Αυτομορφισμοί καμπυλών σε οικογένειες

Αριστείδης Κοντογεώργης -Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Greek Algebra & Number Theory Seminar 1 Νοεμβρίου 2021

#Αυτομορφισμοί Αλγεβρικών Καμπύλων

- X είναι μια προβολική αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p.

- Είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε καμπύλες σε οικογένειες $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$

#Αυτομορφισμοί Αλγεβρικών Καμπύλων

- X είναι μια προβολική αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p.
- Είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε καμπύλες σε οικογένειες $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$
- $X_P = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{m}_P$ ίνα της καμπύλης πάνω από το μέγιστο ιδεωδες $\mathfrak{m}_P$.

#Αυτομορφισμοί Αλγεβρικών Καμπύλων

- X είναι μια προβολική αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p.
- Είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε καμπύλες σε οικογένειες $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$
- $X_P = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{m}_P$ ίνα της καμπύλης πάνω από το μέγιστο ιδεωδες $\mathfrak{m}_P$.
- Πως μεταβάλλονται οι αυτομορφισμοί στις ίνες;

#Αυτομορφισμοί Αλγεβρικών Καμπύλων

- X είναι μια προβολική αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p.
- Είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε καμπύλες σε οικογένειες $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$
- $X_P = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{m}_P$ ίνα της καμπύλης πάνω από το μέγιστο ιδεωδες $\mathfrak{m}_P$.
- Πως μεταβάλλονται οι αυτομορφισμοί στις ίνες;

Πρόβλημα: Πως θα υπολογίσουμε την ομάδα αυτομορφισμών;

Το Πρόβλημα ανύψωσης

Δίνεται μια αλγεβρική καμπύλη X ορισμένη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k με ομάδα αυτομορφισμών G.

Πρόβλημα: Υπάρχει σχετική καμπύλη $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$, όπου ο R να είναι (τοπικός) δακτύλιος χαρακτηριστικής 0 ώστε $R/\mathfrak{m}_R = k$ και ειδική ίνα $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{m}_P = \mathrm{X}$, ώστε η G να δρα κατά ίνες στην οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$;

Το Πρόβλημα ανύψωσης

Δίνεται μια αλγεβρική καμπύλη X ορισμένη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k με ομάδα αυτομορφισμών G.

Πρόβλημα: Υπάρχει σχετική καμπύλη $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$, όπου ο R να είναι (τοπικός) δακτύλιος χαρακτηριστικής 0 ώστε $R/\mathfrak{m}_R = k$ και ειδική ίνα $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{m}_P = \mathrm{X}$, ώστε η G να δρα κατά ίνες στην οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$;

Τα προβλήματα αυτά ξεκίνησαν από τον J. P. Serre με το άρθρο του στο συνέδριο στο Mexico όταν προσπαθούσε να βρει την συνομολογία που θα έλυνε τις εικασίες του Weil.

Το Πρόβλημα ανύψωσης

Δίνεται μια αλγεβρική καμπύλη X ορισμένη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k με ομάδα αυτομορφισμών G.

Πρόβλημα: Υπάρχει σχετική καμπύλη $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$, όπου ο R να είναι (τοπικός) δακτύλιος χαρακτηριστικής 0 ώστε $R/\mathfrak{m}_R = k$ και ειδική ίνα $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{m}_P = \mathrm{X}$, ώστε η G να δρα κατά ίνες στην οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$;

Τα προβλήματα αυτά ξεκίνησαν από τον J. P. Serre με το άρθρο του στο συνέδριο στο Mexico όταν προσπαθούσε να βρει την συνομολογία που θα έλυνε τις εικασίες του Weil.

Η απάντηση είναι όχι:

Το Πρόβλημα ανύψωσης

Δίνεται μια αλγεβρική καμπύλη X ορισμένη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k με ομάδα αυτομορφισμών G.

Πρόβλημα: Υπάρχει σχετική καμπύλη $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$, όπου ο R να είναι (τοπικός) δακτύλιος χαρακτηριστικής 0 ώστε $R/\mathfrak{m}_R = k$ και ειδική ίνα $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{m}_P = \mathrm{X}$, ώστε η G να δρα κατά ίνες στην οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$;

Τα προβλήματα αυτά ξεκίνησαν από τον J. P. Serre με το άρθρο του στο συνέδριο στο Mexico όταν προσπαθούσε να βρει την συνομολογία που θα έλυνε τις εικασίες του Weil.

Η απάντηση είναι όχι:

- $|\mathrm{Aut}(X)| < 84(g-1)$ αν $p \nmid |G|$

Το Πρόβλημα ανύψωσης

Δίνεται μια αλγεβρική καμπύλη X ορισμένη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k με ομάδα αυτομορφισμών G.

Πρόβλημα: Υπάρχει σχετική καμπύλη $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$, όπου ο R να είναι (τοπικός) δακτύλιος χαρακτηριστικής 0 ώστε $R/\mathfrak{m}_R = k$ και ειδική ίνα $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{m}_P = \mathrm{X}$, ώστε η G να δρα κατά ίνες στην οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$;

Τα προβλήματα αυτά ξεκίνησαν από τον J. P. Serre με το άρθρο του στο συνέδριο στο Mexico όταν προσπαθούσε να βρει την συνομολογία που θα έλυνε τις εικασίες του Weil.

Η απάντηση είναι όχι:

- $|\mathrm{Aut}(X)| < 84(g-1)$ αν $p \nmid |G|$
- Στην περίπτωση $p \mid |G|$ ισχύει ένα πολυωνυμικό φράγμα του g βαθμού 4.

Μία παραμόρφωση της καμπύλης X είναι μια οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec} R$ για κάποιο τοπικό δακτύλιο R, ώστε

$$\begin{tikzcd} X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec} k \arrow[r] & \mathrm{Spec} R \end{tikzcd}$$

Μία παραμόρφωση της καμπύλης X είναι μια οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec} R$ για κάποιο τοπικό δακτύλιο R, ώστε

$$\begin{tikzcd} X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec} k \arrow[r] & \mathrm{Spec} R \end{tikzcd}$$

Τα προβλήματα παραμορφώσεων είναι ευκολότερα όταν έχουμε ακολουθίες από τοπικούς δακτυλίους του Artin A. Αυτοί είναι τοπικοί δακτύλιοι που η φθίνουσα ακολουθία ιδεωδών $\mathfrak{m}_A^\nu$ τερματίζεται.

Μία παραμόρφωση της καμπύλης X είναι μια οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec} R$ για κάποιο τοπικό δακτύλιο R, ώστε

$$\begin{tikzcd} X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec} k \arrow[r] & \mathrm{Spec} R \end{tikzcd}$$

Τα προβλήματα παραμορφώσεων είναι ευκολότερα όταν έχουμε ακολουθίες από τοπικούς δακτυλίους του Artin A. Αυτοί είναι τοπικοί δακτύλιοι που η φθίνουσα ακολουθία ιδεωδών $\mathfrak{m}_A^\nu$ τερματίζεται.

