Ομάδες Κοτσίδων και δράσεις της απόλυτης ομάδας Galois

Αριστείδης Κοντογεώργης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστημίου Αθηνών.

Συνέδριο Άλγεβρας Θεσσαλονίκη 2-3 Μαΐου 2014

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: ΘΑΛΗΣ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα

Τρία προβλήματα

- Μελέτη της απόλυτης ομάδας Galois $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.
- Το σώμα με ένα στοιχείο
- Αριθμητική Τοπολογία

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Η απόλυτη ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

Θεωρία Galois
Η θεωρία Galois των πεπερασμένων επεκτάσεων σωμάτων επεκτείνεται σε άπειρες ομάδες, με κατάλληλες τροποποιήσεις (οι ομάδες Galois είναι τοπολογικές ομάδες). Η ομάδα Galois της επέκτασης $\bar{k}/k$ είναι το αντίστροφο όριο

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \lim_{\leftarrow} \mathrm{Gal}(K/k)$$

όπου το K διατρέχει τις πεπερασμένες ομάδες Galois του k.
Το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois: Δεν γνωρίζουμε τις πεπερασμένες ομάδες που εμφανίζονται στο παραπάνω όριο.
Παράδειγμα: $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \hat{\mathbb{Z}}$.

Θεωρία Galois
Η θεωρία Galois των πεπερασμένων επεκτάσεων σωμάτων επεκτείνεται σε άπειρες ομάδες, με κατάλληλες τροποποίησεις (οι ομάδες Galois είναι τοπολογικές ομάδες). Η ομάδα Galois της επέκτασης $\bar{k}/k$ είναι το αντίστροφο όριο

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \lim_{\leftarrow} \mathrm{Gal}(K/k)$$

όπου το K διατρέχει τις πεπερασμένες ομάδες Galois του k.
Το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois: Δεν γνωρίζουμε τις πεπερασμένες ομάδες που εμφανίζονται στο παραπάνω όριο.
Παράδειγμα: $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \hat{\mathbb{Z}}$.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΣΠΑ 2007-2013

Θεωρία Galois

Η θεωρία Galois των πεπερασμένων επεκτάσεων σωμάτων επεκτείνεται σε άπειρες ομάδες, με κατάλληλες τροποποίησεις (οι ομάδες Galois είναι τοπολογικές ομάδες). Η ομάδα Galois της επέκτασης $\bar{k}/k$ είναι το αντίστροφο όριο

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \lim_{\leftarrow} \mathrm{Gal}(K/k)$$

όπου το K διατρέχει τις πεπερασμένες ομάδες Galois του k.

Το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois: Δεν γνωρίζουμε τις πεπερασμένες ομάδες που εμφανίζονται στο παραπάνω όριο.

Παράδειγμα: $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \hat{\mathbb{Z}}$.

Δεν μπορούμε να γράψουμε (εκτός από τον ταυτοτικό και την μιγαδική συζυγία) κανένα στοιχείο της ομάδας $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Μπορούμε να την καταλάβουμε μέσω των δράσεων της.

Ο κυκλοτομικός χαρακτήρας είναι η συνάρτηση που προκύπτει από την δράση της στην ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}(\zeta_n)$, όπου το στοιχείο

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \ni \sigma : \sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{d_\sigma}, d_\sigma \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται μια αναπαράσταση, ο κυκλοτομικός χαρακτήρας:

$$\chi : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

$$\sigma \mapsto (d_\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$$

Η αναπαράσταση αυτή βλέπει μόνο την αβελιανοποίηση της ομάδας, αφού περιέχει τον μεταθέτη στον πυρήνα.

Θεωρία κλάσεων σωμάτων: Μελέτη αβελιανών επεκτάσεων του $\mathbb{Q}$.

Η αριθμητική γεωμετρία μας έδωσε μια σειρά από παρόμοιες αναπαραστάσεις. Οι n-ρίζες της μονάδας είναι τα σημεία πεπερασμένης τάξης του κύκλου.

Μπορούμε να γενικεύσουμε θεωρώντας αναπαραστάσεις στα σημεία πεπερασμένης τάξης μιας ελλειπτικής καμπύλης ή γενικότερα μιας αβελιανής πολλ/τας και με αυτό τον τρόπο παίρνουμε αναπαραστάσεισ:

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(2n, \hat{\mathbb{Z}}).$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι σε μια αβελιανή πολλ/τα τα σημεία πεπερασμένης τάξης είναι της μορφής $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.

Η αναπαράσταση αυτή βλέπει μόνο την αβελιανοποίηση της ομάδας, αφού περιέχει τον μεταθέτη στον πυρήνα.

Θεωρία κλάσεων σωμάτων: Μελέτη αβελιανών επεκτάσεων του $\mathbb{Q}$.

Η αριθμητική γεωμετρία μας έδωσε μια σειρά από παρόμοιες αναπαραστάσεις. Οι n-ρίζες της μονάδας είναι τα σημεία πεπερασμένης τάξης του κύκλου.

Μπορούμε να γενικεύσουμε θεωρώντας αναπαραστάσεις στα σημεία πεπερασμένης τάξης μιας ελλειπτικής καμπύλης ή γενικότερα μιας αβελιανής πολλ/τας και με αυτό τον τρόπο παίρνουμε αναπαραστάσεισ:

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(2n, \hat{\mathbb{Z}}).$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι σε μια αβελιανή πολλ/τα τα σημεία πεπερασμένης τάξης είναι της μορφής $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Αλγεβρικές Πολλαπλότητες V **ορισμένες στο** $\mathbb{F}_p$ Θεωρούμε το πλήθος των ρητών τους σημείων $N_r = \#V(\mathbb{F}_{p^r})$ πάνω από κάθε σώμα $\mathbb{F}_{p^r}$. Σχηματίζουμε την «γεννήτρια συνάρτηση»:

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Παράδειγμα

$X = \mathbb{P}^1$, $N_r = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^r}) = p^r + 1$.

$$Z(\mathbb{P}^1,t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}(q^r+1)\frac{t^r}{r}\right) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}.$$

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Το σώμα με ένα στοιχείο

Αλγεβρικές Πολλαπλότητες V **ορισμένες στο** $\mathbb{F}_p$ Θεωρούμε το πλήθος των ρητών τους σημείων $N_r = \#V(\mathbb{F}_{p^r})$ πάνω από κάθε σώμα $\mathbb{F}_{p^r}$. Σχηματίζουμε την «γεννήτρια συνάρτηση»:

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Παράδειγμα

$X = \mathbb{P}^1$, $N_r = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^r}) = p^r + 1$.

$$Z(\mathbb{P}^1, t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} (q^r + 1)\frac{t^r}{r}\right) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}.$$

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Το σώμα με ένα στοιχείο II

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι τα σταθερά σημεία του αυτομορφισμού του Frobenious $x \mapsto x^{p^r}$. Τύπος του σταθερού σημείου του Lefschetz στην συνομολογία etale.

Πως μπορούν να μετατραπούν οι παραπάνω ιδέες ώστε να αποδείξουμε την εικασία του Riemann για την «κανονική» ζήτα συνάρτηση;

Σύγκριση των δακτυλίων $\mathbb{F}_p[t]$ και $\mathbb{Z}$.

Αν P πρώτο πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{F}_p[t]$ τότε το $\mathbb{F}_p[t]/P$ περιέχει πάντα το σώμα $\mathbb{F}_p$.

Στο $\mathbb{Z}$ δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Τα σώματα $\mathbb{Z}/P$ έχουν διαφορετικές χαρακτηριστικές. Θα θέλαμε ένα κοινό «υπόσωμα» όλων αυτών των σωμάτων.

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013

Το σώμα με ένα στοιχείο II

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι τα σταθερά σημεία του αυτομορφισμού του Frobenious $x \mapsto x^{p^r}$. Τύπος του σταθερού σημείου του Lefschetz στην συνομολογία etale.

Πως μπορούν να μετατραπούν οι παραπάνω ιδέες ώστε να αποδείξουμε την εικασία του Riemann για την «κανονική» ζήτα συνάρτηση;

Σύγκριση των δακτυλίων $\mathbb{F}_p[t]$ και $\mathbb{Z}$.

Αν P πρώτο πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{F}_p[t]$ τότε το $\mathbb{F}_p[t]/P$ περιέχει πάντα το σώμα $\mathbb{F}_p$.

Στο $\mathbb{Z}$ δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Τα σώματα $\mathbb{Z}/P$ έχουν διαφορετικές χαρακτηριστικές. Θα θέλαμε ένα κοινό «υπόσωμα» όλων αυτών των σωμάτων.

Το σώμα με ένα στοιχείο II

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι τα σταθερά σημεία του αυτομορφισμού του Frobenious $x \mapsto x^{p^r}$.
Τύπος του σταθερού σημείου του Lefschetz στην συνομολογία etale.
Πως μπορούν να μετατραπούν οι παραπάνω ιδέες ώστε να αποδείξουμε την εικασία του Riemann για την «κανονική» ζήτα συνάρτηση;

Σύγκριση των δακτυλίων $\mathbb{F}_p[t]$ και $\mathbb{Z}$.
Αν P πρώτο πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{F}_p[t]$ τότε το $\mathbb{F}_p[t]/P$ περιέχει πάντα το σώμα $\mathbb{F}_p$.
Στο $\mathbb{Z}$ δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Τα σώματα $\mathbb{Z}/P$ έχουν διαφορετικές χαρακτηριστικές. Θα θέλαμε ένα κοινό «υπόσωμα» όλων αυτών των σωμάτων.

Το σώμα με ένα στοιχείο II

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι τα σταθερά σημεία του αυτομορφισμού του Frobenious $x \mapsto x^{p^r}$.

Τύπος του σταθερού σημείου του Lefschetz στην συνομολογία etale.

Πως μπορούν να μετατραπούν οι παραπάνω ιδέες ώστε να αποδείξουμε την εικασία του Riemann για την «κανονική» ζήτα συνάρτηση;

Σύγκριση των δακτυλίων $\mathbb{F}_p[t]$ και $\mathbb{Z}$.

Αν P πρώτο πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{F}_p[t]$ τότε το $\mathbb{F}_p[t]/P$ περιέχει πάντα το σώμα $\mathbb{F}_p$.

Στο $\mathbb{Z}$ δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Τα σώματα $\mathbb{Z}/P$ έχουν διαφορετικές χαρακτηριστικές. Θα θέλαμε ένα κοινό «υπόσωμα» όλων αυτών των σωμάτων.

Το σώμα με ένα στοιχείο III

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις για το πως θα πρέπει να μοιάζει μια τέτοια θεωρία (Tits, Smirnov, Kapranov, Manin, Marcoli, Connes...)
Ας περιγράψουμε μια βασική ιδέα:

$$\lim_{q\to 1} \text{Γραμμική Άλγεβρα } /\mathbb{F}_q = \text{Συνδιαστική.}$$

Το παραπάνω δεν λέει και πολλά πράγματα. Οι Kapranov και Smirnov επιχειρηματολογούν ότι

$$\lim_{q\to 1} \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q) = S_n.$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_{1^d}) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes S_n \qquad \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_{1^d}[t]) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n$$

Οι τελευταίες ομάδες εμφανίζονται στην θεωρία των framed braids.

