Αυτομορφισμοί καμπυλών και το κανονικό ιδεώδες

Αριστείδης Κοντογεώργης -Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Πανεπιστήμιο Κρήτης 26 Σεπτεμβρίου 2019

- X είναι μια προβολική αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p.

- X είναι μια προβολική αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p.
- $|\mathrm{Aut}(X)| < 84(g-1)$ αν $p \nmid |G|$

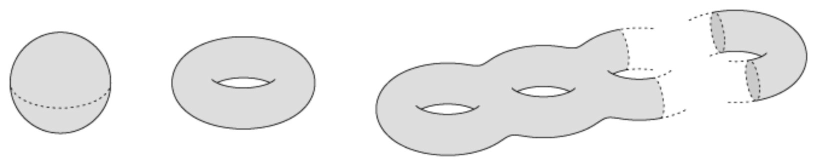
- X είναι μια προβολική αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p.
- $|\mathrm{Aut}(X)| < 84(g-1)$ αν $p \nmid |G|$
- Το παραπάνω φράγμα δεν είναι σωστό στην περίπτωση $p \mid |G|$ και πρέπει να αντικατασταθεί από ένα πολυωνυμικό φράγμα του g βαθμού 4.

- X είναι μια προβολική αλγεβρική καμπύλη γένους $g \geq 2$ ορισμένη πάνω από αλγεβρικά κλειστό σώμα k χαρακτηριστικής p.
- $|\mathrm{Aut}(X)| < 84(g-1)$ αν $p \nmid |G|$
- Το παραπάνω φράγμα δεν είναι σωστό στην περίπτωση $p \mid |G|$ και πρέπει να αντικατασταθεί από ένα πολυωνυμικό φράγμα του g βαθμού 4.

Πρόβλημα: Πως θα υπολογίσουμε την ομάδα αυτομορφισμών;

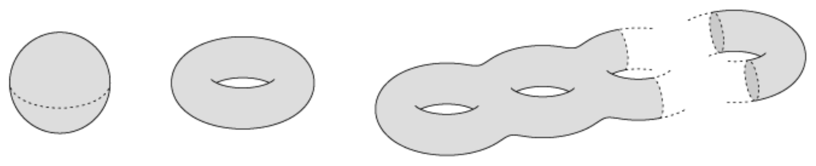
Αναπαραστάσεις ομάδων αυτομορφισμών

- Ο χώρος των ολόμορφων διαφορικών $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_X)$, διανυσματικός χώρος διάστασης g.



Αναπαραστάσεις ομάδων αυτομορφισμών

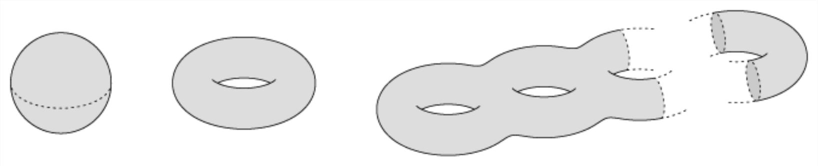
- Ο χώρος των ολόμορφων διαφορικών $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_X)$, διανυσματικός χώρος διάστασης g.



- Γενικότερα μπορούμε να θεωρήσουμε τους χώρους ολόμορφων πολυδιαφορικών $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$ οι οποίοι είναι διανυσματικοί χώροι διάστασης $(2n-1)(g-1)$.

Αναπαραστάσεις ομάδων αυτομορφισμών

- Ο χώρος των ολόμορφων διαφορικών $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_X)$, διανυσματικός χώρος διάστασης g.



- Γενικότερα μπορούμε να θεωρήσουμε τους χώρους ολόμορφων πολυδιαφορικών $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$ οι οποίοι είναι διανυσματικοί χώροι διάστασης $(2n-1)(g-1)$.

Υπάρχουν οι φυσιολογικές αναπαραστάσεις

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(H^0(X, \Omega_X^{\otimes n}))$$

οι οποίες δίνουν στους χώρους $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$ την δομή ενός $k[G]$-module.

Galois module δομή

Η δράση είναι πιστή, αρκεί η X να μην είναι υπερελλειπτική και $p \neq 2$ (B. Köck and J. Tait 2015)

Η δράση είναι πιστή, αρκεί η X να μην είναι υπερελλειπτική και $p \neq 2$ (B. Köck and J. Tait 2015)

Με τον όρο Galois module δομή για το G-module M αναφερόμαστε στο πρόβλημα της διάσπασης του σε αδιάσπαστα G-modules. Το πρόβλημα για τα ολόμορφα διαφορικά τέθηκε από τον Hecke το 1928 και αφορά ένα ισοδύναμο πρόβλημα δράσης σε modular forms. Αν $p \nmid |G|$ το πρόβλημα λύθηκε από τον Chevalley και Weyl το 1934.

