανήκει σε μοναδική συνιστώσα του $\bar{X}$. Οπότε έχουμε

$$\pi_U^{-1}(\bar{x})^{cl} = \widehat{\pi_U^{-1}(\bar{x})} = \widehat{\pi_U^{-1}(\bar{x})}./\mathbb{Z}_2,$$

όπου η δράση του $\mathbb{Z}_2$ ταυτίζει τα δύο τέλη.

Μπορούμε να ορίσουμε ένα γράφημα $\Delta_U(X)$. Ο χώρος των κορυφών θα είναι το $\partial^{sh}(X)$ (δηλαδή αντίστροφες εικόνες αναγώγων συνιστωσών) και οι πλευρές θα είναι οι κλειστότητες των σκελετών $\Delta(\pi_U^{-1}(\bar{x}))$ στο X (που είναι ομοιομορφικά με τα διαστήματα $[0,1]$ ή με τα $[0,1)$). Οι διαφορετικές ημιευσταθείς αναγωγές διαφέρουν από ακολουθίες συρρίκνωσης πλευρών.

Μπορούμε να δούμε ότι η αναλυτική αναγωγή είναι τοπολογικά μία Deformation retract της καμπύλης μας.

Πρόταση 4.7.1 *Ας είναι $\Delta(X^{an})$ το μέγιστο υποπολύεδρο του $\Delta^{an}(X)$ χωρίς τελικά σημεία.*

Απόδειξη: [2, 4.3.2]. □

Κεφάλαιο 5

Καμπύλες του Mumford.

5.1 Οικογένειες από καμπύλες.

Θα ξεκινήσουμε την μελέτη μας με ένα παράδειγμα. Είναι γνωστό ότι η εξίσωση

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

παριστάνει μία ελλειπτική καμπύλη, αρκεί $\Delta = -16(4a^3 - 27b^2) \neq 0$. Δύο ελλειπτικές καμπύλες, ορισμένες πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k, είναι ισόμορφες αν και μόνο αν έχουν την ίδια j αναλλοίωτο, όπου

$$j(a, b) = 1728 \frac{4a^3}{4a^3 - 27b^2}.$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω συνάρτηση μας δίνει μία ένα προς ένα απεικόνιση του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας ελλειπτικών καμπύλων με την ευθεία $\mathbb{A}_k^1$. Θέλουμε να δούμε πως μεταβάλλεται η κλάση ισοδυναμίας της ελλειπτικής καμπύλης με μεταβολή των συντελεστών. Ας δούμε ένα παράδειγμα μίας οικογένειας ελλειπτικών καμπύλων:

$$E_{j_0} : y^2 + xy = x^3 - x\frac{36}{j_0 - 1728} - \frac{1}{j_0 - 1728}.$$

Το j_0 είναι παράμετρος η οποία μεταβάλλεται. Μπορεί κανείς να υπολογίσει ότι η ελλειπτική καμπύλη E_{j_0} έχει j-αναλοίωτο j_0. Παρατηρούμε επίσης ότι ο εγκλεισμός αλγεβρών

$$k[j_0] \to \frac{k[x, y, j_0]}{\left\langle y^2 + xy - x^3 + x\frac{36}{j_0 - 1728} + \frac{1}{j_0 - 1728} \right\rangle}$$

επάγει μία συνάρτηση

$$\mathrm{Spec} \frac{k[x, y, j_0]}{\left\langle y^2 + xy - x^3 + x\frac{36}{j_0 - 1728} + \frac{1}{j_0 - 1728} \right\rangle} \to \mathbb{A}_k^1.$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να έχουμε οικογένειες ελλειπτικών καμπυλών πάνω από το $\mathrm{Spec} Z$. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε την

$$y^2 = x^3 + 5x + 1.$$

Η παραπάνω εξίσωση ορίζει το σχήμα

$$\mathrm{Spec}\frac{\mathbb{Z}[x,y]}{\langle y^2 - x^3 - 5x - 1\rangle} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}\mathbb{Z}.$$

Η ίνα της π πάνω από το πρώτο ιδέωδες που παράγει ο πρώτος p είναι η ελλειπτική καμπύλη υπέρ του πεπερασμένου σώματος $\mathbb{F}_p$.