Το σώμα με ένα στοιχείο III

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις για το πως θα πρέπει να μοιάζει μια τέτοια θεωρία (Tits, Smirnov, Kapranov, Manin, Marcoli, Connes...)
Ας περιγράψουμε μια βασική ιδέα:

$$\lim_{q\to 1} \text{ Γραμμική 'Αλγεβρα } /\mathbb{F}_q = \text{Συνδιαστική.}$$

Το παραπάνω δεν λέει και πολλά πράγματα. Οι Kapranov και Smirnov επιχειρηματολογούν ότι

$$\lim_{q\to 1} \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q) = S_n.$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_{1^d}) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes S_n \qquad \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_{1^d}[t]) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n$$

Οι τελευταίες ομάδες εμφανίζονται στην θεωρία των framed braids.

Ευρωπαϊκή Ένωση ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΣΠΑ 2007-2013

Categorification

- Αντικατάσταση συνολοθεωρητικών εννοιών με κατηγορικά ανάλογα.
- Επιτυχημένη προσέγγιση στην Θεωρία κόμβων όπου οι φυσικοί αριθμοί «κατηγοριοποιούνται» στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων υπέρ πεπερασμένου σώματος $\rightarrow$ Khovanov homology.
- Είναι ένα είδος αντίστροφης διαδικασίας του σώματος με ένα στοιχείο.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Ήταν γνωστό στον ίδιο τον Gauss η σύνδεση του νόμου της τετραγωνικής αντιστροφής με τα linking numbers.

Αριθμητική	Τοπολογία
πρώτα ιδεώδη	κόμβοι
ιδεώδη	links
ομάδα κλάσεων	$H_1(M, \mathbb{Z})$
$\begin{array}{ccc} K & \mathcal{O}_K & p\mathcal{O}_K = P_1^{e} \cdots P_r^{e} \\ \vert & \vert & \vert \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \end{array}$	$\begin{array}{cc} M & L = K_1 \cup \cdots \cup K_r \\ \downarrow & \downarrow \\ S^3 & S^1 \to S^3 \end{array}$
Αυτομορφισμός Frobenious	Περιστροφή γύρω από τον κύκλο

Πρόβλημα: Ποιος είναι ο βαθύτερος λόγος αυτής της ομοιότητας;

Ευρωπαϊκή Ένωση, ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ, ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ, ΕΣΠΑ 2007-2013

Ήταν γνωστό στον ίδιο τον Gauss η σύνδεση του νόμου της τετραγωνικής αντιστροφής με τα linking numbers.

Αριθμητική	Τοπολογία
πρώτα ιδεώδη	κόμβοι
ιδεώδη	links
ομάδα κλάσεων	$H_1(M, \mathbb{Z})$
$\begin{array}{ccc} K & \mathcal{O}_K & p\mathcal{O}_K = P_1^e \cdots P_r^e \\ \vert & \vert & \vert \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \end{array}$	$\begin{array}{cc} M & L = K_1 \cup \cdots \cup K_r \\ \downarrow & \downarrow \\ S^3 & S^1 \to S^3 \end{array}$
Αυτομορφισμός Frobenious	Περιστροφή γύρω από τον κύκλο

Πρόβλημα: Ποιος είναι ο βαθύτερος λόγος αυτής της ομοιότητας;

Αριθμητική Τοπολογία

Ήταν γνωστό στον ίδιο τον Gauss η σύνδεση του νόμου της τετραγωνικής αντιστροφής με τα linking numbers.

Αριθμητική	Τοπολογία
πρώτα ιδεώδη	κόμβοι
ιδεώδη	links
ομάδα κλάσεων	$H_1(M,\mathbb{Z})$
$\begin{array}{ccc} K & \mathcal{O}_K & p\mathcal{O}_K = P_1^e\cdots P_r^e \\ \vert & \vert & \vert \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \end{array}$	$\begin{array}{cc} M & L = K_1\cup\cdots\cup K_r \\ \downarrow & \downarrow \\ S^3 & S^1 \to S^3 \end{array}$
Αυτομορφισμός Frobenious	Περιστροφή γύρω από τον κύκλο

Πρόβλημα: Ποιος είναι ο βαθύτερος λόγος αυτής της ομοιότητας;

Ο αυτομορφισμός του Frobenious

Έστω $K/\mathbb{Q}$ πεπερασμένη Galois επέκταση του $\mathbb{Q}$. Έχουμε $p\mathcal{O}_K = P_1^e \cdots P_r^e$.

Διαλέγουμε ένα πρώτο $P_1 \mid p\mathcal{O}_K$.

$$G(P_1) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) : \sigma(P_1) = P_1\}.$$

Παρατήρηση:

$$\tau G(P_1)\tau^{-1} = G(P_i) \text{ για κάποιο } \tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

$$1 \to T(P_1) \to G(P_1) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_K/P_1}{\mathbb{Z}/p}\right) \to 1.$$

Ο αυτομορφισμός του Frobenious

Έστω $K/\mathbb{Q}$ πεπερασμένη Galois επέκταση του $\mathbb{Q}$. Έχουμε $p\mathcal{O}_K = P_1^e \cdots P_r^e$.
Διαλέγουμε ένα πρώτο $P_1 \mid p\mathcal{O}_K$.

$$G(P_1) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) : \sigma(P_1) = P_1\}.$$

Παρατήρηση:

$$\tau G(P_1)\tau^{-1} = G(P_i) \text{ για κάποιο } \tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

$$1 \to T(P_1) \to G(P_1) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_K/P_1}{\mathbb{Z}/p}\right) \to 1.$$

Ο αυτομορφισμός του Frobenious

Έστω $K/\mathbb{Q}$ πεπερασμένη Galois επέκταση του $\mathbb{Q}$. Έχουμε $p\mathcal{O}_K = P_1^e \cdots P_r^e$.
Διαλέγουμε ένα πρώτο $P_1 \mid p\mathcal{O}_K$.

$$G(P_1) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) : \sigma(P_1) = P_1\}.$$

Παρατήρηση:

$$\tau G(P_1)\tau^{-1} = G(P_i) \text{ για κάποιο } \tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

$$1 \to T(P_1) \to G(P_1) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_K/P_1}{\mathbb{Z}/p}\right) \to 1.$$

Frobenious II

Η επέκταση $\mathcal{O}_K/P_1$ υπέρ $\mathbb{Z}/p$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση πεπερασμένων σωμάτων. Η ομάδα Galois είναι κυκλική και παράγεται από τον αυτομορφισμό του Frobenious $F_p : x \mapsto x^p$.