Galois module δομή

Στην περίπτωση που η χαρακτηριστική διαιρεί την τάξη της ομάδας, τα πράγματα είναι πολύ δυσκολότερα γιατί εμφανίζονται φαινόμενα modular θεωρίας αναπαραστάσεων και γιατί εμφανίζεται άγρια διακλάδωση.

Galois module δομή

Στην περίπτωση που η χαρακτηριστική διαιρεί την τάξη της ομάδας, τα πράγματα είναι πολύ δυσκολότερα γιατί εμφανίζονται φαινόμενα modular θεωρίας αναπαραστάσεων και γιατί εμφανίζεται άγρια διακλάδωση.

Σε ειδικές περιπτώσεις το πρόβλημα είναι λυμένο:

Ήμερη διακάδωση (Nakajima 1986, Kani 1986), κυκλοτομικές επεκτάσεις (Ward 2017, [K]-Ward 2018), κυκλικές ομάδες (Valentini-Madan 1981, [K]-Karanikolopoulos 2013), στοιχειώδεις αβελιανές τύπου Artin-Schreier (Karanikolopoulos 2012).

Στην περίπτωση που η χαρακτηριστική διαιρεί την τάξη της ομάδας, τα πράγματα είναι πολύ δυσκολότερα γιατί εμφανίζονται φαινόμενα modular θεωρίας αναπαραστάσεων και γιατί εμφανίζεται άγρια διακλάδωση.

Σε ειδικές περιπτώσεις το πρόβλημα είναι λυμένο:

Ήμερη διακάδωση (Nakajima 1986, Kani 1986), κυκλοτομικές επεκτάσεις (Ward 2017, [K]-Ward 2018), κυκλικές ομάδες (Valentini-Madan 1981, [K]-Karanikolopoulos 2013), στοιχειώδεις αβελιανές τύπου Artin-Schreier (Karanikolopoulos 2012).

Ειδικότερα στην περίπτωση που η p-Sylow υποομάδα της G είναι κυκλική τότε οι η Galois module δομή εξαρτάται μόνο από τον τύπο διακλαδωσης (Bleher,Chinburg,[K] 2017).

Θεώρημα (Noether-Enriques-Petri) Η παρακάτω ακολουθία είναι ακριβής

$$0 \to I_X \to \mathrm{Sym} H^0(X, \Omega_X) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, \Omega_X^{\otimes n}) \to 0,$$

όπου το ιδεώδες I_X παράγεται από στοιχεία βαθμού 2 και 3. Επιπλέον αν το X δεν είναι

- μη ιδιόμορφη πεμπτοβάθμια γένους 6
- X is τριγωνική καμπύλη

Τότε το I_X παράγεται από στοιχεία βαθμού 2.

Παράδειγμα: Η καμπύλη Fermat

Η καμπύλη $F_n : x_1^n + x_2^n + x_0^n = 0$ με γένος $g = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$.

Παράδειγμα: Η καμπύλη Fermat

Η καμπύλη $F_n : x_1^n + x_2^n + x_0^n = 0$ με γένος $g = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$. Θέτουμε $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$ και $\omega = \frac{dx}{y^{n-1}} = -\frac{dy}{x^{n-1}}$. Το σύνολο

$$x^i y^j \omega \text{ for } 0 \leq i + j \leq n - 3$$

αποτελεί μια βάση του χώρου των ολόμορφων διαφορικών.

Παράδειγμα: Η καμπύλη Fermat

Η καμπύλη $F_n : x_1^n + x_2^n + x_0^n = 0$ με γένος $g = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$. Θέτουμε $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ και $\omega = \frac{dx}{y^{n-1}} = -\frac{dy}{x^{n-1}}$. Το σύνολο

$$x^i y^j \omega \text{ for } 0 \leq i + j \leq n - 3$$

αποτελεί μια βάση του χώρου των ολόμορφων διαφορικών. Η περίπτωση $n = 2$ είναι ρητή, η περίπτωση $n = 3$ είναι ελλειπτική για $n = 4$ έχουμε γένος 3 και gonality 3, η περίπτωση $n = 5$ έχει γένος 6 και είναι πεμπτοβάθμια. Η πρώτη περίπτωση εφαρμογής του θεωρήματος Petri είναι για $n = 6$ με $g = 10$.

