ΣΩΤΗΡΗΣ ΚΑΡΑΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΕΡΙ ΑΥΤΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος Μάρτης 2010

Εισηγητησ: Γιώργος Τσαπόγας

Επιτροπη

Απόστολος Θωμά,
Πανεπιστημιο Ιωαννινων

Γιάννης Αντωνιάδης,
Πανεπιστημιο Κρητησ

Αριστείδης Κοντογεώργης,
Πανεπιστημιο Αιγαιου

Βασίλης Μεταφτσής,
Πανεπιστημιο Αιγαιου

Γιώργος Τσαπόγας,
Πανεπιστημιο Αιγαιου

Μιχάλης Ανούσης,
Πανεπιστημιο Αιγαιου

Νίκος Παπαλεξίου,
Πανεπιστημιο Αιγαιου

Στον Αριστείδη, που πάλεψε με την άγνοια μου
και στον Γρηγόρη που πάλεψε για την ζωή του.

Περιληψη:

Έστω F ένα αλγεβρικό σώμα συναρτήσεων, με σώμα σταθερών το K, όπου K είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής $p > 0$. Έστω G να είναι μια ομάδα αυτομορφισμών του F. Μελετάμε τον χώρο $\Omega(m)$ των ολόμορφων m–(πολυ)διαφορικών του σώματος F, όταν η G είναι κυκλική ή στοιχειώδης αβελιανή ομάδα τάξης p^n. Δίνουμε βάσεις διαφορικών για την κάθε περίπτωση όταν το σώμα F^G είναι ρητό· εισάγουμε την έννοια της αναλλοίωτης του Boseck και υπολογίζουμε την δομή του $\Omega(m)$ σαν $K[G]$–πρότυπο συναρτήσει των αναλλοίωτων του Boseck, χρησιμοποιώντας εργαλεία από την θεωρία διακλάδωσης του Hilbert. Ο παραπάνω υπολογισμός γίνεται χωρίς καμιά προϋπόθεση για την κυκλική περίπτωση, ενώ για την elementary abelian περίπτωση υποθέτουμε ότι το κάτω σώμα είναι ρητό. Δίνουμε μια εφαρμογή των παραπάνω στον εφαπτόμενο χώρο του deformation functor για καμπύλες με αυτομορφισμούς. Μελετάμε επίσης τις ημιομάδες του Weierstrass και πηδήματα της ramification filtration συναρτήσει των αυτομορφισμών και διάφορων αναλλοίωτων της καμπύλης, όπως είναι οι Boseck, Hasse-Witt και το γένος. Εισάγουμε την έννοια της representation filtration η οποία μας βοηθάει στον προσδιορισμό των πηδημάτων της ramification filtration σε μια ολικά διακλαδιζόμενη θέση στην κυκλική p^n περίπτωση. Μελετάμε symmetric ημιομάδες του Weierstrass.

Λέξεις Κλειδιά: Αυτομορφισμοί, καμπύλες, αναλυτικά διαφορικά, αριθμητικές ημιομάδες, Hasse-Witt αναλλοίωτες, Boseck αναλλοίωτες, Galois module structure, maximal καμπύλες.
Mathematical Subject Classification (2000): 14H37, 11G20.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή **xi**

1 Ολόμορφα (πολυ)διαφορικά **1**
1.1 Θεμέλια 2
1.1α′ Θέσεις –Δακτύλιοι εκτίμησης –Διακριτές εκτιμήσεις 2
1.1β′ Αντιστοιχίες 6
1.1γ′ Divisors 9
1.1δ′ Επεκτάσεις αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων 11
1.1ε′ Διαφορικά 13
1.1ϛ′ Θεώρημα των Riemann–Roch 16
1.1ζ′ Where the wild things are 18
1.1η′ Galois επεκτάσεις σωμάτων συναρτήσεων 20
1.1ϑ′ Στοιχεία θεωρίας αναπαραστάσεων 21
1.2 Συσχέτιση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία 23
1.3 Αποτελέσματα 25
1.3α′ Η κυκλική περίπτωση 25
1.3β′ Η αναπαράσταση του χώρου $\mathbf{\Omega_F(m)}$ σαν $\mathbf{K[G]}$–πρότυπο 27
1.3γ′ Μια νέα βάση ολόμορφων διαφορικών 35
1.3δ′ Ένα κλασικό θεώρημα του Hurwitz 38
1.3ε′ Η στοιχειώδης αβελιανή περίπτωση 39
1.3ϛ′ Κατασκευή βάσης 42
1.3ζ′ Η δομή του χώρου $\mathbf{\Omega_F(m)}$ σαν $\mathbf{K[G]}$–πρότυπο 43
1.3η′ Μια εικασία που αφορά αβελιανές ομάδες τάξης $\mathbf{p^n}$ 49
1.3ϑ′ Μια εφαρμογή στους τοπικούς deformation functors 51

2 Ημιομάδες του Weierstrass **55**
2.1 Θεμέλια 56
2.1α′ Πάνω από το $\mathbb{C}$ 56
2.1β′ Η περίπτωση της θετικής χαρακτηριστικής 58
2.1γ′ Ramification filtration 62
2.2 Συσχέτιση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία 64
2.3 Αποτελέσματα 67
2.3α′ Ομάδες διακλάδωσης 67

2.3β′ Πηδήματα της ramification filtration και διαιρετότητα των στοιχείων της ημιομάδας του Weierstrass 68
2.3γ′ Κυκλικές ολικά διακλαδισμένες Galois επεκτάσεις 74
2.3δ′ Ολόμορφα διαφορικά στην κυκλική ολικά διακλαδιζόμενη περίπτωση 79
2.3ε′ Ημιομάδες 83
2.3ϛ′ Ο πίνακας των Hasse-Witt και οι ημιομάδες 87

Α′ Λογαριασμοί στο πρόγραμμα Magma 91

Βιβλιογραφία 93

Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε το πρόβλημα της αναπαράστασης μιας ομάδας G στον χώρο των αναλυτικών–ολόλομορφων (πολυ)διαφορικών μιας αλγεβρικής καμπύλης. Η G είναι η ομάδα Galois μιας αλγεβρικής επέκτασης σωμάτων συναρτήσεων F/E, και εστιάζουμε στις περιπτώσεις όπου η ομάδα έχει την εξής δομή

(i) είναι κυκλική τάξης p^n,

(ii) είναι στοιχειώδης αβελιανή (elementary abelian) τάξης p^n,

όπου p είναι πάντα η χαρακτηριστική του αλγεβρικά κλειστού σώματος των σταθερών K. Παράλληλα βρίσκουμε από μια βάση για τον παραπάνω χώρο σε καθεμιά από τις περιπτώσεις που μελετάμε, στην ειδική περίπτωση που το σώμα E είναι ρητό. Αυτό αποτελεί και το έναυσμα για να ορίσουμε κάποιες αναλλοίωτες της καμπύλης, που θα τις βαφτίσουμε αναλλοίωτες του Boseck, προς τιμήν του Γερμανού μαθηματικού Helmut Boseck, οι οποίες αναδεικνύονται από τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία μιας βάσης του διανυσματικού χώρου των αναλυτικών διαφορικών και (πολυ)διαφορικών. Μέσω αυτών μπορούν να εκφραστούν πλήρως η δομή του χώρου των αναλυτικών (πολυ)διαφορικών σαν $K[G]$ πρότυπο, δηλαδή να τον γράφουμε σαν το (ευθύ) άθροισμα δυνάμεων αδιάσπαστων (indecomposable) $K[G]$ προτύπων (υπό την έννοια ότι επιτρέπουμε επαναλήψεις των προσθετέων στο άθροισμα). Το εντυπωσιακό σε αυτό το σημείο είναι ότι οι τύποι που δίνουν τις δύο δομές, για αυτές τις φαινομενικά ακραίες περιπτώσεις αβελιανών ομάδων που μελετάμε, ενοποιούνται μέσω των αναλλοίωτων του Boseck, κάτι που μας οδηγεί στην διατύπωση μιας εικασίας για την γενική περίπτωση μιας αβελιανής p–επέκτασης σωμάτων συναρτήσεων. Μια από τις εφαρμογές για τα αναλυτικά (πολυ)διαφορικά αποτελεί και ο υπολογισμός της διάστασης του εφαπτόμενου χώρου του local –global deformation functor. Για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις της δομής της G που μελετάμε, υπολογίζουμε την K–διάσταση του local deformation functor συναρτήσει των Boseck αναλλοίωτων και επαληθεύουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν με βάση την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε τις ημιομάδες του Weierstrass, τις ομάδες διακλάδωσης καθώς και τις συνδέσεις που υπάρχουν μεταξύ αυτών, σε μια κοινή εργασία που προέκυψε με την συνεργασία του συγγραφέα και του Αριστείδη Κοντογεώργη. Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας προκαλεί εντύπωση πως κάτι που είναι ορισμένο τοπικά σε κάποιο σημείο P, όπως πρόκειται για την Weierstrass ημιομάδα, μπορεί να εμπεριέχει πληροφορίες για κάποιες καθολικές αναλλοίωτες όπως είναι το γένος της καμπύλης ή τον πίνακα των Hasse–Witt.

Συνοψίζουμε

(i) Βλέπουμε πως συσχετίζονται οι ημιομάδες του Weierstrass στην περίπτωση ολικής διακλάδωσης ενός Galois καλύμματος,

(ii) Γράφουμε σχέσεις διαιρετότητας των pole numbers από την τάξη κάποιας ομάδας διακλάδωσης,

(iii) Ορίζουμε μια ακολουθία αναπαραστάσεων, και μέσω των πηδημάτων της βρίσκουμε τα πηδήματα της ramification filtration για μια ολικά διακλαδιζόμενη θέση στην κυκλική Galois p^n περίπτωση,

(iv) Χρησιμοποιούμε τις αναλλοίωτες του Boseck για την εύρεση των gaps και των ημιομάδων του Weierstrass, σε ένα διακλαδιζόμενο σημείο και τις συσχετίζουμε τέλος με κάποιες αναλλοίωτες του Lewittes,

(v) Δίνουμε ένα φράγμα για το μέγιστο gap συναρτήσει των pole numbers, που μας οδηγεί στον υπολογισμό του γένους της καμπύλης σε περίπτωση συμμετρικών ημιομάδων του Weierstrass, που παράγονται από 2 γεννήτορες,

(vi) Χαρακτηρίζουμε κάποιες Artin–Schreier επεκτάσεις και κάποιες maximal καμπύλες ως προς την συμμετρική ιδιότητα των Weierstrass ημιομάδων τους.

Στην χαρακτηριστική μηδέν πολλά από τα παραπάνω αποτελούν κλασικά θέματα επιφανειών Riemann και έχουν μελετηθεί αρκετά. Αντίθετα, η θεωρία των αναπαραστάσεων, των Weierstrass ημιομάδων και των ομάδων διακλάδωσης $G(P)$ είναι δυσκολότερες στην περίπτωση που $p > 0$. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι

- Η τάξη της ομάδας μας διαιρείται από το p με συνέπεια να έχουμε τις δυσκολίες της modular αναπαράστασης, συγκριτικά με τις αναπαραστάσεις πεπερασμένων ομάδων στην μηδέν χαρακτηριστική,
- Στην μηδέν χαρακτηριστική όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος σημεία, που ονομάζονται σημεία του Weierstrass, έχουν gaps στο P, ακριβώς το σύνολο $\{1, \ldots, g\}$, κάτι που δεν αληθεύει στην θετική χαρακτηριστική,
- Στην μηδέν χαρακτηριστική η ομάδα $G(P)$, ο σταθεροποιητής του P, είναι πάντα κυκλική, κάτι που δεν ισχύει αν $p > 0$ και το p διαιρεί την $|G(P)|$.
- Στην μηδέν χαρακτηριστική το φαινόμενο της άγριας διακλάδωσης ενός σημείου απουσιάζει απλουστεύοντας πολύ την κατάσταση στην διακλάδωση.
- Στην μηδέν χαρακτηριστική το φαινόμενο της διακλάδωσης του ενός σημείου απουσιάζει. Κάθε αναλυτικό (διακλαδιζόμενο) κάλυμμα του $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ με μοναδικό σημείο διακλάδωσης οδηγεί σε ένα τοπολογικό κάλυμμα του $\mathbb{C}$. Καθ'ότι ο $\mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικός συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν τέτοια μη τεριμμένα τοπολογικά καλύμματα.

Σύμβαση: Πρέπει να πούμε ότι με τον όρο καμπύλη εννοούμε μια μη ιδιάζουσα, ανάγωγη, ορισμένη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα K θετικής χαρακτηριστικής (μερικές φορές το συμβολίζουμε και με k), προβολική καμπύλη, εκτός αν αναφέρουμε κάτι άλλο.

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον Αριστείδη Κοντογεώργη που ξόδεψε τόσο από τον χρόνο του μαζί μου, και που στάθηκε στο πλευρό μου κάθε στιγμή, όπως και την επιτροπή για την ευκαιρία που μου προσφέρει να μοιραστώ μαζί της την δουλειά μου. Τέλος είμαι ευγνώμων στον Αντώνη Τσολομύτη για την βοήθεια στο LaTeX, όπως και στην Ματίνα Μάντζαρη για τις χρήσιμες παρατηρήσεις της και την στήριξή της.

Σ. Καρανικολόπουλος, Σάμος 2010.

Κεφάλαιο 1

Ολόμορφα (πολυ)διαφορικά

Σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση που η επέκταση E/F είναι Galois κυκλική ή στοιχειώδης αβελιανή τάξης p^n. Πρώτα υπολογίζουμε βάσεις αναλυτικών διαφορικών στο Λήμμα 1.3.11 και Πρόταση 1.3.18 αντίστοιχα, και έπειτα ορίζουμε τις ποσότητες $\nu_{ik}(m)$ να είναι

$$\left\lfloor \frac{m\delta_i + \{\text{εκτίμηση του } k \text{ στοιχείου μιας Ε-βάσης του} F\}}{p^{e_i}} \right\rfloor,$$

όπου τα δ_i, e_i, i σχετίζονται με την διακλάδωση της επέκτασης, δείτε την εικασία 1 παρακάτω όπως και την Παρατήρηση 1.3.17. Τα στοιχεία της βάσης, εκτιμώνται από μια (κανονικοποιημένη) εκτίμηση που καθορίζεται από μια θέση του F υπέρ μιας διακλαδισμένης θέσης του E και το $\lfloor \cdot \rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος. Εισάγουμε τις *αναλλοίωτες του Boseck*, οι οποίες είναι ποσότητες της μορφής $\Gamma_k(m) := \sum_i \nu_{ik}(m)$, όπου ο δείκτης i διατρέχει όλους τους διακλαδισμένους πρώτους της επέκτασης. Αυτές οι ποσότητες αρχικά χρησιμοποιήθηκαν από τον Boseck, [7] για την κατασκευή βάσεων 1-ολόμορφων διαφορικών και περιέχουν όλη την πληροφορία που απαιτείται έτσι ώστε ένα διαφορικό να είναι ολόμορφο. Για την εύρεση αυτών των αναλλοίωτων που αντιστοιχούν σε ένα σώμα συναρτήσεων F/E, παίρνουμε ρητές επεκτάσεις της μορφής $F/K(x)$ και βρίσκουμε K-βάσεις για τους αντίστοιχους χώρους $\Omega_F(m)$, για $m \geq 1$. (Στην περίπτωση που $m = 1$, οι βάσεις αυτές συχνά ονομάζονται και βάσεις του Boseck). Η επιλογή του ρητού σώματος συναρτήσεων είναι σαφής από τις εξισώσεις ορισμού των καμπυλών μας (Εξισώσεις (1.15), (1.31), (1.32)). Αποδεικνύεται ότι για τις περιπτώσεις που μελετάμε οι αναλλοίωτες του Boseck καθορίζουν πλήρως την Galois module structure του χώρου των m–ολόμορφων πολυδιαφορικών, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι για $m > 1$ και για την περίπτωση που η παρακάτω G είναι μια κυκλική ή στοιχειώδης αβελιανή το:

Θεώρημα 1.0.1. *Έστω G μια αβελιανή ομάδα αυτομορφισμών του F, με $|G| = p^n$. Θέτουμε με $E = F^G$ και συμβολίζουμε με g_E το γένος του E. Έστω m ένας φυσικός αριθμός με $m > 1$. Η ομαλή αναπαράσταση της G εμφανίζεται $d_{p^n} = \Gamma_{p^n-1}(m) + (g_E - 1)(2m - 1)$ φορές στην αναπαράσταση της G στον χώρο $\Omega_F(m)$. Για $k = 1, \ldots, p^n - 1$, η αδιάσπαστη αναπαράσταση βαθμού k εμφανίζεται $d_k = \Gamma_{k-1}(m) - \Gamma_k(m)$ φορές.*

Το παραπάνω Θεώρημα αντιστοιχεί στο Θεώρημα 1.3.7 όταν η G είναι κυκλική και στο Θεώρημα 1.3.22 στην περίπτωση που η G είναι στοιχειώδης αβελιανή και

$g_E = 0$. Τα παραπάνω δείχνουν με ξεκάθαρο τρόπο ότι ο τύπος που μας δίνει την δομή του χώρου των ολόμορφων (πολυ)διαφορικών σαν $K[G]$–πρότυπο συναρτήσει των αναλλοίωτων του Boseck, παραμένει ο ίδιος. Επίσης για $m > 1$ δεν εξαρτάται από την ύπαρξη ή όχι αδιακλάδιστων υποεπεκτάσεων του F, κάτι το οποίο δεν ισχύει για την $m = 1$ περίπτωση (Παρατήρηση 1.3.9).

Για την $m = 1$ περίπτωση το παραπάνω θεώρημα έχει αποδειχτεί, ανεξάρτητα, από τους [82, Θεώρημα 2] για κυκλική G και από τους [62, Θεώρημα 1] για στοιχειώδη αβελιανή, τους οποίους και ακολουθούμε από κοντά.

Οι αναλλοίωτες $\Gamma_k(m)$ περιέχουν πολύ πληροφορία. Για παράδειγμα το degree του different της επέκτασης μπορεί να αποδοθεί συναρτήσει αυτών:

$$\frac{2}{2m-1}\sum_k \Gamma_k(m) = \deg \mathrm{Diff}(F/E),$$

(Παρατηρήσεις 1.3.8, 1.3.15, 1.3.19), για την κυκλική τάξης p^n, την κυκλική τάξης πρώτη ως προς p και την στοιχειώδη αβελιανή περίπτωση αντίστοιχα. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αναλλοίωτες του Boseck για να πάρουμε εναλλακτικές εκφράσεις, για παράδειγμα, των Εξισώσεων Riemann–Hurwitz ή Riemann–Roch. Τέλος, δείχνουμε πώς είναι οι αναλλοίωτες στην κυκλική και πρώτη ως προς το p περίπτωση, δηλαδή όταν η F/E είναι μια Kummer επέκταση για $m = 1$ και πως μια βάση 1–ολόμορφων διαφορικών οδηγεί στην περίπτωση αυτή σε ένα θεώρημα του Hurwitz, [28, σελίδα 439, formula 2], ή [53, σελ. 600, Θεώρημα 3.5]:

Θεώρημα 1.0.2 (Hurwitz). *Για $k = 0, \ldots, n-1$, έχουμε n διαφορετικές ανάγωγες αναπαραστάσεις βαθμού 1. Η k αναπαράσταση εμφανίζεται $d_{n-k} := \Gamma_{n-k}(1) - 1 + g_E$ φορές στην αναπαράσταση της G στον $\Omega_F(1)$, όταν $k \neq 0$ και g_E φορές στην περίπτωση που $k = 0$.*

Αυτό αντιστοιχεί στο Θεώρημα 1.3.16.

Υπενθυμίζουμε ότι οι δυσκολίες που συναντάμε στην θετική χαρακτηριστική, σε σχέση με την χαρακτηριστική 0, είναι η εμφάνιση της άγριας διακλάδωσης στις επεκτάσεις F/E, αλλά και οι δυσκολίες της modular θεωρίας αναπαραστάσεων.

1.1 Θεμέλια

Για την κατανόηση του κεφαλαίου αυτού απαιτούνται κάποιες βασικές γνώσεις από την θεωρία διακλάδωσης του Hilbert, καθώς και στοιχεία από την θεωρία αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων, τα οποία και αναφέρουμε περιληπτικά προς όφελος της πληρότητας του συγγράμματος. Αντικειμενικός σκοπός είναι να προσφέρει κάποια εξοικείωση με την ορολογία στον μη ειδικό αναγνώστη για να μπορέσει έπειτα να διαβάσει την παράγραφο των αποτελεσμάτων που ακολουθεί. Οι ειδικοί του θέματος θα πρέπει να περάσουν στην επόμενη παράγραφο χωρίς δεύτερη σκέψη. Οι πηγές σε αυτήν την παράγραφο βασίζονται, κυρίως, στους [70], [24], [25], [2].

1.1α′ Θέσεις –Δακτύλιοι εκτίμησης –Διακριτές εκτιμήσεις

Ορισμός 1.1.1. *Ένα αλγεβρικό σώμα συναρτήσεων μιας μεταβλητής F/K υπέρ του K είναι μια επέκταση σωμάτων $K \subset F$ η οποία αποτελεί μια πεπερασμένη αλγεβρική επέκταση του $K(x)$, όπου $x \in F$ είναι υπερβατικό υπέρ του K.*

Αν το σώμα $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ έχουμε να αντιμετωπίσουμε γεωμετρικά προβλήματα. Για τις εφαρμογές της κρυπτογραφίας και κωδίκων το ενδιαφέρον σώμα είναι το $K = \mathbb{F}_p$, με το F/K να ονομάζεται congruence σώμα συναρτήσεων στην περίπτωση αυτή, ενώ αν $K = \mathbb{Q}$ ασχολούμαστε με διοφαντικά προβλήματα και το F/K ονομάζεται αριθμητικό σώμα συναρτήσεων. Μάλιστα στην τελευταία περίπτωση επικεντρώνεται ένα μεγάλο ποσοστό της έρευνας σήμερα στην θεωρία αριθμών.

