ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΟΜΑΔΑ ΤΟΥ GALOIS

Αριστείδης Κοντογεώργης -Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Πανεπιστήμιο Κρήτης 15 Οκτωβρίου 2015

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: ΘΑΛΗΣ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Αριθμητική	Τοπολογία
πρώτα ιδεώδη	κόμβοι (knots)
ιδεώδη	κρίκοι (links)
Σώματα Αριθμών	3-πολλαπλότητες
ομάδα κλάσεων	$H_1(M, \mathbb{Z})$
ζ-συνάρτηση του Riemann	ζ-συνάρτηση του Selberg
Αλγεβρικές επεκτάσεις	Διακλαδιζόμενα τοπολογικά καλύμματα
Galois groups, $\pi_1^{\mathrm{et}}(X)$	$\pi_1(X, x_0)$

ΚΟΜΒΟΙ ΚΑΙ ΠΡΩΤΑ ΙΔΕΩΔΗ

Τοπολογία

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d] & L = K_1 \cup \cdots \cup K_r \arrow[d] \\ S^3 & S^1 \to S^3 \end{tikzcd}$$

$\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$

Θεωρία Αριθμών

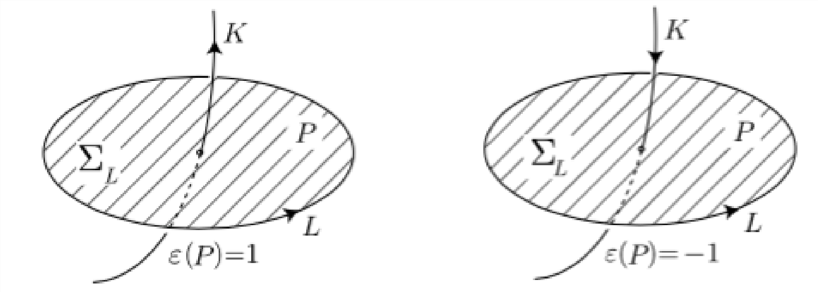
$$\begin{tikzcd} K = \mathbb{Q}(\theta) \arrow[d, dash] & \mathcal{O}_K \arrow[d, dash] & p\mathcal{O}_K = Q_1^{e_1} \cdots Q_r^{e_r} \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

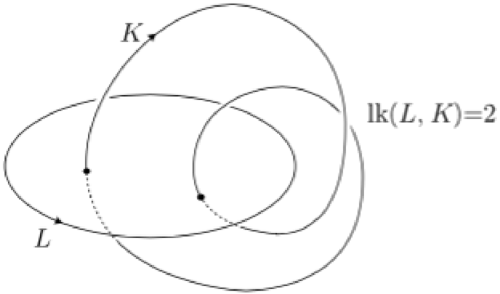
$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \pi_1^{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)) \cong \hat{\mathbb{Z}}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

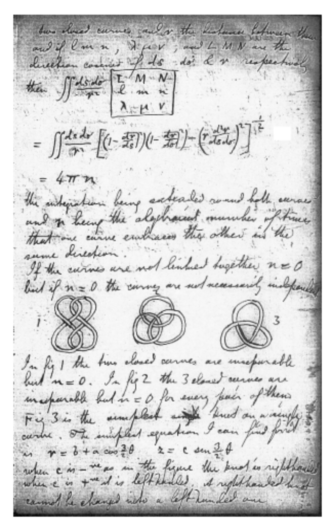
- Ποιος είναι ο βαθύτερος λόγος αυτήστης ομοιότητας?
- Τι μπορεί να μας προσφέρει η κατανόηση της Αριθμητικής Τοπολογίας?

Ο Gauss ήξερε την σχέση θεωρίας αριθμών κόμβων και ένα μεγάλο μέρος του παραπάνω λεξικού!


K
P
Σ_L
L
$\varepsilon(P)=1$
K
P
Σ_L
L
$\varepsilon(P)=-1$


K
L
$\mathrm{lk}(L, K)=2$

Χειρόγραφές σημειώσεις του Gauss



two closed curves, and r the distance between them
and if $l\ m\ n$, $\lambda\ \mu\ \nu$; and $L\ M\ N$ are the
direction cosines of ds $d\sigma$ & r respectively

then $\iint \frac{ds\,d\sigma}{r^2} \boxed{\begin{matrix} L & M & N \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{matrix}}$

$$= \iint \frac{ds\,d\sigma}{r^2}\left[\left(1-\frac{dr^2}{ds^2}\right)\left(1-\frac{dr^2}{d\sigma^2}\right)-\left(r\frac{d^2r}{ds\,d\sigma}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

