p-καλύμματα Αλγεβρικών καμπύλων

Αριστείδης Κοντογεώργης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

18 Οκτωβρίου 2007

Περιεχόμενα

Ορισμοί

X είναι μία αλγεβρική καμπύλη (μη ιδιόμορφη, προβολική) ορισμένη υπέρ του αλγεβρικά κλειστού σώματος k. Η χαρακτηριστική του σώματος k είναι $p \geq 0$. Η αλγεβρική καμπύλη έχει γένος $g \geq 2$.

- Αν $p = 0$ τότε ισχύει το θεώρημα του Hurwitz

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1).$$

- Αν $p > 0$ το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι σωστό. Γενικά έχουμε το φράγμα

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq f(g)$$

όπου το f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 4 στο g.

Ορισμοί

X είναι μία αλγεβρική καμπύλη (μη ιδιόμορφη, προβολική) ορισμένη υπέρ του αλγεβρικά κλειστού σώματος k. Η χαρακτηριστική του σώματος k είναι $p \geq 0$. Η αλγεβρική καμπύλη έχει γένος $g \geq 2$.

- Αν $p = 0$ τότε ισχύει το θεώρημα του Hurwitz

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1).$$

- Αν $p > 0$ το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι σωστό. Γενικά έχουμε το φράγμα

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq f(g)$$

όπου το f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 4 στο g.

Ορισμοί

X είναι μία αλγεβρική καμπύλη (μη ιδιόμορφη, προβολική) ορισμένη υπέρ του αλγεβρικά κλειστού σώματος k. Η χαρακτηριστική του σώματος k είναι $p \geq 0$. Η αλγεβρική καμπύλη έχει γένος $g \geq 2$.

- Αν $p = 0$ τότε ισχύει το θεώρημα του Hurwitz

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1).$$

- Αν $p > 0$ το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι σωστό. Γενικά έχουμε το φράγμα

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq f(g)$$

όπου το f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 4 στο g.

Ορισμοί

X είναι μία αλγεβρική καμπύλη (μη ιδιόμορφη, προβολική) ορισμένη υπέρ του αλγεβρικά κλειστού σώματος k. Η χαρακτηριστική του σώματος k είναι $p \geq 0$. Η αλγεβρική καμπύλη έχει γένος $g \geq 2$.

- Αν $p = 0$ τότε ισχύει το θεώρημα του Hurwitz

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1).$$

- Αν $p > 0$ το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι σωστό. Γενικά έχουμε το φράγμα

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq f(g)$$

όπου το f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 4 στο g.

Μορφισμοί καμπυλών

- Κάθε μορφισμός μεταξύ αλγεβρικών καμπύλων $f : X \to Y$, επάγει ομομορφισμό στα σώματα συναρτήσεων $k(Y) \to k(Y)$.
- Κάθε ομορφισμός σωμάτων $k(Y), k(X)$ επάγει ρητή συνάρτηση από τις καμπύλες $X \to Y$.
- Μή ιδιόμορφη $\Rightarrow$ normal $\Rightarrow$ ρητές συναρτήσεις ορίζονται παντού.
- Αυτομορφισμοί καμπύλης $\Leftrightarrow$ αυτομορφισμοί του σώματος $k(X)$.

Μορφισμοί καμπυλών

- Κάθε μορφισμός μεταξύ αλγεβρικών καμπύλων $f : X \to Y$, επάγει ομομορφισμό στα σώματα συναρτήσεων $k(Y) \to k(Y)$.
- Κάθε ομορφισμός σωμάτων $k(Y), k(X)$ επάγει ρητή συνάρτηση από τις καμπύλες $X \to Y$.
- Μή ιδιόμορφη $\Rightarrow$ normal $\Rightarrow$ ρητές συναρτήσεις ορίζονται παντού.
- Αυτομορφισμοί καμπύλης $\Leftrightarrow$ αυτομορφισμοί του σώματος $k(X)$.

Μορφισμοί καμπυλών

- Κάθε μορφισμός μεταξύ αλγεβρικών καμπύλων $f : X \to Y$, επάγει ομομορφισμό στα σώματα συναρτήσεων $k(Y) \to k(Y)$.
- Κάθε ομορφισμός σωμάτων $k(Y), k(X)$ επάγει ρητή συνάρτηση από τις καμπύλες $X \to Y$.
- Μή ιδιόμορφη $\Rightarrow$ normal $\Rightarrow$ ρητές συναρτήσεις ορίζονται παντού.
- Αυτομορφισμοί καμπύλης $\Leftrightarrow$ αυτομορφισμοί του σώματος $k(X)$.

Μορφισμοί καμπυλών

- Κάθε μορφισμός μεταξύ αλγεβρικών καμπύλων $f : X \to Y$, επάγει ομομορφισμό στα σώματα συναρτήσεων $k(Y) \to k(Y)$.
- Κάθε ομορφισμός σωμάτων $k(Y), k(X)$ επάγει ρητή συνάρτηση από τις καμπύλες $X \to Y$.
- Μή ιδιόμορφη $\Rightarrow$ normal $\Rightarrow$ ρητές συναρτήσεις ορίζονται παντού.
- Αυτομορφισμοί καμπύλης $\Leftrightarrow$ αυτομορφισμοί του σώματος $k(X)$.

Σώματα

- Αρκεί να δουλέψουμε στα σώματα συναρτήσεων
- $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ δίνει διακλαδισμένο κάλυμμα $X \to X/G$.
- ισοδύναμα $k(X)/k(X)^G$ είναι μία διακλαδισμένη επέκταση Galois
- Σημεία της καμπύλης $\Leftrightarrow$ Θέσεις του σώματος συναρτήσεων.

Σώματα

- Αρκεί να δουλέψουμε στα σώματα συναρτήσεων
- $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ δίνει διακλαδισμένο κάλυμμα $X \to X/G$.
- ισοδύναμα $k(X)/k(X)^G$ είναι μία διακλαδισμένη επέκταση Galois
- Σημεία της καμπύλης $\Leftrightarrow$ Θέσεις του σώματος συναρτήσεων.

Σώματα

- Αρκεί να δουλέψουμε στα σώματα συναρτήσεων
- $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ δίνει διακλαδισμένο κάλυμμα $X \to X/G$.
- ισοδύναμα $k(X)/k(X)^G$ είναι μία διακλαδισμένη επέκταση Galois
- Σημεία της καμπύλης $\Leftrightarrow$ Θέσεις του σώματος συναρτήσεων.