Μέσω της ακριβούς ακολουθίας ο F_p γίνεται ένα στοιχείο της $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$:

$$1 \to T(P_1) \to G(P_1) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_K/P_1}{\mathbb{Z}/p}\right) \to 1.$$

Περνάμε στο αντίστροφο όριο και καταλήγουμε στο

$$p \to F_p \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

Ο ορισμός του $\mathbb{F}_1$ είναι καλά ορισμένος μέχρι συζυγίας.

Frobenious II

Η επέκταση $\mathcal{O}_K/P_1$ υπέρ $\mathbb{Z}/p$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση πεπερασμένων σωμάτων. Η ομάδα Galois είναι κυκλική και παράγεται από τον αυτομορφισμό του Frobenious $F_p : x \mapsto x^p$.
Μέσω της ακριβούς ακολουθίας ο F_p γίνεται ένα στοιχείο της $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$:

$$1 \to T(P_1) \to G(P_1) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_K/P_1}{\mathbb{Z}/p}\right) \to 1.$$

Περνάμε στο αντίστροφο όριο και καταλήγουμε στο

$$p \to F_p \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

Ο ορισμός του $\mathbb{F}_1$ είναι καλά ορισμένος μέχρι συζυγίας.

Frobenious II

Η επέκταση $\mathcal{O}_K/P_1$ υπέρ $\mathbb{Z}/p$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση πεπερασμένων σωμάτων. Η ομάδα Galois είναι κυκλική και παράγεται από τον αυτομορφισμό του Frobenious $F_p : x \mapsto x^p$.
Μέσω της ακριβούς ακολουθίας ο F_p γίνεται ένα στοιχείο της $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$:

$$1 \to T(P_1) \to G(P_1) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_K/P_1}{\mathbb{Z}/p}\right) \to 1.$$

Περνάμε στο αντίστροφο όριο και καταλήγουμε στο

$$p \to F_p \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

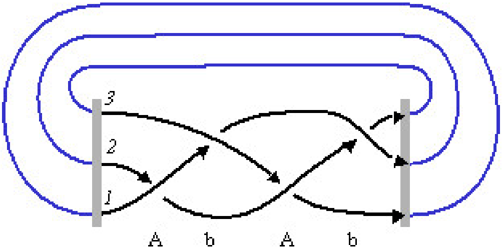
Ο ορισμός του $\mathbb{F}_{\mathfrak{l}}$ είναι καλά ορισμένος μέχρι συζυγίας.

Τι είναι οι πρώτοι αριθμοί;

Είναι κάποιες κλάσεις συζυγίας στοιχείων της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Κόμποι και κοτσίδες

Οι κοτσίδες κλείνουν σε links και οι κόμβοι ανοίγουν σε κοτσίδες



Δύο κοτσίδες κλείνουν στον ίδιο κόμπο αν:

- είναι συζυγείς.
- η μία έχει μια κλωστή παραπάνω και προκύπτει από το πολλαπλασιασμό της άλλης με μια αντιμετάθεση των δύο τελευταίων κλωστών.

Δύο κοτσίδες αντιστοιχούν στον ίδιο κόμβο αν η μία προκύπτει από την άλλη με συνδυασμούς των δύο παραπάνω κινήσεων.

Η ομάδα κοτσίδων δέχεται μια πιστή αναπαράσταση:

$$\rho : B_n \to \mathrm{Aut}(F_n)$$

Τοπολογία: Θεωρούμε τον χώρο

$$C_n = \{z_1, \ldots, z_n : z_i \in \mathbb{C}, |z_i| < 1, z_i \neq z_j\}$$

Είναι γνωστό ότι $\pi_1(C_n, \bar{x}_0) = B_n$. Για σταθερό $\bar{x} \in C_n$ θεωρούμε τον δίσκο D_n από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει τα σημεία $\bar{x}$. Η $F_n = \pi_1(D_n - \bar{x}, x_0)$. Η δράση προκύπτει από θεωρήματα δράσης της πρωταρχικής ομάδας της «βάσης» στην πρωταρχική ομάδα της «ίνας».

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΣΠΑ 2007-2013

Η ομάδα κοτσίδων δέχεται μια πιστή αναπαράσταση:

$$\rho : B_n \to \mathrm{Aut}(F_n)$$

Τοπολογία: Θεωρούμε τον χώρο

$$C_n = \{z_1, \ldots, z_n : z_i \in \mathbb{C}, |z_i| < 1, z_i \neq z_j\}$$

Είναι γνωστό ότι $\pi_1(C_n, \bar{x}_0) = B_n$. Για σταθερό $\bar{x} \in C_n$ θεωρούμε τον δίσκο D_n από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει τα σημεία $\bar{x}$. Η $F_n = \pi_1(D_n - \bar{x}, x_0)$. Η δράση προκύπτει από θεωρήματα δράσης της πρωταρχικής ομάδας της «βάσης» στην πρωταρχική ομάδα της «ίνας».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

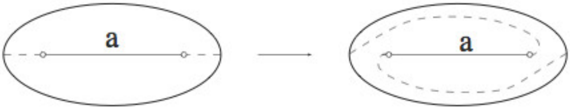
Η ομάδα $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ως ομάδα κοτσίδων

Χρειαζόμαστε
μια θεωρία πρωταρχικών ομάδων, η οποία να μπορεί να χειριστεί τα σώματα αριθμών και να βλέπει την απόλυτη ομάδα Galois ως πρωταρχική ομάδα.
Αυτή η θεωρία είναι η θεωρία της etale fundamental group του Grothendieck.
Η θεωρία αυτή έρχεται σε
πολλές εκδόσεις. Για σώματα αριθμών η ομάδα Galois είναι η πρωταρχική ομάδα, ενώ για δακτυλίους Dedekind η etale επεκτάσεις είναι οι αδικλάδιστες.