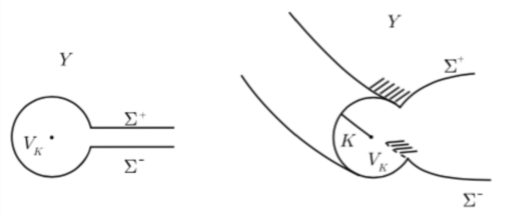
$$= 4\pi n$$

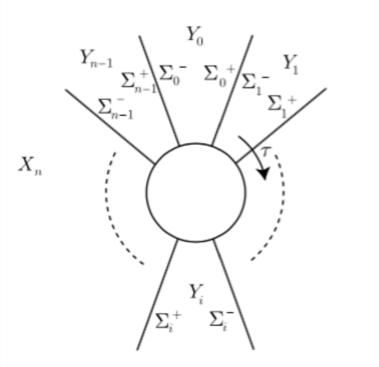
the integration being extended round both curves
and n being the algebraical number of times
that one curve embraces the other in the
same direction.
If the curves are not linked together $n = 0$
but if $n = 0$ the curves are not necessarily independent

1 3

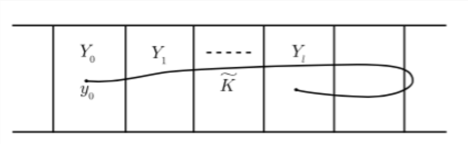
In fig 1 the two closed curves are inseparable
but $n = 0$. In fig 2 the 3 closed curves are
inseparable but $n = 0$ for every pair of them
Fig 3 is the simplest knot on a single
curve. The simplest equation I can find for it
is $r = b + a \cos\frac{3}{2}\theta$ $\quad z = c \sin\frac{3}{2}\theta$
when c is $-$ve as in the figure the knot is righthanded
when c is $+$ve it is lefthanded. A righthanded knot
cannot be changed into a lefthanded one

Τι σημαίνει επέκταση Kummer?



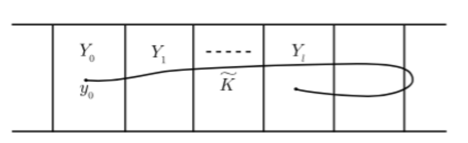


Γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathrm{lk}(L, K)$



Ας είναι $G_L = \pi_1(X_L)$. Ο κρίκος K μπορεί να ειδωθεί ως στοιχείο της G_L. Ας είναι $X_\infty \to X$ το άπειρο κυκλικό κάλυμμα που περιγράψαμε προηγουμένως, και $\rho_\infty : G_L \to \mathrm{Gal}(X_\infty/X_L)$, αναπαράσταση μετάθεσης.

Γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathrm{lk}(L, K)$



Ας είναι $G_L = \pi_1(X_L)$. Ο κρίκος K μπορεί να ειδωθεί ως στοιχείο της G_L. Ας είναι $X_\infty \to X$ το άπειρο κυκλικό κάλυμμα που περιγράψαμε προηγουμένως, και $\rho_\infty : G_L \to \mathrm{Gal}(X_\infty/X_L)$, αναπαράσταση μετάθεσης.

Ισχύει $\rho_\infty([K]) = \tau^{\mathrm{lk}(L,K)}$.

Θα δούμε καλύμματα βαθμού 2, $h_2 : X_2 \longrightarrow X_L$ με ομάδα $\mathrm{Gal}(X_2/X_L) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Θα δούμε καλύμματα βαθμού 2, $h_2 : X_2 \to X_L$ με ομάδα $\mathrm{Gal}(X_2/X_L) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G_L \xrightarrow{\rho_2} \mathrm{Gal}(X_2/X_L) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$[K] \mapsto \mathrm{lk}(L, K) \mod 2.$$

Θα δούμε καλύμματα βαθμού 2, $h_2 : X_2 \longrightarrow X_L$ με ομάδα $\mathrm{Gal}(X_2/X_L) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

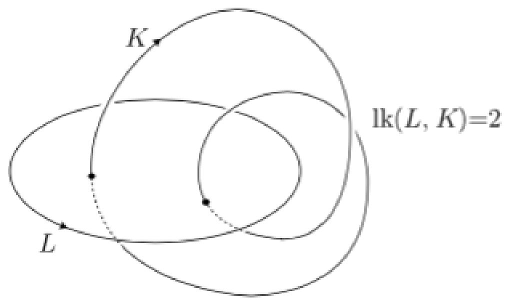
$$G_L \xrightarrow{\rho_2} \mathrm{Gal}(X_2/X_L) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

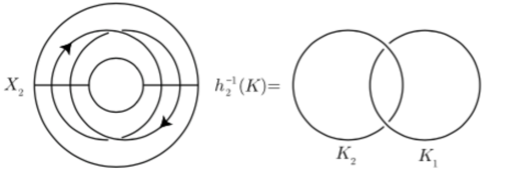
$$[K] \mapsto \mathrm{lk}(L, K) \mod 2.$$

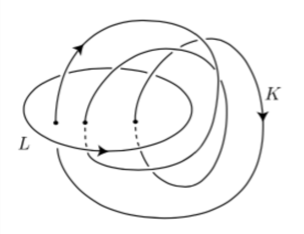
Αν $y \in h_2^{-1}(x)$, τότε $\rho_2([K])(y) = y \cdot [K]$, η τελική τιμή της ανύψωσης του K με αφετηρία το y. Συνεπώς έχουμε τις δύο περιπτώσεις:

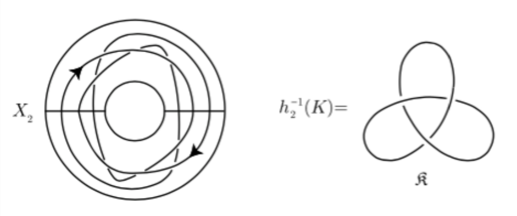
- $\rho([K]) = \mathrm{id}_{X_2} \Leftrightarrow h^{-1} = K_1 \cup K_2$
- $\rho([K]) = \tau \Leftrightarrow h^{-1} = \mathfrak{K}$

ΣΧΗΜΑΤΑ 1Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ






K
L


X_2
$h_2^{-1}(K)=$
$\mathfrak{K}$

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}) \arrow[d] & \mathcal{O}_K \arrow[d] & p\mathcal{O}_K = Q_1^{e_1} \cdots Q_r^{e_r} \arrow[d] \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Θέτουμε $X_{\{q\}} = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}\backslash\{q\} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/q])$. $X_2 = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K\backslash R$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
K = \mathbb{Q}(\sqrt{q}) \arrow[d, dash] & \mathcal{O}_K \arrow[d, dash] & p\mathcal{O}_K = Q_1^{e_1} \cdots Q_r^{e_r} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q} & \mathbb{Z} & p\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Θέτουμε $X_{\{q\}} = \mathrm{Spec}\mathbb{Z} \backslash \{q\} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/q])$. $X_2 = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K \backslash R$.

Ορίζουμε τον $\mod 2$ linking number $\mathrm{lk}_2(p, q)$ ως την εικόνα του Frobenius σ_p υπέρ του πρώτου p.

$$G_{\{q\}} \xrightarrow{\rho_2} \mathrm{Gal}(X_2/X_{\{q\}}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Ισχύει ότι

$$(-1)^{\mathrm{lk}_2(p,q)} = \left(\frac{q^*}{p}\right),$$

όπου $q^* = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$.

$$p\mathcal{O}_K = \begin{cases} P_1 \cdot P_2 & \text{αν } q^* \text{ τετ. υπόλ.} \mod p \\ P & \text{αν } q^* \text{ μη τετ. υπόλ.} \mod p \end{cases}$$

Ισοδύναμα

$$h_2^{-1}(p) = \begin{cases} \{P_1, P_2\} & \text{αν } \mathrm{lk}_2(p, q) = 0 \\ \{P\} & \text{αν } \mathrm{lk}_2(p, q) = 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{lk}(L, K) = \int_{K_1} \int_{K_2} \omega(x - y) dx dy,$$

για μια συγκεκριμμένη 2-μορφή στον $\mathbb{R}^3 \setminus 0$.

Ο E. Witten είδε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως ένα $U(1)$ Chern-Simons path integral το οποίο είναι το ανάλογο της έκφρασης του $\left(\frac{a}{p}\right)$ ως άθροισμα Gauss:

$$g(a; p) = \sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi i a n^2 / p} = \sum_{n=0}^{p-1} \zeta_p^{a n^2}, \quad \zeta_p = e^{2\pi i / p}.$$

$$g(a; p) = \left(\frac{a}{p}\right) g(1; p).$$

Έστω $K/\mathbb{Q}$ πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$. Έχουμε $p\mathcal{O}_K = P_1^e \cdots P_r^e$.

Διαλέγουμε ένα πρώτο $P_1 \mid p\mathcal{O}_K$.

$$G(P_1) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) : \sigma(P_1) = P_1\}.$$

Παρατήρηση:

$$\tau G(P_1)\tau^{-1} = G(P_i) \text{ για κάποιο } \tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$

$$1 \to T(P_1) \to G(P_1) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_K/P_1}{\mathbb{Z}/p}\right) \to 1.$$

Η επέκταση $\mathcal{O}_K/P_1$ υπέρ $\mathbb{Z}/p$ είναι μια πεπερασμένη επέκταση πεπερασμένων σωμάτων. Η ομάδα είναι κυκλική και παράγεται από τον αυτομορφισμό του Frobenius $F_p : x \mapsto x^p$.

Μέσω της ακριβούς ακολουθίας ο F_p γίνεται ένα στοιχείο της $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$:

$$1 \to T(P_1) \to G(P_1) \to \mathrm{Gal}\left(\frac{\mathcal{O}_K/P_1}{\mathbb{Z}/p}\right) \to 1.$$

Περνάμε στο αντίστροφο όριο και καταλήγουμε στο

$$p \to F_p \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

Ο ορισμός του F_p είναι καλά **ορισμένος μέχρι συζυγίας**.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ?

Είναι κάποιες **κλάσεις συζυγίας** στοιχείων της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Θεωρία Galois απείρων επεκτάσεων

Η θεωρία των πεπερασμένων επεκτάσεων σωμάτων επεκτείνεται σε άπειρες ομάδες, με κατάλληλες τροποποίησεις (οι ομάδες είναι τοπολογικές ομάδες). Η ομάδα της επέκτασης $\overline{k}/k$ είναι το αντίστροφο όριο

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) = \varprojlim \mathrm{Gal}(K/k)$$

όπου το K διατρέχει τις πεπερασμένες Galois επεκτάσεις του k.