Έστω S ένα σχήμα. Μια *κατάλληλη* συνάρτηση $\pi : M \to \mathrm{Spec}S$ θα λέγεται μία οικογένεια καμπύλων υπέρ του $\mathrm{Spec}S$, αν οι ίνες της είναι αλγεβρικές καμπύλες ίδιου γένους. Με τον όρο κατάλληλη εννοούμε proper,flat. Αυτές οι έννοιες χρειάζονται αρκετά στοιχεία αλγεβρικής γεωμετρίας σχημάτων για να εξηγηθεί ακριβώς η σημασία τους. Διαισθητικά θα λέγαμε ότι εξασφαλίζουν μια «συνεχή μεταβολή» στις ίνες, δηλαδή ότι οι ίνες γειτονικών σημείων δεν διαφέρουν κατά πολύ. Ίσως η πιο βατή εισαγωγή στις λεπτομέρειες της έννοιας των οικογενειών καμπυλών είναι τα κεφάλαια III,IV στο [13].

Συνεχίζοντας να μιλάμε διαισθητικά ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χώρο $\mathcal{M}_g$ των κλάσεων ισοδυναμίας των καμπύλων γένους g. Τότε κάθε οικογένεια $\pi : M \to \mathrm{Spec}S$ μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μία απεικόνιση του $\mathrm{Spec}S \to \mathcal{M}_g$. Πράγματι, για κάθε σημείο $x_0 \in \mathrm{Spec}S$ μπορούμε να θεωρήσουμε την ίνα $\pi^{-1}(x_0)$ που είναι μία καμπύλη γένους g, και να στείλουμε το x_0 στην κλάση ισοδυναμίας της καμπύλης $\pi^{-1}(x_0)$, δηλαδή $x_0 \mapsto [\pi^{-1}(x_0)] \in \mathcal{M}_g$

Παρατηρούμε ότι ο χώρος των ελλειπτικών καμπύλων δεν είναι συμπαγής. Πράγματι, από την μία μέσω της συνάρτησης j τον έχουμε ταυτίσει με την μη συμπαγή αφινική ευθεία, και από την άλλη μπορούμε να βρούμε μία οικογένεια ελλειπτικών καμπύλων που να μην είναι όλες οι ίνες της ελλειπτικές καμπύλες.

.....

Ο D. Mumford έδωσε μια απάντηση στο πρόβλημα της συμπαγοποίησης του χώρου των κλάσεων ισοδυναμίας καμπύλων γένους g. Πιο συγκεκριμένα επισύναψε στις κλάσεις ισοδυναμίας των ομαλών καμπύλων τις κλάσειες ισοδυναμίας των λεγόμενων ευσταθών καμπύλων, που είναι καμπύλες με ελεγχόμενες ιδιομορφίες. Η μεγάλη επιτυχία του Mumford ήταν ότι κατάφερε να δώσει στον χώρο $\mathcal{M}_g$ την δομή ανάγωγης προβολικής πολλαπλότητας.

Περισσότερο συγκεκριμένα έχουμε:

Ορισμός 5.1.1 *Μία ευσταθής καμπύλη είναι μια πλήρης, συνεκτική καμπύλη που έχει μόνο ιδιομορφίες τύπου κόμβου και κάθε ομαλή ρητή συνιστώσα τέμνει τις άλλες συνιστώσες σε τουλάχιστον τρία το πλήθος σημεία.*

Παρατήρηση: Μία καμπύλη μπορεί να έχει άπειρους αυτομορφισμούς αν και μόνο αν έχει ρητές συνιστώσες. Η συνθήκη των τριών σημείων εξασφαλίζει ότι ότι οι αυτομορφισμοί των ευσταθών καμπύλων είναι πεπερασμένοι αφού κάθε Möbius μετασχηματισμός που σταθεροποιεί τρία σημεία, είναι ο ταυτοτικός.