Διαλέγουμε τις ρίζες $a_1, \ldots, a_n$ ενός πολυωνύμου του $\mathbb{Q}[x]$ βαθμού n. Έστω K η επέκταση του $\mathbb{Q}$ που αυτά παράγουν. Η ομάδα $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ είναι μια υποομάδα της S_n, και είναι ακριβώς η S_n αρκεί τα a_i να είναι αρκετά «γενικά».

Θεωρούμε το $\Delta = \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}}) - \{a_1, \ldots, a_n, \infty\}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ μεταθέτει τα σημεία $a_1, \ldots, a_n$ και επίσης δρα στο Δ.

Κοτσίδες: B_n mapping class group $D_2 - \{P_1, \ldots, P_n\}$



Διαλέγουμε τις ρίζες $a_1, \ldots, a_n$ ενός πολυωνύμου του $\mathbb{Q}[x]$ βαθμού n. Έστω K η επέκταση του $\mathbb{Q}$ που αυτά παράγουν. Η ομάδα $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ είναι μια υποομάδα της S_n, και είναι ακριβώς η S_n αρκεί τα a_i να είναι αρκετά «γενικά».

Θεωρούμε το $\Delta = \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}}) - \{a_1, \ldots, a_n, \infty\}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ μεταθέτει τα σημεία $a_1, \ldots, a_n$ και επίσης δρα στο Δ.

Κοτσίδες: B_n mapping class group $D_2 - \{P_1, \ldots, P_n\}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dash, "\hat{F}_n"'] \\ \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] \\ \mathbb{Q}[x] \end{tikzcd}$$

Για ευκολία θα περιοριστούμε σε «pure braids»: $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$. Θεωρούμε το σώμα $\bar{\mathbb{Q}}[x]$ και την μέγιστη (pro-ℓ) $M/\bar{\mathbb{Q}}[x]$ επέκταση που είναι αδιακλάδιστη στις θέσεις $x - a_i$.

Η επέκταση $M/\bar{\mathbb{Q}}$ είναι «γεωμετρική» ενώ η επέκταση $M/\bar{\mathbb{Q}}$ «αριθμητική».

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \hat{F}_n \arrow[r] \arrow[d, leftrightsquigarrow] & \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}[t]/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] \arrow[d, leftrightsquigarrow] & 0 \\ & \pi_1^{\mathrm{et}}(D - \{a_i\}) & & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) & \end{tikzcd}$$

Η αναπαράσταση του Ihara

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widehat{F}_n \arrow[r] \arrow[d, leftrightsquigarrow] & \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}[t]/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] \arrow[d, leftrightsquigarrow] & 0 \\ & \pi_1^{\mathrm{et}}(D - \{a_i\}) & & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) & \end{tikzcd}$$

$$\rho^* \longmapsto \rho$$

Η ομάδα $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ δρα δια συζυγίας στην $\hat{F}_n$. Υπάρχει αναπαράσταση:

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow Br_n \subset \mathrm{Aut}(\hat{F}_r).$$

$$Br_n := \{\sigma : \sigma(x_i) \sim x_i^{\ell}\}.$$

Η αναπαράσταση του Ihara

$$F_n = \langle x_1, \ldots, x_{n+1} | x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \rangle.$$

Τα στοιχεία της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, δρουν στους γεννήτορες της $\hat{F}_n$, ως

$$\sigma(x_i) = a_{\sigma,i} x_i^{\ell_\sigma} a_{\sigma,i}^{-1}.$$

Το ℓ_σ είναι κοινό για όλα τα x_i. Η συνάρτηση $N : B_n \to \hat{\mathbb{Z}}$ είναι επί (δεν είναι τετριμμένο) και η σύνθεση $N \circ \rho$ είναι ο κυκλοτομικός χαρακτήρας. Η συνάρτηση

$$a_i : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \hat{F}_r$$

είναι συνκύκλος.

Ερώτηση:

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \hat{F}_r) = ?$$

$$F_n = \langle x_1, \ldots, x_{n+1} | x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \rangle.$$

Τα στοιχεία της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, δρουν στους γεννήτορες της $\hat{F}_n$, ως

$$\sigma(x_i) = a_{\sigma,i} x_i^{\ell_\sigma} a_{\sigma,i}^{-1}.$$

Το ℓ_σ είναι κοινό για όλα τα x_i. Η συνάρτηση $N : B_n \to \hat{\mathbb{Z}}$ είναι επί (δεν είναι τετριμμένο) και η σύνθεση $N \circ \rho$ είναι ο κυκλοτομικός χαρακτήρας.

Η συνάρτηση

$$a_i : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \hat{F}_r$$

είναι συνκύκλος.

Ερώτηση:

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \hat{F}_r) = ?$$

Ευρωπαϊκή Ένωση Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013 ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

$$F_n = \langle x_1, \dots, x_{n+1} | x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \rangle.$$

Τα στοιχεία της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, δρουν στους γεννήτορες της $\hat{F}_n$, ως

$$\sigma(x_i) = a_{\sigma,i} x_i^{\ell_\sigma} a_{\sigma,i}^{-1}.$$

Το ℓ_σ είναι κοινό για όλα τα x_i. Η συνάρτηση $N : B_n \to \hat{\mathbb{Z}}$ είναι επί (δεν είναι τετριμμένο) και η σύνθεση $N \circ \rho$ είναι ο κυκλοτομικός χαρακτήρας. Η συνάρτηση

$$a_i : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \hat{F}_r$$

είναι συνκύκλος.