Θεωρία Galois απείρων επεκτάσεων

Η θεωρία των πεπερασμένων επεκτάσεων σωμάτων επεκτείνεται σε άπειρες ομάδες, με κατάλληλες τροποποιήσεις (οι ομάδες είναι τοπολογικές ομάδες). Η ομάδα της επέκτασης $\bar{k}/k$ είναι το αντίστροφο όριο

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \varprojlim \mathrm{Gal}(K/k)$$

όπου το K διατρέχει τις πεπερασμένες Galois επεκτάσεις του k.

Το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois: Δεν γνωρίζουμε τις πεπερασμένες ομάδες που εμφανίζονται στο $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ως αντίστροφο όριο.

$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) = \hat{\mathbb{Z}}$.

Δεν μπορούμε να γράψουμε (εκτός από τον ταυτοτικό και την μιγαδική συζυγία) κανένα στοιχείο της ομάδας $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Δεν μπορούμε να γράψουμε (εκτός από τον ταυτοτικό και την μιγαδική συζυγία) κανένα στοιχείο της ομάδας $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Μπορούμε να την καταλάβουμε μέσω των δράσεων της.

Δεν μπορούμε να γράψουμε (εκτός από τον ταυτοτικό και την μιγαδική συζυγία) κανένα στοιχείο της ομάδας $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Μπορούμε να την καταλάβουμε μέσω των δράσεων της.

Ο κυκλοτομικός χαρακτήρας είναι η συνάρτηση που προκύπτει από την δράση της στην ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}(\zeta_n)$, όπου το στοιχείο

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \ni \sigma : \sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{d_\sigma}, d_\sigma \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται μια αναπαράσταση, ο κυκλοτομικός χαρακτήρας:

$$\chi : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

$$\sigma \mapsto (d_\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$$

Η αναπαράσταση αυτή βλέπει μόνο την αβελιανοποίηση της ομάδας, αφού περιέχει τον μεταθέτη στον πυρήνα.

Θεωρία κλάσεων σωμάτων: Μελέτη αβελιανών επεκτάσεων του $\mathbb{Q}$. Η αριθμητική γεωμετρία μας έδωσε μια σειρά από παρόμοιες αναπαραστάσεις. Οι n-ρίζες της μονάδας είναι τα σημεία πεπερασμένης τάξης του κύκλου.

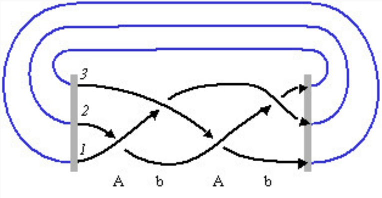
Μπορούμε να γενικεύσουμε θεωρώντας αναπαραστάσεις στα σημεία πεπερασμένης τάξης μιας ελλειπτικής καμπύλης ή γενικότερα μιας αβελιανής πολλ/τας και με αυτό τον τρόπο παίρνουμε αναπαραστάσεις:

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(2n, \hat{\mathbb{Z}}).$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι σε μια αβελιανή πολλ/τα τα σημεία πεπερασμένης τάξης είναι της μορφής $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.

- Η θεωρία των κυκλοτομικών επεκτάσεων (torsion points) στον κύκλο είναι αρκετά πολύπλοκη με βαθύτατες προεκτάσεις (Θεωρία Iwasawa κτλ). Το να γράψουμε το κυκλοτομικό πολυώνυμο βαθμού n είναι δύσκολο.
- Η θεωρία γίνεται δύσκολη τόσο σε ελλειπτικές καμπύλες όσο και σε αβελιανές πολλαπλότητες. Στις αβελιανές πολλαπλότητες δεν μπορούμε να γράψουμε τύπους. Θέλουμε όμως αυτές που ορίζονται πάνω από το σώμα των ρητών.
- Χρειαζόμαστε νέες (τρελές) ιδεές - Η αριθμητική τοπολογία είναι αρκετά “τρελή”.

Οι κοτσίδες κλείνουν σε κρίκους και οι κρίκοι ανοίγουν σε κοτσίδες



Δύο κοτσίδες κλείνουν στον ίδιο κόμπο αν:

- είναι συζυγείς.
- η μία έχει μια κλωστή παραπάνω και προκύπτει από το πολλαπλασιασμό της άλλης με μια αντιμετάθεση των δύο τελευταίων κλωστών.

Δύο κοτσίδες αντιστοιχούν στον ίδιο κόμβο αν η μία προκύπτει από την άλλη με συνδυασμούς των δύο παραπάνω κινήσεων.

