GALOIS-MODULE ΔΟΜΗ ΧΩΡΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Αριστείδης Κοντογεώργης, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ιωάννινα 18 Μαΐου 2016

- k είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής $p \geq 0$.
- X είναι προβολική αλγεβρική καμπύλη ορισμένη επί του k, με γένος $g \geq 2$.
- Η ομάδα αυτομορφισμών $G = \mathrm{Aut}(X)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα.

Πρόβλημα 1: Να περιγραφεί η φυσική αναπαράσταση της ομάδας G στον χώρο $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$.

- k είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής $p \geq 0$.
- X είναι προβολική αλγεβρική καμπύλη ορισμένη επί του k, με γένος $g \geq 2$.
- Η ομάδα αυτομορφισμών $G = \mathrm{Aut}(X)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα.

Πρόβλημα 1: Να περιγραφεί η φυσική αναπαράσταση της ομάδας G στον χώρο $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$.

Πρόβλημα 2: Να μελετηθεί η equivariant deformation theory καμπυλών με αυτομορφισμούς.

- k είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής $p \geq 0$.
- X είναι προβολική αλγεβρική καμπύλη ορισμένη επί του k, με γένος $g \geq 2$.
- Η ομάδα αυτομορφισμών $G = \mathrm{Aut}(X)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα.

Πρόβλημα 1: Να περιγραφεί η φυσική αναπαράσταση της ομάδας G στον χώρο $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$.

Πρόβλημα 2: Να μελετηθεί η equivariant deformation theory καμπυλών με αυτομορφισμούς.

Πρόβλημα 3: Θεωρία ακεραίων αναπαραστάσεων.

Στην χαρακτηριστική 0 η δομή του χώρου $H^0(X, \Omega_X)$ μελετήθηκε από τον Hurwitz. Η κατάσταση στην θετική χαρακτηριστική είναι δυσκολότερη αφού:

- Εμφανίζονται φαινόμενα της modular θεωρίας αναπαραστάσεων: Οι έννοιες της ανάγωγης αναπαράστασης και της αδιάσπαστης αναπαράστασης διαφέρουν:

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle \to \mathrm{GL}(2, k) \qquad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΘΕΤΙΚΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ.

Στην χαρακτηριστική 0 η δομή του χώρου $H^0(X, \Omega_X)$ μελετήθηκε από τον Hurwitz. Η κατάσταση στην θετική χαρακτηριστική είναι δυσκολότερη αφού:

- Εμφανίζονται φαινόμενα της modular θεωρίας αναπαραστάσεων: Οι έννοιες της ανάγωγης αναπαράστασης και της αδιάσπαστης αναπαράστασης διαφέρουν:
$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle \to \mathrm{GL}(2, k) \qquad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Άγρια διακλάδωση (Wild ramification): Η ομάδες ισοτροπίας $G(P) = \{\sigma \in G : \sigma(P) = P\}$ δεν είναι πλέον κυκλικές.

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΘΕΤΙΚΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ.

Στην χαρακτηριστική 0 η δομή του χώρου $H^0(X, \Omega_X)$ μελετήθηκε από τον Hurwitz. Η κατάσταση στην θετική χαρακτηριστική είναι δυσκολότερη αφού:

- Εμφανίζονται φαινόμενα της modular θεωρίας αναπαραστάσεων: Οι έννοιες της ανάγωγης αναπαράστασης και της αδιάσπαστης αναπαράστασης διαφέρουν:

  $$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle \to \mathrm{GL}(2, k) \qquad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Άγρια διακλάδωση (Wild ramification): Η ομάδες ισοτροπίας $G(P) = \{\sigma \in G : \sigma(P) = P\}$ δεν είναι πλέον κυκλικές.

- Δεν υπάρχει ταξινόμηση αδιάσπαστων modules εκτός αν η G είναι κυκλική. Αν $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, και $p > 2$ πρώτος η ταξινόμηση των αδιάσπαστων αναπαραστάσεων της G θεωρείται *αδύνατη*

- $X \to X/G$ αδιακλάδιστη, η $(|G|, p) = 1$ [Tamagawa, Valentini]
- Άγρια διακλάδωση: γνωστή είναι μόνο η περίπτωση της ασθενούς διακλάδωση [B. Koeck]
- Κυκλικές ομάδες: [Valentini-Madan, Karanikolopoulos K]

μετακυκλικες ομαδες [bleher, chinburg, κ.]

- $H \cong P_H \rtimes C_n, P_H = \langle \sigma \rangle$ είναι p-κυκλική τάξης p^h, $C_n = \langle \tau \rangle$ κυκλική τάξης n, $(n, p) = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{\alpha}$.

- $H \cong P_H \rtimes C_n$, $P_H = \langle \sigma \rangle$ είναι p-κυκλική τάξης p^h, $C_n = \langle \tau \rangle$ κυκλική τάξης n, $(n, p) = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{\alpha}$.
- Περιγραφή των αδιάσπαστων ευθέων προσθετέων: $V(\lambda, k)$ είναι ένα k-διάστατο H-module, $1 \leq k \leq p$) όπου e είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τ, $\tau e = \zeta_n^{\lambda} e$, και μια βάση σχηματίζεται από τα $(\sigma - 1)^{\nu} e, \nu = 0, \ldots, k - 1$.

ΜΕΤΑΚΥΚΛΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ [BLEHER, CHINBURG, Κ.]