Το σύνολο $\tilde{K} := \{z \in F | z$ να είναι αλγεβρικό επί του $K\}$, αποτελεί ένα υπόσωμα του F, και ονομάζεται σώμα των σταθερών του F/K. Είναι τετριμμένο ότι ισχύει $K \subseteq \tilde{K} \subseteq F$. Αφού έχουμε υποθέσει, στην εισαγωγή, ότι το K είναι αλγεβρικά κλειστό, έχουμε σαν συνέπεια ότι $K = \tilde{K}$. Ένα σώμα συναρτήσεων F/K ονομάζεται ρητό, αν $F = K(x)$ για κάποιο $x \in F$, υπερβατικό υπέρ του K. Σε ρητά σώματα συναρτήσεων έχουμε ότι κάθε $k \in K(x)$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο

$$k(x) = \alpha \prod_i p_i(x)^{n_i},$$

όπου $\alpha \in K$, $p_i \in K[x]$ να είναι ανάγωγα και διαφορετικά ανά ζεύγος μονικά πολυώνυμα και $n_i \in \mathbb{Z}$. Μια τέτοια παραγοντοποίηση, που φυσικά μας θυμίζει την παραγοντοποίηση σε δυνάμεις πρώτων αριθμών (με τις δυνάμεις να είναι απλά οι εκτιμήσεις των ανάγωγων πολυωνύμων), δεν ξέρουμε πως μπορεί να πραγματοποιηθεί στην περίπτωση ενός μη ρητού σώματος συναρτήσεων. Τι μπορεί άραγε σε αυτήν την περίπτωση να θεωρηθεί ανάγωγο στοιχείο του F; Η απάντηση δίνεται μέσω τον δακτυλίων εκτίμησης (valuation rings):

Ορισμός 1.1.2. *Ένας δακτύλιος εκτίμησης ενός σώματος συναρτήσεων F/K είναι ένας δακτύλιος $\mathscr{O} \subseteq F$ που ικανοποιεί*

$$\begin{array}{ll} (1) & K \subsetneq \mathscr{O} \subsetneq F \\ (2) & \textit{Για κάθε } z \in F \Longrightarrow z \in \mathscr{O} \textit{ ή } z^{-1} \in \mathscr{O}. \end{array}$$

Για την περίπτωση του ρητού σώματος συναρτήσεων $F = K(x)$ έχουμε για ανάγωγο, μονικό $p(x)$ ότι

$$\mathscr{O}_{p(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in K[x], p(x) \nmid g(x) \right\}. \tag{1.1}$$

Πράγματι, εύκολα βλέπουμε ότι ικανοποιείται το (1). Για το (2) υποθέστε ότι $k \in K(x)$ και $k \notin \mathscr{O}_{p(x)}$. Τότε $k = \frac{\kappa(x)}{\lambda(x)}$, με $\kappa(x), \lambda(x) \in K[x]$ και $p(x)|\lambda(x)$. Αν $p(x)|\kappa(x)$ τότε $k \in \mathscr{O}_{p(x)}$, άτοπο! Συνεπώς $k^{-1} = \frac{\lambda(x)}{\kappa(x)}$, με $p(x) \nmid \kappa(x)$, και άρα $k^{-1} \in \mathscr{O}_{p(x)}$.

Είναι άξιο προσοχής ότι στην περίπτωση του ρητού σώματος ο δακτύλιος εκτίμησης δεν είναι τίποτα περισσότερο από την τοπικοποίηση (localization) του δακτυλίου πολυωνύμων στο μέγιστο ιδεώδες $p(x)$, δηλαδή η Εξίσωση 1.1 μπορεί να γραφτεί σαν:

$$\mathscr{O}_{p(x)} = K[x]_{p(x)} = K[x] \cdot (K[x] \setminus \langle p(x) \rangle)^{-1}.$$

Αυτό γίνεται όταν το σύνολο $(K[x] \setminus \langle p(x) \rangle)$ είναι πολλαπλασιαστικό (κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό), που ισχύει όταν το ανάγωγο $p(x)$ είναι πρώτο, δηλαδή απαιτούμε το $K[x]$ να είναι Π.Μ.Α. (Περιοχή Μονοσήμαντης Ανάλυσης), γεγονός που ισχύει τετριμμένα καθώς το $K[x]$ είναι Π.Κ.Ι. (χρησιμοποιώντας για παράδειγμα το [27, Θεώρημα 3.7]) .

Επίσης η δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 1.1.2, ισοδυναμεί με το F να αποτελεί το σώμα πηλίκο του $\mathscr{O}$.

Παράδειγμα 1.1.3. $K = \mathbb{C}, F = \mathbb{C}(x)$.

Τότε το F είναι το σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ενώ οι καθολικές (global) αναλυτικές συναρτήσεις στην προβολική ευθεία είναι οι σταθερές ([32, Πόρισμα 2.15]). Σκεφτόμαστε, για παράδειγμα, τις ρητές αναλυτικές συναρτήσεις στο 0. Αυτές έχουν την μορφή

$$\begin{aligned}
\mathscr{O} &= \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} |\ f(x) \in \mathbb{C}[x],\ g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}, g(0) \neq 0 \right\} \\
&= \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} |\ f(x) \in \mathbb{C}[x],\ g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}, x \nmid g(x) \right\} \\
&= \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} |\ f(x) \in \mathbb{C}[x],\ g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}, g(x) \notin \langle x \rangle \right\} \\
&= \mathbb{C}[x](\mathbb{C}[x] \setminus \langle x \rangle)^{-1} = \mathbb{C}[x]_{\langle x \rangle}.
\end{aligned}$$

Προφανώς το μέγιστο ιδεώδες του $\mathscr{O}$ είναι το $P := \langle x \rangle (\mathbb{C}[x] \setminus \langle x \rangle)^{-1}$, δηλαδή

$$P = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} |\ f(0) = 0,\ g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}, g(0) \neq 0 \right\},$$

και καθ'ότι ο $\mathscr{O}$ είναι τοπικός όλες οι μονάδες θα είναι αυτές που δεν θα περιέχονται στο P, δηλαδή

$$\mathscr{O}^* = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} |\ f(0) \neq 0,\ g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}, g(0) \neq 0 \right\}.$$

Για περαιτέρω αλγεβρικές καμπύλες πάνω από τους μιγαδικούς παραπέμπουμε στις επιφάνειες Riemann στο [32, Κεφάλαιο 2].

Μόλις δείξαμε (τουλάχιστον για την ρητή περίπτωση) ότι ο δακτύλιος εκτίμησης είναι ένας τοπικός (local) δακτύλιος. Η επόμενη πρόταση μας δείχνει ότι ο $\mathscr{O}$ είναι ένας διακριτός δακτύλιος εκτίμησης, δηλαδή είναι Π.Κ.Ι. με μοναδικό μέγιστο ιδεώδες:

Πρόταση 1.1.4. *Για τον δακτύλιο εκτίμησης $\mathscr{O}$ του σώματος συναρτήσεων F/K ισχύουν:*

(i) *Είναι τοπικός με μοναδικό μέγιστο ιδεώδες $P = \mathscr{O} \setminus \mathscr{O}^*$, όπου $\mathscr{O}^* = \{z \in \mathscr{O} |\ \ $ υπάρχει $w \in \mathscr{O} : zw = 1\}$*

(ii) *Είναι Π.Κ.Ι. Υπάρχει $t \in P$ τέτοιο ώστε $P = t\mathscr{O}$ και κάθε $z \in F$ μπορεί να γραφτεί μονοσήμαντα στην μορφή $z = t^n \cdot u$, όπου $u \in \mathscr{O}^*$ και $n \in \mathbb{Z}$. Μάλιστα αν $z \in \mathscr{O}$ τότε $n > 0$, ενώ αν $z^{-1} \in \mathscr{O}$ τότε $n < 0$. Τέλος κάθε μη μηδενικό ιδεώδες του $I \lhd \mathscr{O}$, μπορεί να γραφτεί σαν $I = t^n \mathscr{O}$ για $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Είναι η [70, Πρόταση Ι.1.5 και Θεώρημα Ι.1.6] □

Το στοιχείο $t \in P$ που γεννάει το μέγιστο ιδεώδες ονομάζεται P–πρώτο στοιχείο ή τοπική μεταβλητή (prime element, local parameter, uniformizing variable)

Ορισμός 1.1.5. *Μια θέση (συχνά αναφέρεται και σαν πρώτος) P του σώματος συναρτήσεων F/K είναι το μέγιστο ιδεώδες του δακτυλίου εκτίμησης $\mathscr{O}$ του F/K, και συμβολίζουμε το σύνολο των θέσεων του F σαν*

$$\mathbb{P}_F := \{P|\ P \text{ να είναι θέσεις του } F/K\}.$$

Παρατηρώντας ότι $\mathscr{O} = \{z \in F | z^{-1} \notin P\}$, βλέπουμε ότι ο δακτύλιος εκτίμησης καθορίζεται πλήρως από το P. Έτσι έχουμε τόσες θέσεις όσους και δακτυλίους εκτίμησης και ο δακτύλιος εκτίμησης $\mathscr{O}_P = \mathscr{O}$ ονομάζεται ο δακτύλιος εκτίμησης του P.

Τώρα κατασκευάζουμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ θέσεων και εκτιμήσεων. Πρώτα ας ορίσουμε όμως τι είναι μια εκτίμηση:

Ορισμός 1.1.6. *Μια διακριτή εκτίμηση του F/K είναι μια συνάρτηση $v : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα*

(i) $v(z) = \infty$ *αν και μόνον αν* $z = 0$,

(ii) $v(zf) = v(z) + v(f)$,

(iii) *Τριγωνική ανισότητα:* $v(z+f) \geq min\{v(z), v(f)\}$, *με την ισότητα να ισχύει στην περίπτωση όπου* $v(z) \neq v(f)$,

(iv) *Υπάρχει πάντα κάποιο* $z \in F$ *τέτοιο ώστε* $v(z) = 1$.

(v) $v(k) = 0$ *για κάθε μη μηδενικό* k *στο σώμα των σταθερών.*

Παρατήρηση 1.1.7. *Κάθε τέτοια διακριτή εκτίμηση μας ορίζει και μια νόρμα και έτσι μια (μετρική) τοπολογία, την ultrametric*

Επιλέγουμε ένα $c \in (0,1)$ και ορίζουμε $|\ |_v : F \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $0 \neq f$

$$|f|_v = c^{v(f)},$$

και $|f|_v = 0$ αν και μόνον αν $v(f) = \infty$. Ο μετρικός χώρος $(F, |\cdot|)$, δεν είναι πλήρης και η πλήρωση του $\hat{F}$ ονομάζεται σώμα των (formal) δυναμοσειρών.

Σε κάθε θέση $P \in \mathbb{P}_F$ αντιστοιχούμε μια συνάρτηση, που εύκολα αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ορισμού 1.1.6 και άρα αποτελεί μια διακριτή εκτίμηση $v_P : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Διαλέγοντας ένα P–πρώτο στοιχείο του P, ας το πούμε t, τότε κάθε $0 \neq f \in F$ έχει μοναδική παραγοντοποίηση, που είναι η $f = ut^n$, με $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζοντας $v_P(f) = n$ και $v_P(0) = \infty$ φτάσαμε στην παρακάτω αντιστοιχία

$$\text{Θέσεις του } F, \mathbb{P}_F \ni P \longleftrightarrow v_P, \text{Διακριτές εκτιμήσεις του } F. \tag{1.2}$$

Παρατηρούμε ότι η αντιστοιχία θέσεων–διακριτών εκτιμήσεων εξαρτάται μόνον από την επιλογή της θέσης και όχι από την επιλογή του γεννήτορα της θέσης. Πράγματι αν $t\mathscr{O} = P = t'\mathscr{O}$ τότε $t = wt'$ με $u \in \mathscr{O}^*$. Έτσι

$$t^n u = t'^n w^n u = t'^n (w^n u), \text{ με } w^n u \in \mathscr{O}^*.$$

Μπορούμε τώρα να δούμε τους δακτυλίους εκτίμησης με μια άλλη, εναλλακτική ματιά. Αν F/K είναι ένα σώμα συναρτήσεων, τότε για κάθε θέση $P \in \mathbb{P}_F$ αντιστοιχίσαμε μια διακριτή εκτίμηση v_P την Εξίσωση 1.2. Τότε η Πρόταση 1.1.4 μας δίνει

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_P &= \{f \in F \mid v_P(f) \geq 0\}, \\ \mathscr{O}_P^* &= \{f \in F \mid v_P(f) = 0\}, \\ P &= \{f \in F \mid v_P(f) \gneq 0\}. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.1.8. *Στην περίπτωση όπου $v_P(f) > 0$, λέμε ότι η f παρουσιάζει ρίζα στο P. Μάλιστα γράφοντας το $f = t^n u$ από την Πρόταση 1.1.4 λέμε ότι η τάξη της ρίζας είναι n. Αν $v_P(f) < 0$, λέμε ότι η f παρουσιάζει πόλο στο P τάξης n.*

Ποια είναι εκείνα τα f που παρουσιάζουν πόλο και ρίζα; Απάντηση οι σταθερές: πράγματι ρωτάμε ισοδύναμα ποια μορφή έχουν τα στοιχεία εκείνα $f \in \mathscr{O}$ και $f^{-1} \in \mathscr{O}$. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτά τα στοιχεία είναι εκείνα με εκτίμηση στο P ίση με 0, δηλαδή οι σταθερές, και έτσι εξηγήσαμε γιατί τα αντιστρέψιμα του $\mathscr{O}_P$ είναι αυτά με μηδενική στο P εκτίμηση.

Μπορεί να αποδειχτεί και το αντίστροφο, αρχίζοντας δηλαδή από μια διακριτή εκτίμηση v ενός σώματος συναρτήσεων F/K, τότε το σύνολο $P = \{f \in F \mid v_P(f) \gneq 0\}$ αποτελεί μια θέση του F/K, δηλαδή είναι το μέγιστο ιδεώδες του δακτυλίου εκτίμησης $\mathscr{O}_P = \{f \in F \mid v_P(f) \geq 0\}$. Άρα η Εξίσωση 1.2 παίρνει την μορφή

$$\mathbb{P}_F \ni P \longleftrightarrow v_P \longleftrightarrow \mathscr{O}_P. \tag{1.3}$$

1.1β΄ Αντιστοιχίες

Ας ξεχωρίσουμε κάποιες αντιστοιχίες που τις διέκριναν κάποιοι εμπνευσμένοι μαθηματικοί. Ας δώσουμε αρχικά έναν ορισμό:

Ορισμός 1.1.9. *Για κάθε $P \in \mathbb{P}_F$ ορίζουμε το σώμα πηλίκο του P, ως $F_P = \mathscr{O}_P/P$ και τον βαθμό της P (degree, relative degree) να είναι ο βαθμός της επέκτασης $\deg P = [F_P : K]$.*

Εδώ, όπου το K είναι αλγεβρικά κλειστό, όλες οι θέσεις έχουν βαθμό μονάδα και $F_P = \mathscr{O}_P/P = K$. Αυτό έχει σαν συνέπεια άλλη μια αντιστοιχία, η οποία είναι ότι για κάθε $f \in F$:

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_P &\longrightarrow \mathscr{O}_P/P = K \\ f &\longmapsto f(P) := f \mod P, \text{ αν } f \in \mathscr{O}_P, \text{ και αν όχι} \\ F \setminus \mathscr{O}_P \ni f &\longmapsto \infty. \end{aligned}$$

Συνεπώς φτιάξαμε μια απεικόνιση

$$F \longrightarrow \mathbb{P}^1(K) \tag{1.4}$$

Ας ασχοληθούμε τώρα με την αντιστοιχία μεταξύ θέσεων, δηλαδή μέγιστων ιδεωδών και σημείων της καμπύλης. Η ιδέα αυτή χρησιμοποιείται συχνά στην αλγεβρική γεωμετρία.

Ας ονομάσουμε αφινικό (affine) χώρο $\mathbb{A}^n_K$ όλα τα σημεία από το K με n συντεταγμένες, δηλαδή $P \in \mathbb{A}^n_K$ αν $P = (k_1, \cdots, k_n)$ και $k_i \in K$. Ας συμβολίσουμε με Y να είναι μια αφινική αλγεβρική πολλαπλότητα και με $A(Y) := K[x_1, \ldots, x_n]/I(Y)$, να είναι ο δακτύλιος συντεταγμένων της. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η Y είναι ένα Zariski κλειστό, και ανάγωγο, δηλαδή το $I(Y)$ πρώτο.

Ορισμός 1.1.10. *Ορίζουμε μια κανονική (regular) συνάρτηση σε ένα σημείο P ενός ανοικτού Y μιας αφινικής πολλαπλότητας (quasi–affine) να είναι μια συνάρτηση από το $f : Y \longrightarrow K$, τέτοια ώστε να υπάρχει ανοικτό $U \ni P$ του Y και πολυώνυμα $g, h \in K[x_1, \ldots, x_n]$, τέτοια ώστε $h(u) \neq 0$ για όλα τα $u \in U$ και $f = g/h$ στον U. Λέμε ότι είναι κανονική στον Y αν είναι κανονική σε κάθε του σημείο.*

Ορίζουμε με $\mathscr{O}(Y)$ τον δακτύλιο όλων των καθολικών (global) κανονικών συναρτήσεων στον Y, με τα στοιχεία του να ονομάζονται global sections, και με $\mathscr{O}_P$ τον δακτύλιο των germs των κανονικών συναρτήσεων στον Y στο σημείο $P \in Y$. Όμοια αν $\mathscr{O}(U), U \subseteq Y$, είναι ο δακτύλιος των κανονικών στο U συναρτήσεων τα στοιχεία του ονομάζονται local sections. Αν s, είναι μια local section τότε τα στοιχεία του $\mathscr{O}_P$ είναι οι εικόνες των local sections στο stalk του P, δηλαδή

$$\begin{array}{ccl} \mathscr{O}(U) & \longrightarrow & \mathscr{O}_P := \sqcup_{P \in U} \mathscr{O}(U)/\sim \\ s & \longmapsto & s_P. \end{array}$$

Γενικά ένα στοιχείο του $\mathscr{O}_P$ έχει την μορφή $\langle U, f \rangle$, με $U \ni P$, ανοικτό του Y και f μια κανονική συνάρτηση στο U. Δύο στοιχεία του, $\langle U, f \rangle$, $\langle V, g \rangle$ είναι ίσα αν $f = g$ στο $U \cap V$. Με αυτόν τον τρόπο περιγράψαμε την κλάση ισοδυναμίας στο stalk που ορίσαμε παραπάνω.

Μπορεί ο παραπάνω ορισμός να φαίνεται στρυφνός αλλά τα πράγματα απλουστεύονται.

Είναι γενικά γνωστό ότι τα σημεία μιας αφινικής αλγεβρικής πολλαπλότητας αντιστοιχούνται με 1–1 τρόπο με μέγιστα ιδεώδη του δακτυλίου συντεταγμένων της πολλαπλότητας. Πιο συγκεκριμένα παραθέτουμε το παρακάτω όμορφο θεώρημα του Hartshorne, [25][Θεώρημα 3.2, σελ. 17]

Θεώρημα 1.1.11. *Αν Y είναι μια υποπολαπλότητα του αφινικού $\mathbb{A}^n$ χώρου και $A(Y)$ ο δακτύλιος συντεταγμένων της, τότε*

(i) *$\mathscr{O}(Y) \simeq A(Y)$, όπου $\mathscr{O}(Y)$ είναι ο δακτύλιος όλων των κανονικών συναρτήσεων στον Y.*

(ii) *Για κάθε $P \in Y$, θέτοντας με m_P να είναι το ιδεώδες από συναρτήσεις που μηδενίζονται στο P, δηλαδή $m_P = \{f \in \mathscr{O}(Y) | \ f(P) = 0\}$ η αντιστοιχία*

$$P \longleftrightarrow m_P,$$

είναι μια 1–1 αντιστοιχία μεταξύ όλων των σημείων της Y και των μέγιστων ιδεωδών του $A(Y)$.

(iii) *Για κάθε $P \in Y$ έχουμε $\mathscr{O}_P \simeq A(Y)_{m_P}$,*

(iv) *Το σώμα συναρτήσεων της Y είναι το $\mathrm{Quot.}(A(Y))$.*

Ας σταθούμε λίγο την αντιστοιχία μεταξύ σημείων και μέγιστων ιδεωδών και ας δούμε την αντιστοιχία σε αλγεβρικά υποσύνολα $V \subseteq \mathbb{A}^n$, δηλαδή σε ένα κλειστό με την Zariski τοπολογία του U: σε κάθε σημείο $(a_1, \cdots, a_n) \in V$ αντιστοιχεί ένα μέγιστο ιδεώδες $(x_1 - a_1, \cdots, x - a_n)$ του $K[x_1, \ldots, x_n]$. Ας συμβολίζουμε με $\bar{x}_i$ την εικόνα του x_i μέσα στον δακτύλιο συντεταγμένων του $A(V) := \frac{K[x_1,\ldots,x_n]}{I(V)}$. Τότε το ιδεώδες $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ είναι μέγιστο του $A(V)$. Αντιστρόφως για οποιοδήποτε μέγιστο ιδεώδες m του $A(V)$, η αντίστροφη εικόνα $\psi(m)^{-1}$ του m μέσω του κανονικού επιμορφισμού

$$\psi : K[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \frac{K[x_1, \ldots, x_n]}{I(V)},$$

είναι ένα μέγιστο του $K[x_1, \ldots, x_n]$. Καθώς το K είναι αλγεβρικά κλειστό αυτό θα έχει την μορφή $(x_1 - b_1, \cdots, x - b_n)$, όπου $b_i \in K$. Θα δείξουμε ότι το σημείο $(b_1, \ldots b_n) \in V$. Αρκεί να δείξουμε ότι $I(V) \subset (x_1 - b_1, \cdots, x - b_n)$. Καθώς όμως το $\bar{0} \in m$ και $\psi^{-1}(\bar{0}) = I(V)$ παίρνουμε ότι $\psi(m)^{-1} \supset \psi^{-1}(\bar{0}) = I(V)$.

Το ίδιο θεώρημα επεκτείνεται και για προβολικές πολλαπλότητες, [25, Θεώρημα, 3.4]. Έχοντας αυτά στο μυαλό μας μπορούμε να δούμε την αντιστοιχία στην Εξ. 1.3 σαν μια αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του σώματος συναρτήσεων, ενώ η αντιστοιχία της Εξ. 1.4 παίρνει τώρα την μορφή

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{P}_F & \longleftrightarrow & \mathbb{P}^1(K) \\ P & \longmapsto & f(P) = f \mod P, \text{ για κάθε } f \in F, \end{array}$$

με αποτέλεσμα κάθε στοιχείο του f, να μπορεί να θεαθεί σαν μια απεικόνιση των θέσεων, με τα στοιχεία του K να αποτελούν τις σταθερές. Αυτό εξηγεί και την ονομασία F/K ως σώμα συναρτήσεων.

Ορισμός 1.1.12 (Μορφισμοί). *Αν X, Y πολλαπλότητες, ένας μορφισμός $\phi : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε: Για κάθε $V \subseteq Y$, ανοικτό και για κάθε κανονική συνάρτηση $f : V \longrightarrow K$, η συνάρτηση $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \longrightarrow K$, να είναι κανονική.*

Είναι γνωστό ότι δύο αλγεβρικές πολλαπλότητες μπορεί να είναι ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι χωρίς κατ'ανάγκη να είναι ισόμορφες πολλαπλότητες. Για παράδειγμα στον [25, Άσκηση 3.2], όπου παρουσιάζεται ένας μορφισμός $\phi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ με τύπο $t \longmapsto (t^2, t^3)$. Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι 1–1, επί, συνεχής με συνεχή αντίστροφη αλλά όχι ισομορφισμός. Ένας τρόπος να το δούμε είναι ότι απεικονίζει την ευθεία σε ιδιομορφία, cusp:

$$- \longmapsto \frown\frown$$

και συνεπώς δεν διατηρεί τις ιδιομορφίες, όπως και θα όφειλε ένας ισομορφισμός πολλαπλοτήτων.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι ελλειπτικές καμπύλες που πάνω από το $\mathbb{C}$, που για την τοπολογία είναι όλες ομοιομορφικές επιφάνειες μονάδιαίου γένους (τόροι), ενώ σαν αλγεβρικές πολλαπλότητες είναι ισόμορφες αν και μόνον αν έχουν την ίδια j–αναλλοίωτη.