Η ομάδα κοτσίδων δέχεται μια πιστή αναπαράσταση:

$$\rho : B_n \to \mathrm{Aut}(F_n)$$

Τοπολογία: Θεωρούμε τον χώρο

$$C_n = \{z_1, \ldots, z_n : z_i \in \mathbb{C}, |z_i| < 1, z_i \neq z_j\}$$

Είναι γνωστό ότι $\pi_1(C_n, \bar{x}_0) = B_n$. Για σταθερό $\bar{x} \in C_n$ θεωρούμε τον δίσκο D_n από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει τα σημεία $\bar{x}$. Η $F_n = \pi_1(D_n - \bar{x}, x_0)$. Η δράση προκύπτει από θεωρήματα δράσης της πρωταρχικής ομάδας της βάσης στην πρωταρχική ομάδα της ίνας.

Χρειαζόμαστε μια θεωρία πρωταρχικών ομάδων, η οποία να μπορεί να χειριστεί τα σώματα αριθμών και να βλέπει την απόλυτη ομάδα ως πρωταρχική ομάδα. Αυτή η θεωρία είναι η θεωρία της etale cohomology του Grothendieck.

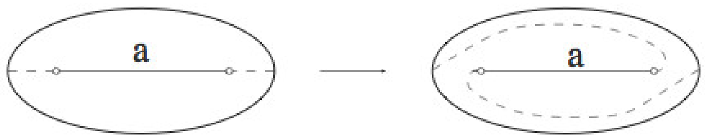
Η θεωρία αυτή έρχεται σε πολλές εκδόσεις. Για σώματα αριθμών η ομάδα είναι η πρωταρχική ομάδα, ενώ για δακτυλίους η επεκτάσεις είναι οι αδικλάδιστες.

Διαλέγουμε τις ρίζες $a_1, \ldots, a_n$ ενός πολυωνύμου του $\mathbb{Q}[x]$ βαθμού n. Έστω K η επέκταση του $\mathbb{Q}$ που αυτά παράγουν. Η ομάδα $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ είναι μια υποομάδα της S_n, και είναι ακριβώς η S_n αρκεί τα a_i να είναι αρκετά "γενικά".

Διαλέγουμε τις ρίζες $a_1, \dots, a_n$ ενός πολυωνύμου του $\mathbb{Q}[x]$ βαθμού n. Έστω K η επέκταση του $\mathbb{Q}$ που αυτά παράγουν. Η ομάδα $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ είναι μια υποομάδα της S_n, και είναι ακριβώς η S_n αρκεί τα a_i να είναι αρκετά "γενικά".

Θεωρούμε το $\Delta = \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}}) - \{a_1, \dots, a_n, \infty\}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ μεταθέτει τα σημεία $a_1, \dots, a_n$ και επίσης δρα στο Δ.

Ομάδα braids B_n: mapping class group $D_2 - \{P_1, \dots, P_n\}$



Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ IHARA

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat{F}_n"'] \\
\bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] \\
\mathbb{Q}[x]
\end{tikzcd}$$

Για ευκολία θα περιοριστούμε σε pure braids: $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$. Θεωρούμε το σώμα $\bar{\mathbb{Q}}[x]$ και την μέγιστη (pro-ℓ) $M/\bar{\mathbb{Q}}[x]$ επέκταση που είναι αδιακλάδιστη στις θέσεις $x - a_i$.

Η επέκταση $M/\bar{\mathbb{Q}}$ είναι γεωμετρική, ενώ η επέκταση $M/\bar{\mathbb{Q}}$ είναι αριθμητική.

$$\begin{tikzcd}
0 \rightarrow \widehat{F_n} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}[t]/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & 0 \\
\pi_1^{\mathrm{et}}(D - \{a_1, \ldots, a_n\}) & & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) &
\end{tikzcd}$$

Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ IHARA

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{F_n} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, no head] & \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}[t]/\mathbb{Q}[t]) \arrow[r] \arrow[d, squiggly, no head] & 0 \\
& \pi_1^{\mathrm{et}}(D - \{a_1, \ldots, a_n\}) & & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) &
\end{tikzcd}
$$

$$\rho^* \longmapsto \rho$$

Η ομάδα $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ δρα δια συζυγίας στην $\hat{F}_n$. Υπάρχει αναπαράσταση:

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to Br_n \subset \mathrm{Aut}(\hat{F}_r).$$

$$Br_n := \{\sigma : \sigma(x_i) \sim x_i^{\ell}\}.$$

$$F_n = \langle x_1, \ldots, x_{n+1} | x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \rangle.$$

Τα στοιχεία της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, δρουν στους γεννήτορες της $\hat{F}_n$, ως

$$\sigma(x_i) = a_{\sigma,i} x_i^{\ell_\sigma} a_{\sigma,i}^{-1}.$$

Το ℓ_σ είναι κοινό για όλα τα x_i. Η συνάρτηση $N : B_n \to \hat{\mathbb{Z}}$ είναι επί (δεν είναι τετριμμένο) και η σύνθεση $N \circ \rho$ είναι ο κυκλοτομικός χαρακτήρας.

Η συνάρτηση

$$a_i : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \hat{F}_r$$

είναι συνκύκλος.