Πρόταση Το κανονικό ιδεώδες της καμπύλης Fermat αποτελείται από δύο σύνολα γεννητόρων

$$G_1 = \{\omega_{i_1,j_1}\omega_{i_2,j_2} - \omega_{i_3,j_3}\omega_{i_4,j_4} : i_1 + i_2 = i_3 + i_4, j_1 + j_2 = j_3 + j_4\},$$

$$G_2 = \left\{\omega_{i_1,j_1}\omega_{i_2,j_2} + \omega_{i_3,j_3}\omega_{i_4,j_4} + \omega_{i_5,j_5}\omega_{i_6,j_6} = 0 : \begin{smallmatrix} i_1+i_2=n+a, & j_1+j_2=b \\ i_3+i_4=a, & j_3+j_4=n+b \\ i_5+i_6=a, & j_5+j_6=b \end{smallmatrix}\right\}$$

με $0 \leq a, b$ ώστε $0 \leq a + b \leq n - 3$.

Η ομάδα αυτομορφισμών ως αλγεβρικό σύνολο

$X \subset \mathbb{P}^r$ προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Είναι σωστό ότι κάθε αυτομορφισμός $X \to X$ επεκτείνεται σε ένα αυτομορφισμό του περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{P}^r$;

Η ομάδα αυτομορφισμών ως αλγεβρικό σύνολο

$X \subset \mathbb{P}^r$ προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Είναι σωστό ότι κάθε αυτομορφισμός $X \to X$ επεκτείνεται σε ένα αυτομορφισμό του περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{P}^r$;

Απαντήσεις στο παραπάνω ερώτημα έχουν δοθεί στην βιβλιογραφία για υπερεπιφάνειες και complete intersections, όμως εδώ εκ κατασκευής όλοι οι αυτομορφισμοί επεκτείνονται σε γραμμικούς αυτομορφισμούς του περιβάλλοντος χώρου.

Η ομάδα αυτομορφισμών ως αλγεβρικό σύνολο

$X \subset \mathbb{P}^r$ προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Είναι σωστό ότι κάθε αυτομορφισμός $X \to X$ επεκτείνεται σε ένα αυτομορφισμό του περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{P}^r$;

Απαντήσεις στο παραπάνω ερώτημα έχουν δοθεί στην βιβλιογραφία για υπερεπιφάνειες και complete intersections, όμως εδώ εκ κατασκευής όλοι οι αυτομορφισμοί επεκτείνονται σε γραμμικούς αυτομορφισμούς του περιβάλλοντος χώρου.

Ερώτημα Πότε ένα στοιχείο της $\mathrm{GL}(H^0(X, \Omega_X))$ περιορίζεται σε αυτομορφισμό της καμπύλης;

$X \subset \mathbb{P}^r$ προβολικό αλγεβρικό σύνολο. Είναι σωστό ότι κάθε αυτομορφισμός $X \to X$ επεκτείνεται σε ένα αυτομορφισμό του περιβάλλοντος χώρου $\mathbb{P}^r$;

Απαντήσεις στο παραπάνω ερώτημα έχουν δοθεί στην βιβλιογραφία για υπερεπιφάνειες και complete intersections, όμως εδώ εκ κατασκευής όλοι οι αυτομορφισμοί επεκτείνονται σε γραμμικούς αυτομορφισμούς του περιβάλλοντος χώρου.

Ερώτημα Πότε ένα στοιχείο της $\mathrm{GL}(H^0(X, \Omega_X))$ περιορίζεται σε αυτομορφισμό της καμπύλης;

Απάντηση Πρέπει και αρκεί $\sigma(I_X) \subset I_X$.

Η φυσική αναπαράσταση στο I_X

Το I_X παράγεται από πολυώνυμα βαθμού 2. Αυτά μπορούν να γραφούν με την βοήθεια $g \times g$ συμμετρικούς πίνακες.

$$\tilde{A}_i(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^t A_i \bar{\omega}, \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_g)^t$$

Η φυσική αναπαράσταση στο I_X

Το I_X παράγεται από πολυώνυμα βαθμού 2. Αυτά μπορούν να γραφούν με την βοήθεια $g \times g$ συμμετρικούς πίνακες.

$\tilde{A}_i(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^t A_i \bar{\omega}, \bar{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_g)^t$

$$(\sigma_{\mu,\nu})^t A_i (\sigma_{\mu,\nu}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda(\sigma)_{ji} A_j \qquad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq j.$$

Η φυσική αναπαράσταση στο I_X

Το I_X παράγεται από πολυώνυμα βαθμού 2. Αυτά μπορούν να γραφούν με την βοήθεια $g \times g$ συμμετρικούς πίνακες.

$\tilde{A}_i(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^t A_i \bar{\omega}, \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_g)^t$

$$(\sigma_{\mu,\nu})^t A_i (\sigma_{\mu,\nu}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda(\sigma)_{ji} A_j \qquad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq j.$$

Το πρόβλημα του εγκλεισμού $\sigma(I_X) \subset I_X$ έχει μετατραπεί σε ένα πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας.

Η φυσική αναπαράσταση στο I_X

Το I_X παράγεται από πολυώνυμα βαθμού 2. Αυτά μπορούν να γραφούν με την βοήθεια $g \times g$ συμμετρικούς πίνακες.