Τοπική μελέτη

$P \in X$ $G(P) = \{\sigma \in G : \sigma(P) = P\}$

- Αν $p = 0$ τότε $G(P)$ είναι κυκλική
- Αν $p > 0$, τότε έχουμε την παρακάτω ανάλυση της $G(P)$:

$$G(P) \geq G_1(P) \geq G_2(P) \geq \cdots \geq G_i(P) \geq \cdots \geq G_n(P) \geq \{1\}.$$

  όπου $G_1(P)$ είναι μία p-ομάδα. $G(P)/G_1(P)$ κυκλική ομάδα τάξης n, $(n,p) = 1$. Για $i \geq 1$ ισχύει $G_i(P)/G_{i+1}(P) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- $\mathcal{O}_p \cong k[[t]]$ είναι ο πληρωμένος τοπικός δακτύλιος

$$G_i(P) = \{\sigma \in G : \sigma(t) - t \in t^{i+1}k[[t]]\}.$$

Τοπική μελέτη

$P \in X \ \ G(P) = \{\sigma \in G : \sigma(P) = P\}$

- Αν $p = 0$ τότε $G(P)$ είναι κυκλική
- Αν $p > 0$, τότε έχουμε την παρακάτω ανάλυση της $G(P)$:

  $$G(P) \geq G_1(P) \geq G_2(P) \geq \cdots \geq G_i(P) \geq \cdots \geq G_n(P) \geq \{1\}.$$

  όπου $G_1(P)$ είναι μία p-ομάδα. $G(P)/G_1(P)$ κυκλική ομάδα τάξης n, $(n, p) = 1$. Για $i \geq 1$ ισχύει $G_i(P)/G_{i+1}(P) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- $\mathcal{O}_p \cong k[[t]]$ είναι ο πληρωμένος τοπικός δακτύλιος

  $$G_i(P) = \{\sigma \in G : \sigma(t) - t \in t^{i+1}k[[t]]\}.$$

Τοπική μελέτη

$P \in X \;\; G(P) = \{\sigma \in G : \sigma(P) = P\}$

- Αν $p = 0$ τότε $G(P)$ είναι κυκλική
- Αν $p > 0$, τότε έχουμε την παρακάτω ανάλυση της $G(P)$:

  $$G(P) \geq G_1(P) \geq G_2(P) \geq \cdots \geq G_i(P) \geq \cdots \geq G_n(P) \geq \{1\}.$$

  όπου $G_1(P)$ είναι μία p-ομάδα. $G(P)/G_1(P)$ κυκλική ομάδα τάξης n, $(n, p) = 1$. Για $i \geq 1$ ισχύει $G_i(P)/G_{i+1}(P) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- $\mathcal{O}_p \cong k[[t]]$ είναι ο πληρωμένος τοπικός δακτύλιος

  $$G_i(P) = \{\sigma \in G : \sigma(t) - t \in t^{i+1}k[[t]]\}.$$

Τοπική μελέτη

$P \in X \;\; G(P) = \{\sigma \in G : \sigma(P) = P\}$

- Αν $p = 0$ τότε $G(P)$ είναι κυκλική
- Αν $p > 0$, τότε έχουμε την παρακάτω ανάλυση της $G(P)$:

$$G(P) \geq G_1(P) \geq G_2(P) \geq \cdots \geq G_i(P) \geq \cdots \geq G_n(P) \geq \{1\}.$$

  όπου $G_1(P)$ είναι μία p-ομάδα. $G(P)/G_1(P)$ κυκλική ομάδα τάξης n, $(n, p) = 1$. Για $i \geq 1$ ισχύει $G_i(P)/G_{i+1}(P) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- $\mathcal{O}_p \cong k[[t]]$ είναι ο πληρωμένος τοπικός δακτύλιος

$$G_i(P) = \{\sigma \in G : \sigma(t) - t \in t^{i+1}k[[t]]\}.$$

Τοπική μελέτη

$P \in X \;\; G(P) = \{\sigma \in G : \sigma(P) = P\}$

- Αν $p = 0$ τότε $G(P)$ είναι κυκλική
- Αν $p > 0$, τότε έχουμε την παρακάτω ανάλυση της $G(P)$:

  $$G(P) \geq G_1(P) \geq G_2(P) \geq \cdots \geq G_i(P) \geq \cdots \geq G_n(P) \geq \{1\}.$$

  όπου $G_1(P)$ είναι μία p-ομάδα. $G(P)/G_1(P)$ κυκλική ομάδα τάξης n, $(n, p) = 1$. Για $i \geq 1$ ισχύει $G_i(P)/G_{i+1}(P) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- $\mathcal{O}_p \cong k[[t]]$ είναι ο πληρωμένος τοπικός δακτύλιος

  $$G_i(P) = \{\sigma \in G : \sigma(t) - t \in t^{i+1}k[[t]]\}.$$

Riemann-Hurwitz

Θεωρούμε το διακλαδισμένο κάλυμμα:

$$X \to X/G = Y.$$

$$2g_X - 2 = (2g_Y - 2)|G| + \sum_P \sum_{\nu=0}^{\infty} (|G_i(P)| - 1)$$

Αν $p \nmid |G|$ τότε ο παραπάνω τύπος με ανάλυση περιπτώσεων δίνει

$$|G| \leq 84(g_X - 1).$$

Riemann-Hurwitz

Θεωρούμε το διακλαδισμένο κάλυμμα:

$$X \to X/G = Y.$$

$$2g_X - 2 = (2g_Y - 2)|G| + \sum_P \sum_{\nu=0}^{\infty} (|G_i(P)| - 1)$$

Αν $p \nmid |G|$ τότε ο παραπάνω τύπος με ανάλυση περιπτώσεων δίνει

$$|G| \leq 84(g_X - 1).$$

Riemann-Hurwitz

Θεωρούμε το διακλαδισμένο κάλυμμα:

$$X \to X/G = Y.$$

$$2g_X - 2 = (2g_Y - 2)|G| + \sum_P \sum_{\nu=0}^{\infty} (|G_i(P)| - 1)$$

Αν $p \nmid |G|$ τότε ο παραπάνω τύπος με ανάλυση περιπτώσεων δίνει

$$|G| \leq 84(g_X - 1).$$

Τοπολογία

Αν $k=\mathbb{C}$ τότε αλγεβρική καμπύλη υπέρ το k είναι επιφάνεια Riemann. Κάθε διακλαδισμένο κάλυμμα $X \rightarrow Y$ δίνει ένα τοπολογικό κάλυμμα αν αφαιρέσουμε τα σημεία διακλάδωσης. Το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{P\}$ είναι απλά συνεκτικό και δεν έχει αδιακλάδιστα καλύμματα. Δεν υπάρχει κάλυμμα του $X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ διακλαδισμένο σε ένα μόνο σημείο.

Τοπολογία

Αν $k = \mathbb{C}$ τότε αλγεβρική καμπύλη υπέρ το k είναι επιφάνεια Riemann. Κάθε διακλαδισμένο κάλυμμα $X \to Y$ δίνει ένα τοπολογικό κάλυμμα αν αφαιρέσουμε τα σημεία διακλάδωσης. Το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{P\}$ είναι απλά συνεκτικό και δεν έχει αδιακλάδιστα καλύμματα. Δεν υπάρχει κάλυμμα του $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ διακλαδισμένο σε ένα μόνο σημείο.

Τοπολογία

Αν $k = \mathbb{C}$ τότε αλγεβρική καμπύλη υπέρ το k είναι επιφάνεια Riemann. Κάθε διακλαδισμένο κάλυμμα $X \to Y$ δίνει ένα τοπολογικό κάλυμμα αν αφαιρέσουμε τα σημεία διακλάδωσης. Το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{P\}$ είναι απλά συνεκτικό και δεν έχει αδιακλάδιστα καλύμματα. Δεν υπάρχει κάλυμμα του $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ διακλαδισμένο σε ένα μόνο σημείο.

Τοπολογία

Αν $k = \mathbb{C}$ τότε αλγεβρική καμπύλη υπέρ το k είναι επιφάνεια Riemann. Κάθε διακλαδισμένο κάλυμμα $X \to Y$ δίνει ένα τοπολογικό κάλυμμα αν αφαιρέσουμε τα σημεία διακλάδωσης. Το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{P\}$ είναι απλά συνεκτικό και δεν έχει αδιακλάδιστα καλύμματα. Δεν υπάρχει κάλυμμα του $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ διακλαδισμένο σε ένα μόνο σημείο.

Καμπύλες Artin-Schreier

Στην χαρακτηριστική $p > 0$ η καμπύλη

$$y^p - y = f(x) \in k[x],$$

αποτελεί ένα διακλαδισμένο κάλυμμα του $\mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{F}}_p)$ διακλαδισμένο πάνω από ένα μόνο σημείο.