- $H \cong P_H \rtimes C_n$, $P_H = \langle \sigma \rangle$ είναι p-κυκλική τάξης p^h, $C_n = \langle \tau \rangle$ κυκλική τάξης n, $(n,p) = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{\alpha}$.
- Περιγραφή των αδιάσπαστων ευθέων προσθετέων: $V(\lambda, k)$ είναι ένα k-διάστατο H-module, $1 \leq k \leq p$) όπου e είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τ, $\tau e = \zeta_n^{\lambda} e$, και μια βάση σχηματίζεται από τα $(\sigma - 1)^{\nu} e, \nu = 0, \ldots, k-1$.
- $$V = \bigoplus_{\lambda=0}^{n-1} \bigoplus_{k=1}^{p^h} V(\lambda, k)^{d(\lambda,k)}.$$

- $H \cong P_H \rtimes C_n$, $P_H = \langle \sigma \rangle$ είναι p-κυκλική τάξης p^h, $C_n = \langle \tau \rangle$ κυκλική τάξης n, $(n,p) = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{\alpha}$.

- Περιγραφή των αδιάσπαστων ευθέων προσθετέων: $V(\lambda, k)$ είναι ένα k-διάστατο H-module, $1 \leq k \leq p$) όπου e είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τ, $\tau e = \zeta_n^{\lambda} e$, και μια βάση σχηματίζεται από τα $(\sigma - 1)^{\nu} e, \nu = 0, \ldots, k-1$.

- $$V = \bigoplus_{\lambda=0}^{n-1} \bigoplus_{k=1}^{p^h} V(\lambda, k)^{d(\lambda,k)}.$$

- Οι ακέραιοι $d(\lambda, k)$ μπορούν να υπολογιστούν σε όρους της διακλάδωσης του καλύμματος.

ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΑΝΑΓΩΓΗ MODULAR ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΣΤΗΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ 3.

- $X_\ell(p)$ modulo $\ell \neq p$ έχει ομάδα αυτομορφισμών η οποία περιέχει την ομάδα $\mathrm{PSL}(2, p)$, που είναι τάξης $(p^2 - 1)p/2$.
- Το κάλυμμα $X_3(p) \to X_3(p)/\mathrm{PSL}(2, p)$ είναι διακλαδισμένο σε δύο σημεία με ομάδες ισοτροπίας S_3 και $\mathbb{Z}/p$ - επιπλέον στην δεύτερη περίπτωση η δεύτερη ομάδα διακλάδωσης είναι τετριμμένη.

$$\begin{array}{ccc}
p = 7 & \oplus V(1,3) & g = 3 \\
p = 11 & V(0,3)^4 \oplus V(1,3)^4 \oplus V(0,2) & g = 26 \\
p = 13 & V(0,3)^8 \oplus V(1,3)^8 \oplus V(0,2) & g = 50 \\
p = 17 & V(0,3^2)^5 \oplus V(1,3^2)^9 \oplus V(0,7) & g = 133 \\
p = 19 & V(0,3^2)^8 \oplus V(1,3^2)^{13} \oplus V(0,7) & g = 196 \\
p = 23 & V(0,3)^{61} \oplus V(1,3)^{62} \oplus V(0,2)^2 \oplus V(1,2) & g = 375 \\
p = 29 & V(0,3)^{130} \oplus V(1,3)^{136} \oplus V(0,2)^2 \oplus V(1,2)^2 & g = 806 \\
p = 31 & V(0,3)^{162} \oplus V(1,3)^{169} \oplus V(0,2)^2 \oplus V(1,2)^2 & g = 1001
\end{array}$$

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι το k έχει θετική χαρακτηριστική p και ότι η ομάδα G έχει κυκλική Sylow p-υποομάδα P. Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο kG-module. Τότε η ανάλυση του M σε ευθύ γινόμενο αδιάσπαστων kG-modules μπορεί να καθορ- στεί από την ανάλυση του M σε ευθύ γινόμενο αδιάσπαστων kH-modules για όλες τις υποομάδες H της G με τις παρακάτω ιδιότητες: Υπάρχει μια μοναδική Sylow p-υποομάδα P_H της H, και το πηλίκο H/P_H είναι κυκλική ομάδα τάξης πρώτης προς το p.

Απόδειξη: Brauer Tree algebras

Μία παραμόρφωση της καμπύλης X είναι μια σχετική καμπύλη (proper, smooth) υπέρ ένα τοπικό δακτύλιο R με μέγιστο ιδεώδες m

$$\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$$

ώστε

$$X \cong \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec} R/m$$

Μία παραμόρφωση της καμπύλης X είναι μια σχετική καμπύλη (proper, smooth) υπέρ ένα τοπικό δακτύλιο R με μέγιστο ιδεώδες m

$$\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$$

ώστε

$$X \cong \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}R/m$$

Το παρακάτω διάγραμμα πρέπει να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X \cong \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}R/m \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(k) \cong R/m \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R)
\end{tikzcd}$$

Δύο παραμορφώσεις $\mathcal{X}_1$ $\mathcal{X}_2$ θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ένας ισομορφισμός ψ που να κάνει το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & \mathcal{X}_2 \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec} R &
\end{tikzcd},$$

και η ψ να επάγει την ταυτότητα στις ειδικές ίνες.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ

Δύο παραμορφώσεις $\mathcal{X}_1$ $\mathcal{X}_2$ θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ψ που να κάνει το διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & \mathcal{X}_2 \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec} R & \\
X \arrow[uu] \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr] & & X \arrow[uu] \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec} k \arrow[uu] &
\end{tikzcd},$$

- Ένας συναρτητής παραμόρφωσης είναι ένας συναρτητής από την κατηγορία των δακτυλίων (τοπικές άλγεβρες Artin) στην κατηγορία των συνόλων:

$$D : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets},$$

$$A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{κλάσεις ισοδυναμίας} \\ \text{παραμορφώσεων του } X \text{ υπέρ } A \end{array} \right\}.$$

- Εφαπτόμενος χώρος $D(k[\epsilon]/\langle\epsilon^2\rangle)$. Είναι ένας διανυσματικός χώρος και από την συνομολογία του Chech και το θεώρημα της αφινικής διάσπασης (affine triviality) μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$D(k[\epsilon]/\langle\epsilon^2\rangle) = H^1(X, T_X).$$