Παραδείγματα τέτοιων δακτυλίων $k[x]/(x^\nu)$, οι δακτύλιοι των απειροστών ν-τάξης.

Παραμορφώσεις συναρτητών

Λ είναι πλήρης, τοπικός δακτύλιος Noether $\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda = k$

Παραμορφώσεις συναρτητών

Λ είναι πλήρης, τοπικός δακτύλιος Noether $\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda = k$

$\mathcal{C}$ κατηγορία των τοπικών Artin Λ-αλγεβρών $A/\mathfrak{m}_A = k$

Παραμορφώσεις συναρτητών

Λ είναι πλήρης, τοπικός δακτύλιος Noether $\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda = k$

$\mathcal{C}$ κατηγορία των τοπικών Artin Λ-αλγεβρών $A/\mathfrak{m}_A = k$

Συναρτητής παραμόρφωσης καμπύλων με αυτομορφισμούς

$D_{\mathrm{gl}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ που στέλνει

$$\Gamma \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας} \\ \text{παραμορφώσεων} \\ \text{ζευγαριών } (X, G) \text{ υπέρ του } \Gamma \end{array} \right\}$$

Παραμορφώσεις συναρτητών

Λ είναι πλήρης, τοπικός δακτύλιος Noether $\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda = k$

$\mathcal{C}$ κατηγορία των τοπικών Artin Λ-αλγεβρών $A/\mathfrak{m}_A = k$

Συναρτητής παραμόρφωσης καμπύλων με αυτομορφισμούς

$D_{\mathrm{gl}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ που στέλνει

$$\Gamma \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας} \\ \text{παραμορφώσεων} \\ \text{ζευγαριών } (X, G) \text{ υπέρ του } \Gamma \end{array} \right\}$$

Δύο παραμορφώσεις X^1_Γ, X^2_Γ θα θεωρούνται ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ένας G-equivariant ισομορφισμός ψ που ανάγεται στην ταυτότητα στην ειδική ίνα ώστε το διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X^1_\Gamma \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & X^2_\Gamma \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}\Gamma & \end{tikzcd}$$

Μικρές επεκτάσεις

Στρατηγική: Μικρές επεκτάσεις.

$$0 \to E \cdot k \to \Gamma' \to \Gamma \to 0$$

Μικρές επεκτάσεις

Στρατηγική: Μικρές επεκτάσεις.

$$0 \to E \cdot k \to \Gamma' \to \Gamma \to 0$$

Για ένα στοιχείο $x \in D_{\mathrm{gl}}(\Gamma)$ έχουμε ότι το σύνολο των lifts $x' \in D_{\mathrm{gl}}(\Gamma')$ που επεκτείνουν την x είναι ένας principal homogeneous space κάτω από την δράση του $D_{\mathrm{gl}}(k[\epsilon])$.

Μικρές επεκτάσεις

Στρατηγική: Μικρές επεκτάσεις.

$$0 \to E \cdot k \to \Gamma' \to \Gamma \to 0$$

Για ένα στοιχείο $x \in D_{\mathrm{gl}}(\Gamma)$ έχουμε ότι το σύνολο των lifts $x' \in D_{\mathrm{gl}}(\Gamma')$ που επεκτείνουν την x είναι ένας principal homogeneous space κάτω από την δράση του $D_{\mathrm{gl}}(k[\epsilon])$. Μια τέτοια επέκταση υπάρχει αν μια συγκεκριμένη obstruction μηδενίζεται.

Συνομολογία και liftings

Για τον συναρτητή D_{gl} οι J. Bertin και A. Mezard εξέφρασαν τα παραπάνω σε όρους της Grothendieck equivariant συνομολογίας:

$$D_{\mathrm{gl}}(k[\epsilon]) = H^1(G, X, \mathcal{T}_X) = H^1(X, \mathcal{T}_X)^G.$$

Συνομολογία και liftings

Για τον συναρτητή D_{gl} οι J. Bertin και A. Mezard εξέφρασαν τα παραπάνω σε όρους της Grothendieck equivariant συνομολογίας:

$$D_{\mathrm{gl}}(k[\epsilon]) = H^1(G, X, \mathcal{T}_X) = H^1(X, \mathcal{T}_X)^G.$$

Επίσης επέδειξαν ένα local-global theorem

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(X/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \arrow[r] & H^1(G, X, \mathcal{T}_X) \arrow[r] & H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
& & & \bigoplus_{i=1}^{r} H^1\left(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{X,x_i}\right) &
\end{tikzcd}$$

Συνομολογία και liftings

Για τον συναρτητή D_{gl} οι J. Bertin και A. Mezard εξέφρασαν τα παραπάνω σε όρους της Grothendieck equivariant συνομολογίας:

$$D_{\mathrm{gl}}(k[\epsilon]) = H^1(G, X, \mathcal{T}_X) = H^1(X, \mathcal{T}_X)^G.$$

Επίσης επέδειξαν ένα local-global theorem

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(X/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \arrow[r] & H^1(G, X, \mathcal{T}_X) \arrow[r] & H^0(X/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_X)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ & & & \bigoplus_{i=1}^{r} H^1\left(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{X,x_i}\right) & \end{tikzcd}$$

Τα s $x_1, \dots, x_r \in X$ είναι τα σημεία διακλάδωσης, G_{x_i} είναι οι ομάδες που τα σταθεροποιούν και $\widehat{\mathcal{T}}_{X,x_i}$ είναι οι completed εφαπτόμενοι χώροι, δηλαδή
$\widehat{\mathcal{T}}_{X,x_i} = k[[t_i]]\frac{d}{dt_i}$, όπου t_i είναι ένας local uniformizer στο x_i οι οποίοι γίνονται G_{x_i}-modules μέσω της adjoint action.

Το τοπικό πρόβλημα παραμόρφοσης

$$D_P : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni \Gamma \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{lifts της } G \to \mathrm{Aut}(\Gamma[[t]]) \text{ της } \rho \\ \text{modulo συζυγία με ένα στοιχείο του} \\ \ker(\mathrm{Aut}\Gamma[[t]] \to \mathrm{Aut}k[[t]]) \end{array} \right\}$$

Το τοπικό πρόβλημα παραμόρφοσης

$$D_P : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni \Gamma \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{lifts της } G \to \mathrm{Aut}(\Gamma[[t]]) \text{ της } \rho \\ \text{modulo συζυγία με ένα στοιχείο του} \\ \ker(\mathrm{Aut}\Gamma[[t]] \to \mathrm{Aut}k[[t]]) \end{array} \right\}$$

Η obstruction για ένα τέτοιο πρόβλημα δίνεται από την
$H^2\left(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{X,x_i}\right)$

Το τοπικό πρόβλημα παραμόρφοσης

$$D_P : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni \Gamma \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{lifts της } G \to \mathrm{Aut}(\Gamma[[t]]) \text{ της } \rho \\ \text{modulo συζυγία με ένα στοιχείο του} \\ \ker(\mathrm{Aut}\Gamma[[t]] \to \mathrm{Aut}k[[t]]) \end{array} \right\}$$

Η obstruction για ένα τέτοιο πρόβλημα δίνεται από την
$H^2\left(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{X,x_i}\right)$

Ενώ η συνολική obstruction από το

$$H^2(G, X, \mathcal{T}_X) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H^2\left(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{X,x_i}\right).$$

Η εικασία του Oort

- Οι ομάδες G που έχουν τάξη $(\#G, p) = 1$ γίνονται πάντα lift.