Έστω $f \in k(X)$. Θεωρούμε τον divisor $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$.

Παράδειγμα: Στο $k(\mathbb{P}^1) = k(x)$ έχουμε

$$\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)_0 = 2P_{x=0},$$

$$\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)_\infty = P_{x=1} + P_{x=2}.$$

Για $P \in X$, σχηματίζουμε την ημιομάδα:

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{ ώστε να υπάρχει } f \in k(X) \text{ με } (f)_\infty = nP\},$$

την οποία την ονομάζουμε ημιομάδα του Weierstrass.
Γνωρίζουμε ότι για δεδομένο P κάθε $n \geq 2g-2$ ανήκει στην ημιομάδα του Weierstrass και από τους $2g$ αριθμούς ακριβώς οι g ανήκουν στη ημιομάδα του Weierstrass.

Έστω $f \in k(X)$. Θεωρούμε τον divisor $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$.
Παράδειγμα: Στο $k(\mathbb{P}^1) = k(x)$ έχουμε

$$\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)_0 = 2P_{x=0},$$

$$\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)_\infty = P_{x=1} + P_{x=2}.$$

Για $P \in X$, σχηματίζουμε την ημιομάδα:

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{ ώστε να υπάρχει } f \in k(X) \text{ με } (f)_\infty = nP\},$$

την οποία την ονομάζουμε ημιομάδα του Weierstrass.
Γνωρίζουμε ότι για δεδομένο P κάθε $n \geq 2g - 2$ ανήκει στην ημιομάδα του Weierstrass και από τους $2g$ αριθμούς ακριβώς οι g ανήκουν στη ημιομάδα του Weierstrass.

Έστω $f \in k(X)$. Θεωρούμε τον divisor $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$.
Παράδειγμα: Στο $k(\mathbb{P}^1) = k(x)$ έχουμε

$$\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)_0 = 2P_{x=0},$$

$$\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)_\infty = P_{x=1} + P_{x=2}.$$

Για $P \in X$, σχηματίζουμε την ημιομάδα:

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{ ώστε να υπάρχει } f \in k(X) \text{ με } (f)_\infty = nP\},$$

την οποία την ονομάζουμε ημιομάδα του Weierstrass.
Γνωρίζουμε ότι για δεδομένο P κάθε $n \geq 2g-2$ ανήκει στην ημιομάδα του Weierstrass και από τους $2g$ αριθμούς ακριβώς οι g ανήκουν στη ημιομάδα του Weierstrass.

Έστω $f \in k(X)$. Θεωρούμε τον divisor $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$.
Παράδειγμα: Στο $k(\mathbb{P}^1) = k(x)$ έχουμε

$$\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)_0 = 2P_{x=0},$$

$$\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)_\infty = P_{x=1} + P_{x=2}.$$

Για $P \in X$, σχηματίζουμε την ημιομάδα:

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{ ώστε να υπάρχει } f \in k(X) \text{ με } (f)_\infty = nP\},$$

την οποία την ονομάζουμε ημιομάδα του Weierstrass.
Γνωρίζουμε ότι για δεδομένο P κάθε $n \geq 2g - 2$ ανήκει στην ημιομάδα του Weierstrass και από τους $2g$ αριθμούς ακριβώς οι g ανήκουν στη ημιομάδα του Weierstrass.

Χώροι Riemann-Roch

Θέτουμε

$$L(iP) := \{f \in k(X)^* : \mathrm{div}(f) + iP \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Θεωρούμε την ακολουθία διανυσματικών χώρων

$$k = L(0) = L(P) = \cdots = L((i-1)P) < L(iP) \leq \cdots \leq L((2g-1)P).$$

Θέτουμε $\ell(D) = \dim_k L(D)$.

Χώροι Riemann-Roch

Θέτουμε

$$L(iP) := \{f \in k(X)^* : \mathrm{div}(f) + iP \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Θεωρούμε την ακολουθία διανυσματικών χώρων

$$k = L(0) = L(P) = \cdots = L((i-1)P) < L(iP) \leq \cdots \leq L((2g-1)P).$$

Θέτουμε $\ell(D) = \dim_k L(D)$.

Χώροι Riemann-Roch

Θέτουμε

$$L(iP) := \{f \in k(X)^* : \mathrm{div}(f) + iP \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Θεωρούμε την ακολουθία διανυσματικών χώρων

$$k = L(0) = L(P) = \cdots = L((i-1)P) < L(iP) \leq \cdots \leq L((2g-1)P).$$

Θέτουμε $\ell(D) = \dim_k L(D)$.

Τοπική Μελέτη

Λήμμα

Αν $g \geq 2$ και $p \neq 2, 3$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας πολικός αριθμός $m \leq 2g - 1$ που να μην διαιρείται από την χαρακτηριστική p.

Απόδειξη.

$\#\{0 \leq i \leq 2g-1$ ώστε $p \mid i\} = \left\lfloor \frac{2g-1}{p} \right\rfloor + 1$. Αφού $p \geq 5$ έχουμε

$$\left\lfloor \frac{2g-1}{p} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{2g-1}{5} \right\rfloor + 1 \leq g - \left\lceil \frac{3g+1}{5} \right\rceil < g;$$

άρα υπάρχουν πολικοί αριθμοί στο διάστημα $0 \leq i \leq 2g-1$ με $p \mid i$.

Τοπική Μελέτη

Λήμμα

Αν $g \geq 2$ και $p \neq 2, 3$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας πολικός αριθμός $m \leq 2g-1$ που να μην διαιρείται από την χαρακτηριστική p.

Απόδειξη.

$\#\{0 \leq i \leq 2g-1 \text{ ώστε } p \mid i\} = \left\lfloor \frac{2g-1}{p} \right\rfloor + 1$. Αφού $p \geq 5$ έχουμε

$$\left\lfloor \frac{2g-1}{p} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{2g-1}{5} \right\rfloor + 1 \leq g - \left\lceil \frac{3g+1}{5} \right\rceil < g;$$

άρα υπάρχουν πολικοί αριθμοί στο διάστημα $0 \leq i \leq 2g-1$ με $p \mid i$.

Λήμμα

Έστω $1 \leq m \leq 2g-1$ ο μικρότερος πολικός αριθμός ώστε $(m,p)=1$. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}\big(L(mP)\big)$$

Απόδειξη.

Ο χώρος $L(mP)$ διατηρείται από τους αυτομορφισμούς του $G_1(P)$. Αν f είναι μία συνάρτηση ώστε $(f)=mP$ τότε γράφεται στην μορφή $f=u/t^m$, όπου u είναι μία μονάδα στον $\mathcal{O}_P$. Αφού $(m,p)=1$, το λήμμα του Hensel έχει ως συνέπεια ότι το u είναι μία m δύναμη οπότε αλλάζουμε το t και υποθέτουμε ότι $f=1/t^m$. Έστω $\sigma \in G_1(P)$ που να δρα τετριμμένα στο $L(mP)$. Τότε $\sigma(1/t^m)=1/t^m$ και $\sigma(t)=\zeta t$, όπου ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας. $(p,m)=1 \Rightarrow \zeta=1$. $\square$

Λήμμα

Έστω $1 \leq m \leq 2g-1$ ο μικρότερος πολικός αριθμός ώστε $(m,p)=1$. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}\big(L(mP)\big)$$

Απόδειξη.