$\tilde{A}_i(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^t A_i \bar{\omega}, \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_g)^t$

$$(\sigma_{\mu,\nu})^t A_i (\sigma_{\mu,\nu}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda(\sigma)_{ji} A_j \qquad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq j.$$

Το πρόβλημα του εγκλεισμού $\sigma(I_X) \subset I_X$ έχει μετατραπεί σε ένα πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας. Δυστυχώς τα αλγεβρικά σύνολα είναι εξαιρετικά πολύπλοκα.

$x_{7,8}x_{10,10} - 2x_{9,8}x_{9,10} + x_{10,8}x_{7,10}$,

.................756 equations....................

$x_{7,9}x_{10,10} - 2 * x_{9,9}x_{9,10} + x_{10,9}x_{7,10}$

Γενίκευση: Θεωρία Συζυγιών

Θέτουμε $S = k[\omega_1, \dots, \omega_g]$ και θεωρούμε ένα graded S-module M το οποίο παράγεται από τα στοιχεία $m_1, \dots, m_r$ με αντίστοιχους βαθμούς $a_1, \dots, a_r$.

Γενίκευση: Θεωρία Συζυγιών

Θέτουμε $S = k[\omega_1, \dots, \omega_g]$ και θεωρούμε ένα graded S-module M το οποίο παράγεται από τα στοιχεία $m_1, \dots, m_r$ με αντίστοιχους βαθμούς $a_1, \dots, a_r$. Θεωρούμε το ελεύθερο S-module

$$F_0 = \bigoplus_j S(-a_j) \xrightarrow{\pi} M, \text{ με } m_j S = S(-a_j).$$

Θέτουμε $S = k[\omega_1, \dots, \omega_g]$ και θεωρούμε ένα graded S-module M το οποίο παράγεται από τα στοιχεία $m_1, \dots, m_r$ με αντίστοιχους βαθμούς $a_1, \dots, a_r$. Θεωρούμε το ελεύθερο S-module

$$F_0 = \bigoplus_j S(-a_j) \xrightarrow{\pi} M, \text{ με } m_j S = S(-a_j).$$

Ο πυρήνας της π είναι ξανά ένα πεπερασμένα παραγόμενο graded S-module και συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία καταλήγουμε στο

$$0 \longrightarrow F_g \xrightarrow{\phi_g} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \ ,$$

όπου $\mathrm{coker}(\phi_1) = F_0/\mathrm{Im}\phi_1 = F_0/\ker\pi \cong M$.

Betti numbers

Θεωρούμε μια ελάχιστη ελεύθερη επίλυση και γράφουμε κάθε free module F_i ως

$$F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}.$$

Οι αριθμοί $\beta_{i,j}$ λέγονται οι Betti numbers της ελεύθερης επίλυσης.

Θεωρούμε μια ελάχιστη ελεύθερη επίλυση και γράφουμε κάθε free module F_i ως

$$F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}.$$

Οι αριθμοί $\beta_{i,j}$ λέγονται οι Betti numbers της ελεύθερης επίλυσης. Οι αριθμοί Betti συγκεντρώνεται στον πίνακα

	0	1	$\cdots$	r
i	$\beta_{0,i}$	$\beta_{1,i+1}$	$\cdots$	$\beta_{r,i+r}$,
$i+1$	$\beta_{0,i+1}$	$\beta_{1,i+2}$	$\cdots$	$\beta_{r,i+r+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
j	$\beta_{0,j}$	$\beta_{1,j+1}$	$\cdots$	$\beta_{r,j+r}$

$n = 6$, $g = 10$, $28 = \beta_{1,2} = \binom{g-2}{2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	28	105	189	189	105	27	0	0
2	0	0	27	105	189	189	105	28	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Επεκτείνοντας την δράση

M πεπερασμένα παραγόμενο graded S-module στο οποίο δρα η ομάδα G. Θεωρούμε τους ελάχιστους γεννήτορες $m_1, \dots, m_r$ με βαθμούς a_i. επεκτείνουμε την δράση $\sigma \in G$ στέλνοντας τους ελεύθερους γεννήτορες M_i ως εξής

$$\sigma(M_i) = \sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu,i} M_i, \text{ για κάποια } a_{\nu,i} \in S.$$

M πεπερασμένα παραγόμενο graded S-module στο οποίο δρα η ομάδα G. Θεωρούμε τους ελάχιστους γεννήτορες $m_1, \ldots, m_r$ με βαθμούς a_i. επεκτείνουμε την δράση $\sigma \in G$ στέλνοντας τους ελεύθερους γεννήτορες M_i ως εξής

$$\sigma(M_i) = \sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu,i} M_i, \text{ για κάποια } a_{\nu,i} \in S.$$

Επιπλέον $\sigma(sm) = \sigma(s)\sigma(m)$. Με αυτό τον τρόπο η δράση επεκτείνεται στο F και στο $\ker\pi$.