Είναι αρκετά συχνό το φαινόμενο να έχουμε ομαλές οικογένειες οι οποίες να έχουν ένα σημείο με *κακή* ίνα, δηλαδή ένα σημείο που η ίνα να έχει ιδιομορφίες τύπου ακίδας ή καμπύλες με πολλαπλές συνιστώσες. Το θεώρημα της ευσταθούς αναγωγής μας λέει ότι μπορούμε να βρούμε πάντα μια οικογένεια που να έχει σαν ίνες της καμπύλες που είχαμε πιο πρίν αλλά σαν «κακιές» ίνες ευσταθείς καμπύλες.

Θεώρημα 5.1.2 (Ευσταθής αναγωγή) *Έστω B μία ομαλή καμπύλη $0 \in B$ και $B^* = B\backslash\{0\}$. Ας είναι $\mathcal{X} \to B^*$ μια flat οικογένεια ευσταθών καμπύλων γένους $g \geq 2$. Τότε υπάρχει ένα διακλαδισμένο κάλλυμα $B' \to B$, πλήρως διακλαδισμένο πάνω από το 0 και μια οικογένεια καμπύλων $\mathcal{X}' \to B'$ από ευσταθείς καμπύλες που να επεκτείνουν το ινώδες γινόμενο $\mathcal{X} \times_B^* B'$.*

5.2 Το υπερβολικό επίπεδο

Στην θεωρία των επιφανειών Riemann γένους $g \geq 2$ το υπερβολικό επίπεδο

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο: Είναι γνωστό ότι κάθε συμπαγής επιφάνεια Riemann προκύπτει ως χώρος πηλίκο $X \cong \mathbb{H}/\Gamma$, όπου η Γ είναι μια διακριτή υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών του υπερβολικού επιπέδου. Η κατασκευή αυτή λέγεται uniformization.

Θα δείξουμε ότι οι καμπύλες του Mumford δέχονται μια παρόμοια uniformization. Καταρχάς θα βρούμε ένα υποκατάστατο του υπερβολικού επιπέδου, *το δέντρο των Bruhat -Tits.*

Θεωρούμε ένα σώμα K εφοδιασμένο με μία διακριτή εκτίμηση. Το σώμα K δηλαδή είναι ένα σώμα $\mathbb{Q}_p$ (ή η ανάλογη κατασκευή για ένα τυχαίο σώμα αριθμών) ή μία πλήρωση ενός σώματος συναρτήσεων με πεπερασμένο σώμα σταθερών. Το $\mathcal{O}$ θα συμβολίζει τον δακτύλιο των ακεραίων του σώματος K. Θα συμβολίζουμε με π ένα στοιχείο του $\mathcal{O}$ με εκτίμηση 1.

Θεωρούμε το σύνολο των modules με rank 2. Η ίδια κατασκευή δουλεύει και για modules με μεγαλύτερη rank αλλά οδηγούμαστε στην θεωρία των Bruhat-Titis buildings.

Δύο modules L, L' με rank 2 θα λέγονται ομόθετα (και θα τα συμβολίζουμε με $L \sim L'$

$$L \sim L' \Leftrightarrow \Lambda = x\Lambda' \text{ για κάποιο } x \in K^*.$$

Η ομοθεσία είναι μία σχέση ισοδυναμίας και από εδώ και μετά θα μελετάμε modules μέχρι ομοθεσίας.