Θεωρούμε ζευγάρια (X, G) καμπυλών μαζί με μια υποομάδα G της ομάδας αυτομορφισμών. Μία παραμόρφωση του ζευγαριού (X, G) με βάση τον τοπικό δακτύλιο R είναι μια παραμόρφωση της καμπύλης X υπέρ το R μαζί με ένα αυτομορφισμό ομάδων

$$G \to \mathrm{Aut}_R(\mathcal{X}),$$

ώστε να υπάρχει ένας
G-equivariant ισομορφισμός ϕ από την ίνα του κλειστού σημείου του A στην αρχική καμπύλη X:

$$\phi : \mathcal{X} \otimes_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(k) \to X.$$

Η έννοια της ισοδυναμίας των (X, G) παραμορφώσεων ορίζεται όπως και στην μη equivariant περίπτωση, αλλά τώρα υποθέτουμε επιπλέον ότι και η ψ είναι επίσης G-equivariant.

Η ψ είναι *G*-equivariant.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & \mathcal{X}_2 \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec} R & \\
X \arrow[uu] \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr] & & X \arrow[uu] \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec} k \arrow[uu] &
\end{tikzcd},$$

$$D_{\mathrm{gl}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets},$$

$$A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας} \\ \text{παραμορφοσης} \\ \text{ζευγαριών } (X, G) \text{ υπέρ } A \end{array} \right\}$$

Ο ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

$$D_{\mathrm{gl}} : \mathcal{C} \to \text{Sets},$$
$$A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας} \\ \text{παραμορφοσης} \\ \text{ζευγαριών } (X, G) \text{ υπέρ } A \end{array} \right\}$$

Προβλήματα:

- Να υπολογιστεί η διάσταση του εφαπτόμενου χώρου $T := D(k[\epsilon]/\langle \epsilon^2 \rangle)$, σε όρους διακλάδωσης του καλύμματος $X \to X/G$.
- Για ένα $v \in T$, *να ολοκληρώσουμε σε μία παραμόρφωση* $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(A)$ υπέρ ενός πλήρους τοπικού δακτυλίου.

Υπάρχει μια αναπαράσταση

$$\rho : G(P) \to \mathrm{Aut}(k[[t]])$$

που εκφράζει την δράση της ομάδας ισοτροπίας στον completed δακτύλιο ενός σημείου.

Υπάρχει μια αναπαράσταση

$$\rho : G(P) \to \mathrm{Aut}(k[[t]])$$

που εκφράζει την δράση της ομάδας ισοτροπίας στον completed δακτύλιο ενός σημείου.

Ο τοπικός συναρτητής παραμόρφωσης ορίζεται:

$$D_P : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}, A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{lifts } G(P) \to \mathrm{Aut}(A[[t]]) \text{ της } \rho \text{ mod-} \\ \text{ulo συζυγία με ένα στοιχείο} \\ \text{της } \ker(\mathrm{Aut}A[[t]] \to k[[t]]) \end{array} \right\}$$

- Οι θεωρίες συνομολογίας προκύπτουν ως derived συναρτητές κατάλληλων αριστερά ακριβών συναρτητών. Για παράδειγμα η συνομολογία ομάδων προκύπτει από τον συναρτητή αναλλοίωτων των G-modules, ενώ την Zariski (etale κτλ) η συνομολογία προκύπτει από τον συναρτητή των global sections.

- Οι θεωρίες συνομολογίας προκύπτουν ως derived συναρτητές κατάλληλων αριστερά ακριβών συναρτητών. Για παράδειγμα η συνομολογία ομάδων προκύπτει από τον συναρτητή αναλλοίωτων των G-modules, ενώ την Zariski (etale κτλ) η συνομολογία προκύπτει από τον συναρτητή των global sections.

- Grothendieck’s Tohoku paper: Συνομολογία της σύνθεσης δύο αριστερά ακριβών συναρτητών. Μάλιστα για το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει θα πρέπει να συνθέσουμε τις global sections και τις group invariants. Εργαλείο υπολογισμού: 5-term exact sequence.

- Η μελέτη του συναρτητή παραμόρφωσης D_{gl} ανάγεται στην μελέτη των παρακάτω συναρτητών παραμόρφωσης που βασίζονται σε κάθε άγρια διακλαδισμένο σημείο P του καλύμματος $X \to X/G$:

$$0 \to H^1\left(\frac{X}{G}, \pi_*^G(T_X)\right) \to H^1(G, X, T_X) \to H^0\left(\frac{X}{G}, R^1\pi_*^G(T_X)\right) \to 0.$$

- Υπολογίζουμε:

$$\dim H^1(X/G, \pi_*^G(T_X)) = 3g_{X/G} - 3 + \sum_{\mu=1}^{r} \left\lceil \sum_{i=0}^{n_\mu} \frac{e_i^{(\mu)} - 1}{e_0^{(\mu)}} \right\rceil .$$

- $H^0\left(\frac{X}{G}, R^1\pi_*^G(T_X)\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H^1(G(x_i), \hat{T}_{X,x_i})$.

Το τελευταίο άθροισμα διατρέχει όλα τα διακλαδισμένα σημεία και είναι απλά συνομολογία ομάδων.

- Στόχος: κατανόηση του $\hat{T}_{X,x_i}$ και της δράσης του G σε αυτόν (adjoint action).

$$\left(f(t)\frac{d}{dt}\right)^{\sigma} = f(t)^{\sigma}\sigma\frac{d}{dt}\sigma^{-1} = f(t)^{\sigma}\sigma\left(\frac{d\sigma^{-1}(t)}{dt}\right)\frac{d}{dt}$$

- Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε μόνο για συγκεκριμένα καλύμματα ειδικότερα για επεκτάσεις Artin-Schreie.
- Χρήση του γεγονότος ότι η ομάδα $G(P)$ είναι επιλύσιμη. (Φασματική ακολουθία των Lyndon-Hochshild-Serre).