Ορισμός 1.1.13 (Ρητές Απεικονίσεις). *Αν X, Y αλγεβρικές πολλαπλότητες, μια ρητή απεικόνιση $\psi : X \longrightarrow Y$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας από ζεύγη (U, ψ_U), με $U \subseteq X$, ανοικτό μη κενό, ψ_U ένας μορφισμός του U με το Y, με δύο στοιχεία,*

(U, ψ_U), (V, ψ_V) να ορίζουν την ίδια κλάση ισοδυναμίας αν η $\psi_U \equiv \psi_V$ στο $U \cap V$. Η ρητή απεικόνιση ψ_U ονομάζεται dominant αν η εικόνα της είναι πυκνή στον Y, δηλαδή αν $\overline{\psi_U(U)} = Y$.

Ορισμός 1.1.14. *Το σώμα συναρτήσεων $K(Y)$ μίας ανάγωγης αλγεβρικής πολλαπλότητας Y ορίζεται ως εξής: Ένα στοιχείο του $K(Y)$ είναι μία κλάση ισοδυναμίας ζευγαριών (U, f), όπου το U είναι μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του U, και η f είναι μία κανονική συνάρτηση στο U. Επιπλέον δυο ζευγάρια (U, f), (V, g) θεωρούνται ισοδύναμα αν και μόνο αν $f = g$ στο $U \cap V$. Τα στοιχεία του $K(Y)$ θα ονομάζονται ρητές συναρτήσεις στο Y.*

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε δύο έννοιες ισοδυναμών πολλαπλοτήτων:

(i) Θα λέμε ότι οι ανάγωγες πολλαπλότητες X, Y είναι αμφίρητες αν υπάρχει ρητή συνάρτηση $X \to Y$ η οποία να είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη να είναι ρητή. Ισοδύναμα τα σώματα συναρτήσεων $K(X), K(Y)$ είναι ισόμορφα.

(ii) Θα λέμε ότι οι πολλαπλότητες X, Y είναι ισόμορφες αν υπάρχει αντιστρέψιμος μορφισμός $X \to Y$ που ο αντίστροφός του επίσης να είναι μορφισμός.

Υπάρχουν παραδείγματα [67, σελ. 30 Παράδειγμα 8,9] στα οποία αλγεβρικές πολλαπλότητες που είναι αμφίρητες δεν είναι ισόμορφες. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι και το [25, Άσκηση 3.2] που αναλύσαμε παραπάνω. Στην περίπτωση των μη ιδιόμορφων αλγεβρικών καμπυλών έχουμε το παρακάτω

Θεώρημα 1.1.15. *Δύο μη ιδιόμορφες προβολικές αλγεβρικές καμπύλες X, Y που έχουν ισόμορφα σώματα συναρτήσεων είναι ισόμορφες.*

Απόδειξη. [25, Πόρισμα 6.12] □

Σε αλγεβρικές μη ιδιόμορφες πολλαπλότητες διάστασης μεγαλύτερες του 2 το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει. Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε μια μη ιδιόμορφη επιφάνεια να εκτελέσουμε ένα blow-up σε ένα σημείο και να πάρουμε μία νέα μη ιδιόμορφη πολλαπλότητα αμφίρητη με την πρώτη αλλά όχι ισόμορφη [25, σελ. 28].

Αφού θα μελετήσουμε αποκλειστικά αυτομορφιμούς από μη ιδιόμορφες καμπύλες μπορούμε να περιοριστούμε στην μελέτη των σωμάτων συναρτήσεων τους. Μια θέση σε αυτά ένα σώμα συναρτήσεων F αντιστοιχεί με μονοσήμαντο τρόπο σε ένα σημείο μιάς μη ιδιόμορφης προβολικής αλγεβρικής καμπύλης Y που να έχει $K(Y) = F$. Για το ότι υπάρχει πάντα μία τέτοια καμπύλη Y παραπέμπουμε στο [25, I.6 σελ. 39].

1.1γ′ Divisors

Οι divisors δεν είναι τίποτα άλλο από τυπικά αθροίσματα θέσεων, δηλαδή σημείων της καμπύλης. Ένας divisor D του F, γράφεται σαν

$$D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P, \text{ με } n_P \in \mathbb{Z},$$

και για να έχει νόημα η σειρά απαιτούμε μόνο για πεπερασμένο το πλήθος αριθμό θέσεων τα $n_P \neq 0$. Ας δώσουμε έναν πιο αυστηρό ορισμό

Ορισμός 1.1.16. *Η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με πράξη την πρόσθεση που παράγεται από τις θέσεις του F/K ονομάζεται ομάδα των divisors του F/K και συμβολίζεται με* Div_F.

Ας δούμε κάποιες ιδιότητες

support του divisor D, ορίζεται το σύνολο $\{P \in \mathbb{P}_F |\ n_P \neq 0\}$, έτσι ένας τυχαίος divisor γράφεται σαν $D = \sum_{P \in S} n_P$, με $S \supsetneqq \mathrm{supp}.D$

η πράξη της πρόσθεση γίνεται κατά συντεταγμένες, δηλαδή αν $D, D_1 \in \mathrm{Div}_F$ με $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P$ και $D_1 = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P(1) P$ τότε

$$D + D_1 = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} (n_P + n_P(1))P.$$

ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι ο divisor $0 = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P$, με $n_P = 0$.

πρώτος divisor είναι αυτός που έχει την μορφή $D = P$ για κάποιο $P \in \mathbb{P}_F$.

μερική διάταξη για τους divisors δίνεται από $D_1 \leq D_2$ αν και μόνον αν $n_P(1) \leq n_P(2)$ για κάθε $P \in \mathbb{P}_F$. Ορίζοντας κατά αναλογία με τις θέσεις, εκτιμήσεις των divisors, δηλαδή για κάθε $Q \in \mathbb{P}_F$ και $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P$, ορίζοντας $n_Q := v_Q(D)$, τότε $D_1 \leq D_2$ αν και μόνον αν $v_P(D_1) \leq v_P(D_2)$, για κάθε $P \in \mathbb{P}_F$.

θετικός ή effective ή integral divisor D είναι αυτός που $v_P(D) \geq 0$ για κάθε $P \in \mathbb{P}_F$.

degree του divisor $\deg D := \sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P$.

divisor ριζών & πόλων ενός μη μηδενικού στοιχείου $x \in F$ είναι αντίστοιχα οι θετικοί divisors

$$\begin{aligned} (x)_0 &= \sum_{P \text{ ρίζα}} v_P(x) P \\ (x)_\infty &= \sum_{Q \text{ πόλος}} -v_Q(x) Q, \end{aligned}$$

με τους πόλους και τις ρίζες να δίνονται από τον ορισμό 1.1.8.

κύριος divisor ενός μη μηδενικού στοιχείου $x \in F$ είναι ο divisor

$$(x) = (x)_0 - (x)_\infty.$$

class group $\mathscr{C}_D$ είναι η ομάδα πηλίκο που προκύπτει από τον φυσικό επιμορφισμό

$$\mathrm{Div}_F \longrightarrow \mathrm{Div}_F / \{ \text{ κύριοι μη μηδενικοί } \mathrm{Div}_F \} := \mathscr{C}_D$$

Συνεπώς είναι φυσιολογικό να ορίσουμε μια κλάση ισοδυναμίας $\sim$ σε divisors του F, με $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}_F$ να είναι ισοδύναμοι αν η εικόνα τους μέσω του παραπάνω επιμορφισμού ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, δηλαδή $D_1 \sim D_2$ αν και μόνον αν διαφέρουν κατά ένα κύριο divisor, δηλαδή αν $D_1 = D_2 + (x)$ για κάποιο $0 \neq x \in F$.

διάσταση ενός divisor D είναι η διάσταση του K–διανυσματικού χώρου

$$L(D) = \{x \in F |\ v_P(x) \geq -v_P(D), \text{ για κάθε } P \in \mathbb{P}_F\} \cup \{0\}, \tag{1.5}$$

συχνά συμβολίζουμε με $\ell(D) = \dim_K L(D)$.

Ας δούμε γιατί ο παραπάνω είναι ένας K–διανυσματικός χώρος. Αν $x, y \in L(D)$ τότε $v_P(x+y) \geq \min\{v_P(x), v_P(y)\} \geq -v_P(D)$, δηλαδή το $x+y \in L(D)$. Επίσης η K–γραμμικότητα έπεται από την παρατήρηση ότι $v_P(\alpha x) = v_P(x) \geq -v_P(D)$, για $\alpha \in K$. Μπορεί να δειχτεί ότι αν $D_1 \sim D_2$ τότε $L(D_1) \simeq L(D_2)$ σαν K–διανυσματικοί χώροι και ότι αν D δεν είναι θετικός, τότε $L(D) = \{0\}$. Για την συνέχεια βλέπουμε επεκτάσεις ρητών σωμάτων συναρτήσεων που έχουν κοινό σώμα σταθερών, καθώς και κάποιες βασικές έννοιες διακλάδωσης.

1.1δ′ Επεκτάσεις αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων

Ορισμός 1.1.17. *Ένα αλγεβρικό σώμα συναρτήσεων F'/K ονομάζεται αλγεβρική επέκταση του σώματος συναρτήσεων F/K, αν $F \subseteq F'$ αποτελεί μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων. Είναι πεπερασμένη αν $[F' : F] < \infty$.*

Εμείς δουλεύουμε πάντα με πεπερασμένες επεκτάσεις.
Ποια σχέση διέπει τις θέσεις του F με τις θέσεις του F';

Ορισμός 1.1.18. *Έστω $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ και $P \in \mathbb{P}_F$. Λέμε ότι η P' βρίσκεται υπέρ της P, ή ότι η P βρίσκεται κάτω από την P', αν $P \subseteq P'$ και συμβολίζουμε με $P'|P$.*

Ας δούμε τι ισχύει για τους αντίστοιχους δακτυλίους εκτίμησης

Πρόταση 1.1.19. *Έστω F'/K αλγεβρική επέκταση του σώματος συναρτήσεων F/K, ας πάρουμε $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ και $P \in \mathbb{P}_F$ με $P'|P$. Ας πάρουμε και τους αντίστοιχους δακτυλίους εκτίμησης $\mathscr{O}_P$ και $\mathscr{O}_{P'}$, όπως και τις αντίστοιχες διακριτές εκτιμήσεις $v_P, v_{P'}$. Έχουμε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) $P'|P$,

(ii) $\mathscr{O}_P \subseteq \mathscr{O}_{P'}$,

(iii) *Υπάρχει κάποιος ακέραιος $e \geq 1$ τέτοιος ώστε $v_{P'}(x) = e \cdot v_P(x)$ για όλα τα $x \in F$. Επίσης, αν $P'|P$ τότε*

$$P = P' \cap F, \text{ και } \mathscr{O}_P = \mathscr{O}_{P'} \cap F'.$$

Μάλιστα για κάθε $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ υπάρχει ακριβώς μια θέση $P \in \mathbb{P}_F$ με $P'|P$, ενώ για κάθε θέση $P \in \mathbb{P}_F$, υπάρχει τουλάχιστον μία $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ υπέρ αυτής.

Απόδειξη. Είναι οι Προτάσεις III.1.4 και III.1.7. του [70]. □

Ο αριθμός e παίζει τόσο σημαντικό ρόλο που του αξίζει ένας ορισμός και ένα ιδιαίτερο όνομα:

Ορισμός 1.1.20 (Διακλάδωση)**.** *Έστω F'/K αλγεβρική επέκταση του σώματος συναρτήσεων F/K. Παίρνουμε $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ και $P \in \mathbb{P}_F$ με $P'|P$. Ο ακέραιος $e := e(P'|P)$, με*

$$v_{P'}(x) = e \cdot v_P(x),$$

ονομάζεται δείκτης διακλάδωσης της θέσης P' που βρίσκεται υπέρ της P. Στην περίπτωση που $e(P'|P) = 1$ λέμε ότι η θέση P' είναι αδιακλάδιστη ενώ αν $e(P'|P) > 1$ λέμε ότι η P' διακλαδίζεται.

Η περίπτωση όπου $e(P'|P) = 1$, για όλες τις θέσεις $P \in \mathbb{P}_F$, δεν είναι άλλη από τα etále καλύμματα, δηλαδή επεκτάσεις σωμάτων συναρτήσεων που οδηγούν σε τοπολογικά καλύμματα και καλυπτικές απεικονίσεις.

Ισχύει η εξής *μεταβατική* ιδιότητα για τους δείκτες διακλάδωσης. Αν $F \subseteq F' \subseteq F''$ αντιστοιχούν σε αλγεβρικές επεκτάσεις σωμάτων συναρτήσεων, και παίρνοντας $P''|P'|P$ τότε ισχύει

$$e(P''|P) = e(P''|P') \cdot e(P'|P).$$

Για την συνέχεια, και αφού είδαμε την σχέση που ικανοποιούν οι θέσεις, προχωράμε ένα βήμα ακόμα, στο να δούμε τι σχέση έχουν αθροίσματα θέσεων, δηλαδή divisors $\mathrm{Div}_{F'}$ με τους Div_F.

Δεδομένης μιας επέκτασης σωμάτων συναρτήσεων F'/K του F/K, σταθεροποιούμε μια θέση $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ και άλλη μια $P \in \mathbb{P}_F$ με $P'|P$. Έχουμε δύο ομομορφισμούς. Ας δούμε, αρχικά, πως αυτοί ορίζονται πάνω σε πρώτους divisors. Είναι η νόρμα

$$\begin{aligned} N_{F'/F} : \mathrm{Div}_{F'} &\longrightarrow \mathrm{Div}_F \\ P' &\longmapsto P \end{aligned}$$

και η co–νόρμα που κάνει την ανάποδη δουλειά

$$\begin{aligned} \mathrm{Con}_{F'/F} : \mathrm{Div}_F &\longrightarrow \mathrm{Div}_{F'} \\ P &\longmapsto \sum_{\text{όλα τα } P' \in \mathbb{P}_{F'}:\ P'|P} e(P'|P)P'. \end{aligned}$$

Πάνω σε έναν τυχαίο $D \in \mathrm{Div}_F$, ορίζεται ως εξής

$$D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P \longmapsto \sum_P n_P \sum_{P'|P} \mathrm{Con}_{F'/F}(P) = \sum_P n_P \sum_{P'|P} e(P'|P)P'.$$

Μαζέψαμε τις σημαντικότερες ιδιότητες:

Πρόταση 1.1.21. *Για κάθε $D \in \mathrm{Div}_F$ και $D' \in \mathrm{Div}_{F'}$ έχουμε*

(i) $\deg N_{F'/F}(D') = \deg D'$,

(ii) $\deg \mathrm{Con}_{F'/F}(D) = [F' : F] \deg D$,

(iii) $N_{F'/F}(\mathrm{Con}_{F'/F}(D)) = [F' : F]D$,

(iv) $(x)_{F'} = \mathrm{Con}_{F'/F}(x)_F$, *για κάθε* $x \in F$

Απόδειξη. Είναι το [24, Λήμμα 3.1.2]. □

Πρέπει να αναφέρουμε και το παρακάτω σημαντικό [70, Θεώρημα I.1.11]:

Πρόταση 1.1.22. *Έστω F'/K αλγεβρική επέκταση του σώματος συναρτήσεων F/K, και $P \in \mathbb{P}_F$. Συμβολίζουμε με $P_i \in \mathbb{P}_F$ και $1 \leq i \leq m$, να είναι όλες οι θέσεις με $P_i|P$. Συμβολίζοντας με $e(P_i|P) = e_i$ να είναι οι δείκτες διακλάδωσης έχουμε ότι*

$$\sum_i^m e_i = [F' : F].$$

1.1ε′ Διαφορικά

Για την συνέχεια ορίζουμε ένα derivation πάνω σε έναν δακτύλιο και επεκτείνουμε τον ορισμό στο σώμα πηλίκο του, ακολουθώντας τον [87, Κεφάλαιο 2, σελ. 120]. Βλέποντας τον δακτύλιο σαν ένα δακτύλιο εκτίμησης φτάνουμε έτσι σε σώματα συναρτήσεων.

Ορισμός 1.1.23 (derivation). *Έστω S δακτύλιος και R υποδακτύλιος αυτού. Μια απεικόνιση $\delta : R \longrightarrow S$ ονομάζεται derivation του R με τιμές στο S, αν για κάθε $x, y \in R$, η δ ικανοποιεί τα ακόλουθα*

(i) $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$,

(ii) $\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x)$.

Επαναλαμβάνοντας την δεύτερη ιδιότητα εύκολα παίρνουμε ότι

$$\delta(r^n) = nr^{n-1}\delta(r).$$

Επεκτείνουμε τα derivations με τρόπο φυσιολογικό αν ο S είναι ακέραια περιοχή

Λήμμα 1.1.24. *Έστω ότι R είναι ακέραια περιοχή και δ' διαφορικό με τιμές στο $R \subseteq F$ τότε επεκτείνουμε την δ' με τρόπο μονοσήμαντο σε ένα διαφορικό δ στο σώμα πηλίκο του R, $K = \mathrm{Quot.}(R)$, έτσι ώστε για $x/y \in K$, με $x, y \in R, y \neq 0$ να έχουμε ότι*

$$\delta(x/y) = \frac{y\delta(x) - x\delta(y)}{y^2},$$

με $\delta : K \longrightarrow F$.

Απόδειξη. Είναι το Λήμμα στην 17 παράγραφο του [87]. □

Παίρνουμε τώρα ένα σώμα συναρτήσεων F/K και σκεφτόμαστε το σύνολο των derivations του F. Θα μας απασχολήσουν εκείνα τα derivations που είναι τετριμμένα στο K, δηλαδή εκείνα τα δ με $\delta(\kappa) = 0$, για όλα τα $\kappa \in K$. Μάλιστα καθώς σε εμάς η χαρακτηριστική του K θα είναι ένας πρώτος p θα έχουμε επιπλέον ότι

$$\delta(x^p) = 0, \text{ για κάθε } x \in F. \tag{1.6}$$

Ας θυμηθούμε ότι ένα διαχωρίσιμο στοιχείο του F/K είναι ένα $x \in F$ τέτοιο ώστε η επέκταση $F/K(x)$ να είναι αλγεβρική. Παίρνοντας το K αλγεβρικά κλειστό εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου στοιχείου ([70, Πρόταση III.9.2., σελ. 128], μάλιστα θα αρκούσε να το K να είναι τέλειο). Πιο συγκεκριμένα, τα διαχωρίσιμα του F είναι εκείνα ακριβώς που $x \notin F^p$, [70, Πρόταση III.9.2(d), σελ. 128]. Άρα από την παραπάνω εξίσωση τα διαφορικά μηδενίζονται ακριβώς στα μη–διαχωρίσιμα στοιχεία (αυτός είναι ο και λόγος που η Εξίσωση 1.6 συχνά αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν test for seperatness για κάποιο $x \in F$).

Λήμμα 1.1.25. *Έστω ότι η x είναι ένα διαχωρίσιμο στοιχείο του F/K και έστω ότι δύο derivations έχουν τις ίδιες εικόνες στο x, δηλαδή $\delta_1(x) = \delta_2(x)$. Τότε $\delta_1 = \delta_2$.*

Είδαμε ότι ένα derivation σε έναν δακτύλιο ανορθώνεται μονοσήμαντα σε ένα derivation στο σώμα πηλίκο του με τιμές σε κάποιο κοινό υπόσωμα. Τι γίνεται με τα διαφορικά σε μια επέκταση σωμάτων συναρτήσεων; Σύμφωνα με τον [70, Πρόταση IV] ισχύει το αντίστοιχο αν η επέκταση είναι διαχωρίσιμη:

Πρόταση 1.1.26. *Υποθέστε ότι έχουμε επεκτάσεις σωμάτων* $F \subseteq E \subseteq N$ *με* E/F *να αντιστοιχεί σε διαχωρίσιμη επέκταση σωμάτων συναρτήσεων του* F/K *και* N *να είναι τυχαίο σώμα. Έστω* δ' *ένα derivation του* F *με τιμές στο* N, $\delta' : F \longrightarrow N$. *Τότε αυτό ανορθώνεται με τρόπο μονοσήμαντο σε ένα derivation* $\delta : E \longrightarrow N$. *Μάλιστα αν το* x *είναι ένα διαχωρίσιμο στοιχείο του σώματος συναρτήσεων* F/K, *τότε υπάρχει μοναδικό derivation του* F *με τιμές στο* N, $\delta : F \longrightarrow N$ *τέτοιο ώστε* $\delta(x) = 1$.

Ορισμός 1.1.27. *Έστω* x *ένα διαχωρίσιμο στοιχείο του σώματος συναρτήσεων* F/K. *Το μοναδικό derivation* $\delta : F \longrightarrow F$ *της Πρότασης 1.1.26 με την ιδιότητα* $\delta_x(x) = 1$ *ονομάζεται το derivation ως προς το* x. *Γράφοντας με* $\mathrm{Deriv}_{F/K} := \{\eta : F \longrightarrow F|\ \eta$ *να είναι ένα derivation του* $F/K\}$, *ορίζουμε μια πρόσθεση και έναν* F*–πολλαπλασιασμό σε αυτές, να έχει ως εξής*

$$(\eta_1 + \eta_2)(z) := \eta_1(z) + \eta_2(z), \ \text{και}\ (u \cdot \eta(z)) := u \cdot \eta(z),$$

με $z, u \in F$ *το σύνολο* $\mathrm{Deriv}_{F/K}$ *αποκτά δομή ενός* F*–προτύπου, το οποίο και θα το καλούμε πρότυπο των derivations. του* F/K.

Για την συνέχεια έχουμε ότι το $\mathrm{Deriv}_{F/K}$ έχει, σαν F–πρότυπο, rank 1. Μάλιστα κάθε $\eta \in \mathrm{Deriv}_{F/K}$ γράφεται σαν $\eta = \eta(x) \cdot \delta_x$. Επίσης ισχύει ο λεγόμενος κανόνας της αλυσίδας[1]

$$\delta_y = \delta_y(x)\delta_x,$$

Για την συνέχεια ορίζουμε τα διαφορικά, χρησιμοποιώντας τις derivations:

Ορισμός 1.1.28 (Διαφορικά)**.** *Στο σύνολο*

$$Z := \{(u, x) \in F \times F|\ \ \text{το } x \text{ να είναι διαχωρίσιμο στοιχείο } \},$$

για κάθε $(u, x),\ (v, y) \in Z$ *ορίζουμε μια κλάση ισοδυναμίας* $\sim$ *στον* Z *ως εξής*

$$(u, x) \sim (v, y), \ \text{αν και μόνον αν}\ v = u\delta_y(x).$$

Συμβολίζουμε με udx *την εικόνα του* (u, x) *στο* $Z/\sim$, *και την καλούμε, από εδώ και στο εξής, διαφορικό του* F/K. *Παρατηρούμε ότι δύο διαφορικά είναι ίσα αν και μόνον αν*

$$udx = vdy \Leftrightarrow v = u\delta_y(x)$$

Η εικόνα του στοιχείου $(1, x)$, *είναι η* dx. *Συμβολίζοντας τέλος με όλα τα διαφορικά του* F/K *με*

$$\Omega_F := \{udx|\ u \in F,\ x \in F \ \text{να είναι ένα διαχωρίσιμο στοιχείο}\} := Z/\sim,$$

και ορίζοντας πράξεις ως εξής: Για δύο στοιχεία του Ω_F, $\omega_1 = udx, \omega_2 = vdy$, *σταθεροποιούμε μια διαχωρίσιμη μεταβλητή* $z \in F$ *και τα γράφουμε σαν*

$$udx = (u \cdot \delta_z(x))dz, \quad \text{και}\ vdy = (v \cdot \delta_z(y))dz.$$

Τώρα τα προσθέτουμε με τον εξής κανόνα

$$\omega_1 + \omega_2 = udx + vdy = (u \cdot \delta_z(x) + v \cdot \delta_z(y))dz$$

[1] συγκρίνετε με τον κανόνα αλυσίδας των διαφορικών όπως τον έχουμε στο μυαλό μας από τους Απειροστικούς Λογισμούς $\frac{d}{dy} = \frac{dx}{dy}\frac{d}{dx}$.