Το $\mathcal{O}$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών συνεπώς κάθε module είναι ελεύθερο. Επίσης, αν L, L' είναι δύο modules rank 2 τότε μπορούμε να βρούμε μία βάση $\{e_0, e_1\}$, ώστε $L = e_0\mathcal{O} \oplus e_1\mathcal{O}$ και $L' = e_0\pi^a\mathcal{O} \oplus e_1\pi^b\mathcal{O}$. Αν ανικαταστήσουμε τα παραπάνω modules από ομόθετα τους xL, yL, τότε το ζευγάρι $\{a, b\}$ αλλάζει στο $\{a+c, b+c\}$, όπου $c = v(x/y)$. Δηλαδή ο ακέραιος αριθμός εξαρτάται από την κλάση ομοθεσίας και θα τον ονομάζουμε απόσταση των κλάσεων Λ, Λ'.

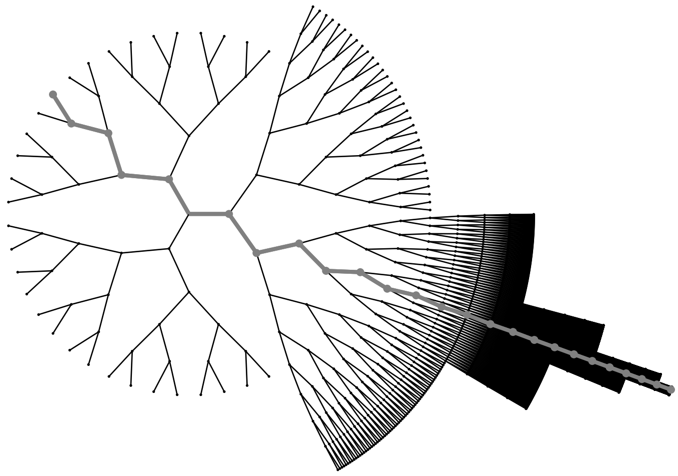
Ας θεωρήσουμε το σύνολο X των κλάσεων ομοθεσίας των rank 2 modules Λ, όπου συνδέουμε με μια ακμή τις κλάσεις που απέχουν 1 μεταξύ τους, σχηματίζουμε ένα γράφημα με κορυφές το σύνολο X. Το γράφημα αυτό είναι δέντρο [10, II, Θ1, σελ. 70] το οποίο ονομάζεται το δέντρο των Bruhat-Tits.

Σταθεροποιούμε ένα module L με rank 2. Κάθε κλάση ισοδυναμίας Λ' περιέχει έναν αντιπρόσωπο L' ώστε $L' \subset L$ και $L/L' \cong \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$. Πράγματι, αν $L = e_0\mathcal{O} \oplus e_1\mathcal{O}$, τότε ο τυχαίος αντιπρόσωπος L_1 της κλάσης Λ' γράφεται ως $L_1 = \pi^a e_0\mathcal{O} \oplus \pi^b e_1\mathcal{O}$. Πολλαπλασιάζοντας με κατάληλο π^k μπορώ να θεώρησω το $L_2 \sim L_1$ ώστε $L_2 = \pi^{a_2}e_0\mathcal{O} \oplus \pi^{b_2}e_1\mathcal{O}$ και $a_2, b_2 \geq 0$, οπότε το $L_2 \subset L$. Πολλαπλασιάζουμε το L_2 με $\pi^{-\min\{a_2, b_2\}}$ για να πάρουμε το L' ώστε $L' = e_0\mathcal{O} \oplus e_1\pi^n\mathcal{O}$ ή $L' = e_0\pi^n\mathcal{O} \oplus e_1\mathcal{O}$ οπότε σε κάθε περίπτωση $L/L' = \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός αυτός n είναι ίσος με την απόσταση των κλάσεων των L, L'.

Ορισμός 5.2.1 *Πάνω στις ημιευθείες του δέντρου των Bruhat-Tits ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $L_1 \cong L_2$ αν και μόνο αν οι ημιευθείες διαφέρουν κατά πεπερασμένο τμήμα. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των ημιευθειών θα το ονομάζω σύνολο* τελών *του δέντρου ή σύνορο του δέντρου.*

Το σύνολο τελών του δέντρου είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία της ευθείας $\mathbb{P}^1(K)$.