Ερώτηση:

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \hat{F}_r) = ?$$

$$F_n = \langle x_1, \ldots, x_{n+1} | x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \rangle.$$

Τα στοιχεία της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, δρουν στους γεννήτορες της $\hat{F}_n$, ως

$$\sigma(x_i) = a_{\sigma,i} x_i^{\ell_\sigma} a_{\sigma,i}^{-1}.$$

Το ℓ_σ είναι κοινό για όλα τα x_i. Η συνάρτηση $N : B_n \to \hat{\mathbb{Z}}$ είναι επί (δεν είναι τετριμμένο) και η σύνθεση $N \circ \rho$ είναι ο κυκλοτομικός χαρακτήρας. Η συνάρτηση

$$a_i : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \hat{F}_r$$

είναι συνκύκλος.

Ερώτηση:

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \hat{F}_r) = ?$$

Κάθε χαρακτηριστική υποομάδα $H < \hat{F}_r$ μας δίνει αναπαραστάσεις στο πηλίκο, αφού η συνάρτηση ($G = B_n$ ή $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ επάγει αναπαράσταση

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(\hat{F}_n/H)$$

Η προφανής επιλογή είναι η $H = \hat{F}_r'$, οπότε έχουμε αναπαράσταση

$$\rho : G \to \mathrm{GL}\left(\hat{F}_n^{\mathrm{ab}}\right) = H_1(D_2 - a_1, \ldots, a_n).$$

Στην κλασική περίπτωση των κοτσίδων αυτή είναι η αναπαράσταση Gassner.

Μια διάσημη αλγεβρική καμπύλη

$$x^n + y^n = 1.$$

Είναι μια αλγεβρική καμπύλη $F_n \to \mathbb{P}^1$,

$$\mathrm{Gal}(F_n/\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Aut}(F_n) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes S_3.$$

Η καμπύλη αυτή διακλαδίζεται σε τρία σημεία του $\mathbb{P}^1$ τα $\{0, 1, \infty\}$ και συνεπώς είναι πηλίκο του $\mathbb{H} = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ modulo μια τριγωνική ομάδα Fuchs την

$$\Delta(n, n, n) = \langle x_1, x_0, x_\infty | x_1^n, x_0^n, x_\infty^n, x_1 x_0 x_\infty = 1 \rangle$$

Μια διάσημη αλγεβρική καμπύλη

$$x^n + y^n = 1.$$

Είναι μια αλγεβρική καμπύλη $F_n \to \mathbb{P}^1$,

$$\mathrm{Gal}(F_n/\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Aut}(F_n) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes S_3.$$

Η καμπύλη αυτή διακλαδίζεται σε τρία σημεία του $\mathbb{P}^1$ τα $\{0, 1, \infty\}$ και συνεπώς είναι πηλίκο του $\mathbb{H} = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ modulo μια τριγωνική ομάδα Fuchs την

$$\Delta(n, n, n) = \langle x_1, x_0, x_\infty | x_1^n, x_0^n, x_\infty^n, x_1 x_0 x_\infty = 1 \rangle$$

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat F_n''"] \arrow[dd, dash, bend right=50, "\hat F_n'"'] \arrow[dddd, dash, bend right=70, "\hat F_n"'] & \\
K'' \arrow[d, dash, "\hat F_n'/\hat F_n''"] & K_n^{\mathrm{ur}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] \\
K' \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right=50, "\mathbb{Z}^n"'] & K_n^{\mathrm{unab}} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dash] \\
K_n \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^n"] & \\
K = \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] & \\
\mathbb{Q}[x] &
\end{tikzcd}
$$

$K' = \bigcup_n K_n \qquad K'' = \bigcup_n K_n^{\mathrm{urab}}$

Tate module: $\hat F_n'/\hat F_n'' = \mathrm{Gal}(K''/K')$

Το Tate module μπορούμε να το δούμε ως ένα module υπέρ αντιμεταθετικό δακτύλιο $\mathcal{A}$ τυπικών δυναμοσειρών.

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(s, \mathcal{A})$$

$s = \binom{n}{2}$.

Τα K_n αντιστοιχούν στις γενικευμένες καμπύλες Fermat

Αναπαραστάσεις με βάση τις Καμπύλες Fermat

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat{F}''_n"] \arrow[dd, dash, bend right, "\hat{F}'_n"'] \arrow[dddd, dash, bend right=60, "\hat{F}_n"'] & \\
K'' \arrow[d, dash, "\hat{F}'_n/\hat{F}''_n"] & K_n^{\mathrm{ur}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] \\
K' \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right, "\mathbb{Z}^n"'] & K_n^{\mathrm{unab}} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dash] \\
K_n \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^n"] & \\
K = \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] & \\
\mathbb{Q}[x] &
\end{tikzcd}$$

$K' = \bigcup_n K_n$ $\qquad$ $K'' = \bigcup_n K_n^{\mathrm{urab}}$

Tate module: $\hat{F}'_n/\hat{F}''_n = \mathrm{Gal}(K''/K')$

Το Tate module μπορούμε να το δούμε ως ένα module υπέρ αντιμεταθετικό δακτύλιο $\mathcal{A}$ τυπικών δυναμοσειρών.

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(s, \mathcal{A})$$

$s = \binom{n}{2}$.

Τα K_n αντιστοιχούν στις γενικευμένες καμπύλες Fermat

Αναπαραστάσεις με βάση τις Καμπύλες Fermat

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat{F}_n''"] \arrow[dd, dash, bend right=60, "\hat{F}_n'"'] \arrow[dddd, dash, bend right=80, "\hat{F}_n"'] & \\
K'' \arrow[d, dash, "\hat{F}_n'/\hat{F}_n''"] & K_n^{\mathrm{ur}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] \\
K' \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right=60, "\mathbb{Z}^n"'] & K_n^{\mathrm{unab}} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dash] \\
K_n \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^n"] & \\
K = \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] & \\
\mathbb{Q}[x] &
\end{tikzcd}
$$

$K' = \bigcup_n K_n \qquad K'' = \bigcup_n K_n^{\mathrm{urab}}$

Tate module: $\hat{F}_n'/\hat{F}_n'' = \mathrm{Gal}(K''/K')$

Το Tate module μπορούμε να το δούμε ως ένα module υπέρ αντιμεταθετικό δακτύλιο $\mathcal{A}$ τυπικών δυναμοσειρών.