Επέκταση ομάδων:

$$1 \to H \to G \to G/H \to 1,$$

Επέκταση ομάδων:

$$1 \to H \to G \to G/H \to 1,$$

δίνει

$$0 \to H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{res}}$$
$$\longrightarrow H^1(H, A)^{G/H} \xrightarrow{\text{tg}} H^2(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(G, A)$$

Επέκταση ομάδων:

$$1 \to H \to G \to G/H \to 1,$$

δίνει

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{res}} \\ \longrightarrow H^1(H, A)^{G/H} \xrightarrow{\text{tg}} H^2(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(G, A) \end{aligned}$$

Πρόβλημα: Περιγραφή της συνάρτησης transgression.

Θεώρημα

Αν G είναι αβελιανή ομάδα και $G/H \cong \mathbb{Z}/p$, $G \cong G/H \times H$ τότε η transgression map είναι μηδενική.

Ιδέα: Serre duality:

$$H^1(X, T_X) \cong H^0(X, \Omega^{\otimes 2})^*$$

Ιδέα: Serre duality:

$$H^1(X, T_X) \cong H^0(X, \Omega^{\otimes 2})^*$$

Equivariant έκδοση της Serre duality:

$$D_{\mathrm{gl}}(k[\epsilon]/\langle \epsilon^2 \rangle) = H^1(X, T_X)^G \cong H^0(X, \Omega_X^{\otimes 2})_G.$$

Για ένα G-module A,

$$A^G := \{a \in A : a^g = a\}$$

$$A_G := A/\langle ga - a : a \in A, g \in G \rangle.$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

- Αν $G = \mathbb{Z}/p$, τότε $A^G = A_G$.
- Αν $G = \mathbb{Z}/p \times \cdots \times \mathbb{Z}/p$, τότε μπορούμε να έχουμε $A^G \neq A_G$.

- Αν $G = \mathbb{Z}/p$, τότε $A^G = A_G$.
- Αν $G = \mathbb{Z}/p \times \cdots \times \mathbb{Z}/p$, τότε μπορούμε να έχουμε $A^G \neq A_G$.

Ιδέα: Η γνώση της $k[G]$-module δομής οδηγεί σε υπολογισμό της $\dim D_{\mathrm{gl}}(k[\epsilon])$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΜΕΡΙΚΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΑΒΕΛΙΑΝΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

$F/K(x)$ with $y^{p^n} - y = \frac{g(x)}{(x-a_1)^{\Phi(1)}\cdots(x-a_s)^{\Phi(s)}}$

$$\Omega(m) \cong \bigoplus_{j=1}^{p^n} W_j^{d_j}.$$

$$\Gamma_k = \sum_{i=1}^{s} \left\lfloor \frac{m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - k\Phi(i)}{p^n} \right\rfloor$$

$$d_{p^n} = \Gamma_{p^n-1}(m) - 2m + 1,$$
$$d_j = \Gamma_{j-1}(m) - \Gamma_j(m), \qquad j = 1, \ldots, p^n - 1,$$

$$W_j = \langle \theta_0, \ldots, \theta_{j-1} \rangle_K, \qquad \sigma_\alpha(\theta_i) = \sum_{\ell=0}^{i} \binom{i}{\ell} \alpha^{i-\ell} \theta_\ell.$$

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι το j έχει το p-αδικό ανάπτυγμα $j = \sum_{i=1}^{n} a_i p^i$. Έστω χ η συνάρτηση

$$\chi : \{0, \ldots, p-1\} \to \{0, 1\}$$

που ορίζεται από:

$$\chi(a) := \begin{cases} 1 & \text{αν } a \neq 0, \\ 0 & \text{αν } a = 0 \end{cases}$$

τότε

$$\dim((W_j)_G) = \sum_{i=1}^{n} \chi(a_i).$$

Θεώρημα

$$\dim(H^1(X, G, T_X)) = \begin{cases} s(n+2) - 3 & \textit{if } p > 3 \\ s(n+1) - 3 & \textit{if } p = 3 \\ sn - 3 & \textit{if } p = 2 \end{cases}$$

Έστω P ένα πλήρως διακλαδισμένο σημείο του $X \to X/G_1(P)$.

Θεώρημα

υποθέτουμε ότι $g_X \geq 2$, $p \geq 2, 3$. Θεωρούμε την ημιομάδα του Weierstrass στο P μέχρι τον πρώτο pole number m_r που διαιρείται με p:

$$0 = m_0 < \cdots < m_{r-1} < m_r,$$

και επιλέγουμε συναρτήσεις στο $k(X)$ $f_0, \ldots, f_r$ με $(f_i)_\infty = m_i P$. Τότε η φυσική αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}(L(m_r P))$$

είναι πιστή.

ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟ AUT(K[[T]]).

- Επιλογή του uniformizer t ώστε $f_r = t^{-m}, m = m_r$

ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟ AUT(K[[T]]).

- Επιλογή του uniformizer t ώστε $f_r = t^{-m}, m = m_r$

- Η δράση δίνεται στην κλειστή μορφή:

$$\sigma(t) = t\left(1 + t^m \sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu,r} f_\nu\right)^{-1/m}.$$

- **Ιδέα:** Χρήση της γενικής γραμμικής ομάδας αντί της $\mathrm{Aut}(k[[t]])$.