Ερώτηση:

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \hat{F}_r) = ?$$

Κάθε χαρακτηριστική υποομάδα $H < \hat{F}_r$ μας δίνει αναπαραστάσεις στο πηλίκο, αφού η συνάρτηση ($G = B_n$ ή $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ επάγει αναπαράσταση

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(\hat{F_n}/H).$$

Κάθε χαρακτηριστική υποομάδα $H < \hat{F}_r$ μας δίνει αναπαραστάσεις στο πηλίκο, αφού η συνάρτηση ($G = B_n$ ή $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ επάγει αναπαράσταση

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(\hat{F}_n/H).$$

Μία προφανής επιλογή είναι η $H = [\hat{F}_r, \hat{F}_r]$, οπότε έχουμε αναπαράσταση

$$\rho : G \to \mathrm{GL}\left(\hat{F}_n^{\mathrm{ab}}\right) = H_1(D_2 - a_1, \ldots, a_n).$$

Στην κλασική περίπτωση των κοτσίδων αυτή είναι η αναπαράσταση Gassner, ενώ άλλες αναπαραστάσεις κόμβων (Burau κτλ) προκύπτουν με παρόμοιες τεχνικές (Magnus embedding, Fox differential calculus).

ΜΙΑ ΔΙΑΣΗΜΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ

$$x^n + y^n = 1.$$

Είναι μια αλγεβρική καμπύλη $F_n \to \mathbb{P}^1$,

$$\mathrm{Gal}(F_n/\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Aut}(F_n) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes S_3.$$

Η καμπύλη αυτή διακλαδίζεται σε τρία σημεία του $\mathbb{P}^1$ τα $\{0, 1, \infty\}$ και συνεπώς είναι πηλίκο του $\mathbb{H} = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ μια τριγωνική ομάδα την

$$\Delta(n, n, n) = \langle x_1, x_0, x_\infty | x_1^n, x_0^n, x_\infty^n, x_1 x_0 x_\infty = 1 \rangle$$

$$K' = \bigcup_n K_n \qquad K'' = \bigcup_n K_n^{\mathrm{urab}}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat{F}''_n"] \arrow[dd, dash, bend right, "\hat{F}'_n"'] \arrow[dddd, dash, bend right=60, "\hat{F}_n"'] & \\
K'' \arrow[d, dash, "\hat{F}'_n/\hat{F}''_n"] & K_n^{\mathrm{ur}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] \\
K' \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right, "\mathbb{Z}^n"'] & K_n^{\mathrm{unab}} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dash] \\
K_n \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^n"] & \\
K = \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] & \\
\mathbb{Q}[x] &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat{F}''_n"] \arrow[dd, dash, bend right=40, "\hat{F}'_n"'] \arrow[dddd, dash, bend right=60, "\hat{F}_n"'] & \\
K'' \arrow[d, dash, "\hat{F}'_n/\hat{F}''_n"] & K_n^{\mathrm{ur}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] \\
K' \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right=40, "\mathbb{Z}^n"'] & K_n^{\mathrm{unab}} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dash] \\
K_n \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^n"] & \\
K = \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] & \\
\mathbb{Q}[x] &
\end{tikzcd}
$$

$K' = \bigcup_n K_n \qquad K'' = \bigcup_n K_n^{\mathrm{urab}}$

Tate module: $\hat{F}'_n/\hat{F}''_n = \mathrm{Gal}(K''/K')$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat{F}''_n"] \arrow[dd, dash, bend right, "\hat{F}'_n"'] \arrow[dddd, dash, bend right=60, "\hat{F}_n"'] & \\
K'' \arrow[d, dash, "\hat{F}'_n/\hat{F}''_n"] & K_n^{\mathrm{ur}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] \\
K' \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right, "\mathbb{Z}^n"'] & K_n^{\mathrm{unab}} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dash] \\
K_n \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^n"] & \\
K = \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] & \\
\mathbb{Q}[x] &
\end{tikzcd}$$

$K' = \bigcup_n K_n \qquad K'' = \bigcup_n K_n^{\mathrm{urab}}$

Tate module: $\hat{F}'_n/\hat{F}''_n = \mathrm{Gal}(K''/K')$

Το Tate module μπορούμε να το δούμε ως ένα module υπέρ αντιμεταθετικό δακτύλιο $\mathcal{A}$ τυπικών δυναμοσειρών.

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(s, \mathcal{A})$$

$s = \binom{n}{2}$.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dash, "\hat{F}_n''"] \arrow[dd, dash, bend right, "\hat{F}_n'"'] \arrow[dddd, dash, bend right=60, "\hat{F}_n"'] & \\
K'' \arrow[d, dash, "\hat{F}_n'/\hat{F}_n''"] & K_n^{\mathrm{ur}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dash] \\
K' \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right, "\mathbb{Z}^n"'] & K_n^{\mathrm{unab}} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dash] \\
K_n \arrow[d, dash, "\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^n"] & \\
K = \bar{\mathbb{Q}}[x] \arrow[d, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})"'] & \\
\mathbb{Q}[x] &
\end{tikzcd}
$$

$K' = \bigcup_n K_n \qquad K'' = \bigcup_n K_n^{\mathrm{urab}}$

Tate module: $\hat{F}_n'/\hat{F}_n'' = \mathrm{Gal}(K''/K')$

Το Tate module μπορούμε να το δούμε ως ένα module υπέρ αντιμεταθετικό δακτύλιο $\mathcal{A}$ τυπικών δυναμοσειρών.