Η εικασία του Oort

- Οι ομάδες G που έχουν τάξη $(\#G, p) = 1$ γίνονται πάντα lift.
- Η κυκλική ομάδα C_{p^h} γίνεται lift (Εικασία του Oort, Θεώρημα A. Obus, Wewers, F. Pop)

Η εικασία του Oort

- Οι ομάδες G που έχουν τάξη $(\#G, p) = 1$ γίνονται πάντα lift.
- Η κυκλική ομάδα C_{p^h} γίνεται lift (Εικασία του Oort, Θεώρημα A. Obus, Wewers, F. Pop)
- Γενικευμένη εικασία του Oort. Local Oort Groups: G κυκλική, D_{p^h} με τάξη $2p^h$, A_4.

Η εικασία του Oort

- Οι ομάδες G που έχουν τάξη $(\#G, p) = 1$ γίνονται πάντα lift.
- Η κυκλική ομάδα C_{p^h} γίνεται lift (Εικασία του Oort, Θεώρημα A. Obus, Wewers, F. Pop)
- Γενικευμένη εικασία του Oort. Local Oort Groups: G κυκλική, D_{p^h} με τάξη $2p^h$, A_4.
- Η περίπτωση D_{p^h} για $h \geq 2$ είναι ανοιχτή, για p περιττό. Οι D_{25} και D_{27} είναι local-Oort.

Συνομολογιακή Θεώρηση $C_q \rtimes C_m$

Lyndon-Hochshield-Serre φασματική ακολουθία $(m, p) = 1, q = p^h$.

$$1 \to C_q \to C_q \rtimes C_m \to C_m \to 1$$

Συνομολογιακή Θεώρηση $C_q \rtimes C_m$

Lyndon-Hochshield-Serre φασματική ακολουθία $(m,p)=1, q=p^h$.

$$1 \to C_q \to C_q \rtimes C_m \to C_m \to 1$$

$$H^2(C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]}^{C_q}) \xrightarrow{\inf} H^2(C_q \rtimes C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]})_1 \to H^1(C_m, H^1(C_q, \mathcal{T}_{k[[t]]})) \to$$

Συνομολογιακή Θεώρηση $C_q \rtimes C_m$

Lyndon-Hochshield-Serre φασματική ακολουθία $(m,p)=1, q=p^h$.

$$1 \to C_q \to C_q \rtimes C_m \to C_m \to 1$$

$$H^2(C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]}^{C_q}) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(C_q \rtimes C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]})_1 \to H^1(C_m, H^1(C_q, \mathcal{T}_{k[[t]]})) \to$$

Θέτουμε $\Lambda = W(k)$. Η Oort conjecture μας δίνει ότι για την ακολουθία Artin δακτυλίων $\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^\nu$ η obstruction μηδενίζεται στον περιορισμό:

$$H^2(C_q \rtimes C_m, M) \xrightarrow{\text{res}} H^2(C_q, M)$$

ενώ το M και το $\mathrm{H}^1(C_q, M)$ είναι k-διανυσματικοί χώροι όπου το m είναι αντιστρέψιμο. Συνεπώς δεν υπάρχει obstruction.

Το πρόβλημα της algebraization

Με τον τρόπο που περιγράψαμε οδηγούμαστε σε ένα στοιχείο

$$\widehat{D}_{\mathrm{loc}}(\Lambda) = \varprojlim_{\nu \in \mathbb{N}} D_{\mathrm{loc}}(\Lambda/\mathfrak{m}_{\Lambda}^{\nu}).$$

Το πρόβλημα της algebraization

Με τον τρόπο που περιγράψαμε οδηγούμαστε σε ένα στοιχείο

$$\widehat{D}_{\mathrm{loc}}(\Lambda) = \varprojlim_{\nu \in \mathbb{N}} D_{\mathrm{loc}}(\Lambda/\mathfrak{m}_{\Lambda}^{\nu}).$$

Δυστυχώς δεν υπάρχει εύκολος τρόπος να πούμε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι bijection

$$D_{\mathrm{loc}}(\Lambda) \to \widehat{D}_{\mathrm{loc}}(\Lambda)$$

Το πρόβλημα της algebraization

Με τον τρόπο που περιγράψαμε οδηγούμαστε σε ένα στοιχείο

$$\hat{D}_{\mathrm{loc}}(\Lambda) = \varprojlim_{\nu \in \mathbb{N}} D_{\mathrm{loc}}(\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^\nu).$$

Δυστυχώς δεν υπάρχει εύκολος τρόπος να πούμε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι bijection

$$D_{\mathrm{loc}}(\Lambda) \to \hat{D}_{\mathrm{loc}}(\Lambda)$$

Το πρόβλημα εδώ είναι είναι ότι κάθε $\sigma \in \mathrm{Aut}(A[[t]])$ για ένα τοπικό δακτύλιο A ορίζεται από το

$$\sigma(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

όπου a_0 δεν είναι αντιστρέψιμο (δηλαδή $a_0 \in \mathfrak{m}_A$) και a_1 αντιστρέψιμο.

Το πρόβλημα της algebraization

Με τον τρόπο που περιγράψαμε οδηγούμαστε σε ένα στοιχείο

$$\hat{D}_{\mathrm{loc}}(\Lambda) = \varprojlim_{\nu \in \mathbb{N}} D_{\mathrm{loc}}(\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^\nu).$$

Δυστυχώς δεν υπάρχει εύκολος τρόπος να πούμε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι bijection

$$D_{\mathrm{loc}}(\Lambda) \to \hat{D}_{\mathrm{loc}}(\Lambda)$$

Το πρόβλημα εδώ είναι είναι ότι κάθε $\sigma \in \mathrm{Aut}(A[[t]])$ για ένα τοπικό δακτύλιο A ορίζεται από το