Ο χώρος $L(mP)$ διατηρείται από τους αυτομορφισμούς του $G_1(P)$. Αν f είναι μία συνάρτηση ώστε $(f)=mP$ τότε γράφεται στην μορφή $f=u/t^m$, όπου u είναι μία μονάδα στον $\mathcal{O}_P$. Αφού $(m,p)=1$, το λήμμα του Hensel έχει ως συνέπεια ότι το u είναι μία m δύναμη οπότε αλλάζουμε το t και υποθέτουμε ότι $f=1/t^m$. Έστω $\sigma \in G_1(P)$ που να δρα τετριμμένα στο $L(mP)$. Τότε $\sigma(1/t^m)=1/t^m$ και $\sigma(t)=\zeta t$, όπου ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας. $(p,m)=1 \Rightarrow \zeta=1$. □

Λήμμα

Έστω $1 \leq m \leq 2g-1$ ο μικρότερος πολικός αριθμός ώστε $(m,p)=1$. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}\big(L(mP)\big)$$

Απόδειξη.

Ο χώρος $L(mP)$ διατηρείται από τους αυτομορφισμούς του $G_1(P)$. Αν f είναι μία συνάρτηση ώστε $(f)=mP$ τότε γράφεται στην μορφή $f=u/t^m$, όπου u είναι μία μονάδα στον $\mathcal{O}_P$. Αφού $(m,p)=1$, το λήμμα του Hensel έχει ως συνέπεια ότι το u είναι μία m δύναμη οπότε αλλάζουμε το t και υποθέτουμε ότι $f=1/t^m$. Έστω $\sigma \in G_1(P)$ που να δρα τετριμμένα στο $L(mP)$. Τότε $\sigma(1/t^m)=1/t^m$ και $\sigma(t)=\zeta t$, όπου ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας. $(p,m)=1 \Rightarrow \zeta=1$. □

Λήμμα

Έστω $1 \leq m \leq 2g - 1$ ο μικρότερος πολικός αριθμός ώστε $(m, p) = 1$. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}\big(L(mP)\big)$$

Απόδειξη.

Ο χώρος $L(mP)$ διατηρείται από τους αυτομορφισμούς του $G_1(P)$. Αν f είναι μία συνάρτηση ώστε $(f) = mP$ τότε γράφεται στην μορφή $f = u/t^m$, όπου u είναι μία μονάδα στον $\mathcal{O}_P$. Αφού $(m, p) = 1$, το λήμμα του Hensel έχει ως συνέπεια ότι το u είναι μία m δύναμη οπότε αλλάζουμε το t και υποθέτουμε ότι $f = 1/t^m$. Έστω $\sigma \in G_1(P)$ που να δρα τετριμμένα στο $L(mP)$. Τότε $\sigma(1/t^m) = 1/t^m$ και $\sigma(t) = \zeta t$, όπου ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας. $(p, m) = 1 \Rightarrow \zeta = 1$. □

Λήμμα

Έστω $1 \leq m \leq 2g-1$ ο μικρότερος πολικός αριθμός ώστε $(m,p)=1$. Υπάρχει μία πιστή αναπαράσταση

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}\big(L(mP)\big)$$

Απόδειξη.

Ο χώρος $L(mP)$ διατηρείται από τους αυτομορφισμούς του $G_1(P)$. Αν f είναι μία συνάρτηση ώστε $(f)=mP$ τότε γράφεται στην μορφή $f=u/t^m$, όπου u είναι μία μονάδα στον $\mathcal{O}_P$. Αφού $(m,p)=1$, το λήμμα του Hensel έχει ως συνέπεια ότι το u είναι μία m δύναμη οπότε αλλάζουμε το t και υποθέτουμε ότι $f=1/t^m$. Έστω $\sigma \in G_1(P)$ που να δρα τετριμμένα στο $L(mP)$. Τότε $\sigma(1/t^m)=1/t^m$ και $\sigma(t)=\zeta t$, όπου ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας. $(p,m)=1 \Rightarrow \zeta=1$. □

- Η $G_1(P)$ υλοποιείται ως πεπερασμένη αλγεβρική ομάδα της $\mathrm{GL}_{\ell(mP)}(k)$.
- Το flag των διανυσματικών χώρων $L(iP)$ για $i \leq m$ διατηρείται άρα οι πίνακες αναπαράστασης είναι άνω τριγωνικοί ή με άλλα λόγια η $G_1(P)$ είναι υποομάδα της Borel ομάδας του flag.

- Η $G_1(P)$ υλοποιείται ως πεπερασμένη αλγεβρική ομάδα της $\mathrm{GL}_{\ell(mP)}(k)$.
- Το flag των διανυσματικών χώρων $L(iP)$ για $i \leq m$ διατηρείται άρα οι πίνακες αναπαράστασης είναι άνω τριγωνικοί ή με άλλα λόγια η $G_1(P)$ είναι υποομάδα της Borel ομάδας του flag.

Υπολογισμοί.

Υποθέτουμε ότι $m = m_0 > m_1 > \cdots > m_r = 0$, είναι οι πολικοί αριθμοί $\leq m$. Μία βάση του $L(mP)$ δίνεται από τα

$$\left\{ 1, \frac{u_i}{t^{m_i}}, \frac{1}{t^m} : \text{ όπου } 1 < i < r, p \mid m_i \text{ και } u_i \text{ είναι μονάδες } \right\}$$

$$\sigma \frac{1}{t^m} = \frac{1}{t^m} + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) \frac{u_i}{t^{m_i}},$$

και απεικονίζει το t στο

$$\sigma(t) = \frac{\zeta t}{\left(1 + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) u_i t^{m-m_i}\right)^{1/m}},$$

ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας.

Υπολογισμοί.

Υποθέτουμε ότι $m = m_0 > m_1 > \cdots > m_r = 0$, είναι οι πολικοί αριθμοί $\leq m$. Μία βάση του $L(mP)$ δίνεται από τα

$$\left\{ 1, \frac{u_i}{t^{m_i}}, \frac{1}{t^m} : \text{ όπου } 1 < i < r, p \mid m_i \text{ και } u_i \text{ είναι μονάδες} \right\}$$

$$\sigma \frac{1}{t^m} = \frac{1}{t^m} + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) \frac{u_i}{t^{m_i}},$$

και απεικονίζει το t στο

$$\sigma(t) = \frac{\zeta t}{\left(1 + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) u_i t^{m-m_i}\right)^{1/m}},$$

ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας.

Υπολογισμοί.

Υποθέτουμε ότι $m = m_0 > m_1 > \cdots > m_r = 0$, είναι οι πολικοί αριθμοί $\leq m$. Μία βάση του $L(mP)$ δίνεται από τα

$$\left\{ 1, \frac{u_i}{t^{m_i}}, \frac{1}{t^m} : \text{ όπου } 1 < i < r, p \mid m_i \text{ και } u_i \text{ είναι μονάδες } \right\}$$

$$\sigma \frac{1}{t^m} = \frac{1}{t^m} + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) \frac{u_i}{t^{m_i}},$$

και απεικονίζει το t στο

$$\sigma(t) = \frac{\zeta t}{\left(1 + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) u_i t^{m-m_i}\right)^{1/m}},$$

ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας.

Υπολογισμοί.