Γενική δράση

Θεωρούμε την δράση πάνω στους γεννήτορες

$$\sigma\left(\sum_{j=1}^{r} s_j M_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \sigma(s_j) \sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu,j}(\sigma) M_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{\nu,j}(\sigma)\sigma(s_j)\right) M_\nu,$$

όπου $\deg_S a_{\nu,j} + a_\nu = \deg_S m_j$.

Γενική δράση

Κάτω από την δράση της $\sigma \in G$ η r-άδα $(s_1, \dots, s_r)^t$ στέλνεται στο

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix} \overset{\sigma}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a_{1,1}(\sigma) & a_{1,2}(\sigma) & \cdots & a_{1,r}(\sigma) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1}(\sigma) & a_{r,2}(\sigma) & \cdots & a_{r,r}(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(s_1) \\ \vdots \\ \sigma(s_r) \end{pmatrix}.$$

Πίνακας δράσης

$$\sigma \mapsto A(\sigma) = \begin{pmatrix} A_1(\sigma) & A_{1,2}(\sigma) & \cdots & A_{1,j}(\sigma) \\ 0 & A_2(\sigma) & & A_{2,j}(\sigma) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_j(\sigma) \end{pmatrix}$$

Πίνακας δράσης

Μέσω συμμετρίας Gorenstein δείχνουμε [K-Terezakis-Tsouknidas] ότι

$$\sigma \mapsto A(\sigma) = \begin{pmatrix} A_1(\sigma) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_j(\sigma) \end{pmatrix}$$

Συνομολογιακή προσέγγιση

Κάθε S-module F_i στην ελάχιστη ελεύθερη επίλυση μπορεί να θεωρηθεί ως μια σειρά αναπαραστάσεων της ομάδας G βλέποντας τα graded part βαθμού d.

$$\rho_{i,d} : G \to \mathrm{GL}(F_{i,d})$$

Συνομολογιακή προσέγγιση

Κάθε S-module F_i στην ελάχιστη ελεύθερη επίλυση μπορεί να θεωρηθεί ως μια σειρά αναπαραστάσεων της ομάδας G βλέποντας τα graded part βαθμού d.

$$\rho_{i,d} : G \to \mathrm{GL}(F_{i,d})$$

Αυτό μας δίνει μία σειρά από G-modules

$$\mathrm{Tor}_i^S(k, S_X) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_i^S(k, S_X)_j$$

Κάθε S-module F_i στην ελάχιστη ελεύθερη επίλυση μπορεί να θεωρηθεί ως μια σειρά αναπαραστάσεων της ομάδας G βλέποντας τα graded part βαθμού d.

$$\rho_{i,d} : G \to \mathrm{GL}(F_{i,d})$$

Αυτό μας δίνει μία σειρά από G-modules

$$\mathrm{Tor}_i^S(k, S_X) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_i^S(k, S_X)_j$$

και

$$F_{i,d} = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_i^S(k, S_X)_{d-j} \otimes S_j.$$

Ο δακτύλιος αναπαράστασης ή Green Ring είναι ο δακτύλιος που παράγεται από τις κλάσεις ισομορφισμών $[V]$ από $k[G]$-modules με τις πράξεις

$$[V]+[W]=[V\oplus W],\qquad [V][W]=[V\otimes W].$$

Ο δακτύλιος αναπαράστασης ή Green Ring είναι ο δακτύλιος που παράγεται από τις κλάσεις ισομορφισμών $[V]$ από $k[G]$-modules με τις πράξεις

$$[V] + [W] = [V \oplus W], \qquad [V][W] = [V \otimes W].$$

Ο representation ring είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα το $[k]$, την κλάση του σώματος ως τετριμμένο G-module. Ο δακτύλιος των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι υποδακτύλιος εμφυτευμένος στα πολλαπλάσια του $[k]$. Ο δακτύλιος παράγεται από τις κλάσεις των indecomposable modules.

Green ring

Ο δακτύλιος αναπαράστασης ή Green Ring είναι ο δακτύλιος που παράγεται από τις κλάσεις ισομορφισμών $[V]$ από $k[G]$-modules με τις πράξεις

$$[V] + [W] = [V \oplus W], \qquad [V][W] = [V \otimes W].$$

Ο representation ring είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα το $[k]$, την κλάση του σώματος ως τετριμμένο G-module. Ο δακτύλιος των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι υποδακτύλιος εμφυτευμένος στα πολλαπλάσια του $[k]$. Ο δακτύλιος παράγεται από τις κλάσεις των indecomposable modules.