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(s, \mathcal{A})$$

$s = \binom{n}{2}$.

Τα K_n αντιστοιχούν στις γενικευμένες καμπύλες Fermat

Αναπαραστάσεις με βάση τις Καμπύλες Fermat

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat{F}_n''"] \arrow[dd, dash, bend right, "\hat{F}_n'"'] \arrow[dddd, dash, bend right=60, "\hat{F}_n"'] & \\
K'' \arrow[d, dash, "\hat{F}_n'/\hat{F}_n''"] & K_n^{\mathrm{ur}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] \\
K' \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right, "\mathbb{Z}^n"'] & K_n^{\mathrm{unab}} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dash] \\
K_n \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^n"] & \\
K = \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] & \\
\mathbb{Q}[x] &
\end{tikzcd}
$$

$K' = \bigcup_n K_n \qquad K'' = \bigcup_n K_n^{\mathrm{urab}}$

Tate module: $\hat{F}_n'/\hat{F}_n'' = \mathrm{Gal}(K''/K')$

Το Tate module μπορούμε να το δούμε ως ένα module υπέρ αντιμεταθετικό δακτύλιο $\mathcal{A}$ τυπικών δυναμοσειρών.

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(s, \mathcal{A})$$

$s = \binom{n}{2}$.

Τα K_n αντιστοιχούν στις γενικευμένες καμπύλες Fermat

Οι καμπύλες Fermat δεν είναι ενδιαφέρουσες από πλευράς κόμβων, η ομάδα B_3 δεν είναι ενδιαφέρουσα. Γενικευμένες καμπύλες Fermat $F_{n,\bar{\lambda}}$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2})$. Για να απλοποιήσουμε την κατασκευή ας υποθέσουμε ότι τα $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. «pure braids».

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\ \lambda_1 x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{k-2} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \end{aligned}$$

Διακλαδισμένο κάλυμμα $F_{n,\bar{\lambda}} \to \mathbb{P}^1$, σημεία διακλάδωσης $0, 1, \infty, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$.

Uniformization μέσω ομάδας Fuchs

$$\Gamma = \langle x_1, \ldots x_{k+1} : x_i^n = 1, x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = 1 \rangle.$$

Ευρωπαϊκή Ένωση Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013 ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι καμπύλες Fermat δεν είναι ενδιαφέρουσες από πλευράς κόμβων, η ομάδα B_3 δεν είναι ενδιαφέρουσα. Γενικευμένες καμπύλες Fermat $F_{n,\bar{\lambda}}$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2})$. Για να απλοποιήσουμε την κατασκευή ας υποθέσουμε ότι τα $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. «pure braids».

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\ \lambda_1 x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{k-2} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \end{aligned}$$

Διακλαδισμένο κάλυμμα $F_{n,\bar{\lambda}} \to \mathbb{P}^1$, σημεία διακλάδωσης $0, 1, \infty, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$.

Uniformization μέσω ομάδας Fuchs

$$\Gamma = \langle x_1, \ldots x_{k+1} : x_i^n = 1, x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = 1 \rangle.$$

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013

Οι καμπύλες Fermat δεν είναι ενδιαφέρουσες από πλευράς κόμβων, η ομάδα B_3 δεν είναι ενδιαφέρουσα. Γενικευμένες καμπύλες Fermat $F_{n,\bar{\lambda}}$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2})$. Για να απλοποιήσουμε την κατασκευή ας υποθέσουμε ότι τα $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. «pure braids».

$$\begin{aligned}
x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\
\lambda_1 x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_{k-2} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0
\end{aligned}$$

Διακλαδισμένο κάλυμμα $F_{n,\bar{\lambda}} \to \mathbb{P}^1$, σημεία διακλάδωσης $0, 1, \infty, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$.

Uniformization μέσω ομάδας Fuchs

$$\Gamma = \langle x_1, \ldots x_{k+1} : x_i^n = 1, x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = 1 \rangle.$$

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΣΠΑ 2007-2013

$$\mathrm{Gal}(F_{n,\bar{\lambda}}, \mathbb{P}^1) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k$$

$$\mathrm{Aut}(F_{n,\bar{\lambda}}, \mathbb{P}^1) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{k+1} \rtimes S_{k+2}$$

Υπολογισμός Ιακωβιανής (είναι fiber product από καμπύλες Fermat.) Καμπύλες Fermat, καμπύλες με *μιγαδικό πολλ/σμό* σύνδεση με Jacobi sums. Τι συμβαίνει στην γενική περίπτωση· Ποια είναι η σχέση με τα Ramanujan sums;

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

$$\mathrm{Gal}(F_{n,\bar{\lambda}}, \mathbb{P}^1) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k$$

$$\mathrm{Aut}(F_{n,\bar{\lambda}}, \mathbb{P}^1) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{k+1} \rtimes S_{k+2}$$

Υπολογισμός Ιακωβιανής (είναι fiber product από καμπύλες Fermat.)

Καμπύλες Fermat, καμπύλες με *μιγαδικό πολλ/σμό* σύνδεση με Jacobi sums. Τι συμβαίνει στην γενική περίπτωση· Ποια είναι η σχέση με τα Ramanujan sums;

$$\mathrm{Gal}(F_{n,\bar{\lambda}}, \mathbb{P}^1) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k$$

$$\mathrm{Aut}(F_{n,\bar{\lambda}}, \mathbb{P}^1) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{k+1} \rtimes S_{k+2}$$

Υπολογισμός Ιακωβιανής (είναι fiber product από καμπύλες Fermat.) Καμπύλες Fermat, καμπύλες με *μιγαδικό πολλ/σμό* σύνδεση με Jacobi sums. Τι συμβαίνει στην γενική περίπτωση· Ποια είναι η σχέση με τα Ramanujan sums;

Ευρωπαϊκή Ένωση Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013 ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Πίσω στις κοτσίδες.