ενώ ορίζουμε και τον F–πολλαπλασιασμό ως

$$w\omega = w \cdot (udx) := (wu)dx,$$

για όλα τα $w \in F$, και $\omega = udx \in \Omega_F$.

Παρατήρηση 1.1.29. *Ένα διαφορικό της μορφής $\omega = dx$ ονομάζεται ακριβές (exact). Αυτά αποτελούν έναν K υπόχωρο του Ω_F και μάλιστα σημαντικό. Σε αυτά μηδενίζεται ο Cartier operator, μπορούμε να συμβουλευτούμε και την παράγραφο 1.3η΄. Ο αναγνώστης θα βρει περισσότερες πληροφορίες στο [43, Παρ., σελ. 311], στο παράρτημα που έχει γραφτεί από τον Tate. Μπορούμε να ορίσουμε επίσης και πηλίκο διαφορικών ω_1/ω_2, με $\omega_i \in \Omega_F, \omega_2 \neq 0$, ως εξής*

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \text{ αν και μόνον αν } \omega_1 = u\omega_2$$

Τώρα ας συνοψίσουμε τις ιδιότητες των διαφορικών στην παρακάτω πρόταση [70, Πρόταση IV]:

Πρόταση 1.1.30 (Ιδιότητες Διαφορικών–Ορισμός (πολυ)διαφορικών)**.** (i) *Αν $z \in F$ διαχωρίσιμο στοιχείο, τότε $dz \neq 0$ και κάθε $\omega \in \Omega$ γράφεται σαν $\omega = fdz$, για κάποιο $f \in F$. Άρα ο Ω_F είναι ένας μονοδιάστατος διανυσματικός χώρος υπέρ του F, ο οποίος ονομάζεται χώρος των 1–διαφορικών. Αντίστοιχα, παίρνουμε τα διαφορικά $\omega \in \Omega_F$, έτσι ώστε $\omega = f(dz)^{\otimes m}$, με $m > 1$, να είναι ένας μονοδιάστατος διανυσματικός χώρος υπέρ του F που ονομάζεται χώρος των m–(πολυ)διαφορικών.*

(ii) *Μπορούμε να δούμε το dt (αντίστοιχα το $dt^{\otimes m}$), σαν μια συνάρτηση*

$$\begin{array}{rcl} d(d^{\otimes m}) \; : F & \longrightarrow & \Omega_F \\ t & \longmapsto & dt \; (dt^{\otimes m}), \text{ αν το } t \text{ είναι διαχωρίσιμο }, \\ t & \longmapsto & 0, \text{ διαφορετικά.} \end{array}$$

Η παραπάνω απεικόνιση είναι μια derivation.

Φυσικά όπως όλες οι derivations θα πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού 1.1.23 αλλά και του test for seperatness, της Εξίσωσης 1.6.

Για την συνέχεια αφού κάθε 1–διαφορικό (αντίστοιχα m–(πολύ)διαφορικό) ορίζεται σαν $\omega = fdx$, (αντίστοιχα $f(dz)^{\otimes m}$) για κάποιο $f \in F, dx \neq 0$, μπορούμε με τρόπο φυσιολογικό να ορίσουμε divisors διαφορικών (αντίστοιχα (πολυ)διαφορικών):

$$(\omega)_F = (fdx)_F = (f)_F + (dx)_F, \text{ [αντίστοιχα } (f)_F + ((dx)^{\otimes m})_F].$$

Ορίζουμε επίσης σαν $v_P(\omega) := v_P((\omega)_F)$. Έτσι προκύπτει με φυσιολογικό τρόπο, ένας ορισμός αντίστοιχος του 1.1.8:

Ορισμός 1.1.31. *Μια θέση $P \in \mathbb{P}_F$, ονομάζεται πόλος (αντίστοιχα ρίζα), αν $v_P(\omega) < 0$ (αντίστοιχα $v_P(\omega) > 0$). Επίσης το ω ονομάζεται αναλυτικό ή ολόμορφο διαφορικό (αντίστοιχα (πολυ)διαφορικό) στο P, αν $v_P(\omega) \geq 0$ και αναλυτικό ή ολόμορφο αν είναι αναλυτικό για κάθε $P \in \mathbb{P}_F$.*

Επίσης ένας divisor $K \in \mathrm{Div}_F$, ονομάζεται κανονικός (canonical) αν $K = (\omega)_F$, για κάποιο $\omega \in \Omega_F$. Με τα εργαλεία που έχουμε αναπτύξει έως τώρα ορίζουμε δύο πολύ σημαντικούς για εμάς K–διανυσματικούς χώρους. Για το σώμα συναρτήσεων F/K και για κάθε divisor $K \in \mathrm{Div}_F$, ο πρώτος είναι ο:

$$\Omega_F(A) = \{\omega \in \Omega_F |\ v_P(\omega) \geq v_P(A),\ \text{για κάθε } P \in \mathbb{P}_F\} \cup \{0\}. \tag{1.7}$$

Ένας γρήγορος τρόπος για να αποδείξουμε ότι ο παραπάνω χώρος αποτελεί έναν πεπερασμένης διάστασης K–διανυσματικό χώρο είναι μέσω του χώρου των adele, $\mathscr{A}_F$, όμως δεν θα μπούμε σε λεπτομέρειες. Ενώ ο χώρος των adele, τα στοιχεία του οποίου είναι απεικονίσεις $\alpha : \mathbb{P}_F \longrightarrow F$, με $P \longmapsto \alpha_P$, έτσι ώστε $\alpha_P \in \mathscr{O}_P$ για όλα εκτός από πεπερασμένες το πλήθος θέσεις P, είναι απειροδιάστατος K–διανυσματικός χώρος, αποδεικνύεται ότι ο χώρος που δίνεται απο την Εξίσωση (1.7) είναι ισόμορφος με έναν υπόχωρο–πηλίκο των adele, που είναι πεπερασμένης διάστασης. Μάλιστα η διάσταση αυτή μας είναι τόσο σημαντική που χαίρει μιας ιδιαίτερης ονομασίας, index of speciality του divisor A, που ορίζεται σαν

$$i(A) := \dim A - \deg A + g - 1, \tag{1.8}$$

με g να συμβολίζει το γένος της καμπύλης με σώμα συναρτήσεων το F.

Συνεχίζουμε με έναν υπόχωρο του $\Omega_F(A)$, ο οποίος παίζει σημαντικό ρόλο σε αυτήν την εργασία. Είναι ο χώρος των 1–αναλυτικών ή ολόμορφων διαφορικών (αντίστοιχα m–αναλυτικών ή ολόμορφων (πολυ)διαφορικών[2]) και που αποτελείται από εκείνα τα διαφορικά που δεν έχουν πόλους:

Συμβολισμός 1.1.32. *Ο χώρος των m–αναλυτικών (πολυ)διαφορικών συμβολίζεται*

$$\begin{aligned}\Omega_F(m) &= \{\omega \in \Omega_F |\ \omega \text{ να είναι } m\text{–αναλυτικό (πολυ)διαφορικό}\}\\ &= \{\omega \in \Omega_F |\ v_P(\omega) \geq 0 \text{ για κάθε } P \in \mathbb{P}_F\},\end{aligned}$$

για κάθε $m \geq 1$. Ο χώρος $\Omega_F(1)$ θα συμβολίζει τον χώρο των 1–αναλυτικών διαφορικών.

Φτάσαμε στο

1.1ϛ′ Θεώρημα των Riemann–Roch

Κάποιος δάσκαλος προτρέπει να μην υποτιμάμε ένα θεώρημα που μας μετράει κάτι. Ασπαζόμενοι αυτήν την άποψη φτάσαμε σε ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της Αλγεβρικής Γεωμετρίας, το θεώρημα που μας μετράει την διάσταση ενός Riemann–Roch διανυσματικού χώρου, $L(D)$, με D να είναι ένας divisor του F συναρτήσει του γένους της καμπύλης με σώμα συναρτήσεων το F:

[2] ο συμβολισμός είναι non–standart. Συνήθως τον συμβολίζουν με $\Omega_{(\cdot)}(0)$, γιατί προκύπτει από την Εξίσωση 1.7 παίρνοντας $A \in \mathrm{Div}_{\cdot K}$, με K να είναι το σώμα των σταθερών. Οι divisors αυτοί έχουν μηδενικές εκτιμήσεις σε κάθε θέση του F. Τώρα πηγαίνοντας πίσω στον ορισμό των Riemann–Roch χώρων, Εξίσωση 1.5, παρατηρούμε ότι $L(0) = K$, και έτσι εξηγείται ο συμβολισμός των άλλων. Εδώ επιλέξαμε να εξαφανίσουμε το 0 που έχει να κάνει με την αναλυτικότητα στον συμβολισμό, γιατί ασχολούμαστε αποκλειστικά με m–αναλυτικά διαφορικά, και το αντικαταστήσαμε με την μόνη παράμετρο που μπορεί να προκαλέσει διαφοροποιήσεις σε εμάς, που είναι φυσικά το m.

Θεώρημα 1.1.33 (Riemann–Roch)**.** *Έστω K ένας canonical divisor του F/K, τότε για κάθε divisor D του F έχουμε*

$$\dim D = \deg D + 1 - g + \dim(K \setminus D).$$

Το παραπάνω διάσημο Θεώρημα μας παρέχει εξαιρετικές πληροφορίες. Ένας τρόπος απόδειξης είναι να δείξει κανείς ότι ο

$$\Omega_F(D) \simeq L(K \setminus D), \tag{1.9}$$

σαν K–διανυσματικοί χώροι, [70, Θεώρημα I.5.14]. Τότε το θεώρημα έπεται, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 1.8.

Συγκεντρώνουμε κάποιες άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος

- Για $D = 0$, παίρνουμε ότι κάθε κανονικός divisor K έχει διάσταση g
- Από την Εξίσωση 1.9, το παραπάνω μεταφράζεται ως *η διάσταση του χώρου των 1–αναλυτικών διαφορικών υπέρ του K είναι g_F*. Για τα m–αναλυτικά (πολυ)διαφορικά, βλέπουμε ότι *η διάσταση του χώρου των m–αναλυτικών διαφορικών υπέρ του K είναι $(2m-1)(g_F-1)$*. Αυτό γίνεται παρατηρώντας ότι για κάθε $D \in \mathrm{Div}_F$ με $\deg(D) < 0$, έχουμε ότι $\ell(D) = 0$.
- Για $D = K$,έχουμε ότι $\deg K = 2g - 2$.
- Αν $\deg D \geq 2g_F - 1$, τότε $\ell(D) = \deg(A) + 1 - g_F$. Αυτή είναι η περίπτωση όπου ο index of speciality του divisor D, Εξίσωση 1.8, είναι μηδέν. Τότε καλούμε non–special τον D και special σε οποιαδήποτε διαφορετική περίπτωση.

Μάλιστα μπορεί να δειχτεί ότι κάθε divisor D είναι κανονικός αν και μόνον αν $\deg D = 2g - 2$ και $\dim D = g$ [24, Πόρισμα 2.2.10, σελ. 50].

Τώρα ορίζουμε έναν divisor που παρέχει εξαιρετική πληροφορία για την επέκταση των σωμάτων συναρτήσεων. Είδαμε σε επεκτάσεις σωμάτων συναρτήσεων F'/K του F/K τον ρόλο που παίζει η νόρμα και η co–νόρμα, που απεικονίζουν divisors του F' σε divisors του F και αντιστρόφως. Τί γίνεται με τους divisors διαφορικών;

Σταθεροποιούμε ένα $\omega \in \Omega_F$. Παραθέτουμε το επόμενο θεώρημα που θα μας απαντήσει σε αυτήν την απορία, ([70, Θεώρημα III.4.6.]), το οποίο μας λέει ότι κάθε διαφορικό στο F ανορθώνεται μονοσήμαντα σε ένα διαφορικό πάνω, το οποίο και βαφτίζουμε $\mathrm{Cotr}_{F'/F}(\omega)$. Η έκπληξη είναι ότι αυτό ισούται με την $\mathrm{Con}_{F'/F}(\omega)_F$ μόνον στην περίπτωση που δεν έχουμε διακλάδωση. Αν δεν είμαστε σε αυτήν την περίπτωση τότε θα πρέπει να προσθέσουμε έναν ιδιαίτερο divisor στην $\mathrm{Con}_{F'/F}(\omega)_F$ για να πάρουμε με αυτόν τον τρόπο το πάνω διαφορικό. Αυτός ο divisor του F' έχει να κάνει με την διακλάδωση της επέκτασης και ονομάζεται Different:

Θεώρημα 1.1.34.

$$(\mathrm{Cotr}_{F'/F}(\omega))_{F'} = \mathrm{Con}_{F'/F}((\omega)_F) + \mathrm{Diff}(F'/F)$$

Επιλέγοντας μια διακλαδισμένη θέση $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ και $P = P' \cap F$ έχουμε εκτιμώντας στο P' ότι

$$v_{P'}(\mathrm{Cotr}_{F'/F}((\omega)_{F'})) = e(P'|P) \cdot v_P(\omega) + v_{P'}\big(\mathrm{Diff}(F'/F)\big),$$

Φτάσαμε έτσι στον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 1.1.35. *Ονομάζουμε different exponent του P' υπέρ του P να είναι*

$$d(P'|P) := v_{P'}(\mathrm{Cotr}_{F'/F}((\omega)_{F'})) - e(P'|P) \cdot v_P(\omega).$$

Αυτό, είναι ανεξάρτητο του ω, εξαρτάται από τις θέσεις P', P και $d(P'|P) = 0$ σχεδόν για όλες τις θέσεις. Ορίζουμε

$$\mathrm{Diff}(F'/F) = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} \sum_{P'|P} d(P'|P) \cdot P' \in \mathrm{Div}_{F'}.$$

Παίρνοντας degrees στους divisors του Θεωρήματος 1.1.34 και χρησιμοποιώντας παράλληλα τις ιδιότητες της co–νόρμας, από την Πρόταση 1.1.21, φτάσαμε στο

Θεώρημα 1.1.36 (Riemann–Hurwitz)**.** *Έστω F/K ένα αλγεβρικό σώμα συναρτήσεων με γένος g_F. Έστω επίσης F'/F μια διαχωρίσιμη επέκταση και K' να είναι το σώμα των σταθερών του F', και το $g_{F'}$ να συμβολίζει το γένος του F'/E'. Τότε τα δύο γένη συσχετίζονται μέσω του*

$$2g_{F'} - 2 = [F' : F](2g_F - 2) + \deg \mathrm{Diff}(F'/F).$$

Το παραπάνω Θεώρημα έχει αυξημένη βαρύτητα καθότι *μετράει* τα γένη των καμπυλών, συναρτήσει του Different.

Δανειζόμαστε (εν μέρη) τον τίτλο της επόμενης παραγράφου από μια εργασία των Marcus du Sautoy και Ivan Fasesko, [11]. Ο πρώτος συγγραφέας είναι και στην Ελλάδα πολύ γνωστός, εκτός από το πλούσιο συγγραφικό του έργο σαν μαθηματικός, από το όμορφο βιβλίο του «Η μουσική των πρώτων Αριθμών» [3].

1.1ζ′ Where the wild things are

Σκοπός αυτής της παραγράφου, όπως άλλωστε γίνεται φανερό και από τον τίτλο της, είναι να οδηγήσει τον αναγνώστη στην έννοια της άγριας διακλάδωσης η οποία είναι και μια από της σημαντικότερες αιτίες που τα αποτελέσματα στην χαρακτηριστική 0 δεν μπορούν να ισχύουν για την περίπτωση της θετικής χαρακτηριστικής. Πρόκειται για μια έννοια που εμφανίζεται μόνον στην θετική χαρακτηριστική, με αποτέλεσμα να κάνει την θεωρία διακλάδωσης πάνω από σώματα θετικής χαρακτηριστικής πιο πλούσια. Περιγράφεται με την εξής πολύ απλή φράση:
«κάνει την εμφάνιση της όταν ο δείκτης διακλάδωσης κάποιου σημείου διαιρείται από την χαρακτηριστική»,
αλλά οι επιπλοκές που προκαλεί βρίσκονται στον αντίποδα αυτής της απλότητας. Ας δούμε από κοντά:

Ορισμός 1.1.37. *Έστω F'/K μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων συναρτήσεων F/K, και έστω μια θέση $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$.*

- *Μια θέση $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}'}$, έτσι ώστε $P'|P$ λέγεται ότι διακλαδίζεται ήμερα ή ομαλά (tamely) [αντίστοιχα διακλαδίζεται άγρια (wildly)], αν για τον δείκτη διακλάδωσης ισχύει $e(P'|P) > 1$ και $\mathrm{char}K \nmid e(P'|P)$ [αντίστοιχα αν $e(P'|P) > 1$ και $\mathrm{char}K | e(P'|P)$]. Ισοδύναμα θα λέμε ότι μια θέση $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ διακλαδίζεται άγρια αν υπάρχει τουλάχιστον μια θέση $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}'}$, τέτοια ώστε $P'|P$ που να διακλαδίζεται άγρια. Αν κάθε θέση $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}'}$, με $P'|P$ δεν είναι άγρια διακλαδισμένη, τότε λέμε ότι η $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ διακλαδίζεται ήμερα.*

[3] κυκλοφορεί από τις εκδόσεις Τραύλος. Παράλληλα προτείνουμε μια επίσκεψη στον όμορφο διαδικτυακό τόπο του συγγραφέα http://people.maths.ox.ac.uk/dusautoy.

- *Μια θέση P λέμε ότι διακλαδίζεται (αντίστοιχα ότι δεν διακλαδίζεται) στην επέκταση F'/F αν υπάρχει τουλάχιστον μια θέση $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}'}$, τέτοια ώστε $e(P'|P) > 1$ (αντίστοιχα αν $e(P'|P) = 1$, για κάθε $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}'}$, με $P'|P$).*

- *Η θέση P διακλαδίζεται πλήρως (totally) στην F/F' αν υπάρχει μόνον μια θέση $P' \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}'}$, τέτοια ώστε $P'|P$, με δείκτη διακλάδωσης $e(P'|P) = [F' : F]$.*

- *Η επέκταση F'/F λέγεται ότι διακλαδίζεται (αντίστοιχα ότι είναι αδιακλάδιστη), αν υπάρχει τουλάχιστον μια θέση $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ που να διακλαδίζεται (αντίστοιχα αν όλες οι θέσεις $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ είναι αδιακλάδιστες).*

- *Η επέκταση F'/F ονομάζεται ήμερη (αντίστοιχα άγρια) αν καμία θέση $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}$ δεν είναι άγρια διακλαδισμένη (αντίστοιχα αν υπάρχει τουλάχιστον μια άγρια διακλαδισμένη θέση).*

Ας δούμε πως σχετίζεται η άγια διακλάδωση με τον εκθέτη του different

Θεώρημα 1.1.38 (Dedekind)**.** *Για την επέκταση F'/F έχουμε ότι για κάθε $P \in \mathbb{P}_F$ και για κάθε θέση $P' \in \mathbb{F}'$ υπέρ αυτής ότι*

(i) *Η P διακλαδίζεται αν και μόνον αν $P' \in \mathrm{Supp.Diff}(F'/F)$,*

(ii) *Αν η P διακλαδίζεται, τότε έχει δύο επιλογές:*

  (α΄) $d(P'|P) = e(P'|P) - 1$ *και αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν η P διακλαδίζεται ήμερα. Συγκεκριμένα στην μηδέν χαρακτηριστική έχουμε πάντα ήμερη διακλάδωση.*

  (β΄) $d(P'|P) \geq e(P'|P)$ *και αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν η P διακλαδίζεται άγρια.*

Εμφανίζεται λοιπόν ένας εκθέτης του different που δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε ακόμα και αν γνωρίζουμε τους δείκτες διακλάδωσης, και το σημαντικότερο εμφανίζεται παντού, δείτε για παράδειγμα το Riemman–Roch και την Riemann–Hurwitz εξίσωση. Η γνώση του κρύβει όλην την πληροφορία της διακλάδωσης. Στο δεύτερο Κεφάλαιο θα δούμε τον τύπο που έδωσε ο Hilbert για αυτόν τον εκθέτη ο οποίος όμως εμπλέκει τις ομάδες διακλάδωσης και συνεπώς τα πηδήματα της ramification filtration. Δυστυχώς και τα πηδήματα αυτά είναι άγνωστα για σχεδόν όλες τις περιπτώσεις.

Δουλεύοντας με Galois καλύμματα μπορούμε να δούμε με αρκετή διαύγεια την συνέπεια της άγριας διακλάδωσης στα ολόμορφα (πολυ)διαφορικά:
Ας υποθέσουμε ότι η χαρακτηριστική του K μηδέν:
Σε ένα κάλυμμα $\pi : X \longrightarrow X/G$, κάθε αναλυτικό G–αναλλοίωτο πάνω διαφορικό προβάλλεται μέσω νόρμας κάτω σε ένα αναλυτικό διαφορικό. Συγκεκριμένα, κάθε G–αναλοίωτο 1–αναλυτικό διαφορικό είναι το pullback π^* κάποιου αναλυτικού διαφορικού κάτω [13, σελ. 272, Πόρισμα, Εξ. (2.2.3)]. Τα m–αναλυτικά διαφορικά πάνω που είναι αναλλοίωτα, είναι τα m–αναλυτικά διαφορικά κάτω συν κάποια μερόμορφα που «εξουδετερώνονται» με τον divisor του $\mathrm{Diff}(F/F^G)$, δηλαδή συν κάποια διαφορικά κάτω με πόλους ακριβώς σε θέσεις που ανήκουν στο $\mathrm{Supp.Diff}(F/F^G)$ και οι πόλοι εξουδετερώνονται, όταν ανορθωθούν μέσω της co–νόρμας, [13, σελ. 272, Πόρισμα, Εξ. (2.2.4)].
Ας πάμε τώρα στην περίπτωση όπου η χαρακτηριστική του K είναι p και $p||G|$:
Παίρνουμε για παράδειγμα την περίπτωση όπου $g_{X/G} = 0$. Στην χαρακτηριστική

μηδέν δεν θα υπήρχε κανένα αναλυτικό 1–διαφορικό. Παρατηρείστε ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβεί εδώ, όπως βλέπουμε για παράδειγμα στην εργασία [62, σελ 155, Εξίσωση 14]. Τώρα για την περίπτωση των m–ολόμορφων πολυδιαφορικών βλέπουμε, πάλι για $g_{X/G} = 0$ από τον υπολογισμό που θα κάνουμε στην Εξίσωση 1.61, ότι $\dim_K \Omega_F^G(m) = \Gamma_0(m) - 2m + 1$. Η περίπτωση της χαρακτηριστικής μηδέν, επαληθεύεται μόνον όταν $\Gamma_0(m) = m \deg \mathrm{Diff}(F'/F)$, πράγμα άτοπο από τον ορισμό της αναλλοίωτης του Boseck.