Υποθέτουμε ότι $m = m_0 > m_1 > \cdots > m_r = 0$, είναι οι πολικοί αριθμοί $\leq m$. Μία βάση του $L(mP)$ δίνεται από τα

$$\left\{ 1, \frac{u_i}{t^{m_i}}, \frac{1}{t^m} : \text{ όπου } 1 < i < r, p \mid m_i \text{ και } u_i \text{ είναι μονάδες } \right\}$$

$$\sigma \frac{1}{t^m} = \frac{1}{t^m} + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) \frac{u_i}{t^{m_i}},$$

και απεικονίζει το t στο

$$\sigma(t) = \frac{\zeta t}{\left(1 + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) u_i t^{m-m_i}\right)^{1/m}},$$

ζ είναι μία m ρίζα της μονάδας.

$$\sigma(t) = \zeta t\Big(1 + \sum_{\nu\geq 1} a_\nu(\sigma)t^\nu\Big).$$

$$\sigma(t) = t\Big(1 + \sum_{\nu\geq 1} a_\nu(\sigma)t^\nu\Big)$$

$$\sigma(t) = \zeta t\Big(1 + \sum_{\nu \geq 1} a_\nu(\sigma) t^\nu\Big).$$

$$\sigma(t) = t\Big(1 + \sum_{\nu \geq 1} a_\nu(\sigma) t^\nu\Big)$$

Πρόταση

Το P είναι ένα άγρια διακλαδισμένο σημείο της X και θέτουμε

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}_{\ell(mP)}(k)$$

να είναι η αντίστοιχη πιστή αναπαράσταση. Αν $G_i(P) > G_{i+1}(P)$ τότε $i = m - m_k$, για κάποιο πολικό αριθμό m_k.

Απόδειξη.

$$\sigma(t) - t = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) u_i t^{m-m_i+1} + \cdots ,$$

συνεπώς $v_P(\sigma(t) - t) = m - m_k + 1$, όπου $k = \min\{i : c_i(\sigma) \neq 0\}$. Υποθέτουμε ότι $\sigma \in G_i(P)$ αλλά $\sigma \notin G_{i+1}(P)$, συνεπώς $v_P(\sigma(t) - t) = i + 1$ και αυτό είναι ίσο με κάποιο $m - m_k + 1$. □

Πρόταση

Το P είναι ένα άγρια διακλαδισμένο σημείο της X και θέτουμε

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}_{\ell(mP)}(k)$$

να είναι η αντίστοιχη πιστή αναπαράσταση. Αν $G_i(P) > G_{i+1}(P)$ τότε $i = m - m_k$, για κάποιο πολικό αριθμό m_k.

Απόδειξη.

$$\sigma(t) - t = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) u_i t^{m-m_i+1} + \cdots ,$$

συνεπώς $v_P\big(\sigma(t) - t\big) = m - m_k + 1$, όπου $k = \min\{i : c_i(\sigma) \neq 0\}$. Υποθέτουμε ότι $\sigma \in G_i(P)$ αλλά $\sigma \notin G_{i+1}(P)$, συνεπώς $v_P(\sigma(t) - t) = i + 1$ και αυτό είναι ίσο με κάποιο $m - m_k + 1$. □

Πόρισμα

Κανένα πήδημα i στην ramification filtration δεν είναι διαιρετό με p, δηλαδή αν $G_i(P) < G_{i+1}(P)$ τότε $p \nmid i$.

Πόρισμα

Ισχύει $\ell(mP) \leq \left\lfloor \frac{g}{p-1} \right\rfloor + 2$.

Γενικά μία εκτίμηση μας δίνει το θεώρημα του Clifford: $\ell(kP)$ για $k < 2g-2$

$$\ell(kP) \leq \frac{k}{2} + 1 \leq \left\lfloor \frac{2g-1}{2} \right\rfloor + 1 = g.$$

Πόρισμα

Κανένα πήδημα i στην ramification filtration δεν είναι διαιρετό με p, δηλαδή αν $G_i(P) < G_{i+1}(P)$ τότε $p \nmid i$.

Πόρισμα

Ισχύει $\ell(mP) \leq \left\lfloor \frac{g}{p-1} \right\rfloor + 2$.

Γενικά μία εκτίμηση μας δίνει το θεώρημα του Clifford: $\ell(kP)$ για $k < 2g - 2$

$$\ell(kP) \leq \frac{k}{2} + 1 \leq \left\lfloor \frac{2g-1}{2} \right\rfloor + 1 = g.$$

Πόρισμα

Κανένα πήδημα i στην ramification filtration δεν είναι διαιρετό με p, δηλαδή αν $G_i(P) < G_{i+1}(P)$ τότε $p \nmid i$.

Πόρισμα

Ισχύει $\ell(mP) \leq \left\lfloor \frac{g}{p-1} \right\rfloor + 2$.

Γενικά μία εκτίμηση μας δίνει το θεώρημα του Clifford: $\ell(kP)$ για $k < 2g-2$

$$\ell(kP) \leq \frac{k}{2} + 1 \leq \left\lfloor \frac{2g-1}{2} \right\rfloor + 1 = g.$$

Το παραπάνω φράγμα είναι το καλύτερο δυνατό. Η καμπύλη που δίνεται από την

$$(y^5 - y)x^2(x-1)(x-2)(x-4) = 1$$

έχει γένος 14 και $\left\lfloor \frac{g}{p-1} \right\rfloor + 2 = 5$.Η ακολουθία των gaps στην μοναδική θέση υπέρ του διακλαδιζομένου σημείου $P_{x=0}$ είναι η $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 18$. Οι πολικοί αριθμοί μη διαιρετοί με 5 είναι οι $0, 5, 10, 15, 17$ δηλαδή $m = 17$, και $\ell(17Q) = 5$.

Το παραπάνω φράγμα είναι το καλύτερο δυνατό. Η καμπύλη που δίνεται από την

$$(y^5 - y)x^2(x-1)(x-2)(x-4) = 1$$

έχει γένος 14 και $\left\lfloor \frac{g}{p-1} \right\rfloor + 2 = 5$. Η ακολουθία των gaps στην μοναδική θέση υπέρ του διακλαδιζομένου σημείου $P_{x=0}$ είναι η $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 18$. Οι πολικοί αριθμοί μη διαιρετοί με 5 είναι οι $0, 5, 10, 15, 17$ δηλαδή $m = 17$, και $\ell(17Q) = 5$.

Το παραπάνω φράγμα είναι το καλύτερο δυνατό. Η καμπύλη που δίνεται από την

$$(y^5 - y)x^2(x-1)(x-2)(x-4) = 1$$

έχει γένος 14 και $\left\lfloor \frac{g}{p-1} \right\rfloor + 2 = 5$.Η ακολουθία των gaps στην μοναδική θέση υπέρ του διακλαδιζομένου σημείου $P_{x=0}$ είναι η $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 18$. Οι πολικοί αριθμοί μη διαιρετοί με 5 είναι οι $0, 5, 10, 15, 17$ δηλαδή $m = 17$, και $\ell(17Q) = 5$.