- Η θεωρία των κοτσίδων δεν χρειάζονται p-αδικούς;
- p-adic framed braids: $(\mathbb{Z}_\ell)^n \rtimes B_n$.
- Θεωρούμε γεννήτορες $t_1, \ldots, t_n$ της υποομάδας $(\mathbb{Z}_\ell)^n$, και να τις στείλουμε σε αυτομορφισμούς της ελεύθερης pro-ℓ ομάδας. Μια τέτοια επιλογή θα ήταν να διαλέξουμε ένα στοιχείο $\alpha \in \mathbb{Z}_\ell$ και να στείλουμε το t_i στον αυτομορφισμό $x_j \mapsto x_j^{\alpha^{\delta_{i,j}a}}$.
  Μια διαφορετική επιλογή αναπαράστασης (με τοπολογικό ενδιαφέρον, «κορδέλες») θα ήταν να διπλασιάσουμε τους γεννήτορες τις ελεύθερης ομάδας (ή να πολλαπλασιάσουμε κάθε γεννήτορα επί $k \geq 2$) και να θεωρήσουμε την αναπαράσταση του $t_i \mapsto \rho(t_i)$, ώστε $\rho(t_i)y_i = y_i\bar{y}_i^\ell$ και να αφήνει τους άλλους γεννήτορες αναλλοίωτους.
  Στην αβελιανοποίηση καταλήγουμε στην αναπαράσταση:

$$\mathbb{Z}_\ell \ni a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ευρωπαϊκή Ένωση · ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ · ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ · ΕΣΠΑ 2007-2013

Πίσω στις κοτσίδες.

- Η θεωρία των κοτσίδων δεν χρειάζονται p-αδικούς;
- p-adic framed braids: $(\mathbb{Z}_\ell)^n \rtimes B_n$.
- Θεωρούμε γεννήτορες $t_1, \ldots, t_n$ της υποομάδας $(\mathbb{Z}_\ell)^n$, και να τις στείλουμε σε αυτομορφισμούς της ελεύθερης pro-ℓ ομάδας. Μια τέτοια επιλογή θα ήταν να διαλέξουμε ένα στοιχείο $\alpha \in \mathbb{Z}_\ell$ και να στείλουμε το t_i στον αυτομορφισμό $x_j \mapsto x_j^{\alpha^{\delta_{i,j}a}}$.

Μια διαφορετική επιλογή αναπαράστασης (με τοπολογικό ενδιαφέρον, «κορδέλες») θα ήταν να διπλασιάσουμε τους γεννήτορες τις ελεύθερης ομάδας (ή να πολλαπλασιάσουμε κάθε γεννήτορα επί $k \geq 2$) και να θεωρήσουμε την αναπαράσταση του $t_i \mapsto \rho(t_i)$, ώστε $\rho(t_i)y_i = y_i\bar{y}_i^\ell$ και να αφήνει τους άλλους γεννήτορες αναλλοίωτους.

Στην αβελιανοποίηση καταλήγουμε στην αναπαράσταση:

$$\mathbb{Z}_\ell \ni a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πίσω στις κοτσίδες.

- Η θεωρία των κοτσίδων δεν χρειάζονται p-αδικούς;
- p-adic framed braids: $(\mathbb{Z}_\ell)^n \rtimes B_n$.
- Θεωρούμε γεννήτορες $t_1, \ldots, t_n$ της υποομάδας $(\mathbb{Z}_\ell)^n$, και να τις στείλουμε σε αυτομορφισμούς της ελεύθερης pro-ℓ ομάδας. Μια τέτοια επιλογή θα ήταν να διαλέξουμε ένα στοιχείο $\alpha \in \mathbb{Z}_\ell$ και να στείλουμε το t_i στον αυτομορφισμό $x_j \mapsto x_j^{\alpha^{\delta_{i,j}a}}$.
Μια διαφορετική επιλογή αναπαράστασης (με τοπολογικό ενδιαφέρον, «κορδέλες») θα ήταν να διπλασιάσουμε τους γεννήτορες τις ελεύθερης ομάδας (ή να πολλαπλασιάσουμε κάθε γεννήτορα επί $k \geq 2$) και να θεωρήσουμε την αναπαράσταση του $t_i \mapsto \rho(t_i)$, ώστε $\rho(t_i)y_i = y_i\bar{y}_i^\ell$ και να αφήνει τους άλλους γεννήτορες αναλλοίωτους.
Στην αβελιανοποίηση καταλήγουμε στην αναπαράσταση:

$$\mathbb{Z}_\ell \ni a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συμπεράσματα

- Σώμα με ένα στοιχείο: πρώτοι $\leftrightarrow$ Frobenious
- Αριθμητική τοπολογία: στοιχεία ίδιας ομάδας
- Απόλυτη ομάδα Galois Μεταφορά ιδεών ανάμεσα σε κοτσίδες, mapping class groups και αντιστρόφως.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΣΠΑ 2007-2013
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συμπεράσματα

- Σώμα με ένα στοιχείο : πρώτοι $\leftrightarrow$ Frobenious
- Αριθμητική τοπολογία : στοιχεία ίδιας ομάδας
- Απόλυτη ομάδα Galois Μεταφορά ιδεών ανάμεσα σε κοτσίδες, mapping class groups και αντιστρόφως.

Συμπεράσματα

- Σώμα με ένα στοιχείο: πρώτοι $\leftrightarrow$ Frobenious
- Αριθμητική τοπολογία: στοιχεία ίδιας ομάδας
- Απόλυτη ομάδα Galois Μεταφορά ιδεών ανάμεσα σε κοτσίδες, mapping class groups και αντιστρόφως.

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Ευχαριστώ πολύ

Ευχαριστώ πολύ!