Για κάθε $0 \leq i \leq r$, θεωρούμε τις αναπαραστάσεις:

$$\rho_i : G_1(P) \to \mathrm{GL}(L(m_i P)),$$

η οποίες δίνουν την φθίνουσα ακολουθία ομάδων:

$$G_1(P) = \ker \rho_0 \supseteq \ker \rho_1 \supseteq \ker \rho_2 \supseteq \cdots \supseteq \ker \rho_r = \{1\}.$$

Για κάθε $0 \leq i \leq r$, θεωρούμε τις αναπαραστάσεις:

$$\rho_i : G_1(P) \to \mathrm{GL}(L(m_i P)),$$

η οποίες δίνουν την φθίνουσα ακολουθία ομάδων:

$$G_1(P) = \ker \rho_0 \supseteq \ker \rho_1 \supseteq \ker \rho_2 \supseteq \cdots \supseteq \ker \rho_r = \{1\}.$$

Αυτές αντιστοιχούν σε ένα πύργο από σώματα συναρτήσεων:

$$F^{G_1(P)} = F^{\ker \rho_0} \subseteq F^{\ker \rho_1} \subseteq \cdots \subseteq F^{\ker \rho_r} = F.$$

Για κάθε $0 \leq i \leq r$, θεωρούμε τις αναπαραστάσεις:

$$\rho_i : G_1(P) \to \mathrm{GL}(L(m_i P)),$$

η οποίες δίνουν την φθίνουσα ακολουθία ομάδων:

$$G_1(P) = \ker \rho_0 \supseteq \ker \rho_1 \supseteq \ker \rho_2 \supseteq \cdots \supseteq \ker \rho_r = \{1\}.$$

Αυτές αντιστοιχούν σε ένα πύργο από σώματα συναρτήσεων:

$$F^{G_1(P)} = F^{\ker \rho_0} \subseteq F^{\ker \rho_1} \subseteq \cdots \subseteq F^{\ker \rho_r} = F.$$

Θεώρημα

Αν $X \to X/G$ είναι ένα HKG-κάλυμμα, τότε η representation και η ramification filtrations ταυτίζονται.

- Η HKG-συμπαγοποίηση μας επιτρέπει να προσαρτήσουμε *καθολικές αναλλοιώτους* στην τοπική περίπτωση όπως το γένος η Ιακωβιανή, το p-rank, διαφορικά κτλ.

G-MODULE STRUCTURE ΓΙΑ HKG-ΚΑΛΥΜΜΑΤΑ

- Η HKG-συμπαγοποίηση μας επιτρέπει να προσαρτήσουμε *καθολικές αναλλοιώτους* στην τοπική περίπτωση όπως το γένος η Ιακωβιανή, το p-rank, διαφορικά κτλ.

- Μελέτη του $H^0(X, \Omega_X^{\otimes m})$.

- Η HKG-συμπαγοποίηση μας επιτρέπει να προσαρτήσουμε *καθολικές αναλλοιώτους* στην τοπική περίπτωση όπως το γένος η Ιακωβιανή, το p-rank, διαφορικά κτλ.

- Μελέτη του $H^0(X, \Omega_X^{\otimes m})$.

Διαλέγουμε μια συνάρτηση $f_{i_0} \in k(X)$ ώστε $k(X)^G = k(f_{i_0})$.

$$\mathrm{div}(df_{i_0}^{\otimes m}) = \left(-2mp^{h_0} + m \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1})(p^{h-1} - 1)\right) P,$$

όπου

$$b_0 = -1, p^{h_0} = |G_1(P)|, p^{h_i} = |\ker \rho_{c_{i+1}}| = |G_{b_{i+1}}|, \text{ για } i \geq 1.$$

Θεώρημα

Για κάθε pole number μ επιλέγουμε μια συνάρτηση f_μ ώστε $(f_\mu)_\infty = \mu P$. Το σύνολο

$$\{f_\mu df_{i_0}^{\otimes m} : \deg(f_i) \leq m(2g_X - 2)\}$$

σχηματίζει μια βάση του χώρου των m-ολόμορφων (πολυ)διαφορικών του X.

Θεώρημα

Για κάθε pole number μ επιλέγουμε μια συνάρτηση f_μ ώστε $(f_\mu)_\infty = \mu P$. Το σύνολο

$$\{f_\mu df_{i_0}^{\otimes m} : \deg(f_i) \leq m(2g_X - 2)\}$$

σχηματίζει μια βάση του χώρου των m-ολόμορφων (πολυ)διαφορικών του X.

Θεώρημα

Το module $H^0(X, \Omega_X^{\otimes m})$ είναι ευθύς προσθεταίος $N = \left\lfloor \frac{m(2g-2)}{p^{h_0}} \right\rfloor$ ευθέων αδιάσπαστων modules.

Θεώρημα

Για κάθε pole number μ επιλέγουμε μια συνάρτηση f_μ ώστε $(f_\mu)_\infty = \mu P$. Το σύνολο

$$\{f_\mu df_{i_0}^{\otimes m} : \deg(f_i) \leq m(2g_X - 2)\}$$

σχηματίζει μια βάση του χώρου των m-ολόμορφων (πολυ)διαφορικών του X.

Θεώρημα

Το module $H^0(X, \Omega_X^{\otimes m})$ είναι ευθύς προσθεταίος $N = \left\lfloor \frac{m(2g-2)}{p^{h_0}} \right\rfloor$ ευθέων αδιάσπαστων modules.

Πόρισμα: Αν $|G_1(P)| \geq m(2g-2)$, τότε $N = 1$. Ειδικότερα καμπύλες με *μεγάλη δράση* (κατά τους M.Matignon-M.Rocher) έχουν ένα αδιάσπαστο προσθεταίο.

Λήμμα

Έστω R μια τοπική ακέραια περιοχή με σώμα υπολοίπων k και σώμα πηλίκων L. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R module M ώστε $\dim_k M \otimes_R k = \dim_L M \otimes_R L = r$ *είναι ελεύθερο R-module τάξης r.*

Λήμμα

Έστω R μια τοπική ακέραια περιοχή με σώμα υπολοίπων k και σώμα πηλίκων L. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R module M ώστε $\dim_k M \otimes_R k = \dim_L M \otimes_R L = r$ είναι ελεύθερο R-module τάξης r.