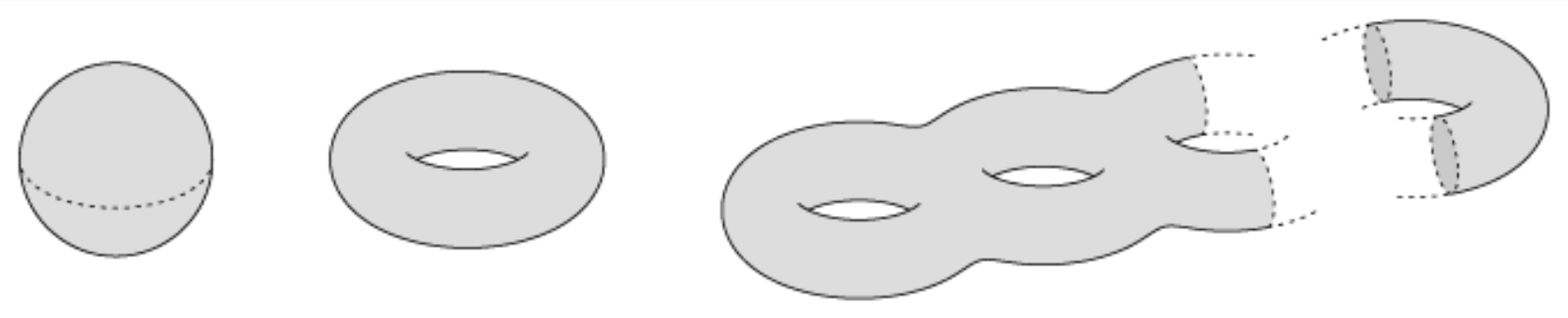
$$\sigma(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

όπου a_0 δεν είναι αντιστρέψιμο (δηλαδή $a_0 \in \mathfrak{m}_A$) και a_1 αντιστρέψιμο.

Χρειάζεται ένα νέο εργαλείο.

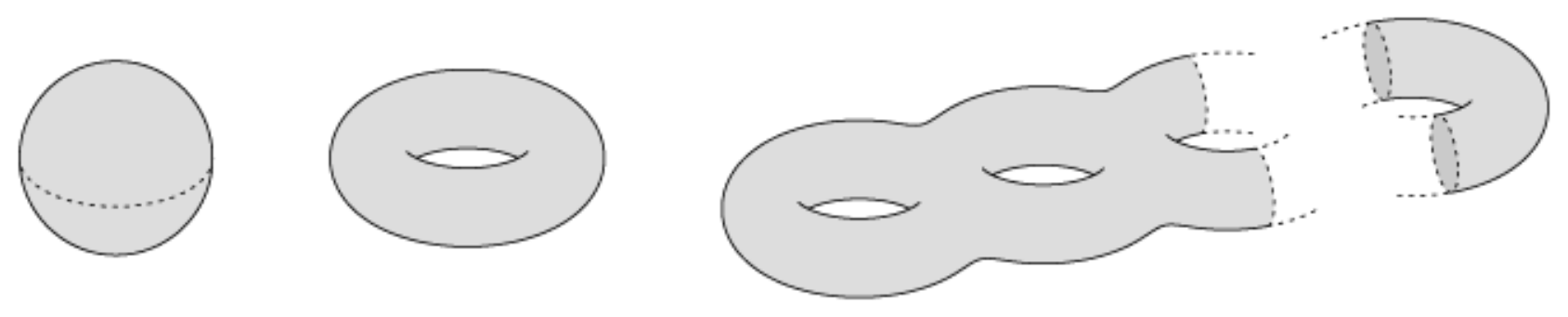
Αναπαραστάσεις ομάδων αυτομορφισμών

- Ο χώρος των ολόμορφων διαφορικών $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_X)$, διανυσματικός χώρος διάστασης g.



Αναπαραστάσεις ομάδων αυτομορφισμών

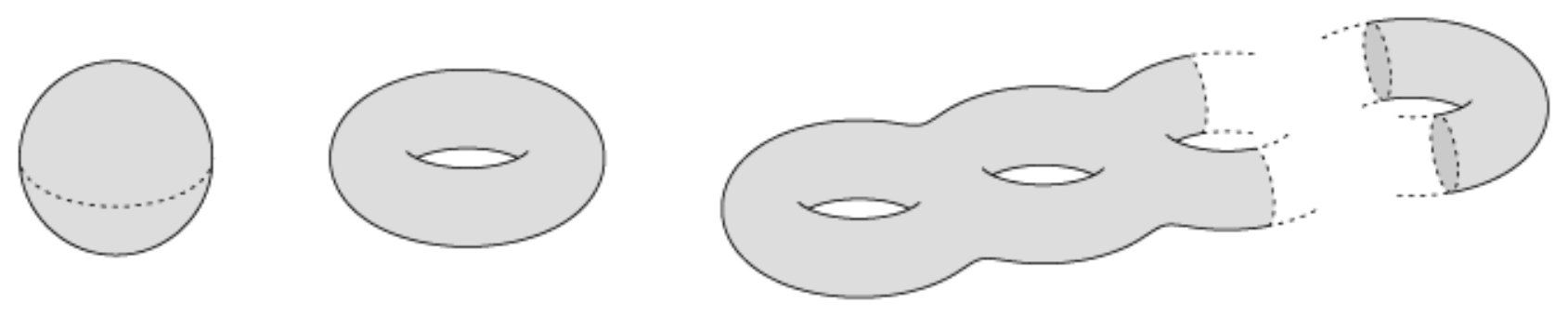
- Ο χώρος των ολόμορφων διαφορικών $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_X)$, διανυσματικός χώρος διάστασης g.



- Γενικότερα μπορούμε να θεωρήσουμε τους χώρους ολόμορφων πολυδιαφορικών $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$ οι οποίοι είναι διανυσματικοί χώροι διάστασης $(2n-1)(g-1)$.

Αναπαραστάσεις ομάδων αυτομορφισμών

- Ο χώρος των ολόμορφων διαφορικών $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_X)$, διανυσματικός χώρος διάστασης g.



- Γενικότερα μπορούμε να θεωρήσουμε τους χώρους ολόμορφων πολυδιαφορικών $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$ οι οποίοι είναι διανυσματικοί χώροι διάστασης $(2n-1)(g-1)$.

Υπάρχουν οι φυσιολογικές αναπαραστάσεις

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(H^0(X, \Omega_X^{\otimes n}))$$

οι οποίες δίνουν στους χώρους $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$ την δομή ενός $k[G]$-module.

Το θεώρημα Petri

Θεώρημα (Noether-Enriques-Petri) Η παρακάτω ακολουθία είναι ακριβής

$$0 \to I_X \to \mathrm{Sym} H^0(X, \Omega_X) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, \Omega_X^{\otimes n}) \to 0,$$

όπου το ιδεώδες I_X παράγεται από στοιχεία βαθμού 2 και 3. Επιπλέον αν το X δεν είναι

- μη ιδιόμορφη πεμπτοβάθμια γένους 6
- X is τριγωνική καμπύλη

Τότε το I_X παράγεται από στοιχεία βαθμού 2.

Η ομάδα αυτομορφισμών ως αλγεβρικό σύνολο

$X \subset \mathbb{P}^r$ προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Είναι σωστό ότι κάθε αυτομορφισμός $X \to X$ επεκτείνεται σε ένα αυτομορφισμό του περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{P}^r$;

Η ομάδα αυτομορφισμών ως αλγεβρικό σύνολο

$X \subset \mathbb{P}^r$ προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Είναι σωστό ότι κάθε αυτομορφισμός $X \to X$ επεκτείνεται σε ένα αυτομορφισμό του περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{P}^r$;

Απαντήσεις στο παραπάνω ερώτημα έχουν δοθεί στην βιβλιογραφία για υπερεπιφάνειες και complete intersections, όμως εδώ εκ κατασκευής όλοι οι αυτομορφισμοί επεκτείνονται σε γραμμικούς αυτομορφισμούς του περιβάλλοντος χώρου.