Grothendieck ring

Πηλίκο του representation ring modulo το ιδεώδες που παράγεται από τις ακριβείς ακολουθίες

$$1 \to V \to W \to U \to 0$$

Πηλίκο του representation ring modulo το ιδεώδες που παράγεται από τις ακριβείς ακολουθίες

$$1 \to V \to W \to U \to 0$$

Στην modular θεωρία αναπαραστάσεων οι δύο δακτύλιοι διαφέρουν. Δεν είναι κάθε $k[G]$ υπομodule ευθύς προσθετέος.

Grothendieck ring

Πηλίκο του representation ring modulo το ιδεώδες που παράγεται από τις ακριβείς ακολουθίες

$$1 \to V \to W \to U \to 0$$

Στην modular θεωρία αναπαραστάσεων οι δύο δακτύλιοι διαφέρουν. Δεν είναι κάθε $k[G]$ υπομodule ευθύς προσθετέος.

Πρόβλημα Κατασκευή Hilbert function που αντί για την διάσταση του graded μέρους να μετρά την πολλαπλότητα εμφάνισης μιας indecomposable αναπαράστασης.

Μία παραμόρφωση της καμπύλης X είναι μια οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}R$ για κάποιο τοπικό δακτύλιο R, ώστε

$$\begin{tikzcd} X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}k \arrow[r] & \mathrm{Spec}R \end{tikzcd}$$

Μία παραμόρφωση της καμπύλης X είναι μια οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}R$ για κάποιο τοπικό δακτύλιο R, ώστε

$$\begin{tikzcd} X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}k \arrow[r] & \mathrm{Spec}R \end{tikzcd}$$

Αν ο δακτύλιος R είναι τέτοιος ώστε $\mathrm{char}(\mathrm{Quot}(R)) = 0$, αλλά $\mathrm{char}(R/\mathfrak{m}_R) > 0$, τότε μιλάμε για το πρόβλημα της ανύψωσης στην χαρακτηριστική 0.

Μία παραμόρφωση της καμπύλης X είναι μια οικογένεια $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}R$ για κάποιο τοπικό δακτύλιο R, ώστε

$$\begin{tikzcd} X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}k \arrow[r] & \mathrm{Spec}R \end{tikzcd}$$

Αν ο δακτύλιος R είναι τέτοιος ώστε $\mathrm{char}(\mathrm{Quot}(R)) = 0$, αλλά $\mathrm{char}(R/\mathfrak{m}_R) > 0$, τότε μιλάμε για το πρόβλημα της ανύψωσης στην χαρακτηριστική 0. Η ανύψωση μιας καμπύλης στην χαρακτηριστική 0 είναι πάντα δυνατή αλλά η ανύψωση μαζί με την ομάδα αυτομορφισμών όχι, για παράδειγμα δεν ισχύουν τα ίδια φράγματα από το γένος.

Ο εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης είναι ισόμορφος με τον χώρο $H^0(X), \Omega_X^{\otimes 2})_G$ [K]. Συνεπώς η μελέτη της $k[G]$-δομής θα μας δώσει στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου.

Deformation Theory και αναπαραστάσεις

Ο εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης είναι ισόμορφος με τον χώρο $H^0(X), \Omega_X^{\otimes 2})_G$ [K]. Συνεπώς η μελέτη της $k[G]$-δομής θα μας δώσει στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου.

Μελέτη των σχετικών χώρων διαφορικών, τα $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$ είναι ελεύθερα R-modules.

Ο εφαπτόμενος χώρος του συναρτητή παραμόρφωσης είναι ισόμορφος με τον χώρο $H^0(X), \Omega_X^{\otimes 2})_G$ [K]. Συνεπώς η μελέτη της $k[G]$-δομής θα μας δώσει στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου.

Μελέτη των σχετικών χώρων διαφορικών, τα $H^0(X, \Omega_X^{\otimes n})$ είναι ελεύθερα R-modules.

Ας μελετήσουμε την $R[G]$-module δομή τους στα πλαίσια της θεωρίας ακεραίων αναπαραστάσεων.

Επεκτείνουμε τους δυωνυμικούς συντελεστές $\binom{i}{j}$ με 0 αν $i < j$.

Επεκτείνουμε τους δυωνυμικούς συντελεστές $\binom{i}{j}$ με 0 αν $i < j$.

Για $a \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε τον $a \times a$ πίνακα $A_a = (a_{ij})$ ορισμένο ως $a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$. Είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, του οποίου η αναγωγή modulo p έχει τάξη p.

Παράδειγμα: Ομάδες $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Επεκτείνουμε τους δυωνυμικούς συντελεστές $\binom{i}{j}$ με 0 αν $i < j$.

Για $a \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε τον $a \times a$ πίνακα $A_a = (a_{ij})$ ορισμένο ως $a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$. Είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, του οποίου η αναγωγή modulo p έχει τάξη p.