Έστω $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec} R$ μια παραμόρφωση του ζευγαριού (X, G). Οι χώροι $M_n = H^0(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^{\otimes n})$ είναι ελεύθερα R-modules.

Λήμμα

Έστω R μια τοπική ακέραια περιοχή με σώμα υπολοίπων k και σώμα πηλίκων L. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R module M ώστε $\dim_k M \otimes_R k = \dim_L M \otimes_R L = r$ είναι ελεύθερο R-module τάξης r.

Έστω $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec} R$ μια παραμόρφωση του ζευγαριού (X, G). Οι χώροι $M_n = H^0(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^{\otimes n})$ είναι ελεύθερα R-modules.

Πρόβλημα: Περιγράψτε την module δομή των M_n σε όρους *ακεραίων αναπαραστάσεων*.

Λήμμα

Έστω R μια τοπική ακέραια περιοχή με σώμα υπολοίπων k και σώμα πηλίκων L. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R module M ώστε $\dim_k M \otimes_R k = \dim_L M \otimes_R L = r$ είναι ελεύθερο R-module τάξης r.

Έστω $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec} R$ μια παραμόρφωση του ζευγαριού (X, G). Οι χώροι $M_n = H^0(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^{\otimes n})$ είναι ελεύθερα R-modules.

Πρόβλημα: Περιγράψτε την module δομή των M_n σε όρους *ακεραίων αναπαραστάσεων*.

Παρατήρηση Συνήθως με τον όρο *ακαίρεα αναπαράσταση* εννοούμε την θεωρία των $\mathbb{Z}[G]$-modules. Η περίπτωση που μελετάμε είναι λίγο ευκολότερη αφού περιοριζόμαστε σε πλήρης τοπικούς δακτυλίους και επισυνάπτουμε και τις ιδιοτιμές που λείπουν $R = W(k)(\zeta_n)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΟΜΑΔΑΣ

Επεκτείνουμε τους διονυμικούς συντελεστές $\binom{i}{j}$ με μηδέν $i < j$. Για $a \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε τον πίνακα $A_a = (a_{ij})$,που ορίζεται από τα

$$a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}.$$

Αυτός είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας που ορίζεται στο $\mathbb{Z}$, και στην θετική χαρακτηριστική έχει τάξη p.

Επεκτείνουμε τους διονυμικούς συντελεστές $\binom{i}{j}$ με μηδέν $i < j$. Για $a \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε τον πίνακα $A_a = (a_{ij})$,που ορίζεται από τα

$$a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}.$$

Αυτός είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας που ορίζεται στο $\mathbb{Z}$, και στην θετική χαρακτηριστική έχει τάξη p.

Η αναπαράσταση

$$\rho : \sigma^i \to A_a^i$$

είναι αδιάσπαστη.

Επεκτείνουμε τους διονυμικούς συντελεστές $\binom{i}{j}$ με μηδέν $i < j$. Για $a \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε τον πίνακα $A_a = (a_{ij})$,που ορίζεται από τα

$$a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}.$$

Αυτός είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας που ορίζεται στο $\mathbb{Z}$, και στην θετική χαρακτηριστική έχει τάξη p.

Η αναπαράσταση

$$\rho : \sigma^i \to A_a^i$$

είναι αδιάσπαστη.

Ιδέα: Υπέρ το σώμα k θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο με βάση $\{1, x, x^2, \ldots, x^{a-1}\}$, και την δράση στον γεννήτορα $x \mapsto x + 1$. (οπότε $x^i \mapsto (x+1)^i$).

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

- S είναι ακέραια περιοχή και επιπλέον $W(k)[\zeta_p]$-άλγεβρα
- $\lambda = \zeta_p - 1$ ($\lambda \equiv 0 \mod m$)
- Για $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το S-module

$$\tilde{V}_{a_0,a_1} :=_S \langle (\lambda X + 1)^i : a_0 \leq i \leq a_0 + a_1 \rangle \subset S(\lambda X + 1).$$

- S είναι ακέραια περιοχή και επιπλέον $W(k)[\zeta_p]$-άλγεβρα
- $\lambda = \zeta_p - 1$ ($\lambda \equiv 0 \mod m$)
- Για $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το S-module

$$\tilde{V}_{a_0,a_1} :=_S \langle (\lambda X + 1)^i : a_0 \leq i \leq a_0 + a_1 \rangle \subset S(\lambda X + 1).$$

Τα modules $\tilde{V}_{a_0,a_1}, \tilde{V}_{a_0+p,a_1}$ είναι ισόμορφα.

- S είναι ακέραια περιοχή και επιπλέον $W(k)[\zeta_p]$-άλγεβρα
- $\lambda = \zeta_p - 1$ ($\lambda \equiv 0 \mod m$)
- Για $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το S-module

$$\tilde{V}_{a_0,a_1} :=_S \langle (\lambda X + 1)^i : a_0 \leq i \leq a_0 + a_1 \rangle \subset S(\lambda X + 1).$$

Τα modules $\tilde{V}_{a_0,a_1}, \tilde{V}_{a_0+p,a_1}$ είναι ισόμορφα.

Παρατήρηση: Η αναγωγή της παραπάνω βάσης είναι τετριμμένη.

- S είναι ακέραια περιοχή και επιπλέον $W(k)[\zeta_p]$-άλγεβρα
- $\lambda = \zeta_p - 1$ ($\lambda \equiv 0 \mod m$)
- Για $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το S-module

$$\tilde{V}_{a_0,a_1} :=_S \langle (\lambda X + 1)^i : a_0 \leq i \leq a_0 + a_1 \rangle \subset S(\lambda X + 1).$$

Τα modules $\tilde{V}_{a_0,a_1}, \tilde{V}_{a_0+p,a_1}$ είναι ισόμορφα.