Η ομάδα αυτομορφισμών ως αλγεβρικό σύνολο

$X \subset \mathbb{P}^r$ προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Είναι σωστό ότι κάθε αυτομορφισμός $X \to X$ επεκτείνεται σε ένα αυτομορφισμό του περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{P}^r$;

Απαντήσεις στο παραπάνω ερώτημα έχουν δοθεί στην βιβλιογραφία για υπερεπιφάνειες και complete intersections, όμως εδώ εκ κατασκευής όλοι οι αυτομορφισμοί επεκτείνονται σε γραμμικούς αυτομορφισμούς του περιβάλλοντος χώρου.

Ερώτημα Πότε ένα στοιχείο της $\mathrm{GL}(H^0(X, \Omega_X))$ περιορίζεται σε αυτομορφισμό της καμπύλης;

Η ομάδα αυτομορφισμών ως αλγεβρικό σύνολο

$X \subset \mathbb{P}^r$ προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Είναι σωστό ότι κάθε αυτομορφισμός $X \to X$ επεκτείνεται σε ένα αυτομορφισμό του περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{P}^r$;

Απαντήσεις στο παραπάνω ερώτημα έχουν δοθεί στην βιβλιογραφία για υπερεπιφάνειες και complete intersections, όμως εδώ εκ κατασκευής όλοι οι αυτομορφισμοί επεκτείνονται σε γραμμικούς αυτομορφισμούς του περιβάλλοντος χώρου.

Ερώτημα Πότε ένα στοιχείο της $\mathrm{GL}(H^0(X, \Omega_X))$ περιορίζεται σε αυτομορφισμό της καμπύλης;

Απάντηση Πρέπει και αρκεί $\sigma(I_X) \subset I_X$.

Η φυσική αναπαράσταση στο I_X

Το I_X παράγεται από πολυώνυμα βαθμού 2. Αυτά μπορούν να γραφούν με την βοήθεια $g \times g$ συμμετρικούς πίνακες.

$$\tilde{A}_i(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^t A_i \bar{\omega}, \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_g)^t$$

Η φυσική αναπαράσταση στο I_X

Το I_X παράγεται από πολυώνυμα βαθμού 2. Αυτά μπορούν να γραφούν με την βοήθεια $g \times g$ συμμετρικούς πίνακες.

$\tilde{A}_i(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^t A_i \bar{\omega}, \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_g)^t$

$$(\sigma_{\mu,\nu})^t A_i (\sigma_{\mu,\nu}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda(\sigma)_{ji} A_j \qquad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq j.$$

Η φυσική αναπαράσταση στο I_X

Το I_X παράγεται από πολυώνυμα βαθμού 2. Αυτά μπορούν να γραφούν με την βοήθεια $g \times g$ συμμετρικούς πίνακες.

$\tilde{A}_i(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^t A_i \bar{\omega}, \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_g)^t$

$$(\sigma_{\mu,\nu})^t A_i (\sigma_{\mu,\nu}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda(\sigma)_{ji} A_j \qquad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq j.$$

Το πρόβλημα του εγκλεισμού $\sigma(I_X) \subset I_X$ έχει μετατραπεί σε ένα πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας.

Το σχετικό κανονικό ιδεώδες

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_{\mathcal{X}_\eta} \arrow[r, hook] & S_L := L[\omega_1, \dots, \omega_g] \arrow[r, two heads, "\phi_\eta"] & \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\mathcal{X}_\eta, \Omega^{\otimes n}_{\mathcal{X}_\eta/L}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{\mathcal{X}} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook, "\otimes_R L"] \arrow[d, two heads, "\otimes_R R/\mathfrak{m}"] & S_R := R[W_1, \dots, W_g] \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[u, hook, "\otimes_R L"] \arrow[d, two heads, "\otimes_R R/\mathfrak{m}"] & \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\mathcal{X}, \Omega^{\otimes n}_{\mathcal{X}/R}) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\otimes_R L"] \arrow[d, two heads, "\otimes_R R/\mathfrak{m}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{\mathcal{X}_0} \arrow[r, hook] & S_k := k[w_1, \dots, w_g] \arrow[r, two heads, "\phi_0"] & \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\mathcal{X}_0, \Omega^{\otimes n}_{\mathcal{X}_0/k}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Παραμορφώσεις αναπαραστάσεων στην $GL_g(k)$

$$F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni \Gamma \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{liftings της } \rho : G \to \mathrm{GL}_n(k) \\ \text{στην } \rho_\Gamma : G \to \mathrm{GL}_n(\Gamma) \text{ modulo} \\ \text{συζυγία με ένα στοιχείο} \\ \text{του } \ker(\mathrm{GL}_n(\Gamma) \to \mathrm{GL}_n(k)) \end{array} \right\}$$

Παραμορφώσεις αναπαραστάσεων στην $GL_g(k)$

$$F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni \Gamma \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{liftings της } \rho : G \to \mathrm{GL}_n(k) \\ \text{στην } \rho_\Gamma : G \to \mathrm{GL}_n(\Gamma) \text{ modulo} \\ \text{συζυγία με ένα στοιχείο} \\ \text{του } \ker(\mathrm{GL}_n(\Gamma) \to \mathrm{GL}_n(k)) \end{array} \right\}$$

$\mathscr{G}(\Gamma)$	$\mathscr{R}(\Gamma)$	tangent space	action
$\mathrm{GL}_g(\Gamma)$	$\mathrm{End}_g(\Gamma)$	$\mathrm{End}_g(k) = M_g(k)$	$M \mapsto \mathrm{Ad}(\sigma)(M)$
$\mathrm{Aut}\Gamma[[t]]$	$\mathrm{End}(\Gamma[[t]])$	$k[[t]]\frac{d}{dt}$	$f(t)\frac{d}{dt} \longmapsto \mathrm{Ad}(\sigma)\left(f(t)\frac{d}{dt}\right)$

Σχήμα 1: Σύγκριση συναρτητών παραμόρφωσης

Το πρόβλημα της παραμόρφωσης αναπαραστάσεων

Η obstruction στο lifting όπως και πριν δεν υπάρχει

$$H^2(C_q \rtimes C_m, M) \xrightarrow{\text{res}} H^2(C_q, M)$$

$$H^2(C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]}^{C_q}) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(C_q \rtimes C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]})_1 \to H^1(C_m, H^1(C_q, \mathcal{T}_{k[[t]]})) \to$$

$$H^2(C_m, \mathrm{M}^{C_q}) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(C_q \rtimes C_m, \mathrm{M})_1 \to H^1(C_m, H^1(C_q, \mathrm{M})) \to$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{End}_g(k).$$