Παρατηρούμε ότι το υπερβολικό επίπεδο γίνεται ομοιομορφικό με τον κλειστό δίσκο και ότι το σύνορο του δίσκου είναι η προβολική ευθεία $\mathbb{P}^(\mathbb{R})$. Μία ανάλογη κατάσταση υπάρχει και στο δέντρο των Bruhat-Tits όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 5.1: Το δέντρο των Bruhat-Tits και μία ημιευθεία.

5.3 Uniformization

Παρατηρούμε ότι η ομάδα $PGL_2(K)$ δρα πάνω στο δέντρο των Bruhat-Tits δρώντας με φυσιολογικό τρόπο στα rank 2 $\mathcal{O}$-modules και άρα και στις κλάσεις ισοδυναμίας που αυτά ορίζουν. Επίσης το $PGL_2(K)$ δρά με φυσιολογικό τρόπο και στο σύνορο διαμέσου των μετασχηματισμών του Möbius

$$PGL_2(K) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Όπως και στην θεωρία των επιφανείων Riemann [12], [17] έχουμε την παρακάτω ταξινόμηση των στοιχείων της $PGL_2(K)$.

Ορισμός 5.3.1 *Ένα στοιχείο της $PGL_2(K)$ θα λέγεται*

- *Παραβολικό, αν έχει μόνο μία ιδιοτιμή*
- *Ελλειπτικό, αν έχει δυο διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2, με $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.*
- *Υπερβολικό αν έχει δύο ιδιοτιμές λ_1, λ_2 με $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$.*

Μία υποομάδα Γ του $PGL_2(K)$ δρα με φυσιολογικό τρόπο στο δέντρο των Bruhat-Tits. Ένα σημείο $P \in \mathbb{P}^1(K)$ θα λέγεται οριακό σημείο της ομάδας Γ αν και μόνο αν υπάρχει μία ακολουθία ανά δύο διαφορετικών στοιχείων $g_i \in \Gamma$ ώστε

$$\lim_{i\to\infty} g_i(P) = P'.$$

Το σύνολο των οριακών σημείων της ομάδας Γ θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_\Gamma$.

Σε ότι ακολουθεί θέλουμε να σχηματίσουμε πηλίκα με την ομάδα Γ και το πηλίκο δεν μπορεί να έχει καλές τοπολογικές ιδιότητες αν η ομάδα έχει σημεία συσσώρευσης. Θέτουμε $\Omega_\Gamma = \mathbb{P}^1(K) \backslash \mathcal{L}_\Gamma$.

Οι ιδιοτιμές ενός υπερβολικού στοιχείου γ ανήκουν στο K και συνεπώς το γ σταθεροποιεί δύο σημεία στο σύνορο $\mathbb{P}^1(K)$, ας τα ονομάσουμε u, v. Το γ δρα πάνω στην ευθεία του δέντρου των Bruhat-Tits που αυτά ορίζουν σαν μία translation. Ένα υπερβολικό στοιχείο δεν έχει κανένα σταθερό σημείο στο δέντρο Bruhat-Tits και έχει άπειρη τάξη. Τα ελλειπτικά στοιχεία έχουν έχουν δύο σταθερά σημεία τα οποία δεν είναι απαραίτητα K-ρητά. Τα παραβολικά στοιχεία είναι συζυγή με ένα στοιχείο της μορφής $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, και έχουν ένα μόνο σταθερό στοιχείο στο $\mathbb{P}^1(K)$. Ένα παραβολικό στοιχείο έχει πεπερασμένη τάξη αν και μόνο αν η χαρακτηριστική του K δεν είναι 0.