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(s, \mathcal{A})$$

$s = \binom{n}{2}$.

Τα K_n αντιστοιχούν στις γενικευμένες καμπύλες Fermat

Οι καμπύλες Fermat δεν είναι ενδιαφέρουσες από πλευράς κόμβων, η ομάδα B_3 δεν είναι ενδιαφέρουσα. Γενικευμένες καμπύλες Fermat $F_{n,\bar{\lambda}}$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2})$. Για να απλοποιήσουμε την κατασκευή ας υποθέσουμε ότι τα $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ (pure braids).

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\ \lambda_1 x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{k-2} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \end{aligned}$$

Διακλαδισμένο κάλυμμα $F_{n,\bar{\lambda}} \to \mathbb{P}^1$, σημεία διακλάδωσης $0, 1, \infty, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$.

Uniformisation μέσω ομάδας

$$\Gamma = \langle x_1, \ldots x_{k+1} : x_i^n = 1, x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = 1 \rangle.$$

Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΟΥ HEISENBERG

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[d, "\Gamma_1"] \arrow[dd, bend left=60, "\Gamma_2"] \arrow[ddd, bend right=60, "\Gamma(2)"'] \\
C_n \arrow[d, "Z_n"] \arrow[dd, bend right=30, "H_n"'] \\
F_n \arrow[d, "\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}"] \\
\mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[d, "\Gamma_1"] \arrow[dd, bend left=60, "\Gamma_2"] \arrow[ddd, bend right=60, "\Gamma(2)"'] \\
C_n \arrow[d, "Z_n"] \arrow[dd, bend right, "H_n"'] \\
F_n \arrow[d, "\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}"] \\
\mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

$$\Gamma_1 = \langle a, b | a^n = b^n = [a,b]^n = 1 \rangle \quad \Gamma_2 = \langle a, b | a^n = b^n = [a,b] = 1 \rangle.$$

$$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}.$$

ΠΙΣΩ ΣΤΙΣ ΚΟΤΣΙΔΕΣ.

- Η θεωρία των κοτσίδων δεν χρειάζονται p-αδικούς?
- p-adic framed braids: $(\mathbb{Z}_\ell)^n \rtimes B_n$.
- Θεωρούμε γεννήτορες $t_1, \ldots, t_n$ της υποομάδας $(\mathbb{Z}_\ell)^n$, και να τις στείλουμε σε αυτομορφισμούς της ελεύθερης -ℓ ομάδας. Μια τέτοια επιλογή θα ήταν να διαλέξουμε ένα στοιχείο $\alpha \in \mathbb{Z}_\ell$ και να στείλουμε το t_i στον αυτομορφισμό $x_j \mapsto x_j^{\alpha^{\delta_{i,j}a}}$.

  Μια διαφορετική επιλογή αναπαράστασης (με τοπολογικό ενδιαφέρον, *κορδέλες* θα ήταν να διπλασιάσουμε τους γεννήτορες τις ελεύθερης ομάδας (ή να πολλαπλασιάσουμε κάθε γεννήτορα επί $k \geq 2$) και να θεωρήσουμε την αναπαράσταση του $t_i \mapsto \rho(t_i)$, ώστε $\rho(t_i)y_i = y_i\bar{y}_i^\ell$ και να αφήνει τους άλλους γεννήτορες αναλλοίωτους.

  Στην αβελιανοποίηση καταλήγουμε στην αναπαράσταση:

$$\mathbb{Z}_\ell \ni a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αλγεβρικές Πολλαπλότητες V ορισμένες στο $\mathbb{F}_p$.

Αλγεβρικές Πολλαπλότητες V ορισμένες στο $\mathbb{F}_p$.

Θεωρούμε το πλήθος των ρητών τους σημείων $N_r = \#V(\mathbb{F}_{p^r})$ πάνω από κάθε σώμα $\mathbb{F}_{p^r}$. Σχηματίζουμε την *γεννήτρια συνάρτηση*:

$$Z(X, t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Αλγεβρικές Πολλαπλότητες V ορισμένες στο $\mathbb{F}_p$.

Θεωρούμε το πλήθος των ρητών τους σημείων $N_r = \#V(\mathbb{F}_{p^r})$ πάνω από κάθε σώμα $\mathbb{F}_{p^r}$. Σχηματίζουμε την *γεννήτρια συνάρτηση*:

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Παράδειγμα: $X = \mathbb{P}^1$, $N_r = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^r}) = p^r + 1$.

$$Z(\mathbb{P}^1, t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} (q^r + 1)\frac{t^r}{r}\right) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)}.$$

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι το πλήθος των σταθερών σημείων του αυτομορφισμού του Frobenius $x \mapsto x^{p^r}$.

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι το πλήθος των σταθερών σημείων του αυτομορφισμού του Frobenius $x \mapsto x^{p^r}$.

Τύπος του σταθερού σημείου του Lefschetz στην συνομολογία etale.