1.1η′ Galois επεκτάσεις σωμάτων συναρτήσεων

Όπως άλλωστε και θα περιμέναμε μια επέκταση F'/K του F/K είναι Galois αν $F = F'^G$, $G := \mathrm{Gal}(F'/F)$. Αν σταθεροποιήσουμε μια θέση $P \in \mathbb{F}$, τότε η εικόνα της δράσης ενός στοιχείου $\sigma \in G$, της ομάδας στο $P' \in \mathbb{P}_{F'}$, αποτελεί μια θέση $\sigma(P') = \{\sigma(x) | \ x \in P'\} \in \mathbb{P}_{F'}$. Μάλιστα μπορούμε να πούμε περισσότερα:

(i) $v_{\sigma(P')}(x) = v_{P'}(\sigma^{-1}(x))$, για $x \in F'$

(ii) $\sigma(P')|P$,

(iii) $e(\sigma(P')|P) = e(P'|P)$.

Επιπλέον η δράση της G στο $\{P' \in \mathbb{P}_{F'} | \ P'|P\}$ είναι μεταβατική. Δηλαδή, για κάθε δύο στοιχεία αυτού του συνόλου, P_1, P_2, υπάρχει ένα στοιχείο $\sigma \in G$ τέτοιο ώστε $\sigma(P_1) = P_2$. Ο αναγνώστης με γνώσεις αλγεβρικής τοπολογίας, θα παρατηρήσει ότι με αυτόν τον τρόπο δρουν οι deck transformations στα φύλλα ενός Galois ή κανονικού τοπολογικού καλύμματος (G–καλυμμάτων). Ο λόγος που αυτό συμβαίνει είναι σαφής καθώς οι Galois επεκτάσεις σωμάτων συναρτήσεων μπορούν να θεωρηθούν σαν φυσιολογικές γενικεύσεις (επιτρέποντας την διακλάδωση) των Galois τοπολογικών καλυμμάτων ([32, Κεφάλαιο 1]).

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε τα εξής δύο για την διακλάδωση Galois επεκτάσεων που απλοποιούν στην πράξη (και στις πράξεις) τα πράγματα: Ας συμβολίσουμε με $P_1, \ldots, P_r$ τις θέσεις του F' υπερ της P, τότε

(i) Οι δείκτες διακλάδωσης είναι ίσοι: $e(P_i|P) = e(P_j|P) = e$ για όλα τα $1 \leq i, j \leq r$,

(ii) Οι εκθέτες του different είναι ίσοι: $d(P_i|P) = d(P_j|P) = d$ για όλα τα $1 \leq i, j \leq r$.

Χρησιμοποιούμε επίσης τις πληροφορίες που αφορούν την διακλάδωση για τρείς σημαντικές περιπτώσεις που τις ανακαλούμε συχνά, από τις προτάσεις III.7.3, I-I.7.10 και III.7.8 του [70]. Οι δύο πρώτες, αφορούν κυκλικές επεκτάσεις σωμάτων συναρτήσεων F'/F:

Kummer Η τάξη της επέκτασης $[F' : F] := n$, είναι πρώτη ως προς την χαρακτηριστική του F και το F περιέχει όλες τις n ρίζες της μονάδας, περιγράφονται στην Εξίσωση (1.31).

Artin–Schreier Η τάξη της επέκτασης $[F' : F] := p$, p η χαρακτηριστική του F. Μάλιστα κάθε κυκλική επέκταση τάξης p^s προκύπτει σαν ένας μοναδικός πύργος σωμάτων s βημάτων, με κάθε βήμα να είναι μια Artin–Schreier, περιγράφεται στις Εξίσωσεις (1.14, 1.15).

Στοιχειώδης αβελιανές Η τάξη της επέκτασης $[F' : F] := p^n$, $n \geq 2$, p η χαρακτηριστική του F, με Galois ομάδα στοιχειώδη αβελιανή, πλήρως διακλαδιζόμενες. Περιγράφονται στην Εξίσωση (1.32).

1.1ϑ′ Στοιχεία θεωρίας αναπαραστάσεων

Από την θεωρία αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων χρησιμοποιούμε την τυπική θέαση των αναπαραστάσεων της G υπέρ του K σαν $K[G]$–πρότυπα. Δηλαδή την 1-1 και επί αντιστοιχία στις κατηγορίες μεταξύ των ισοδύναμων κλάσεων αναπαραστάσεων της K–άλγεβρας $K[G]$ με τα ισόμορφα (αριστερά) $K[G]$–πρότυπα, ως πρότυπα παραστάσεων (δείτε τα Θεωρήματα 3.25, 3.26, 3.31, και 3.36 για την ομαλή αναπαράσταση, του Αντωνιάδη [2]). Εδώ ασχολούμαστε με αβελιανές G οπότε μιλάμε για bimodule, καθώς το $K[G]$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος. Ας θυμηθούμε ότι απόλυτα αγώγιμες (completely reducible) είναι εκείνες οι αναπαραστάσεις για τις οποίες οι αδιάσπαστες συνιστώσες είναι και ανάγωγες.

Όπως τονίσαμε, υιοθετούμε την προσέγγιση των $K[G]$–προτύπων ταυτίζοντας αδιάσπαστες (αντίστοιχα ανάγωγες, απόλυτα αγώγιμες) αναπαραστάσεις με αδιάσπαστα (ανίστοιχα απλά, ημιαπλά) $K[G]$–πρότυπα. Ας δούμε πρώτα έναν ορισμό

Ορισμός 1.1.39. (i) *Το M είναι ένα απλό ή ανάγωγο $K[G]$–πρότυπο αν δεν έχει γνήσια και μη τετριμμένα υπό–πρότυπα.*

(ii) *Το M είναι αδιάσπαστο αν $M = M_1 \oplus M_2$ έχει σαν συνέπεια $M_1 = \{0\}$ και $M_2 = M$ ή το αντίστροφο.*

(iii) *Το M είναι ημιαπλό ή απόλυτα αγώγιμο αν είναι το ευθύ άθροισμα απλών $K[G]$–προτύπων.*

(iv) *Ο δακτύλιος $K[G]$ είναι ημιαπλός αν είναι ημιαπλό ως αριστερό $K[G]$–πρότυπο.*

Η προσοχή του αναγνώστη πρέπει εδώ να εστιαστεί στο ότι ενώ στην χαρακτηριστική 0 ή όταν $p \nmid |G|$ οι έννοιες ανάγωγο και αδιάσπαστο $K[G]$–πρότυπο (ή ισοδύναμα αναπαραστάσεις της G σε έναν K διανυσματικό χώρο παράστασης) ταυτίζονται, εδώ δεν συμβαίνει αυτό. Πιο συγκεκριμένα, αν το $K[G]$ είναι ημιαπλός δακτύλιος, τότε κάθε $K[G]$–πρότυπο που είναι ανάγωγο είναι και αδιάσπαστο και αντιστρόφως [85, Πόρισμα 2.13], όμως το $K[G]$ είναι ημιαπλό αν και μόνον αν η χαρακτηριστική του K είτε είναι μηδέν είτε δεν διαιρεί την τάξη της ομάδας [10, σελ. 60 Θεώρημα 16.1], ή [85, σελ. 51 Θεώρημα 1.14].

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Όπως γνωρίζουμε, μια αναπαράσταση της G υπέρ του K είναι ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V),$$

με V ένας K–διανυσματικός χώρος, που τον λέμε χώρο αναπαράστασης και $\dim_K V = \deg \rho$. Το παράδειγμα θα έλθει από τους πίνακες. Πιο συγκεκριμένα, Βλέποντας τον V, που σε εμάς θα είναι ο χώρος των αναλυτικών (πολυ)διαφορικών, σαν ένα n διάστατο K–διανυσματικό χώρο, σταθεροποιώντας μια βάση $\langle \bar{u} \rangle_K = V$ και παίρνοντας τον ισομορφισμό

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, dashed, "M"'] & GL(V) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Phi_{\bar{u}}", "\simeq"'] & GL(K^n) \\ & GL_n(K) & \end{tikzcd}$$

επάγεται μια παράσταση μέσω πινάκων $M = \Phi_{\bar{u}} \circ \rho$, απ'όπου και θα αντλήσουμε τα (αντι)παραδείγματα. Ας θυμηθούμε ότι ένας (κατά μπλοκ) πίνακας της μορφής $\rho(x) = \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{bmatrix}$, για όλα τα $x \in G$ *διασπάται*, καθώς γράφεται σαν ευθύ άθροισμα των αναπαραστάσεων $\rho(x) = \sigma(x) \oplus \tau(x)$, με $\rho(x) = A(x)$ και $\tau(x) = B(x)$ για κάθε $x \in G$ να είναι οι (αδιάσπαστες) συνιστώσες της ρ. Επίσης διασπώνται και όλοι οι πίνακες που είναι ισοδύναμοι με αυτόν και όποιοι πίνακες δεν διαπόνται καλούνται *αδιάσπαστοι*.

Ας θυμηθούμε επίσης, την ασθενέστερη έννοια της *αγωγιμότητας* δηλαδή των (κατά μπλοκ) πινάκων της μορφής $\rho(x) = \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ I(x) & B(x) \end{bmatrix}$, όπως και όλων των πινάκων που είναι ισοδύναμοι με αυτόν, με $\rho(x) = A(x)$ και $\tau(x) = B(x)$ για κάθε $x \in G$ να είναι αναπαραστάσεις της G για όλα τα $x \in G$. Τέλος όποιος πίνακας δεν είναι αγώγιμος, ονομάζεται *ανάγωγος*.

Είναι προφανές ότι, ότι διασπάται είναι αγώγιμο (παίρνουμε $I(x) = 0$), ή ισοδύναμα *τα ανάγωγα είναι αδιάσπαστα*. Επίσης στην χαρακτηριστική μηδέν έχουμε και το ανάποδο, δηλαδή ότι είναι αγώγιμο διασπάται[4]. Ας εστιάσουμε λίγο την προσοχή μας σε αυτήν την τελευταία δήλωση:

Παράδειγμα 1.1.40. *Ας πάρουμε την ομάδα πινάκων*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ελέγχουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας T με μιγαδικούς συντελεστές, τέτοιος ώστε

$$TBT^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Πράγματι παρατηρούμε ότι

$$\begin{bmatrix} \omega & 1 \\ \omega^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega & 1 \\ \omega^2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix},$$

όπου $\omega := \exp(\frac{2\pi i}{3})$.

Ας πάρουμε τώρα την ομάδα

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

με τα στοιχεία των πινάκων να ανήκουν τώρα στο $\mathbb{F}_2$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι υπάρχει αντιστρέψιμος T τέτοιος ώστε

$$T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & o \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

Έχουμε, παίρνοντας ίχνη και στις δύο πλευρές, ότι $0 = \alpha + \beta$, ενώ παίρνοντας ορίζουσες, ότι $\alpha \cdot \beta = 1$. Δηλαδή $\alpha = \beta = 1$ που είναι άτοπο. Να λοιπόν ένα εύκολο παράδειγμα που δείχνει ότι κάτι αγώγιμο δεν διασπάται.

[4]η δήλωση αυτή είναι λάθος για σώματα που δεν είναι αλγεβρικά κλειστά. Μάλιστα για να το διαπιστώσουμε αρκεί να δοκιμάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα πάνω από το $\mathbb{Q}$.

Στην εργασία μας (εκτός από την παράγραφο 1.3δ΄), η χαρακτηριστική διαιρεί πάντα την τάξη της G. Ενώ η αναπαράσταση της G στον $\Omega_F(m)$ δεν είναι κατ'ανάγκη απόλυτα αγώγιμη, είναι όμως το ευθύ άθροισμα αδιάσπαστων $K[G]$–προτύπων. Πρέπει να έχει καταστεί σαφές σε αυτό το σημείο ότι η θέαση των αναπαραστάσεων εδώ είναι ο τρόπος παραγοντοποιησης του $K[G]$–προτύπου $\Omega_F(m)$ συναρτήσει αδιάσπαστων $K[G]$–προτύπων. Για την modular κυκλική περίπτωση είναι γενικά γνωστή η μορφή των αδιάσπαστων συνιστωσών [85, σελ.156], ενώ για την στοιχειώδη αβελιανή δείχνουμε ότι τα $K[G]$–πρότυπα που μας ενδιαφέρουν είναι αδιάσπαστα με ένα επιχείρημα που συνοψίζεται στο ότι η τετριμμένη αναπαράσταση (κάτι που ισχύει γενικά για p–ομάδες) είναι η μόνο ανάγωγη και κάθε αδιάσπαστη συνιστώσα θα πρέπει να περιέχει και από ένα αντίγραφο αυτής, δείτε την Παρατήρηση 1.3.26.

1.2 Συσχέτιση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία

Ενδιαφερόμαστε για ένα σώμα F, που είναι ένα αλγεβρικό σώμα συναρτήσεων με σώμα σταθερών το K, όπου K ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα θετικής χαρακτηριστικής p. Παίρνουμε F/E να είναι μια επέκταση Galois, με αβελιανή ομάδα Galois G τάξης p^n. Συμβολίζουμε με $\Omega_F(m)$ τον χώρο των ολόμορφων m-(πολυ)διαφορικών του F. Γνωρίζουμε ότι ο χώρος $\Omega_F := \Omega_F(1)$ αποτελεί έναν g_F–διάστατο K–διανυσματικό χώρο, ενώ ο χώρος $\Omega_F(m)$, είναι ένας $(2m-1)(g_F-1)$–διάστατος K-διανυσματικός χώρος, στην περίπτωση που $g_F \geq 2$. Αυτά προκύπτουν εφαρμόζοντας την Εξίσωση των Riemann-Roch, 1.1.33. Η Galois module structure του χώρου των αναλυτικών 1–διαφορικών έχει μελετηθεί και υπολογιστεί για αρκετές περιπτώσεις. Αυτό μαζί με μια εργασία του Κοντογεώργη, αποτέλεσε και το έναυσμα για να μελετήσουμε την Galois module structure του χώρου των αναλυτικών m–(πολυ)διαφορικών για $m > 1$. Πιο συγκεκριμένα γνωρίζουμε τα παρακάτω:

Η περίπτωση της μηδέν χαρακτηριστικής (εννοούμε όταν char.$K = 0$), μελετήθηκε από τον Hurwitz στην εργασία του [28]. Επειδή σχεδόν πάντα, όσο γνωρίζουμε, τα αποτελέσματα της χαρακτηριστικής μηδέν εμφανίζονται αυτούσια στην περίπτωση της θετικής χαρακτηριστικής, όπου η επέκταση F/E είναι ήμερα διακλαδισμένη, ακριβώς τότε και σε εμάς, κατά την διάρκεια της μελέτης των αναλλοίωτων του Boseck σε αυτήν την περίπτωση, αναδείχθηκε ένα Θεώρημά του, πιο συγκεκριμένα η [28, σελ. 439, formula 2].

Συνεχίζοντας την αναδρομή μας, στην περίπτωση της θετικής χαρακτηριστικής p, και όταν το F/E είναι αδιακλάδιστο και η G έχει πρώτη ως προς p τάξη, ο Tamagawa [73], απέδειξε ότι το 1–αναλυτικά διαφορικά διασπώνται σαν το ευθύ άθροισμα μιας ταυτοτικής αναπαράστασης μοναδιαίου βαθμού και $g_E - 1$ το πλήθος ομαλών αναπαραστάσεων. Ο Valentini [77], γενίκευσε το αποτέλεσμα αυτό για αδιακλάδιστες επεκτάσεις σωμάτων συναρτήσεων που έχουν ομάδα Galois μια p–ομάδα, ενώ οι Salvador, Bautista [49], κατάφεραν να υπολογίσουν το ημιαπλό[5] ή semisimple κομμάτι των 1–αναλυτικών διαφορικών όταν η G είναι μια p–ομάδα. Αν η G είναι κυκλική οι Valentini, Madan [82], υπολόγισαν ολόκληρη την δομή του Ω_F συναρτήσει αδιάσπαστων $K[G]$–προτύπων και το ίδιο έγινε από τους Calderón, Salvador, Madan στην εργασία τους [62], αν η G είναι στοιχειώδης αβελιανή.

Επίσης ο N. Borne [6], ανέπτυξε μια θεωρία χρησιμοποιώντας δύσκολες τεχνικές από την modular θεωρία αναπαραστάσεων όπως και την K–θεωρία, που

[5] δείτε στην Εξίσωση 1.62 εδώ και [43, Παρ., σελ. 311].

του επέτρεψε να υπολογίσει την $K[G]$–module structure των ολόμορφων m–(πολυ)διαφορικών $\Omega_F(m)$, όταν η G είναι κυκλική τάξης p^n. Σε γενικές γραμμές η δομή του Ω_F σαν $K[G]$–πρότυπο μας είναι άγνωστη στην θετική χαρακτηριστική.

Η προσέγγιση μας ακολουθεί από κοντά τις ιδέες των Valentini- Madan, Calderón,Villa-Salvador όπως και του Madden [50]. Ο τελευταίος χρησιμοποίησε την ίδια ανάλυση και κατασκεύασε μια K–βάση του $\Omega_F(1)$, για να μπορέσει να υπολογίσει το rank του Hasse-Witt πίνακα (εννοούμε την p–rank). Το κατάφερε περνώντας από τον χώρο των αναλυτικών 1-ολόμορφων διαφορικών $\Omega_F(1)$ στον χώρο των Adeles, $\mathscr{A}_F$ μέσω του ισομορφισμού στην κατηγορία των K–διανυσματικών χώρων:

$$\Omega_F(1) \simeq (\mathscr{A}_F/(\mathscr{A}_F(0)+F),$$

όπου $\mathscr{A}_F(0) := \{\alpha \in \mathscr{A} | \ v_P(\alpha) \geq 0, \text{ για κάθε } P \in \mathbb{P}_F\}$, [70, παράγραφος I.5]. Πρέπει εδώ να γίνει σαφές ότι όλοι παραπάνω συγγραφείς έχουν χρησιμοποιήσει τις αναλλοίωτες του Boseck στις εργασίες τους [82], [62],[50].

Τα 2–ολόμορφα πολυδιαφορικά έχουν χρησιμοποιηθεί από τον Κοντογεώργη, [37], ο οποίος παρατήρησε ότι ο εφαπτόμενος χώρος του καθολικού deformation functor $H^1(G, \mathscr{T}_X)$, μπορεί να υπολογιστεί με βάση τα covariants των 2-αναλυτικών (πολυ)διαφορικών.

Στην χαρακτηριστική 0, έχουν γραφτεί πάρα πολλά. Για παράδειγμα στους Farkas–Kra, [13, σελ. 87, Πρόταση], διαβάζουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε σε μια Riemann επιφάνεια X, σημεία του Weierstrass[6]. Πιο συγκεκριμένα ένα m–Weierstrass σημείο είναι εκείνο για το οποίο υπάρχει ένα m–ολόμορφο (πολυ)διαφορικό, το οποίο να μηδενίζεται σε αυτό με τάξη μεγαλύτερη ίση του $(g_X-1)(2m-1)$. Δυστυχώς στην θετική χαρακτηριστική τα πράγματα είναι δυσκολότερα. Παρ'όλα αυτά οι βάσεις των ολόμορφων m (πολυ)διαφορικών μπορούν να οδηγήσουν στον υπολογισμό m–Weierstrass σημείων, Παρατήρηση 1.3.21.

Οι βάσεις των διαφορικών, συνεπώς και οι αναλλοίωτες του Boseck χρησιμοποιήθηκαν από τους Garcia, και τον ίδιο τον Boseck για την εύρεση σημείων του Weierstrass. Ο Boseck, [7], δούλεψε για Kummer αλλά και για Artin–Shcreier επεκτάσεις του ρητού σώματος συναρτήσεων δείχνοντας με την βοήθεια των βάσεων του, ότι τα σημεία διακλάδωσης για την p–επέκταση είναι σημεία του Weierstrass εκτός από μια περίπτωση όπου διακλαδίζονται 2 ακριβώς θέσεις με πόλους τάξης ίσης με την μονάδα. Ο Garcia στο [15], συμπλήρωσε και διόρθωσε τον Boseck, ενώ στο [16], δούλεψε με πλήρως διακλαδιζόμενες στοιχειώδης αβελιανές επεκτάσεις τάξης p^n σαν αυτές που μας απασχολούν στην παράγραφο 1.3ε΄, χρησιμοποιώντας τις αναλλοίωτες για να δείξει ότι μια θέση που διακλαδίζεται είναι σημείο του Weierstrass εκτός μίας εξαίρεσης, αυτής που αναφέραμε παραπάνω. Εν τάχη, οι αναλλοίωτες χρησιμοποιήθηκαν για να βρει όλες τις $(|K|, P)$–orders στα διακλαδιζόμενα σημεία P, όπου $|K|$ το canonical linear series, βρίσκοντας ότι το $p-1$ δεν ήταν $(|K|, P)$–order. Δείχνοντας έπειτα ότι το $p-1$ ανήκει στην generic order ακολουθία χρησιμοποιώντας Hasse παραγώγους (αυτό σημαίνει ότι το $p-1$ είναι order για άπειρες θέσεις), πέτυχε το ζητούμενο[7]. Επίσης στο άρθρο των Caldéron–Ramírez, [51], οι βάσεις χρησιμοποιούνται, όπως και στον Maden, για την εύρεση κυκλικών p–επεκτάσεων του ρητού σώματος συναρτήσεων στην θετική χαρακτηριστική, οι οποίες έχουν μηδενική Hasse–Witt απεικόνιση, (εννοώντας

[6]ο αναγνώστης θα βρεί πολλές πληροφορίες για τα σημεία του Weierstrass, όπως και για τις έννοιες των $(|K|, P)$–orders και των linear series που ακολουθούν στο δεύτερο κεφάλαιο. Σε αυτό το σημείο ας κρατήσει μόνον την εξέχουσα ιδιαιτερότητα αυτών των σημείων της καμπύλης.

[7]παραπέμπουμε στον Goldschmidt [24] και την παράγραφο με τις προβολικές καμπύλες.

ότι έχουν μηδενικό Cartier operator). Απέδειξαν ότι για επεκτάσεις p^n, $n \geq 2$ και για χαρακτηριστική $p > 2$ αυτή η περίπτωση δεν εμφανίζεται ποτέ, [51, Θεώρημα 4.9]. Μια άλλη (και ανέλπιστη από την σκοπιά μας) χρήση τους, που σχετίζεται με τις Weierstrass ημιομάδες, δίνεται στον Oliveira [56], όπως και στο [57] με την παραπάνω συσχέτιση να δίνεται στο Λήμμα 2.1.5, στο επόμενο Κεφάλαιο.