Το παραπάνω φράγμα είναι το καλύτερο δυνατό. Η καμπύλη που δίνεται από την

$$(y^5 - y)x^2(x-1)(x-2)(x-4) = 1$$

έχει γένος 14 και $\left\lfloor \frac{g}{p-1} \right\rfloor + 2 = 5$.Η ακολουθία των gaps στην μοναδική θέση υπέρ του διακλαδιζομένου σημείου $P_{x=0}$ είναι η $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 18$. Οι πολικοί αριθμοί μη διαιρετοί με 5 είναι οι $0, 5, 10, 15, 17$ δηλαδή $m = 17$, και $\ell(17Q) = 5$.

```
 Magma V2.13-6     Mon May  7 2007 22:16:03 on linux
Type ? for help.  Type <Ctrl>-D to quit.
> p:=5;
> R<x> := FunctionField(GF(p^4));
> P<y> := PolynomialRing(R);
> F<a>:= FunctionField(y^p-y -
                         (x^2*(x-1)*(x-2)*(x-4))^-1);
> g:=Genus(F);g;
14
> 1.0*(g)/(p-1)+2;
5.50000000000000000000000000000
> z:=Poles(F!1/x)[1];
> S:=GapNumbers(z);S;
[ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 18 ]
```

Fermat curves $x^n + y^n + 1 = 0$

Υποθέτουμε ότι $n - 1 = p^h$. Αναπαράσταση της

$$\rho : G_0(P) \to \mathrm{GL}(L(nP))$$

όπου

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \chi & 0 \\ \gamma & \beta & \psi \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$k = L(0P) = L(P) = \cdots = L((n-2)P) < L((n-1)P) < L(nP) \leq \cdots$$

$$G_0(P) > G_1(P) > G_2(P) = \cdots = G_n(P) > G_{n+1}(P) = \{1\},$$

με πηδήματα στην filtration στα $0, 1, n$.

Fermat curves $x^n + y^n + 1 = 0$

Υποθέτουμε ότι $n-1=p^h$. Αναπαράσταση της

$$\rho : G_0(P) \to \mathrm{GL}\big(L(nP)\big)$$

όπου

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \chi & 0 \\ \gamma & \beta & \psi \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$k = L(0P) = L(P) = \cdots = L((n-2)P) < L((n-1)P) < L(nP) \le \cdots$$

$$G_0(P) > G_1(P) > G_2(P) = \cdots = G_n(P) > G_{n+1}(P) = \{1\},$$

με πηδήματα στην filtration στα $0, 1, n$.

Fermat curves $x^n + y^n + 1 = 0$

Υποθέτουμε ότι $n-1=p^h$. Αναπαράσταση της

$$\rho : G_0(P) \to \mathrm{GL}\big(L(nP)\big)$$

όπου

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \chi & 0 \\ \gamma & \beta & \psi \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$k = L(0P) = L(P) = \cdots = L((n-2)P) < L((n-1)P) < L(nP) \leq \cdots$$

$$G_0(P) > G_1(P) > G_2(P) = \cdots = G_n(P) > G_{n+1}(P) = \{1\},$$

με πηδήματα στην filtration στα $0, 1, n$.

Fermat curves $x^n + y^n + 1 = 0$

Υποθέτουμε ότι $n - 1 = p^h$. Αναπαράσταση της

$$\rho : G_0(P) \to \mathrm{GL}\big(L(nP)\big)$$

όπου

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \chi & 0 \\ \gamma & \beta & \psi \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$k = L(0P) = L(P) = \cdots = L((n-2)P) < L((n-1)P) < L(nP) \leq \cdots$$

$$G_0(P) > G_1(P) > G_2(P) = \cdots = G_n(P) > G_{n+1}(P) = \{1\},$$

με πηδήματα στην filtration στα $0, 1, n$.

Καμπύλες $x^n + y^m + 1 = 0$

Υποθέτουμε ότι $m \mid n$ και $m - 1 = p^h$. Στα σημεία με συντεταγμένες $P : (x, y) = (\zeta_{2n}, 0)$ έχουμε

$$k = L(0P) = L(P) = \cdots = L((m-1)P) <$$

$$< L(mP) = L((m+1)P) \leq \cdots$$

$$G_0(P) \to GL(L(mP)),$$

που στέλνει

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \chi \end{pmatrix}.$$

$$G_0(P) > G_1(P) = G_2(P) = \cdots = G_m(P) > \{1\}.$$

Καμπύλες $x^n + y^m + 1 = 0$

Υποθέτουμε ότι $m \mid n$ και $m - 1 = p^h$. Στα σημεία με συντεταγμένες $P : (x, y) = (\zeta_{2n}, 0)$ έχουμε

$$k = L(0P) = L(P) = \cdots = L((m-1)P) <$$

$$< L(mP) = L((m+1)P) \leq \cdots$$

$$G_0(P) \to GL(L(mP)),$$

που στέλνει

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \chi \end{pmatrix}.$$

$$G_0(P) > G_1(P) = G_2(P) = \cdots = G_m(P) > \{1\}.$$

Καμπύλες $x^n + y^m + 1 = 0$

Υποθέτουμε ότι $m \mid n$ και $m - 1 = p^h$. Στα σημεία με συντεταγμένες $P : (x, y) = (\zeta_{2n}, 0)$ έχουμε

$$k = L(0P) = L(P) = \cdots = L((m-1)P) <$$

$$< L(mP) = L((m+1)P) \leq \cdots$$

$$G_0(P) \to GL\big(L(mP)\big),$$

που στέλνει

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \chi \end{pmatrix}.$$

$$G_0(P) > G_1(P) = G_2(P) = \cdots = G_m(P) > \{1\}.$$

Ανάμεσα στις άγρια διακλαδιζόμενες καμπύλες οι απλούστερες είναι ίσως αυτές που ικανοποιούν $G_2(P) = \{1\}$. Στην περίπτωση αυτή η ομάδα $G_1(P) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Οι καμπύλες αυτές στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως ασθενώς διακλαδισμένες και πολλά προβλήματα, που δεν μπορούν να λυθούν στην γενική περίπτωση, για αυτές τις καμπύλες είναι λυμένα. Από την πλευρά της θεωρίας αναπαραστάσεων οι απλούστερες αναπαραστάσεις είναι οι δισδιάστατες.

$$\rho : G_1(P) \to GL_2(k).$$

Μια τέτοια (πιστή) αναπαράσταση οδηγεί και πάλι σε στοιχειώδη αβελιανή ομάδα, αλλά ο conductor αυτή την φορά είναι μεγαλύτερος της μονάδας.

Ανάμεσα στις άγρια διακλαδιζόμενες καμπύλες οι απλούστερες είναι ίσως αυτές που ικανοποιούν $G_2(P) = \{1\}$. Στην περίπτωση αυτή η ομάδα $G_1(P) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Οι καμπύλες αυτές στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως ασθενώς διακλαδισμένες και πολλά προβλήματα, που δεν μπορούν να λυθούν στην γενική περίπτωση, για αυτές τις καμπύλες είναι λυμένα. Από την πλευρά της θεωρίας αναπαραστάσεων οι απλούστερες αναπαραστάσεις είναι οι δισδιάστατες.

$$\rho : G_1(P) \to GL_2(k).$$

Μια τέτοια (πιστή) αναπαράσταση οδηγεί και πάλι σε στοιχειώδη αβελιανή ομάδα, αλλά ο conductor αυτή την φορά είναι μεγαλύτερος της μονάδας.

Ανάμεσα στις άγρια διακλαδιζόμενες καμπύλες οι απλούστερες είναι ίσως αυτές που ικανοποιούν $G_2(P) = \{1\}$. Στην περίπτωση αυτή η ομάδα $G_1(P) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Οι καμπύλες αυτές στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως ασθενώς διακλαδισμένες και πολλά προβλήματα, που δεν μπορούν να λυθούν στην γενική περίπτωση, για αυτές τις καμπύλες είναι λυμένα.
Από την πλευρά της θεωρίας αναπαραστάσεων οι απλούστερες αναπαραστάσεις είναι οι δισδιάστατες.

$$\rho : G_1(P) \to GL_2(k).$$

Μια τέτοια (πιστή) αναπαράσταση οδηγεί και πάλι σε στοιχειώδη αβελιανή ομάδα, αλλά ο conductor αυτή την φορά είναι μεγαλύτερος της μονάδας.