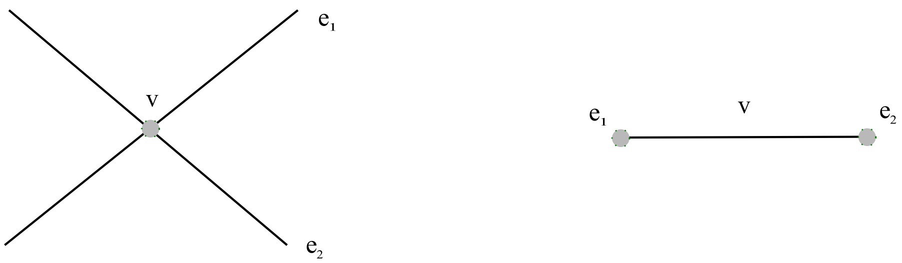
Θεωρούμε μία διακριτή υποομάδα Γ του $PGL_2(K)$ που όλα τα στοιχεία της εκτός από την μονάδα από υπερβολικά στοιχεία. Τότε είναι γνωστό θεώρημα που οφείλεται στον Ihara ότι η ομάδα αυτή είναι ελεύθερη. Ας είναι n το πλήθος των γεννητόρων της. Το βασικό θεώρημα του Mumford είναι ότι το πηλίκο

$$\Omega_\Gamma / \Gamma$$

έχει την δομή καμπύλης γένους n. Ακριβέστερα υπάρχει αλγεβρική καμπύλη Q ορισμένη υπέρ το K της οποίας η *αναλυτικοποίηση* είναι ισόμορφη ως αναλυτικός χώρος με τον Ω_Γ/Γ. Τις καμπύλες αυτής της μορφής θα τις ονομάζουμε καμπύλες του Mumford.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε το γράφημα πηλίκο $\mathcal{T}_K/\Gamma$, το οποίο εν γένει δεν είναι δέντρο, δηλαδή σχηματίζει βρόγχους.

Ορισμός 5.3.2 *Ας είναι* Δ *ένα γράφημα με σύνολο κορυφών* v_i *και σύνολο ακμών* e_i. *Το δυϊκο γράφημα* Δ^* *είναι ένα γράφημα που έχει σαν κορυφές τις ακμές του* Δ *και σαν ακμές τις κορυφές του* Δ. *Δύο κορυφές* e_1, e_2 *του* Δ^* *ενώνονται με μία ακμή* v *αν και μόνο αν οι ακμές* e_1, e_2 *του* Δ *τέμνονται στην* v.



Σχήμα 5.2: Ένα γράφημα και το δυϊκό του.

Κάθε καμπύλη X ορισμένη πάνω από το K μπορεί να *παχύνει* και να δώσει μία αριθμητική επιφάνεια πάνω από το $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\mathcal{O}$ της οποίας η γενική ίνα $\mathcal{X}_\eta := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}} \mathrm{Spec}K$ να είναι η αρχική καμπύλη X. Φυσικά η ειδική ίνα $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}} \mathrm{Spec}\mathcal{O}/m_\mathcal{O}$ μπορεί να έχει ιδιομορφίες.

Ορισμός 5.3.3 *Θα λέμε ότι μία καμπύλη* $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\mathcal{O}$ *έχει* K*-split multiplicative αναγωγή, αν όλες οι συνεκτικές συνιστώσες της ειδικής ίνας είναι ρητές* *καμπύλες οι οποίες τέμνονται σε K-ρητά σημεία ανά δύο και τρεις ρητές καμπύλες δεν μπορούν να τμηθούν στο ίδιο σημείο.*

Ο Mumford κατάφερε να χαρακτηρίσει τις καμπύλες του με βάση την αναγωγή στην ειδική ίνα.