Άλλη μια χρήση των αναλλοίωτων του Boseck ήταν στην εργασία των Maddan και Valentini [79, σελ. 169–170]. Τις χρησιμοποιούν για να καταλήξουν στο ότι μια Artin–Shcreier βαθμού p επέκταση αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων $F/K(x)$ με $g_F > 1$, και K αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής p, δεν δέχεται άλλη κανονική και ρητή υποεπέκταση p βαθμού πέραν του $K(x)$. Δηλαδή έδειξαν ότι το $K(x)$ είναι το μοναδικό ρητό υπόσωμα του F πέρα τριών εξαιρέσεων και έδωσαν επίσης και την δομή της ομάδας αυτομορφισμών του $F/K(x)$. Εδώ πρέπει να πούμε ότι ένα παρόμοιο αποτέλεσμα έχει δώσει ο Κοντογεώργης στην εργασία του [38, Πρόταση 4.1] για q–κυκλικές επεκτάσεις με $q \neq p$ να είναι κάποιος πρώτος.

1.3 Αποτελέσματα

1.3α΄ Η κυκλική περίπτωση

Καθώς η χαρακτηριστική p διαιρεί την τάξη της ομάδας G, η αναπαράσταση της G στον χώρο $\Omega_F(m)$ δεν είναι κατ'ανάγκη απόλυτα αγώγιμη, αποτελεί όμως το ευθύ άθροισμα αδιάσπαστων $K[G]$-προτύπων. Ας συμβολίσουμε με σ έναν γεννήτορα της G. Το μοναδικό αδιάσπαστο $K[G]$–πρότυπο βαθμού k είναι ισόμορφο με το $K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle$, σύμφωνα με τον [85, σελ.156, Παράδειγμα 1.1]. Για $k = 1$ παίρνουμε την ταυτοτική αναπαράσταση, ενώ για $k = p^n$ την ομαλή.

Ας πάρουμε την

$$\Omega_F(m) := \bigoplus_{\lambda=1}^{t} W_\lambda, \tag{1.10}$$

να είναι μια διάσπαση σε ευθύ άθροισμα αδιάσπαστων $K[G]$-προτύπων και ας συμβολίσουμε με d_k τον αριθμό των W_λ που είναι ισόμορφα με το $K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle$. Πρωταρχικός σκοπός μας είναι ο υπολογισμός αυτών των d_k. Αρχικά, ορίζουμε:

$$\Omega_F^i(m) = \{\omega \in \Omega_F(m) : (\sigma-1)^i\omega = 0\}, \text{ για } i = 0, 1, \ldots p^n.$$

Αυτοί οι K–υπόχωροι φτιάχνουν μια αύξουσα ακολουθία με $\Omega_F^0(m) = 0$ και $\Omega_F^{p^n}(m) = \Omega_F(m)$, ενώ

$$\dim_K \Omega_F^i(m) = \sum_{\lambda=1}^{t} \dim_K(W_\lambda \cap \Omega_F^i(m)). \tag{1.11}$$

Λήμμα 1.3.1. *Ισχύει ότι* $\dim_K K[G]/\langle(\sigma-1)^k\rangle = k$.

Απόδειξη. Παίρνουμε την απεικόνιση $(\sigma-1)^k : K[G] \to K[G]$. Παρατηρούμε τώρα ότι $\dim_K \ker(\sigma-1)^k = k$ και συνεπώς $\dim_K \operatorname{im}(\sigma-1)^k = p^n - k$, με το πηλίκο $\dim_K K[G]/\langle(\sigma-1)^k\rangle = \dim_K K[G]/\langle \operatorname{im}(\sigma-1)^k\rangle$ να έχει διάσταση $p^n - (p^n - k) = k$.

□

Λήμμα 1.3.2.

$$\dim_K\{\alpha \in K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle : (\sigma-1)^i\alpha = 0\} = \begin{cases} i, & \text{αν } i \leq k, \\ k, & \text{αν } i \gneqq k. \end{cases}$$

Απόδειξη. Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του πυρήνα του μορφισμού του πολλαπλασιασμού με $(\sigma-1)^i$,

$$(\sigma-1)^i : K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle \to K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle.$$

Ξεχωρίζουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $i \leq k$, τότε $\ker(\sigma-1)^i = (\sigma-1)^{k-i}K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle$ και $\dim_K(\sigma-1)^{k-i}K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle = p^n-(k-i)-(p^n-k) = i$.

(ii) Αν $i \geq k$, τότε $\ker(\sigma-1)^i = K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle$ και $\dim_K K[G]/\left\langle(\sigma-1)^k\right\rangle = k$, σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.1.

□

Χρησιμοποιώντας την διάσπαση του $\Omega_F(m)$ που δόθηκε στην Εξίσωση (1.11), καθώς και το Λήμμα 1.3.2 παίρνουμε ότι $\dim_K \Omega_F^i(m) = \sum_{k=1}^{i-1} kd_k + \sum_{k=i}^{p^n} id_k$. Έτσι

$$\dim_K\left(\Omega_F^{i+1}(m)/\Omega_F^i(m)\right) = \sum_{k=i+1}^{p^n} d_k. \tag{1.12}$$

Συνεπώς, για $k = 1,\ldots,p^n-1$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} d_{p^n} &= \dim_K\left(\Omega_F^{p^n}(m)/\Omega_F^{p^n-1}(m)\right), \\ d_k &= \dim_K\left(\Omega_F^k(m)/\Omega_F^{k-1}(m)\right) - \dim_K\left(\Omega_F^{k+1}(m)/\Omega_F^k(m)\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ακολουθώντας τους [82], παίρνουμε μια βολική σε εμάς E–βάση για το F και βρίσκοντας την δράση της G στα στοιχεία της βάσης, διατυπώνουμε το πρώτο μας Θεώρημα.

Καθώς η επέκταση F/E είναι κυκλική βαθμού p^n, υπάρχει ο ακόλουθος πύργος ενδιάμεσων σωμάτων:

$$E = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = F, \tag{1.14}$$

όπου κάθε μία από τις επεκτάσεις E_j/E_{j-1}, είναι μια Artin-Schreier, που δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$E_j = E_{j-1}(y_j),\ y_j^p - y_j = b_j,\ b_j \in E_{j-1},\ 1 \leq j \leq n. \tag{1.15}$$

Ορισμός 1.3.3. *Τα παραπάνω στοιχεία b_j, λέγεται ότι βρίσκονται σε μια τυπική μορφή (in standard form), για μια θέση P του E_{j-1}, αν η εκτίμηση του divisor του b_j στην P είναι αρνητική, μηδενική ή σχετικά πρώτη ως προς την χαρακτηριστική p.*

Το πρώτο μέρος του ακόλουθου Θεωρήματος οφείλεται στον Madden και μας επιτρέπει πάρουμε τα b_j, για τις διάφορες τιμές του j σε τυπική μορφή [50, Θεώρημα 2, σελ. 308], ενώ το δεύτερο μέρος οφείλεται στους R. Valentini, M. Madan [82, Λήμμα 1, σελ. 109] και μας δίνει την $E-$ βάση για το F.

Θεώρημα 1.3.4. *Μπορούμε να επιλέξουμε τα y_j και b_j, έτσι ώστε:*

(i) *Για κάθε θέση P του E_{j-1} που διαιρείται από διακλαδισμένη θέση του F/E, η εκτίμηση στο P του divisor του b_j είναι είτε μηδέν ή αρνητική ή πρώτη ως προς την χαρακτηριστική p.*

(ii) $\sigma^{p^{j-1}}(y_j) = y_j + 1$.

Για $0 \leq k \leq p^n - 1$ παίρνουμε το p–αδικό ανάπτυγμα $k := a_1^{(k)} + a_2^{(k)}p + \cdots + a_n^{(k)}p^{n-1}$ και θέτουμε με $w_k = y_1^{a_1^{(k)}} y_2^{a_2^{(k)}} \cdots y_n^{a_n^{(k)}}$. Τότε ο F είναι ένας E διανυσματικός χώρος με βάση $\{w_k : 0 \leq k \leq p^n - 1\}$. Η G–δράση στα στοιχεία w_k δίνεται από

$$(\sigma - 1)^k w_k = \prod_{\epsilon=1}^{n} a_\epsilon^{(k)}!$$

Αυτή η βάση, έχει την εξής ιδιότητα

Λήμμα 1.3.5. *Συμβολίζουμε με $\bar{P}$, μια θέση του E και με $P_1, P_2, \ldots, P_r$ τις θέσεις του F, υπέρ της $\bar{P}$. Συμβολίζουμε επίσης με v_i την κανονικοποιημένη (normalized) εκτίμηση του F, ως προς τις θέσεις P_i, $i = 1, \ldots, r$. Τέλος παίρνουμε τις b_j να είναι σε τυπική μορφή για κάθε θέση του E_{j-1} που διαιρείται από κάποια από τις P_i. Αν $z = \sum_{k=0}^{p^n-1} c_k w_k$, τότε $\min_i v_i(z) = \min_{i,k} v_i(c_k w_k)$.*

Απόδειξη. [82, Λήμμα 2, σελ.109] ή [50, Λήμμα 3, σελ.310] . □

1.3β′ Η αναπαράσταση του χώρου $\Omega_F(m)$ σαν $K[G]$–πρότυπο

Συμβολίζουμε με $\bar{P}_i, i = 1, \ldots, s$ να είναι οι θέσεις του E που διακλαδίζονται στο F. Σταθεροποιούμε μια θέση P_F του F υπέρ της $\bar{P}_i$ και συμβολίζουμε με $p^{e_i} := e(P_F/\bar{P}_i)$, $i = 1, \ldots, s$ τους αντίστοιχους δείκτες διακλάδωσης. Θα συμβολίσουμε με $\bar{v}_i$ την κανονικοποιημένη εκτίμηση του E, ως προς την θέση $\bar{P}_i$. Θέτουμε $r = n - \max_i\{e_i\}$. Παρατηρούμε ότι η επέκταση E_r/E είναι αδιακλάδιστη: Αν όχι, τότε από την μεταβατικότητα των δεικτών διακλάδωσης θα έχουμε ότι

$$e(P_F/\bar{P}_i) = e(P_F/P_{E_r}) \cdot e(P_{E_r}/\bar{P}_i) \Rightarrow p^{e_i} = [F : E_r] \cdot p^h \Rightarrow p^{e_i} = p^{n-r} \cdot p^h,$$

όπου $h \in \mathbb{N}$. Έτσι $e_i = n - r + h \overset{r=n-\max_i\{e_i\}}{\Longrightarrow} e_i = \max_i\{e_i\} + h$, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή του e_i, σαν μέγιστο δείκτη διακλάδωσης.

Σταθεροποιούμε ένα i. Θέτουμε με $r_i = n - e_i$. Ας συμβολίσουμε επίσης με $P(i, j, \mu)$ να είναι οι θέσεις του E_j που διαιρούν την $\bar{P}_i$ και με $v(i, j, \mu, z)$, να είναι η κανονικοποιημένη εκτίμηση του E_j ως προς την $P(i, j, \mu)$ θέση, όταν την εφαρμόσουμε σε ένα στοιχείο $z \in E_j$. Καθεμιά από τις επεκτάσεις E_j/E_{j-1} είναι κανονική (normal) και διαχωρίσιμη, έτσι καθεμιά από τις θέσεις $P(i, j, \mu)$ θα έχει τον ίδιο εκθέτη different, $d(P(i, n, \mu)/\bar{P}_i) := \delta_i$ στο different της επέκτασης F/E, $\mathrm{Diff}(F/E)$. Μπορούμε να βρούμε το different μέσω των $\mathrm{Diff}(E_j/E_{j-1})$, για όλα τα $j = 1, \ldots, n$, χρησιμοποιώντας την μεταβατική ιδιότητα του different (παραπέμπουμε για παράδειγμα στον Stichtenoth, [70, σελ.88, Πόρισμα III.4.11.(α)])

$$\mathrm{Diff}(E_j/E) = \mathrm{Con}_{E_j/E_{j-1}}(\mathrm{Diff}(E_{j-1}/E)) + \mathrm{Diff}(E_j/E_{j-1}).$$

Επίσης, κάθε αυτομορφισμός του F δρα μεταβατικά σε κάθε θέση υπέρ της $\bar{P}_i$ (οι αυτομορφισμοί όπως είδαμε ανακατεύουν τις θέσεις $P_i/\bar{P}_i$, δηλαδή, για κάθε P_i, P_i' υπέρ της $\bar{P}_i$ έχουμε ότι $\sigma^\lambda(P_i) = P_i'$), με συνέπεια το σύνολο $\mathrm{Diff}(E_j/E_{j-1})$ να σταθεροποιείται από την σ, και ο εκθέτης της $P(i,j,\mu)$ στο $\mathrm{Diff}(E_j/E_{j-1})$ να είναι ανεξάρτητος από το μ. Το ακόλουθο Λήμμα μας δίνει την συσχέτιση μεταξύ των δ_i και b_j.

Λήμμα 1.3.6. *Θέτουμε* $\Phi(i,j) = -v(i, j-1, \mu, b_j)$. *Το different,* $\mathrm{Diff}(F/E)$ *δίνεται από*

$$\mathrm{Diff}(F/E) = \sum_{i=1}^{s} \delta_i \sum_{\mu} P(i,n,\mu),$$

όπου

$$\delta_i = (p-1) \sum_{j=n-e_i+1}^{n} (\Phi(i,j)+1)p^{n-j},$$

το οποίο και ισούται με

$$\delta_i = (p-1)\sum_{j=1}^{n} \Phi(i,j)p^{n-j} + (p^{e_i}-1).$$

Οι εκτιμήσεις των στοιχείων της βάσης w_k, *δίνονται από*

$$v(i,n,\mu,w_k) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)} \Phi(i,j)p^{n-j}.$$

Απόδειξη. Προκύπτει από την Πρόταση 2 του Madden [50], αφού πρώτα θέσουμε με j, το $\nu + n - e_i$ και παρατηρώντας ότι ο εκθέτης του different δεν εξαρτάται από το αν το κάτω σώμα E είναι ρητό ή όχι. Εντούτοις, μπορούμε να το αποδείξουμε άμεσα. Σταθεροποιούμε ένα i και εφαρμόζουμε την μεταβατική ιδιότητα του εκθέτη του different $d(P(i,n,\mu)/\bar{P}_i)$, ο οποίος και ισούται με:

$$e\left(P(i,n,\mu)/P(i,n-1,\mu)\right) d\left(P(i,n-1,\mu)/\bar{P}_i\right) + d\left(P(i,n,\mu)/P(i,n-1,\mu)\right),$$

$n - r_i = e_i$ φορές για να πάρουμε το δ_i. Παρατηρούμε τέλος, ότι $v(i, j-1, \mu, b_j) = 0$, για όλα τα $1 \leq j \leq n - e_i$. Η τελευταία ισότητα έπεται από το Θεώρημα για την E–βάση, 1.3.4 και το γεγονός ότι: $-\Phi(i,j) = v(i,j-1,\mu,b_j) = v(i,j,\mu,y_j)$. Χρησιμοποιώντας τώρα την μεταβατικότητα τον εκτιμήσεων, παίρνουμε εύκολα ότι $v(i,n,\mu,y_j) = -\Phi(i,j)p^{n-j}$. ∎

Είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τις ποσότητες –κλειδιά για το Θεώρημα μας. Για $k = 0, 1, \ldots, p^n - 1$, ορίζουμε

$$\nu_{ik}(m) := \left\lfloor \frac{m\delta_i - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)} \Phi(i,j)p^{n-j}}{p^{e_i}} \right\rfloor, \tag{1.16}$$

και

$$\Gamma_k(m) := \sum_{i=1}^{s} \nu_{ik}(m).$$

Στην υποπαράγραφο 1.3γ′ ερμηνεύουμε αυτά τα $\Gamma_k(m)$ ως τις αναλλοίωτες του Boseck.

Θεώρημα 1.3.7. *Έστω G μια κυκλική ομάδα αυτομορφισμών του F, με $|G| = p^n$. Θέτουμε με $E = F^G$ και συμβολίζουμε με g_E το γένος του E. Έστω m ένας φυσικός αριθμός με $m > 1$. Η ομαλή αναπαράσταση της G εμφανίζεται $d_{p^n} = \Gamma_{p^n-1}(m) + (g_E - 1)(2m - 1)$ φορές στην αναπαράσταση της G στον χώρο $\Omega_F(m)$. Για $k = 1, \ldots, p^n - 1$, η αδιάσπαστη αναπαράσταση βαθμού k εμφανίζεται $d_k = \Gamma_{k-1}(m) - \Gamma_k(m)$ φορές.*

Απόδειξη. Αρκεί να υπολογίσουμε τις διαστάσεις

$$\dim_K(\Omega_F^{k+1}(m)/\Omega_F^k(m)), \text{ για } k = 1, \ldots, p^n - 1.$$

Επιλέγουμε ένα $x \in E$, τέτοιο ώστε $dx \neq 0$. Κάθε αναλυτικό (πολυ)διαφορικό ω του F, μπορεί να γραφτεί, με μονοσήμαντο τρόπο, ως $\omega = \sum_{\nu=0}^{p^n-1} c_\nu w_\nu (dx)^{\otimes m}$, $c_\nu \in E$.

Ισχυριζόμαστε ότι,

$$\text{αν } (\sigma - 1)^k \omega = 0 \Rightarrow c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{p^n-1} = 0.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Έχουμε ότι $(\sigma-1)^k\omega = (\sigma-1)^k \left(\sum_{\nu=0}^{p^n-1} c_\nu w_\nu (dx)^{\otimes m}\right)$. Όμως η $(\sigma-1)^k$ δρα μόνον στο w_ν, αφήνοντας αναλλοίωτο το κομμάτι $c_\nu (dx)^{\otimes m}$. Η G–δράση δίνεται από $(\sigma - 1)^k w_\nu = 0$, για όλα τα $k > \nu$. Πράγματι $(\sigma - 1)^{k+1} w_k = (\sigma - 1)(\sigma - 1)^k w_k = (\sigma - 1) \prod_{\epsilon=1}^{n} \alpha_\epsilon^{(k)}!$ και $\alpha_\epsilon^{(k)}! \in K$, για όλα τα $\epsilon = 1, \ldots, n$, με συνέπεια το γινόμενο να σταθεροποιείται από τον γεννήτορα σ. Από αυτό προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
(\sigma - 1)^k \omega &= (\sigma - 1)^k \sum_{\nu=0}^{p^n-1} c_\nu w_\nu (dx)^{\otimes m} \\
&= \sum_{\nu \geq k}^{p^n-1} c_\nu (\sigma - 1)^k w_\nu (dx)^{\otimes m} \\
&= c_k (dx)^{\otimes m} \prod_{\epsilon=1}^{n} \alpha_\epsilon^{(k)}! + \sum_{\nu \geq k+1}^{p^n-1} c_\nu (\sigma - 1)^k w_\nu (dx)^{\otimes m}.
\end{aligned}$$

Αν η τελευταία ισότητα είναι μηδέν, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
(\sigma - 1)^{k+1} \omega &= (\sigma - 1) c_k (dx)^{\otimes m} \prod_{\epsilon=1}^{n} \alpha_\epsilon^{(k)}! + \sum_{\nu \geq k+1}^{p^n-1} c_\nu (\sigma - 1)^{k+1} w_\nu (dx)^{\otimes m} \\
&= \sum_{\nu \geq k+1}^{p^n-1} c_\nu (\sigma - 1)^{k+1} w_\nu (dx)^{\otimes m} = 0.
\end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω επιχείρημα παίρνουμε εν τέλει ότι

$$c_{p^n-1} = 0.$$

Γράφοντας

$$\omega = \sum_{\nu=0}^{p^n-2} c_\nu (\sigma-1)^k w_\nu (dx)^{\otimes m},$$

και επαναλαμβάνοντας όλη την παραπάνω διαδικασία παίρνουμε ότι $c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{p^n-2} = 0$, κάτι που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Τώρα έχουμε στα χέρια μας μια εναλλακτική έκφραση για τα πηλίκα του $\Omega_F^i(m)$.
Δηλαδή
$\dim_K(\Omega_F^{k+1}(m)/\Omega_F^k(m)) =$

$$\dim_K \left\{ c_k \in E : \text{υπάρχει ένα } \omega \in \Omega_F(m), \text{ με } \omega = \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu w_\nu (dx)^{\otimes m} \right\}. \tag{1.17}$$

Αν $\omega = \sum_{\nu=0}^k c_\nu w_\nu (dx)^{\otimes m}$, τότε $(\sigma-1)^k \omega = \prod_{\epsilon=1}^n \alpha_\epsilon^{(k)}! c_k (dx)^{\otimes m} \in \Omega_F(m)$, και από αυτό βλέπουμε ότι

$$0 \le v\left(i, n, \mu, \prod_{\epsilon=1}^{n} \alpha_\epsilon^{(k)}! c_k (dx)^{\otimes m}\right) = v\left(i, n, \mu, c_k (dx)^{\otimes m}\right),$$

έτσι το $c_k(dx)^{\otimes m}$ είναι G–αναλλοίωτο m-αναλυτικό διαφορικό του F. Αυτό σημαίνει ότι ο

$$\mathrm{div}_F\left(c_k(dx)^{\otimes m}\right) = \mathrm{Con}_{F/E}\left(\mathrm{div}_E(c_k(dx)^{\otimes m})\right) + m\mathrm{Diff}(F/E)$$

είναι ένας θετικός divisor. Καθώς το αριστερό μελος της παραπάνω ισότητας δεν έχει πόλους, το ίδιο θα συμβαίνει και για το δεξί μέλος, με συνέπεια οι μόνοι πόλοι που να επιτρέπονται για το $c_k(dx)^{\otimes m}$, να είναι αυτοί που «σκοτώνονται» από τον παράγοντα $m\mathrm{Diff}(F/E)$. Συνεπώς το $c_k(dx)^{\otimes m}$ μπορεί να έχει πόλους μόνο στις διακλαδιζόμενες θέσεις του E. Καθώς ο $\mathrm{div}(\omega)$ είναι ένας θετικός divisor, από το Λήμμα 1.3.5 έχουμε ότι $v(i, n, \mu, c_k(dx)^{\otimes m} w_k) \ge 0$, για όλα τα i, μ. Συνεπώς

$$v(i, n, \mu, w_k) + v(i, n, \mu, c_k(dx)^{\otimes m}) \ge 0. \tag{1.18}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} v(i,n,\mu,c_k(dx)^{\otimes m}) &= v(i,n,\mu,\mathrm{Con}_{F/E}\mathrm{div}_E(c_k(dx)^{\otimes m})) + v(i,n,\mu,m\mathrm{Diff}(F/E)) \\ &= p^{e_i}\bar{v}_i(c_k(dx)^{\otimes m}) + m\delta_i. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (1.18) και (1.19), παίρνουμε ότι $p^{e_i}\bar{v}_i(c_k(dx)^{\otimes m}) + m\delta_i + v(i, n, \mu, w_k) \ge 0$, ή ισοδύναμα

$$\bar{v}_i(c_k(dx)^{\otimes m}) \ge -\nu_{ik}(m).$$

Ο divisor του E

$$D = \sum_{i=1}^{s} \nu_{ik}(m)\bar{P}_i + \mathrm{div}_E(c_k) + \mathrm{div}_E\left((dx)^{\otimes m}\right) \ge 0, \tag{1.20}$$

είναι θετικός, κάτι που ισοδυναμεί με $c_k \in L\left(\sum_{i=1}^s \nu_{ik}(m)\bar{P}_i + \mathrm{div}_E\left((dx)^{\otimes m}\right)\right)$. Παρατηρούμε ότι οι divisors D και $\sum_{i=1}^s \nu_{ik}(m)\bar{P}_i + \mathrm{div}_E((dx)^{\otimes m})$ είναι γραμμικά ισοδύναμοι. Συνεπώς έχουν τους ίδιους βαθμούς και άρα

$$\ell(D) = \ell\left(\sum_{i=1}^{s} \nu_{ik}(m)\bar{P}_i + \mathrm{div}_E\left((dx)^{\otimes m}\right)\right).$$

Έχοντας αυτό υπόψιν, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα των Riemann-Roch για το σώμα συναρτήσεων E, έτσι ώστε να υπολογίσουμε το

$$\ell(D) := \dim_K L\left(\sum_{i=1}^{s} \nu_{ik}(m)\bar{P}_i + \operatorname{div}_E\left((dx)^{\otimes m}\right)\right).$$

Έχουμε ότι $\ell(mW) = \deg(mW) + 1 - g_E + \ell(W \setminus mW)$, όπου ο W είναι ένας κανονικός divisor του E. Μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος Riemann-Roch δείχνει ότι $\deg W = 2g_E - 2$, $\ell(W) = g_E$ και ότι αν $\deg(A) < 0$, τότε $\ell(A) = 0$, για κάθε τέτοιον divisor A του E.

Ξεχωρίζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με το γένος του σώματος E:

Περίπτωση 1: $g_E \geq 2$.

Έτσι

$$\dim \Omega_E(m) = \ell(mW) = m(2g_E - 2) + 1 - g_E + 0$$

και $\ell(mW) = (2m-1)(g_E - 1)$. Τέλος

$$\ell\left(\sum_{i=1}^{s} \nu_{ik}(m)\bar{P}_i + \operatorname{div}_E\left((dx)^{\otimes m}\right)\right) = \deg\left(\sum_{i=1}^{s} \nu_{ik}(m)\bar{P}_i + \operatorname{div}_E\left((dx)^{\otimes m}\right)\right) + 1 - g_E + 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\ell(D) = \Gamma_k(m) + (g_E - 1)(2m - 1).$$

Περίπτωση 2: $g_E = 1$.

Θα έχουμε ότι $\deg(W) = 0$ και $\ell(mW) = 1$, με συνέπεια

$$\ell(D) = \Gamma_k(m),$$

επειδή

$$\ell(D) = \Gamma_k(m) + m(2g_E - 2) + 1 - g_E + \ell(W - mW - \Gamma_k(m)),$$

με τον τελευταίο όρο να ισούται με μηδέν καθώς

$$\deg(W - mW - \Gamma_k(m)) = (1-m)(2g_E - 2) - \Gamma_k(m) = -\Gamma_k(m) < 0.$$

Περίπτωση 3: $g_E = 0$.

Σε αυτήν την περίπτωση $\deg(W) = -2 < 0$ και άρα $\ell(mW) = 0$, για κάθε $m \geq 1$. Τέλος

$$0 \leq \ell(D) = \Gamma_k(m) - 2m + 1, \tag{1.21}$$

επειδή

$$\deg(D) = \Gamma_k(m) - 2m \geq 0, \text{ από την Εξίσωση (1.20).}$$

Από την άλλη, καθώς $c_k \in L\left(\sum_{i=1}^{s} \nu_{ik}(m)\bar{P}_i + \operatorname{div}_E\left((dx)^{\otimes m}\right)\right)$, παίρνουμε από την Εξίσωση (1.17), ότι *για καθεμιά από τις παραπάνω περίπτωσεις*,

$$\dim_K\left(\Omega_F^{k+1}(m)/\Omega_F^{k}(m)\right) \leq \ell(D) = \Gamma_k(m) + (g_E - 1)(2m - 1). \tag{1.22}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η Ανισότητα (1.22) είναι στην πραγματικότητα ισότητα. Χρησιμοποιώντας τότε την Εξίσωση (1.13), θα υπολογίσουμε τα d_k.

Λογαριάζουμε:

$$\begin{aligned}
(2m-1)(g_F-1) &= \dim_K \Omega_F(m) = \sum_{k=0}^{p^n-1} \dim_K \left(\Omega_F^{k+1}(m)/\Omega_F^{k}(m)\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{p^n-1} \Gamma_k(m) + \sum_{k=0}^{p^n-1} (g_E-1)(2m-1) \\
&= \sum_{k=0}^{p^n-1} \Gamma_k(m) + p^n(2m-1)(g_E-1). \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

Δείχνοντας πως η $\dim_K \Omega_F(m)$ ισούται με την Εξίσωση (1.23), παίρνουμε την επιθυμητή ισότητα. Αυτό γίνεται μέσω της ταυτότητας των Riemann-Hurwitz:

$$2g_F - 2 = \frac{[F:E]}{[K:K]}(2g_E-2) + \deg \operatorname{Diff}(F/E),$$

όπου $\operatorname{Diff}(F/E) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{P(i,n,\mu)/\bar{P}_i} \delta_i \cdot P(i,n,\mu)$. Καθώς το σώμα K είναι αλγεβρικά κλειστό, έχουμε

$$\deg P(i,n,\mu) = f\left(P(i,n,\mu)/\bar{P}_i\right) = \left[\mathscr{O}_{P(i,n,\mu)}/P(i,n,\mu) : \mathscr{O}_{\bar{P}_i}/\bar{P}_i\right] = 1,$$

για όλα τα i. Επίσης, καθώς η επέκταση F/E είναι Galois, ο αριθμός των θέσεων του F υπέρ κάθε $\bar{P}_i$ ισούται με μ, όπου

$$[F:E] = e\left(P(i,n,\mu)/\bar{P}_i\right) \cdot f\left(P(i,n,\mu)/\bar{P}_i\right) \cdot \mu,$$

και άρα $\mu = p^{n-e_i}$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω οι υπολογισμοί μας απλουστεύονται

$$(2m-1)(g_F-1) = p^n(g_E-1)(2m-1) + \frac{1}{2}(2m-1)\sum_{i=1}^{s} p^{n-e_i}\delta_i. \qquad (1.24)$$

Από την Εξίσωση (1.23) και την (1.24), φτάνει να δείξουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{p^n-1} \nu_{ik}(m) = \frac{1}{2}(2m-1)p^{n-e_i}\delta_i, \quad \text{για κάθε } i. \qquad (1.25)$$

Παρατήρηση 1.3.8. *Παρατηρούμε, από την Εξίσωση (1.25) ότι αρκεί να δείξουμε*

$$\frac{2}{2m-1}\sum_{k=0}^{p^n-1} \Gamma_k(m) = \deg \operatorname{Diff}(F/E).$$

Λογαριάζουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p^n-1} \nu_{ik}(m) &= \sum_{k=0}^{p^n-1} \left\lfloor \frac{m\delta_i - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}}{p^{e_i}} \right\rfloor \\
&= p^{n-e_i} m\delta_i - \frac{1}{p^{e_i}} \sum_{k=0}^{p^n-1} \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j} \\
&- \sum_{k=0}^{p^n-1} \left\langle \frac{m\delta_i - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}}{p^{e_i}} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Αρχικά ασχολούμαστε με το άθροισμα που αντιστοιχεί στον δεύτερο προσθετέο και χρησιμοποιούμε στοιχειώδη θεωρία αριθμών. Σταθεροποιούμε ένα j. Καθώς το k διατρέχει τους αριθμούς $0,\ldots,p^n-1$, τα στοιχεία $a_j^{(k)}$ παίρνουν όλες τις τιμές από το μηδέν μέχρι το $p-1$, p^{n-1} φορές. Με αυτήν την παρατήρηση βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^{e_i}}\sum_{k=0}^{p^n-1}\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j} &= \frac{1}{p^{e_i}}\sum_{j=1}^{n}\Phi(i,j)p^{n-j}\sum_{k=0}^{p^n-1} a_j^{(k)} \\
&= \frac{1}{p^{e_i}}\sum_{j=1}^{n}\Phi(i,j)p^{n-j}p^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} k \\
&= \frac{1}{2}p^{n-1}p(p-1)\frac{1}{p^{e_i}}\sum_{j=1}^{n}\Phi(i,j)p^{n-j} \\
&= \frac{p^{n-e_i}}{2}(p-1)\sum_{j=1}^{n}\Phi(i,j)p^{n-j} \\
&= \frac{p^{n-e_i}}{2}(\delta_i+1-p^{e_i}), \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στο Λήμμα 1.3.6.
Έπειτα ασχολούμαστε με τον τρίτο προσθετέο, που είναι το κλασματικό μέρος. Παρατηρούμε ότι $\Phi(i,j)=0$, για κάθε $j\le n-e_i$ και ότι το $\Phi(i,j)$ είναι πρώτο ως προς το p, από την υπόθεση της τυπικής μορφής. Παρατηρούμε ότι καθώς τα $a_j^{(k)}$ διατρέχουν τους αριθμούς $0,\ldots,p-1$ για $j\ge n-e_i+1$, οι αριθμοί $\sum_{j=n-e_i+1}^{n} a_j^{(k)}p^{n-j}$, σχηματίζουν ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων $\mod p^{e_i}$. Στην περίπτωση όπου $r=0$, τότε οι ίδιοι αριθμοί, για $j\ge 1$, σχηματίζουν ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων $\mod p^n$. Είναι γνωστό από την Θεωρία αριθμών ότι το ίδιο θα ισχύει και για τους $\sum_{j=n-e_i+1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι μ.κ.δ.$(\Phi(i,j),p)=1$. Συνεπώς, καθώς το k διατρέχει τους αριθμούς $0,\ldots,p^n-1$, οι αριθμοί $m\delta_i-\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}$ σχηματίζουν ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων $\mod p^{e_i}$ (μάλιστα οι αριθμοί $z\pm\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}$ σχηματίζουν ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων για κάθε $z\in\mathbb{Z}$), για p^{n-e_i} φορές. Είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p^n-1}\left\langle\frac{m\delta_i-\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}}{p^{e_i}}\right\rangle &= \frac{p^{n-e_i}}{p^{e_i}}\sum_{k=0}^{p^{e_i}-1} k \\
&= \frac{p^{n-e_i}}{p^{e_i}}\frac{p^{e_i}(p^{e_i}-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(p^n-p^{n-e_i}). \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

Το τελευταίο βήμα είναι ο συνδυασμός των Εξισώσεων (1.26), (1.27) και του πρώτου προσθετέου, για να πάρουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p^n-1}\nu_{ik}(m) &= p^{n-e_i}m\delta_i-\frac{p^{n-e_i}}{2}(\delta_i+1-p^{e_i})-\frac{1}{2}(p^n-p^{n-e_i})\\ &= \frac{2p^{n-e_i}m\delta_i-p^{n-e_i}\delta_i-p^{n-e_i}+p^n-p^n+p^{n-e_i}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(p^{n-e_i}\delta_i(2m-1)\right). \qquad (1.28)\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι η Ανισότητα (1.23) είναι στην πραγματικότητα ισότητα. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (1.13), για τον υπολογισμό των d_k, το Θεώρημα αποδείχτηκε. □

Παρατήρηση 1.3.9 (Η περίπτωση $m=1$, $r=0$). *Αν $g_E\geq 2$, τότε $\ell(D)=\Gamma_k(1)+(g_E-1)$, για κάθε $0\leq k<p^n-1$, ενώ $\ell(D)=(g_E-1)+1$, για $k=p^n-1$. Αν $g_E=1$, τότε $\ell(D)=\Gamma_k(1)$, για $0\leq k\leq p^n-2$, ενώ $\ell(D)=1$, για $k=p^n-1$. Τέλος, αν $g_E=0$ τότε $\ell(D)=\Gamma_k(1)-1$, για $0\leq k\leq p^n-2$, ενώ $\ell(D)=0$, για $k=p^n-1$. Οι παραπάνω περιπτώσεις που δεν λαμβάνονται υπόψιν στην Εξίσωση (1.22) είναι οι εξής:*

$$\begin{aligned}\text{Για } g_E\geq 2,\ d_{p^n} &= \dim_K\left(\Omega_F^{p^n}(1)/\Omega_F^{p^n-1}(1)\right)\leq \ell(D)=g_E,\\ \text{για } g_E=1,\ d_{p^n} &= \dim_K\left(\Omega_F^{p^n}(1)/\Omega_F^{p^n-1}(1)\right)\leq \ell(D)=1,\\ \text{για } g_E=0,\ d_{p^n} &= \dim_K\left(\Omega_F^{p^n}(1)/\Omega_F^{p^n-1}(1)\right)\leq \ell(D)=0.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για τις εξέχουσες περιπτώσεις –οι παραπάνω ανισότητες –έχουμε ότι

$$\begin{aligned}g_F &= \dim_K\Omega_F(1)=\sum_{k=0}^{p^n-1}\dim_K\left(\Omega_F^{k+1}(m)/\Omega_F^k(m)\right)\\ &\leq \sum_{k=0}^{p^n-1}\Gamma_k(1)+\left(p^n(g_E-1)+1\right).\end{aligned}$$

Έτσι, για να αποδείξουμε ότι αυτές οι ανισότητες είναι ισότητες, με την βοήθεια Εξίσωσης (1.24) αρκεί να δείξουμε την Εξίσωση (1.25) για $m=1$.

Αυτός είναι ένας τρόπος για να φτάσουμε στο Θεώρημα 2 των [82], όταν μια θέση που ανήκει στο $\mathbb{P}_E$ διακλαδίζεται πλήρως στο F, ή ισοδύναμα (άσκηση) όταν δεν υπάρχει αδιακλάδιστη υποεπέκταση του F/E (δηλαδή, $r=0$), και να δείξουμε με τον τρόπο αυτό ένα ανάλογο αποτέλεσμα για την περίπτωση όπου $m=1$:

Θεώρημα 1.3.10 (Valentini-Madan). *Για την περίπτωση $m=1$ και όταν υπάρχει θέση που ανήκει στο $\mathbb{P}_E$ που διακλαδίζεται πλήρως στο F, η ομαλή αναπαράσταση της G εμφανίζεται $d_{p^n}=g_E$ φορές στην αναπαράσταση της G στον δ.χ. $\Omega_F(1)$. Για $k=1,\ldots,p^n-1$, η ανάγωγη αναπαράσταση βαθμού k εμφανίζεται $d_k=\Gamma_{k-1}(1)-\Gamma_k(1)+\beta$ φορές, όπου β ισούται με -1, αν $k=p^n-1$ και με μηδέν διαφορετικά.*

Οι Valentini, Madan παρατήρησαν πρώτοι ότι στην $m=1$ περίπτωση, $\Gamma_k(1)=0$, αν $\nu_{ik}(1)=0$ για όλα τα i, και κάτι τέτοιο είναι εφικτό αν και μόνον αν $k\geq$

$p^n - p^r$. *Όμως, στην περίπτωση που* $m \geq 2$, *τότε* $\Gamma_k(m) \gneqq 0$. *Συνεπώς όταν* $m = 1$ *κάποιος πρέπει να ξεχωρίσει περιπτώσεις σχετικά με το πότε οι αναλλοίωτες του Boseck μηδενίζονται ή όχι, για πάρει κάποιο αποτέλεσμα για την δομή του* $\Omega_F(1)$ *σαν* $K[G]$*–πρότυπο, το οποίο και θα εξαρτάται από το* r. *Αν υποθέσουμε ότι* $r \neq 0$ *στην περίπτωση όπου* $m = 1$, *τότε κάποιος πρέπει να χρησιμοποιήσει τα αποτελέσματα των Tamagawa ή Valentini, [73] και [77] αντίστοιχα, έτσι ώστε να χειριστεί την αδιακλάδιστη υποεπέκταση* E_r/E *(μπορούμε να δούμε και στην [82, απόδειξη του Θεωρήματος 2, περίπτωση* $k \geq p^n - p^r$*])* .

Αυτή αποτελεί και την πιο σημαντική διαφορά της παρουσίασης μας εδώ με αυτήν που μπορεί κάποιος να συναντήσει στην παραπάνω εργασία τους. Η παρατήρηση αυτή μας δείχνει επίσης ότι για $m \gneqq 1$ *οι Boseck αναλλοίωτες, και κατά συνέπεια οι συνθήκες για αναλυτικότητα που εκφράζουν με συμπυκνωμένο τρόπο, όπως και η δομή του* $\Omega_F(m)$, *ως* $K[G]$*–πρότυπο, δεν εξαρτώνται από το* r. *Σαν συνέπεια αυτού, οι Boseck αναλλοίωτες δεν εξαρτώνται από την ύπαρξη ή όχι μιας αδιακλάδιστης υποεπέκτασης,* E_r/E, *που εμφανίζεται όταν δεν υπάρχει θέση που να διακλαδίζεται πλήρως στο* F/E.

1.3γ΄ Μια νέα βάση ολόμορφων διαφορικών

Συνεχίζουμε με μια κατασκευή βάσης για τα αναλυτικά m-(πολυ)διαφορικά $\Omega_F(m)$, στην περίπτωση που το E είναι ρητό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $E = K(x)$, με $F/K(x)$ να είναι μια κυκλική επέκταση βαθμού p^n. Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της υποπαραγράφου, εμφανίζει ομοιότητες με το Λήμμα 5 του Madden [50]. Η κύρια διαφορά έγκειται στο ότι εκεί, υπέθεσε πως η *άπειρη θέση του E διακλαδίζεται* και παίρνει δύο περιπτώσεις· στην πρώτη λαμβάνει υπόψιν του τις θέσεις $P(i,n,\mu)$ που βρίσκονται υπέρ των «πεπερασμένων» θέσεων του E, ενώ στην δεύτερη, ασχολείται με θέσεις $P(i,n,\mu)$ που βρίσκονται υπέρ της «άπειρης» θέσης του E, η οποία συμβολίζεται με p_∞.
Εμείς υποθέτουμε ότι η *άπειρη θέση του E δεν διακλαδίζεται* και δίνουμε μια βάση, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν υποπεριπτώσεις, αρχικά, για τα αναλυτικά διαφορικά ($m = 1$), και στην συνέχεια για τα αναλυτικά m–(πολυ)διαφορικά, ($m > 1$).

Εδώ, για πρώτη φορά αποσαφηνίζεται και ο ρόλος που διαδραματίζουν οι αναλλοίωτες του Boseck. Φαίνεται καθαρά πώς αυτές προκύπτουν, όπως και το γιατί έχουν αυτήν την συγκεκριμένη μορφή. Η βαρύτητα που διαδραματίζουν συνδέεται άμεσα με την βαρύτητα που έχει ο χώρος των αναλυτικών διαφορικών στην θεωρία των αλγεβρικών καμπυλών και γι'αυτό εμφανίζονται όπου εμφανίζονται τα αναλυτικά διαφορικά–(πολυ)διαφορικά:

Οι ποσότητες που ορίστηκαν στην Εξίσωση (1.16) έχουν έναν πολύ σημαντικό ρόλο. Είναι οι ποσότητες που όρισαν οι Valentini, Madan στην εργασία τους [82, σελ.110], όπως επίσης και ποσότητες που προέκυψαν από τους περιορισμούς στο ν, στο Λήμμα 5 του Madden, [50], και που εμφανίζονται συνέχεια σε αυτήν την παράγραφο. Αυτές, είναι οι ίδιες ποσότητες που κατασκεύασε ο Boseck στην εργασία του [7], στα τέλη του 1950, που τον οδήγησαν σε παρόμοιες βάσεις του $\Omega_F(1)$, όταν η $F/K(x)$ ήταν Artin-Schreier ή μια Kummer (βαθμού q, με μ.κ.δ.$(p,q) = 1$) επέκταση, ενός αλγεβρικού σώματος συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα βλέπουμε ότι

$$\mathrm{div}_F((dx)^{\otimes m}) = m\mathrm{Diff}(F/K(x)) - 2m(x)_\infty,$$

ή χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.6, έχουμε ότι

$$m\sum_{i=1}^{s} p^{n-e_i}\big(\sum_{j=1}^{n}(p-1)\Phi(i,j)p^{n-j}+(p^{e_i}-1)\big)\cdot P(i,n,\mu)-2m\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_\infty)=$$

$$=m\sum_{i=1}^{s} p^{n-e_i}\delta_i\cdot P(i,n,\mu)-2m\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_\infty).$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.6 και παρατηρώντας ότι $v(i,n,\mu,w_k)=v(i,n,\mu',w_k)$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathrm{div}_F(w_k)=P_{w_k}-\sum_{i=1}^{s} p^{n-e_i}\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}\cdot P(i,n,\mu),$$

με τον P_{w_k}, να συμβολίζει έναν θετικό divisor του F, πρώτο ως προς τον $P(i,n,\mu)$, για κάθε i. Τότε

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}_F(w_k(dx)^{\otimes m})=\\ =\quad & P_{w_k}+\sum_{i=1}^{s} p^{n-e_i}\left(m\delta_i-\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}\right)\cdot P(i,n,\mu)-2m\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_\infty).\end{aligned}$$

Αναλύουμε το $p^{n-e_i}\big(m\delta_i-\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}\big) \mod p^n$:

$$p^{n-e_i}\big(m\delta_i-\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}\big)=\nu_{ik}(m)\cdot p^n+\rho_i^{(k,m)},\ \text{με}\ 0\le\rho_i^{(k,m)}\le p^n-1.$$

Παρατηρούμε ότι είμαστε συνεπείς με τον ορισμό των $\nu_{ik}(m)$ που δόθηκε στην Εξίσωση (1.16). Συμβολίζουμε τις διακλαδισμένες θέσεις του E, $\bar{P}_i, i=1,\ldots,s$, με $\bar{P}_i(x)$, (αφού το E είναι ρητό κάθε διακλαδισμένη θέση του $E, \bar{P}_i$, αντιστοιχεί σε ένα ανάγωγο πολυώνυμο, $\bar{P}_i(x)$) και θέτουμε

$$g_k(x)=\prod_{i=1}^{s}\bar{P}_i(x)^{\nu_{ik}(m)}.$$

Η ποσότητα $\Gamma_k(m)$ της Εξίσωσης (1.16), ορίζεται έτσι με φυσιολογικό τρόπο σαν τον βαθμό του πολυωνύμου $g_k(x)$. Αυτή είναι η αναλλοίωτη του Boseck για την περίπτωση που μελετάμε εδώ. Τότε, θα έχουμε
(1.29)

$$\mathrm{div}_F(w_k[g_k(x)]^{-1}(dx)^{\otimes m})=\sum_{i=1}^{s}\rho_i^{(k,m)}\cdot P(i,n,\mu)+(\Gamma_k(m)-2m)\,\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_\infty)+P_{w_k}.$$

Παρατηρούμε ότι αν

$$\Gamma_k(m)\ge 2m, \tag{1.30}$$

τότε, ο divisor της Εξίσωσης (1.29) είναι θετικός, με συνέπεια για $k=0\ldots,p^n-1$, $\Gamma_k(m)\ge 2m$ και $0\le\nu\le\Gamma_k(m)-2m$, το $x^\nu w_k[g_k(x)]^{-1}(dx)^{\otimes m}$ να είναι ένα αναλυτικό m-(πολυ)διαφορικό του F.