Το πρόβλημα της παραμόρφωσης αναπαραστάσεων

Η obstruction στο lifting όπως και πριν δεν υπάρχει

$$H^2(C_q \rtimes C_m, M) \xrightarrow{\text{res}} H^2(C_q, M)$$

$$H^2(C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]}^{C_q}) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(C_q \rtimes C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]})_1 \to H^1(C_m, H^1(C_q, \mathcal{T}_{k[[t]]})) \to$$

$$H^2(C_m, \mathrm{M}^{C_q}) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(C_q \rtimes C_m, \mathrm{M})_1 \to H^1(C_m, H^1(C_q, \mathrm{M})) \to$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{End}_g(k).$$

Με τον ίδιο τρόπο όπως και πρίν οδηγούμαστε σε ένα στοιχείο

$$\hat{F}(\Lambda) = \varprojlim_{\nu \in \mathbb{N}} F(\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^\nu).$$

Το πρόβλημα της παραμόρφωσης αναπαραστάσεων

Η obstruction στο lifting όπως και πριν δεν υπάρχει

$$H^2(C_q \rtimes C_m, M) \xrightarrow{\text{res}} H^2(C_q, M)$$

$$H^2(C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]}^{C_q}) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(C_q \rtimes C_m, \mathcal{T}_{k[[t]]})_1 \to H^1(C_m, H^1(C_q, \mathcal{T}_{k[[t]]})) \to$$

$$H^2(C_m, \mathrm{M}^{C_q}) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(C_q \rtimes C_m, \mathrm{M})_1 \to H^1(C_m, H^1(C_q, \mathrm{M})) \to$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{End}_g(k).$$

Με τον ίδιο τρόπο όπως και πρίν οδηγούμαστε σε ένα στοιχείο

$$\hat{F}(\Lambda) = \varprojlim_{\nu \in \mathbb{N}} F(\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^\nu).$$

Τώρα όμως είναι σαφές ότι έχουμε bijection

$$F(\Lambda) \to \hat{F}(\Lambda)$$

Το πρόβλημα του lifting των αυτομορφισμών

Μέσα στον χώρο M των $g \times g$ συμμετρικών πινάκων έχουμε τον υπόχωρο V των πινάκων που ορίζουν το κανονικό ιδεώδες. Θέτουμε $\mathcal{M}$ το Λ-module των συμμετρικών πινάκων και $\mathcal{V}$ τον χώρο των πινάκων που ορίζει το κανονικό ιδεώδες ενός lifting της X.

Το πρόβλημα του lifting των αυτομορφισμών

Μέσα στον χώρο M των $g \times g$ συμμετρικών πινάκων έχουμε τον υπόχωρο V των πινάκων που ορίζουν το κανονικό ιδεώδες. Θέτουμε $\mathcal{M}$ το Λ-module των συμμετρικών πινάκων και $\mathcal{V}$ τον χώρο των πινάκων που ορίζει το κανονικό ιδεώδες ενός lifting της X.

Η lifted καμπύλη $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ δέχεται αυτομορφισμούς από την $C_q \rtimes C_m$ αν και μόνο αν ο χώρος $\mathcal{V}$ είναι ένα $\Lambda[G]$-module.

Συνομολογία Hochshield

Έστω Λ ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος και R μια μη κατ-ανάγκη αντιμεταθετική Λ-άλγεβρα που είναι ένα πεπερασμένης τάξης ελεύθερο Λ-module.

Έστω Λ ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος και R μια μη κατ-ανάγκη αντιμεταθετική Λ-άλγεβρα που είναι ένα πεπερασμένης τάξης ελεύθερο Λ-module.

Έστω

$$\tilde{\rho} : R \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$$

μια σταθερή αναπαράσταση του R στο πεπερασμένης τάξης ελεύθερο Λ-module $\mathcal{M}$.

Συνομολογία Hochshield

Έστω Λ ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος και R μια μη κατ-ανάγκη αντιμεταθετική Λ-άλγεβρα που είναι ένα πεπερασμένης τάξης ελεύθερο Λ-module.

Έστω

$$\tilde{\rho} : R \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$$

μια σταθερή αναπαράσταση του R στο πεπερασμένης τάξης ελεύθερο Λ-module $\mathcal{M}$.

Συμβολίζουμε με $M = \mathcal{M} \otimes_\Lambda k$ και $\rho = \tilde{\rho} \otimes_\Lambda k$.

Συνομολογία Hochshield

Έστω Λ ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος και R μια μη κατ-ανάγκη αντιμεταθετική Λ-άλγεβρα που είναι ένα πεπερασμένης τάξης ελεύθερο Λ-module.

Έστω

$$\tilde{\rho} : R \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$$

μια σταθερή αναπαράσταση του R στο πεπερασμένης τάξης ελεύθερο Λ-module $\mathcal{M}$.

Συμβολίζουμε με $M = \mathcal{M} \otimes_\Lambda k$ και $\rho = \tilde{\rho} \otimes_\Lambda k$.

Αν $V \subset M$ είναι ένα R-stable submodule. Για κάθε Artin local algebra $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ θα συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_A = \mathcal{M} \otimes_\Lambda A$.

Έστω $\mathrm{Def}_{\mathcal{M}}(V \subset M, R)(A) = \{\mathcal{V}_A \subset \mathcal{M}_A | \mathcal{V}_A \otimes_A k = V\}$,

το σύνολο των ευθέων A-submodules $\mathcal{V}_A$ που παραμορφώνουν το V στο $\mathcal{M}_A$, ώστε το $\mathcal{V}_A$ να είναι $R \otimes_\Lambda A$-stable. Ο χώρος $\mathrm{Def}_{\mathcal{M}}(V \subset M, R)$ θα λέγεται ο deformation functor του V στο M.

Έστω $\mathrm{Def}_{\mathcal{M}}(V \subset M, R)(A) = \{\mathcal{V}_A \subset \mathcal{M}_A | \mathcal{V}_A \otimes_A k = V\}$,

το σύνολο των ευθέων A-submodules $\mathcal{V}_A$ που παραμορφώνουν το V στο $\mathcal{M}_A$, ώστε το $\mathcal{V}_A$ να είναι $R \otimes_\Lambda A$-stable. Ο χώρος $\mathrm{Def}_{\mathcal{M}}(V \subset M, R)$ θα λέγεται ο deformation functor του V στο M.

Θεωρούμε τον k-διανυσματικό χώρο $\mathrm{Hom}_k(V, M/V)$ ως ένα $R - R$ bimodule.