Παρατήρηση: Η αναγωγή της παραπάνω βάσης είναι τετριμμένη.

Αλλάζουμε λίγο τον ορισμό θεωρώντας τα modules:

$$V_{a_0,a_1} :=_S \langle (\lambda X + 1)^{a_0} X^i : 0 \leq i < a_1 \rangle.$$

- S είναι ακέραια περιοχή και επιπλέον $W(k)[\zeta_p]$-άλγεβρα
- $\lambda = \zeta_p - 1$ ($\lambda \equiv 0 \mod m$)
- Για $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το S-module

$$\tilde{V}_{a_0,a_1} :=_S \langle (\lambda X + 1)^i : a_0 \leq i \leq a_0 + a_1 \rangle \subset S(\lambda X + 1).$$

Τα modules $\tilde{V}_{a_0,a_1}, \tilde{V}_{a_0+p,a_1}$ είναι ισόμορφα.

Παρατήρηση: Η αναγωγή της παραπάνω βάσης είναι τετριμμένη.

Αλλάζουμε λίγο τον ορισμό θεωρώντας τα modules:

$$V_{a_0,a_1} :=_S \langle (\lambda X + 1)^{a_0} X^i : 0 \leq i < a_1 \rangle.$$

Τα modules $\tilde{V}_{a_0,a_1}$ και V_{a_0,a_1} είναι $\mathrm{GL}_a(\mathrm{Quot}(\mathrm{S}))$-ισόμορφα αλλά όχι $\mathrm{GL}_a(S)$-ισόμορφα.

- Τα modules V_{a_0,a_1} είναι αδιάσπαστα. Πράγματι, η αναγωγή τους είναι το αδιάσπαστο module $1, x, \ldots, x^{a-1}$.
- Θέτουμε $V_a := V_{1-p,a}$
- Θέτουμε

$$R = \begin{cases} W(k)[\zeta_p][x_1, \ldots, x_q] & \text{if } l = 1 \\ W(k)[\zeta_p][x_1, \ldots, x_{q-1}] & \text{if } l > 1 \end{cases}$$

- Τα modules V_{a_0,a_1} είναι αδιάσπαστα. Πράγματι, η αναγωγή τους είναι το αδιάσπαστο module $1, x, \ldots, x^{a-1}$.
- Θέτουμε $V_a := V_{1-p,a}$
- Θέτουμε

$$R = \begin{cases} W(k)[\zeta_p][x_1, \ldots, x_q] & \text{if } l = 1 \\ W(k)[\zeta_p][x_1, \ldots, x_{q-1}] & \text{if } l > 1 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Ο δακτύλιος R στην βιβλιογραφία ονομάζεται ο Oort-Sekiguchi-Suwa παράγοντας του versal deformation ring R_σ.

Θεώρημα

Έστω σ ένας αυτομορφισμός του $\mathcal{X}$ τάξης $p \neq 2$ και conductor m με $m = pq - l$, $1 \leq q$, $1 \leq l \leq p-1$. Το ελεύθερο R-module $H^0(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ έχει την παρακάτω $R[G]$-module δομή:

$$H^0(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}) = \bigoplus_{\nu=0}^{p-2} V_\nu^{\delta_\nu},$$

όπου

$$\delta_\nu = \begin{cases} q + \left\lceil \frac{(\nu+1)l}{p} \right\rceil - \left\lceil \frac{(2+\nu)l}{p} \right\rceil & \text{if } \nu \leq p-3, \\ q - 1 & \text{if } \nu = p-2. \end{cases}$$

- Επεκτάσεις Kummer $(X+\lambda^{-1})^p = x^{-m} + \lambda^{-p}$.

- Επεκτάσεις Kummer $(X+\lambda^{-1})^p = x^{-m} + \lambda^{-p}$.
- $m = pq - l$, $0 < l \leq p-1$ και θέτουμε $\lambda X + 1 = y/x^q$. Το μοντέλο γίνεται $y^p = (\lambda^p + x^m)x^l = \lambda^p x^l + x^{qp}$.

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ BERTIN-MEZARD

- Επεκτάσεις Kummer $(X+\lambda^{-1})^p = x^{-m} + \lambda^{-p}$.

- $m = pq - l, 0 < l \leq p-1$ και θέτουμε $\lambda X + 1 = y/x^q$. Το μοντέλο γίνεται $y^p = (\lambda^p + x^m)x^l = \lambda^p x^l + x^{qp}$.

- Γενικότερα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x^q με $a(x) = x^q + x_1 x^{q-1} + \cdots + x_q$, όπου $x_q = 0$ αν $l \neq 1$, και να θεωρήσουμε την επέκταση Kummer

