Galois module structure χώρων ολόμορφων διαφορικών

Αριστείδης Κοντογεώργης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστημίου Αθηνών.

11 Δεκεμβρίου 2014

Αλγεβρικές Καμπύλες

X αλγεβρική καμπύλη, προβολική πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k.

$$X^n + Y^n = 1$$

Προβολική:

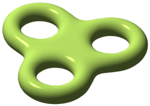
$$k^2 \subset \mathbb{P}^2(k) = \frac{k^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim}$$

$$X^n + Y^n = Z^n$$

$k = \mathbb{C}$

Οι προβολικές αλγεβρικές καμπύλες υπέρ του σώματος $\mathbb{C}$ είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τις συμπαγείς επιφάνεις Riemann. Αυτές είναι προσανατολίσιμες (εξισώσεις Cauchy-Riemann) διδιάστατες επιφάνειες και τοπολογικά χαρακτηρίζονται από το γένος τους.

- $g = 0$ Η σφαίρα του Riemann $\mathbb{P}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- $g = 1$ Ελλειπτικές καμπύλες
- $g \geq 2$ Γενική περίπτωση



Γεωμετρικά σύνολα όπου κάθε σημείο είναι μια κλάση ισομορφίας καμπυλών γένους g.

Αν $g = 0$ ο χώρος M_0 αποτελείται από ένα σημείο (Poincare conjecture για επιφάνειες Riemann!)

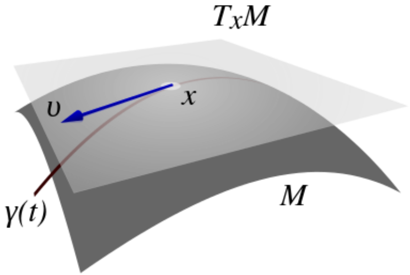
Αν $g = 1$ ο χώρος M_1 είναι η ευθεία k (η ευθεία των j-invariants)

Αν $g \geq 2$ τότε ο M_g έχει διάσταση $3g - 3$.

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές έννοιες «ισοδυναμίας» καμπυλών.

X καμπύλη γένους $g \geq 2$. Η ομάδα αυτομορφισμών της είναι πεπερασμένη.

Πρόβλημα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να «παραμορφώσουμε» την X διατηρόντας την ίδια ομάδα αυτομορφισμών;



Απάντηση Ακολουθόντας αναλλοίωτες κατευθύνσεις στον εφαπτόμενο χώρο.

Ο εφαπτόμενος χώρος του M_g σε μία καμπύλη $X \in M_g$ είναι το $H^1(X, T_X)$.
Μάλιστα

$$H^1(X, T_X) \cong H^0(X, \Omega_X^{\otimes 2})^* \stackrel{\dim}{\to} 3g - 3.$$

Οι αναλλοίωτες κατευθύνσεις είναι τα στοιχεία

$$H^1(X, T_X)^G = H^0(X, \Omega_X^{\otimes 2})_G.$$

Για ένα G πρότυπο

$$M_G = M \otimes_{K[G]} K = M/(gm - m).$$

Το πρόβλημα της Galois module δομής

Δίνεται ένα $K[G]$-module M. Θέλουμε να το διασπάσουμε σε «απλούστερα» $K[G]$-modules.

Emmy Noether $K[G]$-μοδυλες $\leftrightarrow$ Αναπαραστάσεις της G

- Ανάγωγες Αναπαραστάσεις (δεν έχουν υπο-modules)
- Αδιάσπαστες Αναπαραστάσεις (δεν διασπόνται σε ευθέα αθροίσματα υποπαραστάσεων)

Χαρακτηρισμός Αδιάσπαστων

Στην χαρακτηριστική 0 οι έννοιες του αδιάσπαστου και του ανάγωγου ταυτίζονται. Στην πεπερασμένη χαρακτηριστική υπάρχουν αδιάσπαστες που δεν είναι ανάγωγες.