Θεώρημα Υποθέτουμε ότι ο R είναι πεπερασμένα παραγόμενος πάνω από το Λ. Τότε

1. $\mathrm{Def}_{\mathcal{M}}(V \subset M, R)$ είναι pro-representable
2. Ο εφαπτόμενος χώρος $\mathrm{Def}_{\mathcal{M}}(V \subset M, R)$ είναι ο $H^0(R - R, \mathrm{Hom}_k(V, M/V))$.
3. Ο χώρος $H^1(R - R, \mathrm{Hom}_k(V/M/V))$ είναι χώρος obstruction

Πρόταση Για κάθε $\Lambda[G]$-module M υπάρχει ένα $\Lambda[G]$-module $U(M)$ ώστε η Hochschild cohomology του $\Lambda[G]$ με συντελεστές στο M να είναι φυσικά ισόμορφη με την συνομολογία ομάδων του G με συντελεστές στο $U(M)$.

Πάλι με την ακολουθία restriction-inflation μπορούμε να δείξουμε ότι η obstruction μηδενίζεται και μπορούμε να σηκώσουμε την $C_q \rtimes C_m$ δράση σε όλη την καμπύλη.

Επιστροφή στο τοπικό πρόβλημα

Δίνεται μια τοπική δράση

$$\rho : D_q \to \mathrm{Aut}(k[[t]]).$$

Μπορεί αυτή να γίνει lift σε μία αναπαράσταση

$$\tilde{\rho} : D_q \to \mathrm{Aut}(\Lambda[[t]]);$$

Επιστροφή στο τοπικό πρόβλημα

Δίνεται μια τοπική δράση

$$\rho : D_q \to \mathrm{Aut}(k[[t]]).$$

Μπορεί αυτή να γίνει lift σε μία αναπαράσταση

$$\tilde{\rho} : D_q \to \mathrm{Aut}(\Lambda[[t]]);$$

Ναι!

Το lift της διεδρικής ομάδας

- Θεωρούμε την Harbater-Katz-Gabber compactification της τοπικής δράσης.

Το lift της διεδρικής ομάδας

- Θεωρούμε την Harbater-Katz-Gabber compactification της τοπικής δράσης. Αυτό είναι ένα Galois-cover $X \to \mathbb{P}^1$ με δύο ακριβώς σημεία διακλάδωσης. Το ένα είναι tame και έχει ομάδα ανάλυσης C_2, το άλλο έχει ομάδα ανάλυσης D_q.
- Κάνουμε lift την καμπύλη σε μία καμπύλη $\mathcal{X}$ με ομάδα αυτομορφισμών D_q. Αυτή δεν είναι πλέον HKG, εμφανίζεται το φαινόμενο του διαχωρισμού του τόπου διακλάδωσης.

Ομάδες διακλάδωσης

Έστω $\sigma \in G = \mathrm{Gal}(L/K)$, L, K τοπικά σώματα και $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq -1$. Ορίζουμε την i ομάδα διακλάδωσης:

$$G_i = \{\sigma \in G : i_G(\sigma) := v_L(\sigma(t) - t) \geq i + 1\},$$

όπου t είναι ένας local uniformizer για το L.

Ομάδες διακλάδωσης

Έστω $\sigma \in G = \mathrm{Gal}(L/K)$, L, K τοπικά σώματα και $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq -1$. Ορίζουμε την i ομάδα διακλάδωσης:

$$G_i = \{\sigma \in G : i_G(\sigma) := v_L(\sigma(t) - t) \geq i + 1\},$$

όπου t είναι ένας local uniformizer για το L.

Οι ομάδες διακλάδωσης σχηματίζουν μια filtration

$$G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots G_n > \{1\}$$

ώστε G_0/G_1 κυκλική ομάδα τάξης πρώτης προς το p και G_i/G_{i+1} μία elementary abelian group.

Ομάδες διακλάδωσης

Έστω $\sigma \in G = \mathrm{Gal}(L/K)$, L, K τοπικά σώματα και $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq -1$. Ορίζουμε την i ομάδα διακλάδωσης:

$$G_i = \{\sigma \in G : i_G(\sigma) := v_L(\sigma(t) - t) \geq i + 1\},$$

όπου t είναι ένας local uniformizer για το L.

Οι ομάδες διακλάδωσης σχηματίζουν μια filtration

$$G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots G_n > \{1\}$$

ώστε G_0/G_1 κυκλική ομάδα τάξης πρώτης προς το p και G_i/G_{i+1} μία elementary abelian group.

Το θεώρημα Hasse-Arf

Έστω G μια κυκλική p-ομάδα τάξης p^n. Η ramification filtration δίνεται από

$$G_0 = G_1 = \cdots = G_{j_0} \gneqq G_{j_0+1} = \cdots = G_{j_1} \gneqq G_{j_1+1} = \cdots = G_{j_{n-1}} \gneqq \{1\},$$

δηλαδή τα πηδήματα εμφανίζονται στους ακεραίους $j_0, \dots, j_{n-1}$. με

$$j_k = i_0 + i_1 p + i_2 p^2 + \cdots i_k p^k.$$

Η αναπαράσταση του Artin

$$a_G(\sigma) = \begin{cases} -f i_G(\sigma) & \text{αν } \sigma \neq 1 \\ a_G(\sigma) = f \sum_{\sigma \neq 1} i_G(\sigma) \end{cases}$$