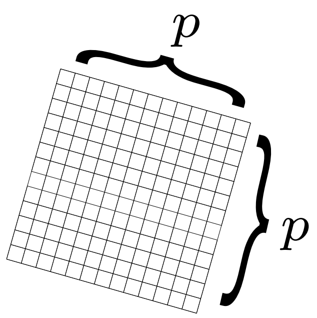
Θεώρημα 5.3.4 *Η αναλυτικοποίηση μίας ευσταθούς καμπύλης X ορισμένης πάνω από το K με μη ιδιόμορφη γενική ίνα που έχει αναγωγή K-split multiplicative, είναι καμπύλη του Mumford. Αντιστρόφως, κάθε καμπύλη του Mumford αντιστοιχεί σε αναλυτικοποίηση μίας αλγεβρικής καμπύλης με μη ιδιόμορφη γενική ίνα και με K-split multiplicative αναγωγή.*

Ας είναι $\mathcal{T}$ το δέντρο των Bruhat-Tits. Μπορούμε να σχηματίσουμε το γράφημα πηλίκο $T_\Gamma := \mathcal{T}/\Gamma$. Αυτό που είναι πολύ ενδιαφέρον είναι ότι το γράφημα T_Γ είναι το δυϊκό γράφημα του γραφήματος τομής της αναγωγής της καμπύλης του Mumford.

Παράδειγμα: Καμπύλες του Subrao. Θεωρούμε τις καμπύλες

$$(x^p - x)(y^p - y) = c, \text{ όπου } c \in \mathcal{O}_K. \tag{5.1}$$

Αν το c έχει απόλυτη τιμή $|c| < 1$ τότε η αναγωγή της παραπάνω καμπύλης μηδενίζεται στο μέγιστο ιδεώδες $m_{\mathcal{O}_K}$ και οδηγούμαστε σε μία ιδιόμορφη ειδική ίνα, που έχει ως συνεκτικές συνιστώσες τις ευθείες $x^p - x = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{F}_p$ και $y^p - y = 0 \Rightarrow y = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Mumford δεν έχουν όλες οι καμπύλες που δίνονται από την (5.1) αναλυτική uniformization παρά μόνο αυτές με $|c| < 1$.



Σχήμα 5.3: Το γράφημα τομής της καμπύλης του Subrao..

5.4 Καμπύλες του Mumford και θεωρία του Berkovich.

Ας ξεκινήσουμε με την ιδιόμορφη αλγεβρική καμπύλη $xy = 0$. Η καμπύλη αυτή είναι φυσικά το γινόμενο των ευθείων $x = 0$ και $y = 0$ οι οποίες τέμνονται στο 0. Μπορούμε να δούμε αυτή την καμπύλη ως ειδική ίνα μιας ομαλής οικογένειας; Αυτή είναι μια αρκετά σύνθετη ιστορία που οδηγεί στην *Θεωρία παραμορφώσεων*. Η απάντηση είναι θετική. Δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε ένα μη μηδενικό όρο z:

$$xy = z$$

για να οδηγηθούμε σε ένα ομαλό υπερβολοειδές το οποίο δίνει μία οικογένεια υπερβολών για κάθε τιμή του z ενώ για $z = 0$ οδηγεί στην καμπύλη $xy = 0$.

Θα δώσουμε μια εναλλακτική περιγραφή των καμπύλων του Mumford βασισμένοι στην διδακτορική διατριβή του P.E. Bradley [4].

Βλέπουμε το $\mathbb{P}^{1,an}$ ως ένα αναλυτικό ημιπολύεδρο. Ας είναι $\Omega \subset \mathbb{P}^{1,an}$ ένα συνεκτικό ανοιχτό, γνήσια αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{P}^{1,an}$. Το Ω είναι απλά συνεκτικό [1] και υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που να συνδέει δύο σημεία του Ω. Το γεγονός αυτό έχει μία αυστηρή απόδειξη. Διαισθητικά (και μπορούμε να χρησιμοποιούμε την διαίσθηση μας χωρίς να χάσουμε πληροφορία) έχουμε ταυτίσει την προβολική ευθεία $\mathbb{P}^1(K)$ με το σύνορο του δέντρου των Bruhat-Tits, όπου ταυτίσαμε σημεία του $\mathbb{P}^1(K)$ με κλάσεις ισοδυναμίας ημιευθειών. Παρόλο που το $\partial\Omega$ είναι ένα totally disconected υποσύνολο του $\mathbb{P}^1(K)$, τα ενδιάμεσα μονοπάτια που προσφέρει το δέντρο Bruhat-Tits το έχουν κάνει δρομοσυνεκτικό. Για να συνδέσουμε δηλαδή δύο σημεία του $\partial\Omega$ δεν έχουμε παρά να κινηθούμε κατά μήκος της ευθείας που συνδέει αυτά τα δύο τελικά σημεία!