Η αναπαράσταση $\rho : \sigma^i \mapsto A_a^i$, $\langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ είναι indecomposable.

Παράδειγμα: Ομάδες $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Επεκτείνουμε τους δυωνυμικούς συντελεστές $\binom{i}{j}$ με 0 αν $i < j$.

Για $a \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε τον $a \times a$ πίνακα $A_a = (a_{ij})$ ορισμένο ως $a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$. Είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, του οποίου η αναγωγή modulo p έχει τάξη p.

Η αναπαράσταση $\rho : \sigma^i \mapsto A_a^i$, $\langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ είναι indecomposable.

Ιδέα: Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο με βάση $\{1, x, x^2, \dots, x^{a-1}\}$, με την φυσική δραση $x \mapsto x + 1$.

Indecomposable modules

- S Είναι μια ακέραια περιοχή που είναι $W(k)(\zeta_p)$-άλγεβρα.

- S Είναι μια ακέραια περιοχή που είναι $W(k)(\zeta_p)$-άλγεβρα.
- $\lambda = \zeta_p - 1$, $\lambda \equiv 0 \mathrm{mod} \mathfrak{m}$

Indecomposable modules

- S Είναι μια ακέραια περιοχή που είναι $W(k)(\zeta_p)$-άλγεβρα.
- $\lambda = \zeta_p - 1$, $\lambda \equiv 0 \mathrm{mod} \mathfrak{m}$
- Για $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το S-module, υπο-module του $S(\lambda X + 1)$

- S Είναι μια ακέραια περιοχή που είναι $W(k)(\zeta_p)$-άλγεβρα.
- $\lambda = \zeta_p - 1$, $\lambda \equiv 0 \mathrm{mod} \mathfrak{m}$
- Για $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το S-module, υπο-module του $S(\lambda X + 1)$

$$V_{a_0,a_1} = \langle (\lambda X + 1)^{a_0} X^i 0 \leq i \leq a_1 \rangle$$

- S Είναι μια ακέραια περιοχή που είναι $W(k)(\zeta_p)$-άλγεβρα.
- $\lambda = \zeta_p - 1$, $\lambda \equiv 0 \mathrm{mod} \mathfrak{m}$
- Για $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το S-module, υπο-module του $S(\lambda X + 1)$

$$V_{a_0,a_1} = \langle (\lambda X + 1)^{a_0} X^i 0 \leq i \leq a_1 \rangle$$

Τα modules V_{a_0,a_1} είναι ισόμορφα πάνω από το $\mathrm{Quot}(S)$ αλλά δεν είναι ισόμορφα πάνω από το S.

Το μοντέλο των Bertin-Nezard

$$(X + \lambda^{-1})^p = x^{-m} + \lambda^{-p}$$

$m = pq - l, 0 < l \leq p - 1$

Το μοντέλο των Bertin-Nezard

$$(X+\lambda^{-1})^p = x^{-m} + \lambda^{-p}$$

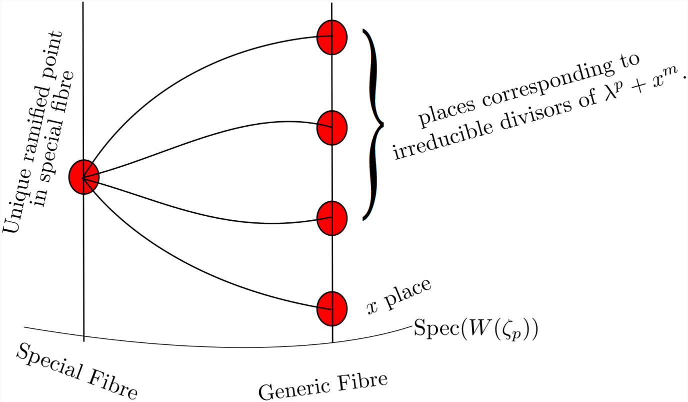
$m = pq - l, 0 < l \leq p-1$

Έχει ειδική ίνα εξίσωση Artin-Schreier και γενική ίνα εξίσωση τύπου Kummer.

$$(X+\lambda^{-1})^p = x^{-m} + \lambda^{-p}$$

$m = pq - l, 0 < l \leq p-1$

Έχει ειδική ίνα εξίσωση Artin-Schreier και γενική ίνα εξίσωση τύπου Kummer.



Τα ολόμορφα διαφορικά της σχετικής καμπύλης υπολογίζονται ως

$$x^{\mathrm{N}} \frac{\lambda X + 1)^{a}}{x^{q(p-1)}(\lambda X + 1)^{p-1}} dx$$

όπου $0 \leq a \leq p - 1$ και το N ικανοποιεί μια ανισότητα με ακέραια μέρη.