Πρόβλημα: Δίνεται μία πεπερασμένη ομάδα. Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις αδιάσπαστες αναπαραστάσεις της·

- Αν $(|G|, p) = 1$ εύκολο, όπως στην χαρατηριστική 0.
- Αν $(|G|, p) > 1$ αρκεί να περιγράψουμε το p-κομμάτι
- Αν η G είναι μια p-ομάδα και είναι κυκλική τότε αυτό είναι εύκολο. Αρκεί να περιγράψουμε την δομή του γεννήτορα η οποία αποτελείται από ένα Jordan block μήκους k, $1 \leq k \leq p$.
- Αν p περιττός πρώτος η $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ η περιγραφή των αδιάσπαστων αναπαραστάσεων θεωρείται αδύνατη.

Ειδικές περιπτώσεις

- $$y^{p^h} - y = \frac{g(x)}{(x-a_1)^{\Phi(1)} \cdots (x-a_s)^{\Phi(s)}}$$

  Η $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^h$ είναι υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών (Καρανικολόπουλος Math. Nach. 2011).
- Η γενική κυκλική ομάδα
  - modular Θεωρία (Κ. - Καρανικολόπουλος J. of Number Theory 2013
  - Ακέραιες αναπαραστασεις (Κ - Καρανικολόπουλος Proc. AMS 2014).

Η ημιομάδα του Weierstrass

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $P \in X$. Αν δοθεί $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f \in K := k(X)$ η οποία να έχει πόλο στο P τάξης n;
Οι φυσικοί αριθμοί με αυτή την ιδιότητα αποτελούν μια ημιομάδα $H(P)$, την *ημιομάδα του Weierstrass* .
Ορίζουμε τον διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων που έχουν πόλο μόνο στο P με τάξη το πολύ n:

$$L(nP) = \{f \in K : \mathrm{div}(f) \geq nP\} \cap \{0\}.$$

Παράδειγμα: $X = \mathbb{P}^1$, $K = k(X) = k(x)$.

$$L(nP) = \{f \in k[x] : \deg f \leq n\} \xrightarrow{\dim} n + 1.$$

- $n \in H(P)$ αν και μόνο αν $\ell(nP) = \ell\big((n-1)P\big) + 1$.
- $\ell(nP) = n + 1 - g + \ell(W - nP)$ (Θεώρημα Riemann-Roch)
- $n \in H(P)$ αρκεί $n \geq 2g$.
- Υπάρχουν g το πλήθος φυσικοί αριθμοί που δεν ανήκουν στην $H(P)$. Τους αριθμούς αυτούς τους ονομάζουμε gaps.
- $n \notin H(P)$ υπάρχει $\omega \in H^0(X, \Omega_X)$ με ρίζα τάξης $n-1$.

Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{char} k = 0$. Σε αυτή την περίπτωση $G(P)$ κυκλική ομάδα πεπερασμένης τάξης.
Θεωρούμε τα gaps $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_g$. Θεωρούμε το μικρότερο στοιχείο $0 \neq d \in H(P)$. Για το gap i θεωρούμε το μικρότερο $b_i \in H(P)$ με $b_i \equiv i \bmod d$.

$$b_i \equiv \nu_i d + i$$

- Οι αριθμοί ν_i ταυτίζονται με το πλήθος των gaps που είναι ισοδύναμοι με $i \bmod d$.
- Αν ν είναι ο χαρακτήρας της αναπαράστασης $G(P)$ στο $H^0(X, \Omega_X)$

$$\nu = \sum_{i=1}^{d-1} \nu_i \chi^i$$

όπου χ είναι γεννήτορας της κυκλικής ομάδας G^*.