Ας ξεκινήσουμε με μία ελεύθερη υποομάδα Γ της $PGL_2(K)$. [2] Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{L}_\Gamma$ των οριακών σημείων της Γ, και $\Omega_\Gamma = \mathbb{P}^{1,an} \backslash \mathcal{L}_\Gamma$.

Η καμπύλη Mumford είναι ο αναλυτικός χώρος

$$\Omega/\Gamma.$$

Το Ω είναι ο universal covering space της καμπύλης. Η ομάδα Γ παίζει τον ρόλο της θεμελιώδους ομάδας και το γένος της καμπύλης Mumford ταυτίζεται με το πλήθος των γεννητόρων της ομάδας Γ.

Η αναγωγή Tate είναι αυτή η deformation retract που στέλνει το Ω στον σκελετό $\Delta(\Omega)$. Το δέντρο $\Delta(\Omega)$ έχει σαν σύνορο $\partial\Delta(\Omega)$ τα οριακά σημεία $\mathcal{L}_\Gamma$.

Το δέντρο πηλίκο $\Delta(\Omega)/\Gamma$ είναι το δυϊκό γράφημα της ειδικής ίνας. Ο σκελετός $\Delta(\Omega)$ είναι το universal covering space του παραπάνω γραφήματος. Η αναγωγή Tate είναι αυτή μιας deformation retract της καμπύλης στο δυϊκό γράφημα της ειδικής ίνας.

[1] Η θεωρία είναι αρκετά διαφορετική από την θεωρία των επιφανείων Riemann όπου το μοναδικό απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ είναι το επίπεδο.

[2] Ο Bradley θέλει να μελετήσει Mumford Orbifolds και για αυτό θεωρεί την ποιό γενική περίπτωση μίας διακριτής υποομάδας N

Bibliography

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969. MR MR0242802 (39 #4129)

[2] Vladimir G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. MR MR1070709 (91k:32038)

[3] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry. MR MR746961 (86b:32031)

[4] Patrick Bradley, Erik, *p-adishe hurwitzräume*, Ph.D. thesis, Universität Karlsruhe, 2002.

[5] Alain Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106. MR MR1694895 (2000i:11133)

[6] Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original.

[7] James Milne, *Lectures on etale cohomology*, http://www.jmilne.org/math/, v2.01; August 9, 1998; 190 pages.

[8] Hans Schoutens, *An introduction to rigid analytic geometry*, 2002.

[9] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955–1956), 1–42. MR MR0082175 (18,511a)

[10] ______, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation. MR MR1954121 (2003m:20032)

[11] Igor R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 2*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1994, Schemes and complex manifolds, Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid. MR MR1328834 (95m:14002)

[12] Goro Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. 11, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994, Reprint of the 1971 original, Kano Memorial Lectures, 1. MR MR1291394 (95e:11048)

[13] Joseph H. Silverman, *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 151, Springer-Verlag, New York, 1994. MR MR1312368 (96b:11074)

[14] Henning Stichtenoth, *Algebraic function fields and codes*, Springer-Verlag, Berlin, 1993. MR 94k:14016

[15] John Tate, *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257–289. MR MR0306196 (46 #5323)

[16] Αντωνιάδης Γιάννης, *Σημειώσεις Τοπικών Σωμάτων*, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 1992.

[17] Καρανικολόπουλος Σωτήρης, *Uniformization Αλγεβρικών Καμπύλων*, Master's thesis, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Μαθηματικό Τμήμα, 2005.