Τα ολόμορφα διαφορικά της σχετικής καμπύλης υπολογίζονται ως

$$x^{\mathrm{N}} \frac{\lambda X + 1)^{a}}{x^{q(p-1)}(\lambda X + 1)^{p-1}} dx$$

όπου $0 \leq a \leq p-1$ και το N ικανοποιεί μια ανισότητα με ακέραια μέρη.

- Τα modules V_{a_0,a_1} είναι indecomposable

Περιγραφή των modules

Τα ολόμορφα διαφορικά της σχετικής καμπύλης υπολογίζονται ως

$$x^{\mathrm{N}} \frac{\lambda X + 1)^{a}}{x^{q(p-1)}(\lambda X + 1)^{p-1}} dx$$

όπου $0 \leq a \leq p - 1$ και το N ικανοποιεί μια ανισότητα με ακέραια μέρη.

- Τα modules V_{a_0,a_1} είναι indecomposable
- $V_a := V_{1-p,a}$

Τα ολόμορφα διαφορικά της σχετικής καμπύλης υπολογίζονται ως

$$x^{\mathrm{N}}\frac{\lambda X+1)^{a}}{x^{q(p-1)}(\lambda X+1)^{p-1}}dx$$

όπου $0 \leq a \leq p-1$ και το N ικανοποιεί μια ανισότητα με ακέραια μέρη.

- Τα modules V_{a_0,a_1} είναι indecomposable
- $V_a := V_{1-p,a}$

$$H^0(\mathcal{X},\Omega_{\mathcal{X}}) = \bigoplus_{\nu^0}^{p-2} V_{\nu}^{\delta_\nu}$$

όπου δ_ν πλήρως προσδιορισμένοι συντελεστές.

Το σχετικό κανονικό ιδεώδες

Charalambous, Karagiannis, K

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_{\mathcal{X}_\eta} \arrow[r, hook] & S_L := L[\omega_1, \dots, \omega_g] \arrow[r, two heads, "\phi_\eta"] & \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\mathcal{X}_\eta, \Omega^{\otimes n}_{\mathcal{X}_\eta / L}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{\mathcal{X}} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook, "\otimes_R L"'] \arrow[d, two heads, "\otimes_R R/\mathfrak{m}"'] & S_R := R[W_1, \dots, W_g] \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[u, hook, "\otimes_R L"'] \arrow[d, two heads, "\otimes_R R/\mathfrak{m}"'] & \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\mathcal{X}, \Omega^{\otimes n}_{\mathcal{X}/R}) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\otimes_R L"'] \arrow[d, two heads, "\otimes_R R/\mathfrak{m}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{\mathcal{X}_0} \arrow[r, hook] & S_k := k[w_1, \dots, w_g] \arrow[r, two heads, "\phi_0"] & \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\mathcal{X}_0, \Omega^{\otimes n}_{\mathcal{X}_0 / k}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Περιγραφή των εξισώσεων του σχετικού κανονικού ιδεώδους.

Μελλοντικά σχέδια

- Επέκταση του υπολογισμού της κυκλικής ομάδας και εύρεση των σχετικών αριθμών Betti. Ποια είναι η αλλαγή στην αναγωγή αν υπάρχει τέτοια.

Μελλοντικά σχέδια

- Επέκταση του υπολογισμού της κυκλικής ομάδας και εύρεση των σχετικών αριθμών Betti. Ποια είναι η αλλαγή στην αναγωγή αν υπάρχει τέτοια.
- Μπορεί η Θεωρία αναπαραστάσεων να μας δώσει obstructions για το πρόβλημα ανύψωσης;

Μελλοντικά σχέδια

- Επέκταση του υπολογισμού της κυκλικής ομάδας και εύρεση των σχετικών αριθμών Betti. Ποια είναι η αλλαγή στην αναγωγή αν υπάρχει τέτοια.
- Μπορεί η Θεωρία αναπαραστάσεων να μας δώσει obstructions για το πρόβλημα ανύψωσης;
- Κατασκευή συναρτήσεων Hilbert η οποίες αντί για διάσταση να μετράνε το πλήθος εμφάνισης ενός συγκεκριμένου indecomposable module.

Μελλοντικά σχέδια

- Επέκταση του υπολογισμού της κυκλικής ομάδας και εύρεση των σχετικών αριθμών Betti. Ποια είναι η αλλαγή στην αναγωγή αν υπάρχει τέτοια.
- Μπορεί η Θεωρία αναπαραστάσεων να μας δώσει obstructions για το πρόβλημα ανύψωσης;
- Κατασκευή συναρτήσεων Hilbert η οποίες αντί για διάσταση να μετράνε το πλήθος εμφάνισης ενός συγκεκριμένου indecomposable module.

Ευχαριστώ πολύ!