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι το πλήθος των σταθερών σημείων του αυτομορφισμού του Frobenius $x \mapsto x^{p^r}$.

Τύπος του σταθερού σημείου του Lefschetz στην συνομολογία etale.

Πως μπορούν να μετατραπούν οι παραπάνω ιδέες ώστε να αποδείξουμε την εικασία του Riemann για την *κανονική* ζήτα συνάρτηση?

ΤΟ ΣΩΜΑ ΜΕ ΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΟ II

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι το πλήθος των σταθερών σημείων του αυτομορφισμού του Frobenius $x \mapsto x^{p^r}$.

Τύπος του σταθερού σημείου του Lefschetz στην συνομολογία etale.

Πως μπορούν να μετατραπούν οι παραπάνω ιδέες ώστε να αποδείξουμε την εικασία του Riemann για την *κανονική* ζήτα συνάρτηση?

Σύγκριση των δακτυλίων $\mathbb{F}_p[t]$ και $\mathbb{Z}$.

Αν P πρώτο πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{F}_p[t]$ τότε το $\mathbb{F}_p[t]/P$ περιέχει πάντα το σώμα $\mathbb{F}_p$.

Οι παραπάνω ζ-συναρτήσεις ικανοποιούν την εικασία του Riemann. Το N_r είναι το πλήθος των σταθερών σημείων του αυτομορφισμού του Frobenius $x \mapsto x^{p^r}$.

Τύπος του σταθερού σημείου του Lefschetz στην συνομολογία etale.

Πως μπορούν να μετατραπούν οι παραπάνω ιδέες ώστε να αποδείξουμε την εικασία του Riemann για την *κανονική* ζήτα συνάρτηση?

Σύγκριση των δακτυλίων $\mathbb{F}_p[t]$ και $\mathbb{Z}$.

Αν P πρώτο πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{F}_p[t]$ τότε το $\mathbb{F}_p[t]/P$ περιέχει πάντα το σώμα $\mathbb{F}_p$.

Στο $\mathbb{Z}$ δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Τα σώματα $\mathbb{Z}/P$ έχουν διαφορετικές χαρακτηριστικές. Θα θέλαμε ένα κοινό *υπόσωμα* όλων αυτών των σωμάτων.

ΤΟ ΣΩΜΑ ΜΕ ΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΟ III

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις για το πως θα πρέπει να μοιάζει μια τέτοια θεωρία (Tits, Smirnov, Kapranov, Manin, Marcoli, Connes…)

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις για το πως θα πρέπει να μοιάζει μια τέτοια θεωρία (Tits, Smirnov, Kapranov, Manin, Marcoli, Connes…)

Ας περιγράψουμε μια βασική ιδέα:

$$\lim_{q\to 1} \text{Γραμμική Άλγεβρα } /\mathbb{F}_q = \text{Συνδιαστική.}$$

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις για το πως θα πρέπει να μοιάζει μια τέτοια θεωρία (Tits, Smirnov, Kapranov, Manin, Marcoli, Connes…)

Ας περιγράψουμε μια βασική ιδέα:

$$\lim_{q\to 1} \text{ Γραμμική Άλγεβρα } /\mathbb{F}_q = \text{Συνδιαστική.}$$

Το παραπάνω δεν λέει και πολλά πράγματα. Οι Kapranov και Smirnov επιχειρηματολογούν ότι

$$\lim_{q\to 1} \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q) = S_n.$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_{1^d}) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes S_n \qquad \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_{1^d}[t]) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n$$

Οι τελευταίες ομάδες εμφανίζονται στην θεωρία των framed braids.

- Αντικατάσταση συνολοθεωρητικών εννοιών με κατηγορικά ανάλογα.
- Επιτυχημένη προσέγγιση στην Θεωρία κόμβων όπου οι φυσικοί αριθμοί *κατηγοριοποιούνται* στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων υπέρ πεπερασμένου σώματος $\rightarrow$ Khovanov homology.
- Είναι ένα είδος αντίστροφής διαδικασίας του σώματος με ένα στοιχείο.

- Αντικατάσταση συνολοθεωρητικών εννοιών με κατηγορικά ανάλογα.
- Επιτυχημένη προσέγγιση στην Θεωρία κόμβων όπου οι φυσικοί αριθμοί *κατηγοριοποιούνται* στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων υπέρ πεπερασμένου σώματος $\to$ Khovanov homology.
- Είναι ένα είδος αντίστροφής διαδικασίας του σώματος με ένα στοιχείο.

Παρατήρηση: Η δράση της $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ γίνεται δράση braids αν θέσουμε τον εκθέτη ίσο με ένα.

- Σώμα με ένα στοιχείο: πρώτοι $\leftrightarrow$ Frobenius, οριακή κατάσταση $q \mapsto 1$.
- Αριθμητική τοπολογία: στοιχεία ίδιας ομάδας
- Απόλυτη ομάδα Galois. Μεταφορά ιδεών ανάμεσα σε κοτσίδες, mapping class groups και αντιστρόφως.

Ευχαριστώ πολύ!