Ανάμεσα στις άγρια διακλαδιζόμενες καμπύλες οι απλούστερες είναι ίσως αυτές που ικανοποιούν $G_2(P) = \{1\}$. Στην περίπτωση αυτή η ομάδα $G_1(P) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Οι καμπύλες αυτές στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως ασθενώς διακλαδισμένες και πολλά προβλήματα, που δεν μπορούν να λυθούν στην γενική περίπτωση, για αυτές τις καμπύλες είναι λυμένα. Από την πλευρά της θεωρίας αναπαραστάσεων οι απλούστερες αναπαραστάσεις είναι οι δισδιάστατες.

$$\rho : G_1(P) \to GL_2(k).$$

Μια τέτοια (πιστή) αναπαράσταση οδηγεί και πάλι σε στοιχειώδη αβελιανή ομάδα, αλλά ο conductor αυτή την φορά είναι μεγαλύτερος της μονάδας.

Ανάμεσα στις άγρια διακλαδιζόμενες καμπύλες οι απλούστερες είναι ίσως αυτές που ικανοποιούν $G_2(P) = \{1\}$. Στην περίπτωση αυτή η ομάδα $G_1(P) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Οι καμπύλες αυτές στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως ασθενώς διακλαδισμένες και πολλά προβλήματα, που δεν μπορούν να λυθούν στην γενική περίπτωση, για αυτές τις καμπύλες είναι λυμένα. Από την πλευρά της θεωρίας αναπαραστάσεων οι απλούστερες αναπαραστάσεις είναι οι δισδιάστατες.

$$\rho : G_1(P) \to GL_2(k).$$

Μια τέτοια (πιστή) αναπαράσταση οδηγεί και πάλι σε στοιχειώδη αβελιανή ομάδα, αλλά ο conductor αυτή την φορά είναι μεγαλύτερος της μονάδας.

Γράφουμε $G_1(P) \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Έστω f ώστε $\langle 1, f\rangle$ βάση του $L(mP)$. Θα γράψουμε μια αλγεβρική εξίσωση για το κάλυμμα $X \to X/G_1(P)$. Θεωρούμε την δράση του $G_1(P)$ στο f:

$$\prod_{\sigma \in G_1(P)} \sigma(f) = \prod_{\sigma \in G_1(P)} (f + c_1(\sigma)).$$

Έστω

$$\Delta(w_1, \ldots, w_s) = \det \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_s, \\ w_1^p & \cdots & w_s^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{p^{s-1}} & \cdots & w_s^{p^{s-1}} \end{pmatrix}$$

η *Moore determinant.*

Γράφουμε $G_1(P) \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Έστω f ώστε $\langle 1, f \rangle$ βάση του $L(mP)$. Θα γράφουμε μια αλγεβρική εξίσωση για το κάλυμμα $X \to X/G_1(P)$. Θεωρούμε την δράση του $G_1(P)$ στο f:

$$\prod_{\sigma \in G_1(P)} \sigma(f) = \prod_{\sigma \in G_1(P)} (f + c_1(\sigma)).$$

Έστω

$$\Delta(w_1, \ldots, w_s) = \det \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_s, \\ w_1^p & \cdots & w_s^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{p^{s-1}} & \cdots & w_s^{p^{s-1}} \end{pmatrix}$$

η *Moore determinant.*

Γράφουμε $G_1(P) \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Έστω f ώστε $\langle 1, f\rangle$ βάση του $L(mP)$. Θα γράφουμε μια αλγεβρική εξίσωση για το κάλυμμα $X \to X/G_1(P)$. Θεωρούμε την δράση του $G_1(P)$ στο f:

$$\prod_{\sigma\in G_1(P)} \sigma(f) = \prod_{\sigma\in G_1(P)} \left(f + c_1(\sigma)\right).$$

Έστω

$$\Delta(w_1,\ldots,w_s) = \det\begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_s, \\ w_1^p & \cdots & w_s^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{p^{s-1}} & \cdots & w_s^{p^{s-1}} \end{pmatrix}$$

η *Moore determinant.*

Γράφουμε $G_1(P) \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Έστω f ώστε $\langle 1, f\rangle$ βάση του $L(mP)$. Θα γράψουμε μια αλγεβρική εξίσωση για το κάλυμμα $X \to X/G_1(P)$. Θεωρούμε την δράση του $G_1(P)$ στο f:

$$\prod_{\sigma \in G_1(P)} \sigma(f) = \prod_{\sigma \in G_1(P)} (f + c_1(\sigma)).$$

Έστω

$$\Delta(w_1, \ldots, w_s) = \det \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_s, \\ w_1^p & \cdots & w_s^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{p^{s-1}} & \cdots & w_s^{p^{s-1}} \end{pmatrix}$$

η *Moore determinant.*

Γράφουμε $G_1(P) \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Έστω f ώστε $\langle 1, f\rangle$ βάση του $L(mP)$. Θα γράψουμε μια αλγεβρική εξίσωση για το κάλυμμα $X \to X/G_1(P)$. Θεωρούμε την δράση του $G_1(P)$ στο f:

$$\prod_{\sigma \in G_1(P)} \sigma(f) = \prod_{\sigma \in G_1(P)} (f + c_1(\sigma)).$$

Έστω

$$\Delta(w_1, \ldots, w_s) = \det \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_s, \\ w_1^p & \cdots & w_s^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{p^{s-1}} & \cdots & w_s^{p^{s-1}} \end{pmatrix}$$

η *Moore determinant.*

Ένα προσθετικό πολυώνυμο με ρίζες τα $c_1(\sigma)$, όπου σ διατρέχει τα $G_1(P)$. Μπορώ να το γράψω ως

$$F(Y) = \frac{\Delta(\sigma_1, \ldots, \sigma_s, Y)}{\Delta(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)}.$$

Έχουμε την γενικευμένη Artin-Schreier εξίσωση:

$$F(Y) = \prod_{\sigma \in G_1(P)} \sigma f = N_{G_1(P)}(f).$$

Ένα προσθετικό πολυώνυμο με ρίζες τα $c_1(\sigma)$, όπου σ διατρέχει τα $G_1(P)$. Μπορώ να το γράψω ως

$$F(Y) = \frac{\Delta(\sigma_1, \dots, \sigma_s, Y)}{\Delta(\sigma_1, \dots, \sigma_s)}.$$

Έχουμε την γενικευμένη Artin-Schreier εξίσωση:

$$F(Y) = \prod_{\sigma \in G_1(P)} \sigma f = N_{G_1(P)}(f).$$

Προβλήματα

- Galois module structure του χώρου $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$.
- Δομή των ημιομάδων του Weierstrass.
- Θεωρία παραμορφώσεων καμπύλων με αυτομορφισμούς.

Θεωρία Παραμορφώσεων

Έστω A ένας τοπικός δακτύλιος με μέγιστο ιδεώδες m_A, ώστε $A/m_A = k$. Μία *παραμόρφωση* του ζευγαριού (G, A) είναι μία proper, smooth οικογένεια καμπύλων $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(A)$, μαζί με ένα ομομορφισμό $G \to \mathrm{Aut}_A(\mathcal{X})$ ώστε να υπάρχει G-equivariant ισομορφισμός ϕ από την ειδική ίνα X_s στην X,

$$\phi : \mathcal{X} \otimes_{\mathrm{Spec} A} \mathrm{Spec}(k) \to X.$$

Δύο παραμορφώσεις θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ένας G-equivariant A-ισομορφισμός που να ανάγεται στην ταυτοτική απεικόνιση modulo m_A.