Πεπερασμένη χαρακτηριστική

Προβλήματα:

- Φαινόμενα modular αναπαραστάσεων
- Άγρια διακλάδωση (Wild ramification)

Η ομάδα $G(P)$ δεν είναι πλέον κυκλική αλλά δέχεται μια filtration

$$G_0 > G_1 > \cdots > G_n > \{1\}$$

ομάδων G_i ώστε

$$\frac{G_0}{G_1} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, (m, p) = 1$$

$$G_i/G_{i+1} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

$$G_i = \{\sigma \in G(P) : \sigma(t) \equiv t \mod t^{i+1} k[[t]]\}$$

όπου

$$\mathcal{O}_{X,P} = k[[t]].$$

Ερώτηση: Πότε $G_i \geq G_{i+1}$; Τι σχέση υπάρχει με το $\ell(iP) \neq \ell\big((i+1)P\big)$;
Απάντηση:
K. Math. Z. 2008 Έστω m το πρώτο στοιχείο στην $H(P)$ $p \nmid m$. Αν $G_i > G_{i+1}$ τότε $i = m - m_k, m_k \in H(P)$.
Ερώτηση: Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ακριβέστερα τα πηδήματα;
Να υπολογίσουμε ακριβώς για ποιά k το $m - m_k$ είναι πήδημα;

Harbater-Katz-Gabber καλύμματα

Είναι καλύμματα $X \to \mathbb{P}^1$ με p-ομάδα Galois διακλάδωση σε ένα μόνο στοιχείο. Εμφανίζονται ως «συμπαγοποιήσεις» Galois επεκτάσεων τοπικών δακτυλίων και είναι τα δομικά στοιχεία θεωρίων local-global.

Κατασκευή: Έστω m_r το μικρότερο στοιχείο της $H(P)$, $p \nmid m$.

Συμβολίζουμε με

$$0 = m_0 < \cdots < m_{r-1} < m_r$$

τα στοιχεία της $H(P)$ (που είναι διαιρετά με p).

Υπάρχει μια ακολουθία αναπαραστάσεων

$$\rho_i : G_1 \to \mathrm{GL}\big(L(m_i P)\big)$$

η οποία αντιστοιχεί σε μια φθίνουσα ακολοθία ομάδων

$$G_1 = \ker \rho_0 \supseteq \ker \rho_1 \supseteq \ker \rho_2 \supseteq \cdots \supseteq \ker \rho_r = \{1\}.$$

Θεωρούμε τα πηδήματα c_i της παραπάνω ακολουθίας.

Harbater-Katz-Gabber καλύμματα

Θεώρημα (Κ.-Καρανικολόπουλος 2014)

- Τα πηδήματα της ramification filtration σε HKG-covers είναι τα πηδήματα της representation filtration.
- Μπορούμε να διαλέξουμε γεννήτορες της $H(P)$ οι οποίοι να είναι της μορφής $p_0^h, p^{h_1}\lambda_1, \ldots, p^{h_{n-1}}\lambda_{n-1}, \lambda_n$ με $(\lambda_i, p) = 1$. Τα πηδήματα είναι αριθμοί λ_i.

Ολόμορφα διαφορικά σε HKG-καλύμματα

Για κάθε $\mu \in H(P)$ διαλέγουμε f_μ με $\mathrm{div}(f_\mu)_\infty = \mu P$. f_0 είναι τέτοιο ώστε $k(X)^{G_1} = k(\mathbb{P}^1) = k(f_0)$. Το σύνολο

$$\{f_\mu df_0^{\otimes m} : \deg \mathrm{div} f_i \leq m(2g-2)\}$$

είναι βάση των m-ολόμορφων πολυδιαφορικών στο X.
Αν $|G_1| \geq m(2g-2)$ τότε το module είναι $H^0(X, \Omega^{\otimes m})$ είναι αδιάσπαστο.

Ανοιχτό πρόβλημα:
Να υπολογιστεί το $H^0(X, \Omega^{\otimes m})$ (σε όρους της ramification filtration ή σε άλλους όρους της καμπύλης X.)