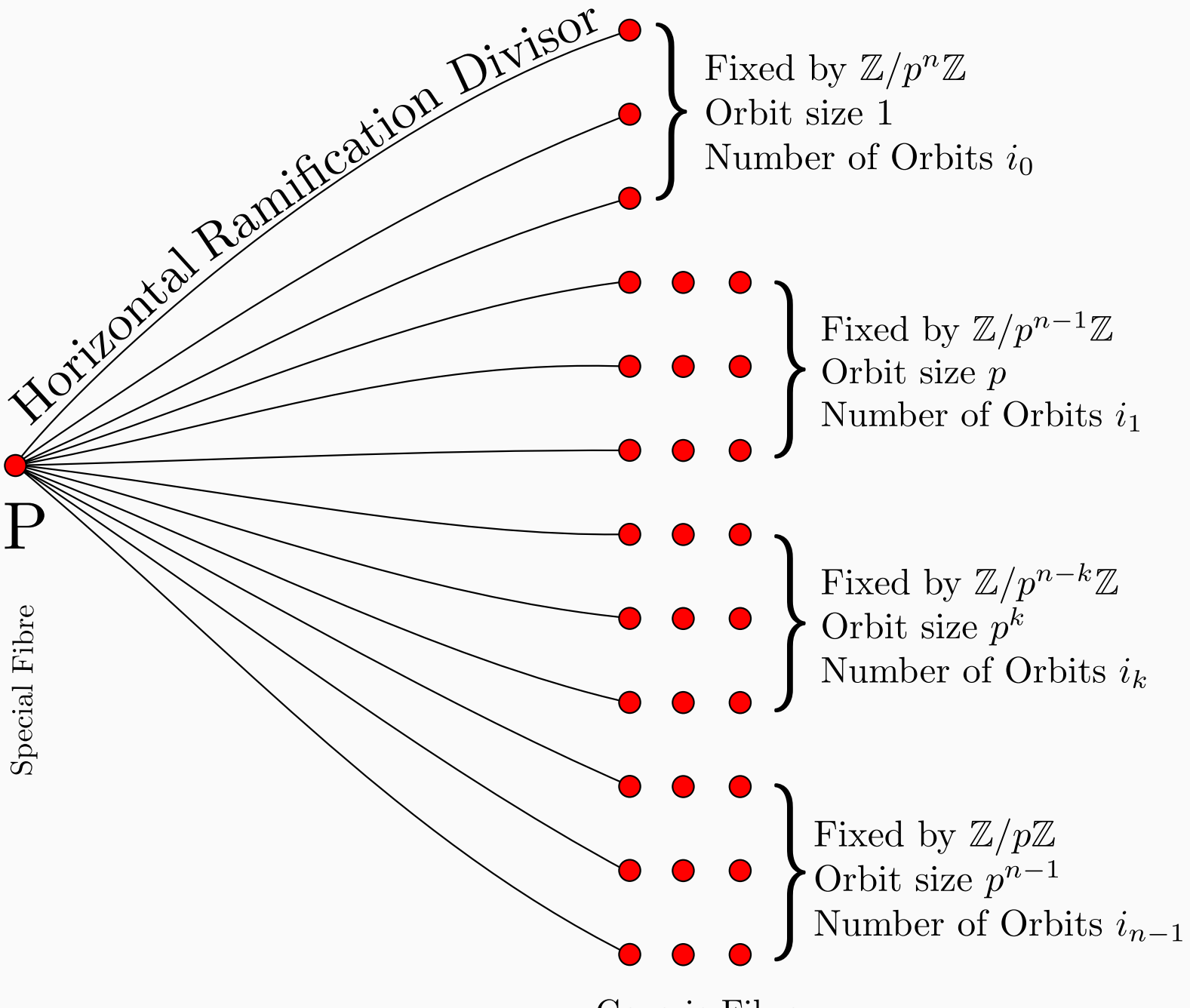
$$a_G(\sigma) = \begin{cases} -f i_G(\sigma) & \text{αν } \sigma \neq 1 \\ a_G(\sigma) = f \sum_{\sigma \neq 1} i_G(\sigma) \end{cases}$$

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι A είναι μια ακεραία περιοχή και $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec} A$ μια παραμόρφωση της X. Έστω $\bar{P}_i$, $i = 1, \cdots, s$ οι οριζόντιοι divisors διακλάδωσης οι οποίοι τέμνονται στην ειδική ίνα, στο σημείο P και έστω P_i τα σημεία στην γενική ίνα. Για τις αναπαραστάσεις του Artin οι οποίες είναι προσαρτημένες στα σημεία P, P_i έχουμε:

$$\mathrm{ar}_P(\sigma) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{ar}_{P_i}(\sigma).$$

Διαχωρισμός του τόπου διακλάδωσης



Το τελικό επιχείρημα

Αν $s \in G_0$ τότε $s(t) = ut$, όπου $\theta_0(s) := u \in L^*$.

Αν $s \in G_i$ με $i \geq 1$ τότε $st = t(1+a)$ όπου $a \in \langle t \rangle^i$

και $\theta_i(s) = a \mod \langle t \rangle^{i+1} \in \langle t \rangle^i / \langle t \rangle^{i+1}$.

Το τελικό επιχείρημα

Αν $s \in G_0$ τότε $s(t) = ut$, όπου $\theta_0(s) := u \in L^*$.

Αν $s \in G_i$ με $i \geq 1$ τότε $st = t(1+a)$ όπου $a \in \langle t \rangle^i$

και $\theta_i(s) = a \mod \langle t \rangle^{i+1} \in \langle t \rangle^i / \langle t \rangle^{i+1}$.

Έστω $s \in G_0$ και $\tau \in G_i / G_{i+1}$ $i \geq 1$, τότε ισχύει

$\theta_i(s\tau s^{-1}) = \theta_0(s)^i \theta_i(\tau)$.

Το τελικό επιχείρημα

Αν $s \in G_0$ τότε $s(t) = ut$, όπου $\theta_0(s) := u \in L^*$.

Αν $s \in G_i$ με $i \geq 1$ τότε $st = t(1+a)$ όπου $a \in \langle t \rangle^i$

και $\theta_i(s) = a \mod \langle t \rangle^{i+1} \in \langle t \rangle^i / \langle t \rangle^{i+1}$.

Έστω $s \in G_0$ και $\tau \in G_i / G_{i+1}$ $i \geq 1$, τότε ισχύει

$\theta_i(s\tau s^{-1}) = \theta_0(s)^i \theta_i(\tau)$.

$G = D_q$ και s το στοιχείο τάξης 2, $\theta_0(s) = -1$.

Το τελικό επιχείρημα

Αν $s \in G_0$ τότε $s(t) = ut$, όπου $\theta_0(s) := u \in L^*$.

Αν $s \in G_i$ με $i \geq 1$ τότε $st = t(1+a)$ όπου $a \in \langle t \rangle^i$

και $\theta_i(s) = a \mod \langle t \rangle^{i+1} \in \langle t \rangle^i / \langle t \rangle^{i+1}$.

Έστω $s \in G_0$ και $\tau \in G_i / G_{i+1}$ $i \geq 1$, τότε ισχύει

$\theta_i(s\tau s^{-1}) = \theta_0(s)^i \theta_i(\tau)$.

$G = D_q$ και s το στοιχείο τάξης 2, $\theta_0(s) = -1$.

$-\theta_{i_0}(\tau) = \theta_{i_0}(\tau^{-1}) = \theta_{i_0}(s\tau s^{-1}) = \theta_0(s)^i \theta_i(\tau) = (-1)^{i_0} \theta_{i_0}(\tau)$.

Το τελικό επιχείρημα

Αν $s \in G_0$ τότε $s(t) = ut$, όπου $\theta_0(s) := u \in L^*$.

Αν $s \in G_i$ με $i \geq 1$ τότε $st = t(1+a)$ όπου $a \in \langle t \rangle^i$

και $\theta_i(s) = a \mod \langle t \rangle^{i+1} \in \langle t \rangle^i / \langle t \rangle^{i+1}$.

Έστω $s \in G_0$ και $\tau \in G_i / G_{i+1}$ $i \geq 1$, τότε ισχύει

$\theta_i(s\tau s^{-1}) = \theta_0(s)^i \theta_i(\tau)$.

$G = D_q$ και s το στοιχείο τάξης 2, $\theta_0(s) = -1$.

$-\theta_{i_0}(\tau) = \theta_{i_0}(\tau^{-1}) = \theta_{i_0}(s\tau s^{-1}) = \theta_0(s)^i \theta_i(\tau) = (-1)^{i_0} \theta_{i_0}(\tau)$.

Άρα ο i_0 είναι περιττός και συνεπώς η D_q όταν δρα στην τροχιά με τα i_0 το πλήθος στοιχεία κρατάει ένα τουλάχιστον αναλλοίωτο.

Ευχαριστώ πολύ!

Ευχαριστώ πολύ!