Θεωρία Παραμορφώσεων

Έστω A ένας τοπικός δακτύλιος με μέγιστο ιδεώδες m_A, ώστε $A/m_A = k$. Μία *παραμόρφωση* του ζευγαριού (G, A) είναι μία proper, smooth οικογένεια καμπύλων $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(A)$, μαζί με ένα ομομορφισμό $G \to \mathrm{Aut}_A(\mathcal{X})$ ώστε να υπάρχει G-equivariant ισομορφισμός ϕ από την ειδική ίνα X_s στην X,

$$\phi : \mathcal{X} \otimes_{\mathrm{Spec} A} \mathrm{Spec}(k) \to X.$$

Δύο παραμορφώσεις θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ένας G-equivariant A-ισομορφισμός που να ανάγεται στην ταυτοτική απεικόνιση modulo m_A.

Θεωρία Παραμορφώσεων

Έστω A ένας τοπικός δακτύλιος με μέγιστο ιδεώδες m_A, ώστε $A/m_A = k$. Μία *παραμόρφωση* του ζευγαριού (G, A) είναι μία proper, smooth οικογένεια καμπύλων $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(A)$, μαζί με ένα ομομορφισμό $G \to \mathrm{Aut}_A(\mathcal{X})$ ώστε να υπάρχει G-equivariant ισομορφισμός ϕ από την ειδική ίνα X_s στην X,

$$\phi : \mathcal{X} \otimes_{\mathrm{Spec} A} \mathrm{Spec}(k) \to X.$$

Δύο παραμορφώσεις θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ένας G-equivariant A-ισομορφισμός που να ανάγεται στην ταυτοτική απεικόνιση modulo m_A.

Συναρτητής Παραμόρφωσης

Θεωρούμε την κατηγορία των τοπικών αλγεβρών Artin υπέρ το k. Ορίζουμε τον καθολικό συναρτητή παραμόρφωσης:

$$D_{\mathrm{gl}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}, \mathrm{A} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας} \\ \text{παραμορφώσεων} \\ \text{ζευγαριών } (X, G) \text{ υπέρ το } A \end{array} \right\}$$

Συναρτητής Παραμόρφωσης

Θεωρούμε την κατηγορία των τοπικών αλγεβρών Artin υπέρ το k. Ορίζουμε τον καθολικό συναρτητή παραμόρφωσης:

$$D_{\mathrm{gl}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}, \mathrm{A} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας} \\ \text{παραμορφώσεων} \\ \text{ζευγαριών } (X, G) \text{ υπέρ το } A \end{array} \right\}$$

Local-Global Principle

Οι J. Bertin and A. Mézard απέδειξαν ότι η μελέτη του παραπάνω συναρτητή παραμόρφωσης μπορεί να αναχθεί στο τοπικό πρόβλημα παραμόρφωσης εντοπισμένου στα σημεία P που διακλαδίζονται άγρια.

$$D_{G(P)} : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets},$$

$$A \mapsto \begin{cases} \text{Lifts } G(P) \to \mathrm{Aut}A[[t]] \text{ της φυσικής} \\ \text{αναπαράστασης } \rho : G(P) \to \mathrm{Aut}k[[t]] \text{ modulo} \\ \text{συζυγία με ένα στοιχείο του } \ker(\mathrm{Aut}A[[t]] \to \mathrm{Aut}k[[t]]) \end{cases}$$

Local-Global Principle

Οι J. Bertin and A. Mézard απέδειξαν ότι η μελέτη του παραπάνω συναρτητή παραμόρφωσης μπορεί να αναχθεί στο τοπικό πρόβλημα παραμόρφωσης εντοπισμένου στα σημεία P που διακλαδίζονται άγρια.

$$D_{G(P)} : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets},$$

$$A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Lifts } G(P) \to \mathrm{Aut}A[[t]] \text{ της φυσικής} \\ \text{αναπαράστασης } \rho : G(P) \to \mathrm{Aut}k[[t]] \text{ modulo} \\ \text{συζυγία με ένα στοιχείο του } \ker(\mathrm{Aut}A[[t]] \to \mathrm{Aut}k[[t]]) \end{array} \right.$$

Αναγωγή σε παραμορφώσεις $GL(n, k)$

- Η τεχνική που αναπτύξαμε μας δίνει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον συναρτητή παραμόρφωσης $D_{G(P)}$ με ένα ανάλογο συναρτητή για αναπαραστάσεις στην γενική γραμμική ομάδα.
- Ο τελευταίος συναρτητής είναι representable.
- Οι τύποι ορίζουσας Moore μας επιτρέπουν να κάνουμε πράξεις.

Αναγωγή σε παραμορφώσεις $GL(n, k)$

- Η τεχνική που αναπτύξαμε μας δίνει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον συναρτητή παραμόρφωσης $D_{G(P)}$ με ένα ανάλογο συναρτητή για αναπαραστάσεις στην γενική γραμμική ομάδα.
- Ο τελευταίος συναρτητής είναι representable.
- Οι τύποι ορίζουσας Moore μας επιτρέπουν να κάνουμε πράξεις.

Ένας representable συναρτητής

Θεωρούμε τον συναρτητή από την κατηγορία $\mathcal{C}$ των τοπικών αλγεβρών Artin στην κατηγορία των συνόλων

$$F : A \in Ob(\mathcal{C}) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{liftings της } \rho : H \to L_n(k) \\ \text{σε } \rho_A : H \to L_n(A) \text{ modulo} \\ \text{συζυγία με στοιχείο} \\ \text{του } \ker(L_n(A) \to L_n(k)) \end{array} \right\}$$

Και η αναπαράσταση

Η $k[H,n]$ είναι η αντιμεταθετική k-άλγεβρα που παράγεται από τα X_{ij}^g για $g \in H, 1 \leq j \leq i \leq n$, ώστε

$$X_{ij}^e = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

$$X_{ij}^{gh} = \sum_{l=1}^{n} X_{il}^g X_{lj}^h \text{ για } g, h \in H \text{ και } 1 \leq i, j \leq n.$$

$$X_{ii}^g = 1, \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n, \text{ και για κάθε } g \in H$$

και

$$X_{ij}^g = 0 \text{ για } i < j \text{ και για } g \in H.$$

Ισχύει

$$\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Alg}}(k[H,n], A) \cong \mathrm{Hom}(H, L_n(A)),$$

Και η αναπαράσταση

Η $k[H,n]$ είναι η αντιμεταθετική k-άλγεβρα που παράγεται από τα X_{ij}^{g} για $g \in H, 1 \leq j \leq i \leq n$, ώστε

$$X_{ij}^{e} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

$$X_{ij}^{gh} = \sum_{l=1}^{n} X_{il}^{g} X_{lj}^{h} \text{ για } g, h \in H \text{ και } 1 \leq i, j \leq n.$$

$$X_{ii}^{g} = 1, \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n, \text{ και για κάθε } g \in H$$

και

$$X_{ij}^{g} = 0 \text{ για } i < j \text{ και για } g \in H.$$

Ισχύει

$$\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Alg}}(k[H,n], A) \cong \mathrm{Hom}(H, L_n(A)),$$

Και ένα πρόβλημα

- Δυστυχώς στην συζυγία (κλάσεις ισοδυνάμων αναπαραστάσεων) στην χαρακτηριστική $p > 0$ τα πράγματα είναι δύσκολα και η θεωρία δουλεύει μόνο αν $n = 2$.

Προβλήματα

- Galois module structure του χώρου $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$.
- Δομή των ημιομάδων του Weierstrass.
- Θεωρία παραμορφώσεων καμπύλων με αυτομορφισμούς.