$$(\lambda\xi + a(x))^p = \lambda^p x^l + a(x)^p,$$

όπου $\xi = Xa(x), y = \lambda\xi + a(x) = a(x)(\lambda X + 1)$ και να έχουμε

$$y^p = \lambda^p x^l + a(x)^p = x^l(\lambda^p + a(x)^p x^{-l}).$$

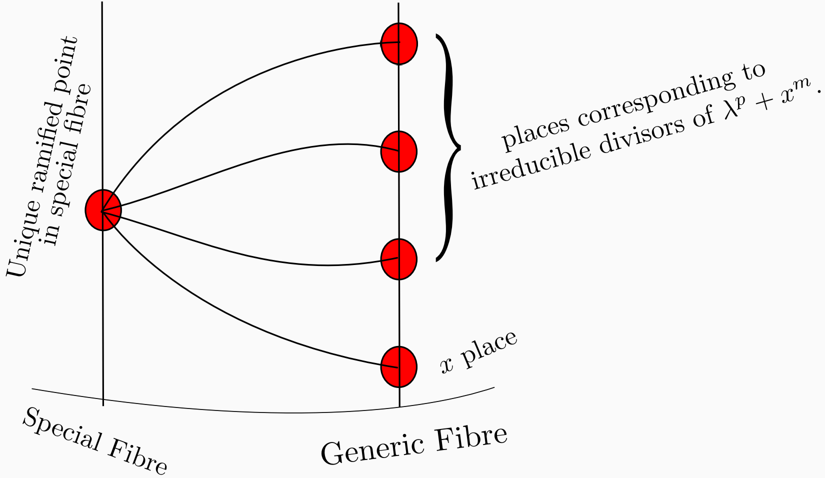
- Επεκτάσεις Kummer $(X+\lambda^{-1})^p = x^{-m}+\lambda^{-p}$.
- $m = pq - l, 0 < l \leq p-1$ και θέτουμε $\lambda X + 1 = y/x^q$. Το μοντέλο γίνεται $y^p = (\lambda^p + x^m)x^l = \lambda^p x^l + x^{qp}$.
- Γενικότερα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x^q με $a(x) = x^q + x_1 x^{q-1} + \cdots + x_q$, όπου $x_q = 0$ αν $l \neq 1$, και να θεωρήσουμε την επέκταση Kummer

$$(\lambda\xi + a(x))^p = \lambda^p x^l + a(x)^p,$$

όπου $\xi = Xa(x), y = \lambda\xi + a(x) = a(x)(\lambda X + 1)$ και να έχουμε

$$y^p = \lambda^p x^l + a(x)^p = x^l(\lambda^p + a(x)^p x^{-l}).$$

Παρατήρηση: Η παραδοχή $x_q = 0 \Rightarrow a(x)^p x^{-l}$ είναι πολυώνυμο.



Σχήμα 1: Διαχωρισμός του branch locus

Πρόταση

Το σύνολο των διαφορικών της μορφής

$$x^N a(x)^a \frac{(\lambda X+1)^a}{a(x)^{p-1}(\lambda X+1)^{p-1}}dx, \tag{1}$$

όπου

$$0 \leq a < p-1 \text{ και } l - \left\lceil \frac{(1+a)l}{p} \right\rceil \leq N \leq (p-1-a)q-2, \tag{2}$$

σχηματίζει μια βάση ολόμορφων διαφορικών.

Πρόταση

Το σύνολο των διαφορικών της μορφής

$$x^N a(x)^a \frac{(\lambda X+1)^a}{a(x)^{p-1}(\lambda X+1)^{p-1}} dx, \tag{1}$$

όπου

$$0 \leq a < p-1 \text{ και } l - \left\lceil \frac{(1+a)l}{p} \right\rceil \leq N \leq (p-1-a)q-2, \tag{2}$$

σχηματίζει μια βάση ολόμορφων διαφορικών.

Η παραπάνω βάση δεν είναι κατάλληλη για να θεωρήσουμε την αναγωγή modulo το μέγιστο ιδεώδες του δακτυλίου $S = W(k)[\zeta]$.

- Ορίζουμε $c_a = \begin{cases} q + \left\lceil \frac{(a+1)l}{p} \right\rceil - \left\lceil \frac{(2+a)l}{p} \right\rceil & \text{αν } a \leq p-3 \\ q-1 & \text{αν } a = p-2. \end{cases}$

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

- Ορίζουμε $c_a = \begin{cases} q + \left\lceil \frac{(a+1)l}{p} \right\rceil - \left\lceil \frac{(2+a)l}{p} \right\rceil & \text{αν } a \leq p-3 \\ q-1 & \text{αν } a = p-2. \end{cases}$

- $\Omega_X = \bigoplus_{a=0}^{p-2} V_\nu^{c_\nu}$

- Ορίζουμε $c_a = \begin{cases} q + \left\lceil \frac{(a+1)l}{p} \right\rceil - \left\lceil \frac{(2+a)l}{p} \right\rceil & \text{αν } a \leq p-3 \\ q - 1 & \text{αν } a = p-2. \end{cases}$

- $\Omega_X = \bigoplus_{a=0}^{p-2} V_\nu^{c_\nu}$

- Υπάρχουν πολυώνυμα $f_\kappa^{(\nu)} \in R[x]$ ώστε

$$\left\{ f_\kappa^{(\nu)} a(x)^a \frac{X^a}{a(x)^{p-1}(\lambda X + 1)^{p-1}} dx : 1 \leq \kappa \leq c_\nu, 0 \leq a \leq \nu \right\}$$

να είναι μια βάση του $V_\nu^{c_\nu}$.

- Ορίζουμε $c_a = \begin{cases} q + \left\lceil \frac{(a+1)l}{p} \right\rceil - \left\lceil \frac{(2+a)l}{p} \right\rceil & \text{αν } a \leq p-3 \\ q-1 & \text{αν } a = p-2. \end{cases}$

- $\Omega_X = \bigoplus_{a=0}^{p-2} V_\nu^{c_\nu}$

- Υπάρχουν πολυώνυμα $f_\kappa^{(\nu)} \in R[x]$ ώστε

$$\left\{ f_\kappa^{(\nu)} a(x)^a \frac{X^a}{a(x)^{p-1}(\lambda X + 1)^{p-1}} dx : 1 \leq \kappa \leq c_\nu, 0 \leq a \leq \nu \right\}$$

  να είναι μια βάση του $V_\nu^{c_\nu}$.

Χρήση των βάσεων Boseck στην ειδική ίνα για να δείξουμε ότι οι αναγωγές είναι ολόμορφες.

ΣΥΣΤΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

- Γνώση της Galois module δομής και της διακλάδωσης στην ειδική και γενική ίνα.
- Γνώση της σχετικής καμπύλης

- Representation theoretic obstructions.
- Υπολογιμός των ακεραίων αναπαραστάσεων όλων των ομάδων που γνωρίζουμε ότι μπορούν να γίνουν lift.
- Εφαρμογές στα σχετικά σημεία του Weierstrass points και τις παραμορφώσεις τους.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ ΠΟΛΥ!