Ας Θυμηθούμε ότι το σύνολο $w_k=y_1^{a_1^{(k)}}y_2^{a_2^{(k)}}\cdots y_n^{a_n^{(k)}}$, $0\le k\le p^n-1$, αποτελεί μια E–βάση του F. Το κύριο αποτέλεσμα της υποπαραγράφου αυτής είναι:

Λήμμα 1.3.11. *Το σύνολο*

$$\langle x^{\nu} w_k [g_k(x)]^{-1} (dx)^{\otimes m} : 0 \leq k \leq p^n - 1 + \beta_m, 0 \leq \nu \leq \Gamma_k(m) - 2m, m \geq 1 \rangle,$$

αποτελεί μια K–βάση του χώρου των m-(πολυ)διαφορικών $\Omega_F(m)$, με $\beta_1 = -1$, αν $m = 1$ και $\beta_m = 0$, αν $m \geq 2$.

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε αρχικά ότι

$$\nu_{ik}(m) := \left\lfloor \frac{m\delta_i - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)} \Phi(i,j) p^{n-j}}{p^{e_i}} \right\rfloor.$$

Παρατηρούμε έτσι ότι:
Καθώς το κάτω σώμα E είναι ρητό, $r = 0$, επειδή κάθε πεπερασμένη και διαχωρίσιμη επέκταση ενός ρητού σώματος συναρτήσεων οφείλει να διακλαδίζεται. Έτσι για την περίπτωση όπου $m = 1$, η συνθήκη $a_j^{(k)} = p - 1$, για όλα τα $j = 1, \ldots n$, ισοδυναμεί με $k = p^n - 1$ και $\Gamma_{p^n-1}(1) = 0$, ενώ
για $m > 1$, έχουμε πάντα ότι $\Gamma_k(m) \neq 0$ για κάθε k.
Αρκεί τώρα να αποδείξουμε τις παρακάτω ισότητες:

(i) Για $m = 1$, πρέπει να δείξουμε ότι $\sum_{k=0}^{p^n-2} \big(\Gamma_k(1) - 1\big) = \dim_K \Omega_F(1) = g_F$,

(ii) Για $m \geq 2$, πρέπει να δείξουμε ότι $\sum_{k=0}^{p^n-1} \big(\Gamma_k(m) - 2m + 1\big) = \dim_K \Omega_F(m) = (2m-1)(g_F - 1)$. Αυτός ο αριθμός είναι καλά ορισμένος, καθώς από την υπόθεση μας έχουμε ότι $g_F \geq 2$.

Για την πρώτη περίπτωση, παρατηρούμε από την Εξίσωση (1.28) για $m = 1$, ότι ο αριθμός αυτός έχει ήδη υπολογιστεί:

$$\sum_{k=0}^{p^n-1} \nu_{ik}(m) = \frac{1}{2} \left(p^{n-e_i} \delta_i \right).$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=0}^{p^n-2} \big(\Gamma_k(1) - 1\big) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \left(p^{n-e_i} \delta_i \right) - p^n + 1 = g_F.$$

Με την τελευταία ισότητα να έπεται από την ταυτότητα των Riemann–Hurwitz, μια μορφή της οποίας μπορούμε να βρούμε στην Εξίσωση (1.24). Για $m \geq 2$, η Εξίσωση (1.28), μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p^n-1} \nu_{ik}(m) &= \frac{1}{2} \left(p^{n-e_i} \delta_i (2m-1) \right), \text{ συνεπώς} \\
\sum_{k=0}^{p^n-1} \big(\Gamma_k(m) - 2m + 1\big) &= \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{1}{2} p^{n-e_i} \delta_i (2m-1) \Big) - p^n (2m-1) \\
&= (2m-1) \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} p^{n-e_i} \delta_i - p^n \right) \\
&\overset{\text{Εξ. (1.24)}}{=} (g_F - 1)(2m-1).
\end{aligned}$$

$\square$

Οι ακόλουθες παρατηρήσεις πέραν του ότι μας βοηθάνε στο να επαληθεύσουμε την ορθότητα των επιχειρημάτων μας μέχρι εδώ, μας δίνουν και μια εναλλακτική απόδειξη για μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 1.3.7, της υποπαραγράφου 1.3β΄.

Παρατήρηση 1.3.12. *Ο περιορισμός για το $\Gamma_k(m)$, που δόθηκε στην Εξίσωση (1.21), στην περίπτωση που το γένος του E ήταν μηδέν, είναι ακριβώς ο ίδιος με τον περιορισμό που προκύπτει από την βάση μας, έτσι ώστε να διασφαλιστεί ότι ένα m-(πολυ)διαφορικό είναι αναλυτικό (Εξίσωση (1.30)).*

Παρατήρηση 1.3.13. *Μια δεύτερη, και απλούστερη απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.7, μπορεί να δοθεί για την ειδική περίπτωση όταν $g_E = 0$, χρησιμοποιώντας την βάση του Λήμματος 1.3.11. Πράγματι γνωρίζοντας την Εξίσωση (1.17), αντί να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα των Riemann–Roch για να μετρήσουμε τα c_k, χρησιμοποιούμε την βάση μας. Από την Εξίσωση (1.17), τα ζητούμενα διαφορικά είναι της μορφής $\omega = x^k[g_k(x)]^{-1}w_k(dx)^{\otimes m}$, με $c_k := x^k[g_k(x)]^{-1}$ και υπάρχουν $\Gamma_k(m) - 2m + 1$ το πλήθος τέτοια, για κάθε τιμή του $k = 1, \ldots, p^n - 1$. Συνεπώς, για $k = 1, \ldots, p^n - 1$, με την βοήθεια της Εξίσωσης (1.13), παίρνουμε ότι $d_k = \Gamma_{k-1}(m) - 2m + 1 - (\Gamma_k(m) - 2m + 1) = \Gamma_{k-1}(m) - \Gamma_k(m)$, ενώ για $k = p^n$, έχουμε ότι $d_{p^n} = \Gamma_{p^n-1}(m) - 2m + 1$.*

1.3δ΄ Ένα κλασικό θεώρημα του Hurwitz

Εδώ μελετάμε πώς οι αναλλοίωτες του Boseck συμπεριφέρονται στην περίπτωση που η F/E είναι μια κυκλική αλλά ήμερα διακλαδισμένη επέκταση αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων. Το αποτέλεσμα είναι να καταλήξουμε σε ένα κλασσικό θεώρημα του Hurwitz που αφορά την αναπαράσταση της G στον χώρο των αναλυτικών διαφορικών. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η F/E είναι μια κυκλική Kummer επέκταση βαθμού n, όπου μ.κ.δ.$(n, p) = 1$. Διαλέγουμε μια πρωταρχική n ρίζα της μονάδας, ζ του K. Θέτουμε με $F = E(y)$ και με

$$y^n = u, u \in E, \tag{1.31}$$

να δίνει την εξίσωση που ορίζει η αλγεβρική μας καμπύλη. Θέτουμε με $\bar{P}_i \in \mathbb{P}_E$, με $1 \leq i \leq r$, να είναι οι διακλαδισμένες θέσεις του E στον F και $P_i \in \mathbb{P}_F$, να είναι οι θέσεις υπέρ του $\bar{P}_i$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αν ο σ είναι ένας γεννήτορας της G, τότε η δράση της ομάδας δίνεται από την $\sigma(y) = \zeta y$ καθώς και ότι $0 \lneqq v_{\bar{P}_i}(u) \lneqq n$. Χρησιμοποιώντας Kummer θεωρία [70, σελ.110, Πρόταση III.7.3], έχουμε ότι $e_i = e\big(P_i/\bar{P}_i\big) = \frac{n}{\text{μ.κ.δ.}(n, v_{\bar{P}_i}(u))}$ και $\delta_i = e_i - 1$. Τέλος, θέτουμε $\Phi(i) = v_{P_i}(y) = \frac{e_i v_{\bar{P}_i}(u)}{n}$.

Αν ορίσουμε $\Omega_F^k(1) = \{\omega \in \Omega_F(1) \ |\sigma(\omega) = \zeta^k\omega\}$, για $0 \leq k \leq n-1$, τότε

$$\Omega_F(1) = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \Omega_F^k(1),$$

με τα αντίστοιχα d_k για την περίπτωση αυτή να είναι $d_k = \dim_K \Omega_F^k(1)$. Είναι επίσης γνωστό, [13, σελ.272, V.2.2, Πόρισμα], ότι $d_0 = \dim_K \Omega_F^G(1) = g_E$. Παρατηρούμε όμως ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην περίπτωση της άγριας διακλάδωσης.

Για να υπολογίσουμε την δομή του $\Omega_F(1)$ ως $K[G]$–πρότυπο, πρέπει να υπολογίσουμε για μια ακόμα φορά (σε αναλογία με ότι κάναμε για την κυκλική p^n περίπτωση) τα d_k.

Για τον λόγο αυτό πρέπει να βρούμε την αναλλοίωτη Boseck για αυτήν την περίπτωση, δηλαδή να σκεφτούμε την αντίστοιχη ρητή επέκταση. Αν $E = K(x)$, τότε ο Boseck [7, σελ. 50, Satz 16], απέδειξε ότι (για $m = 1$):

Πρόταση 1.3.14 (Boseck). *Το σύνολο*

$$\langle x^{\nu} y^{-k} g_k(x)dx : 0 \lneqq k \leq n-1, 0 \leq \nu \leq \Gamma_k(1) - 2\rangle,$$

είναι μια $K-$ βάση για τον χώρο $\Omega_F(1)$, όπου $g_k(x) = \prod_{i=1}^{r} \bar{P}_i(x)^{\lfloor \frac{k\Phi(i)}{e_i} \rfloor}$ και

$$\Gamma_k(1) = \sum_{i=1}^{r} \left\langle \frac{k\Phi(i)}{e_i} \right\rangle.$$

Παρατήρηση 1.3.15. *Ένα σημαντικό βήμα στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.14, που έδωσε ήταν να δείξει ότι*

$$2\sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_k(1) = \deg \mathrm{Diff}(F/E).$$

Έχουμε k διαφορετικές (μη ισοδύναμες) ανάγωγες αναπαραστάσεις βαθμού 1. Αν $g_E = 0$ και $k \neq 0$, μπορούμε να μετρήσουμε τα διαφορικά της Πρότασης 1.3.14 για να βρούμε τα d_k. Έχουμε ότι $\omega \in \Omega_F^k(1)$ αν $\omega = x^{\nu} y^{n-k} g_{n-k}(x)dx$. Ο αριθμός τους ισούται με

$$\begin{aligned} \Gamma_{n-k}(1) - 1 &= \sum_{i=1}^{r} \left\langle \frac{n-k\Phi(i)}{e_i} \right\rangle - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left\langle \frac{-k\Phi(i)}{e_i} \right\rangle - 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς η k αναπαράσταση εμφανίζεται $d_{n-k} = \Gamma_{n-k}(1) - 1$ φορές στην αναπαράσταση της G στον χώρο $\Omega_F(1)$. Όταν $k = 0$, γνωρίζουμε ότι εμφανίζεται $d_0 = g_E = 0$ φορές.

Παρατηρούμε ότι, σε γενικές γραμμές, τα $\Gamma_k(m)$ εξαρτώνται από τον εκθέτη του different και την εκτίμηση σε στοιχεία της βάσης της επέκτασης, και άρα το γένος του κάτω σώματος E, g_E δεν τα επηρεάζει. Μπορούμε έτσι να υποστηρίξουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα θα αληθεύει και για την περίπτωση $g_E \geq 0$. Και πράγματι αυτό είναι το θεώρημα του Hurwitz (μπορούμε επίσης να συγκρίνουμε και με το γενικότερο αποτέλεσμα των Weil και Chevalley που παρατίθεται στους [82, Θεώρημα 2]):

Θεώρημα 1.3.16 (Hurwitz). *Για $k = 0, \ldots, n-1$, έχουμε n διαφορετικές ανάγωγες αναπαραστάσεις βαθμού 1. Η k αναπαράσταση εμφανίζεται $d_{n-k} := \Gamma_{n-k}(1) - 1 + g_E$ φορές στην αναπαράσταση της G στον $\Omega_F(1)$, όταν $k \neq 0$ και g_E φορές στην περίπτωση που $k = 0$.*

1.3ε′ Η στοιχειώδης αβελιανή περίπτωση

Όπως πάντα σε εμάς, το K είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής p, αλλά εδώ θα μελετήσουμε μια στοιχειώδης αβελιανή Galois επέκταση $F/K(x)$ του ρητού σώματος συναρτήσεων $E = K(x)$. Συμβολίζουμε με $G = \mathrm{Gal}(F/K(x))$

και υποθέτουμε ότι $|G| = p^n$. Επίσης υποθέτουμε ότι κάθε θέση του $K(x)$ είναι πλήρως διακλαδισμένη στο F, δηλαδή, $F = K(x,y)$, με y να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$y^q - y = \frac{g(x)}{(x-a_1)^{\Phi(1)} \cdots (x-a_r)^{\Phi(r)}}, \tag{1.32}$$

όπου $q = p^n$, $n \geq 1$, $g(x) \in K[x]$, και $\deg g(x) \leq \sum_{i=1}^{r} \Phi(i) = M$, $g(a_i) \neq 0$. Συνεπώς,υποθέτουμε ότι η p_∞, η άπειρη θέση του $K(x)$, δεν διακλαδίζεται στο F. Τέλος όλα τα $\Phi(i)$ είναι πρώτα με το p, για όλα τα $i = 1\ldots,r$. Θέτουμε με $p_i \in \mathbb{P}_{K(x)}$, $i = 1,\ldots,r$, τις ρητές θέσεις του $K(x)$ που διακλαδίζονται πλήρως στο F, αντιστοιχούν στα $(x-a_i)$, $a_i \in K$.

Αρχικά, φτιάχνουμε τον συμβολισμό μας, παρόμοια με αυτόν που δόθηκε στην υποενότητα 1.3γ′:
Είναι γνωστό ([70, Πρόταση III.7.10]), ότι $\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_i) = p^n P_i$, για $P_i \in \mathbb{P}_F$ υπέρ της p_i, καθώς και ότι $\mathrm{Diff}(F/K(x)) = \sum_{i=1}^{r}(p^n-1)(\Phi(i)+1)P_i$, για κάθε $i = 1,\ldots,r$. Γνωρίζουμε επίσης ότι για κάθε $\beta \in \mathbb{F}_q$, το στοιχείο $\sigma_\beta \in G$ δρα στον γεννήτορα της επέκτασης y με τον ακόλουθο τρόπο: $\sigma_\beta(y) = y + \beta$. Για κάθε m-(πολυ)διαφορικό του F, $(dx)^{\otimes m}$ θα έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_F((dx)^{\otimes m}) &= m\mathrm{Diff}(F/K(x)) - 2m(x)_\infty \\ &= m\sum_{i=1}^{r}(p^n-1)(\Phi(i)+1)P_i - 2m\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_\infty), \end{aligned} \tag{1.33}$$

όπου ο $(x)_\infty$ είναι divisor των πόλων του x. Παίρνοντας τώρα βαθμούς για τους παραπάνω divisors έχουμε ότι (εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση των Riemann-Hurwitz),

$$g_F = \frac{p^n-1}{2}\left(-2 + \sum_{i=1}^{r}(\Phi(i)+1)\right). \tag{1.34}$$

Θέτουμε με $\mathrm{div}_F(y) = P_y - \sum_{i=1}^{r}\Phi(i)P_i$, με P_y να είναι ένας θετικός divisor του F, πρώτος ως προς τον P_i, για όλες τις τιμές $i = 1,\ldots,r$. Τότε για $k = 0,\ldots,p^n-1$ υπολογίζουμε τον $\mathrm{div}_F(y^k(dx)^{\otimes m})$, ο οποίος και ισούται με

$$\begin{aligned} &= \mathrm{div}_F(y^k) + \mathrm{div}_F((dx)^{\otimes m}) \\ &= kP_y - k\sum_{i=1}^{r}\Phi(i)P_i + m\sum_{i=1}^{r}(p^n-1)(\Phi(i)+1)P_i - 2m\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_\infty) = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\big((p^n-1)m-k\big)\Phi(i) + m(p^n-1)\right)P_i + kP_y - 2m\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_\infty). \tag{1.35}$$

Έπειτα παίρνουμε την ποσότητα $\big((p^n-1)m-k\big)\Phi(i) + m(p^n-1)$ διαιρώντας με p^n :

$$\big((p^n-1)m-k\big)\Phi(i) + m(p^n-1) = \nu_{ik}(m)\cdot p^n + \rho_i^{(k,m)},$$

όπου $0 \leq \rho_i^{(k,m)} \leq p^n - 1$, είναι απλά το υπόλοιπο της διαίρεσης, έτσι

$$\nu_{ik}(m) = \left\lfloor \frac{m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - k\Phi(i)}{p^n} \right\rfloor. \tag{1.36}$$

Παίρνουμε επίσης

$$g_k(x) := \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{\nu_{ik}(m)}, \tag{1.37}$$

και θέτουμε με $\Gamma_k(m) = \sum_{i=1}^{r} \nu_{ik}(m)$, να είναι η αναλλοίωτη του Boseck για την περίπτωση αυτή.

Παρατηρούμε από την Εξίσωση (1.36), ότι για $m = 1$, αν $\Gamma_k(1) = 0$, τότε $\nu_{ik}(1) = 0$ για όλα τα $i = 1, \ldots, r$. Αυτό μπορεί να συμβεί αν και μόνον αν $k = p^n - 1$, καθώς $\nu_{ik}(1) \geq 0$.

Για $m > 1$, δεν βρισκόμαστε στην παραπάνω περίπτωση γιατί $\nu_{ik}(m) > 0$, για όλες τις τιμές του k. Τέλος παρατηρούμε ότι ο $\mathrm{div}_F[g_k(x)]^{-1}y^k(dx)^{\otimes m}$ είναι θετικός αν

$$\Gamma_k(m) = \sum_{i=1}^{r} \nu_{ik}(m) \geq 2m, \tag{1.38}$$

επειδή,

$$\mathrm{div}_F(y^k[g_k(x)]^{-1}(dx)^{\otimes m}) = \sum_{i=1}^{r} \rho_i^{(k,m)} P_i + kP_y + \Big(\sum_{i=1}^{r} \nu_{ik}(m) - 2m\Big)\mathrm{Con}_{F/K(x)}(p_\infty).$$

Έτσι όταν ικανοποιείται η ανισότητα (1.38), τότε το $x^\nu y^k[g_k(x)]^{-1}(dx)^{\otimes m}$ είναι ένα αναλυτικό m–(πολυ)διαφορικό, για $0 \leq k \leq p^n - 1, 0 \leq \nu \leq \Gamma_k(m) - 2m$ και $m \geq 1$.

Για την συνέχεια και πριν να δούμε μια καινούρια βάση αναλυτικών πολυδιαφορικών στην στοιχειώδη αβελιανή περίπτωση, δίνουμε έναν πιο αναλυτικό τύπο για τις Boseck αναλλοίωτες. Πιο συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι δίνονται σαν το άθροισμα ποσοτήτων $\nu_{ik}(m)$, οι οποίες είναι τα ακέραια μέρη ενός κλάσματος με αριθμητή που εξαρτάται από τον εκθέτη του different, το m από τα αναλυτικά (πολυ)διαφορικά, και την εκτίμηση των στοιχείων της βάσης της επέκτασης των σωμάτων συναρτήσεων. Οι δείκτες διακλάδωσης των διακλαδισμένων θέσεων του κάτω σώματος αποτελούν τον παρονομαστή:

Παρατήρηση 1.3.17. *Κρατώντας τον συμβολισμό αυτής της υποπαραγράφου όσο πιο κοντά με αυτόν στην 1.3γ′, παρατηρούμε ότι οι ποσότητες $\nu_{ik}(m)$, για μια p– επέκταση με $p|\mathrm{char}K$, είναι ίσες με*

$$\left\lfloor \frac{m\delta_i + \{\text{εκτίμηση του } k \text{ στοιχείου της } E \text{ βάσης του } F\text{, από μια εκτίμηση του } F\,\}}{p^{e_i}} \right\rfloor,$$

όπου το i τρέχει τους διακλαδισμένους πρώτους του E, το δ_i είναι ο εκθέτης του different της επέκτασης και τα e_i είναι οι δείκτες διακλάδωσης των διακλαδισμένων θέσεων του E στο F. Τα στοιχεία της βάσης εκτιμώνται από μια κανονικοποιημένη εκτίμηση, που καθορίζεται από μια θέση του F υπέρ μιας διακλαδισμένης θέσης του E. Εδώ έχουμε πλήρης διακλάδωση των θέσεων, κάτι που έχει σαν συνέπεια $e_i = n$. Στην περίπτωση που η F/E ήταν κυκλική, ο όρος στις αγκύλες δεν είναι τίποτα άλλο από $v(i, n, \mu, w_k) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}$, που δίνονται στο Λήμμα 1.3.6. Εδώ, παίρνοντας την (τυπική) βάση του F υπέρ του E, που είναι, $\{w_k := y^k |\ 0 \leq k \leq p^n - 1\}_E$, έχουμε ότι $v_{P_i}(w_k) = kv_{P_i}(y)$. Θέτοντας την *δεξιά πλευρά της Εξίσωσης (1.32), να ισούται με κάποιο $u \in E$, τότε από την γνήσια τριγωνική ανισότητα των εκτιμήσεων [70, σελ.5, Λήμμα I.1.10], έχουμε ότι $v_{p_i}(u) = \min\{v_{p_i}(y^q), v_{p_i}(y)\} = qv_{p_i}(y) = v_{P_i}(y)$. Θέτοντας τώρα $-\Phi(i) = v_{p_i}(u)$ η Παρατήρηση έπεται. Τέλος, βλέπουμε ότι η $\Phi(i,j) = \Phi(i)$, δηλαδή δεν έχουμε εξάρτηση από τις ενδιάμεσες επεκτάσεις, καθότι δεν υπάρχει ένας μοναδικός πύργος ενδιάμεσων επεκτάσεων όπως στην κυκλική περίπτωση, στην Εξίσωση (1.14).*

1.3ϛ′ Κατασκευή βάσης

Ακολουθώντας τον Boseck (δείτε στον [7], Satz 15), αποδεικνύουμε το ανάλογο του Λήμματος 1.3.11.

Πρόταση 1.3.18. *Το σύνολο*

$$\Sigma_m := \langle x^\nu y^k [g_k(x)]^{-1} (dx)^{\otimes m} : 0 \le k \le p^n - 1 + \beta_m, 0 \le \nu \le \Gamma_k(m) - 2m, m \ge 1 \rangle$$

αποτελεί μια K–βάση για τον χώρο των αναλυτικών m-(πολυ)διαφορικών $\Omega_F(m)$, με $\beta_1 = -1$, στην περίπτωση που $m = 1$ και με $\beta_m = 0$ αν $m \ge 2$.

Απόδειξη. Για την $m = 1$ περίπτωση δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε, καθώς το αποτέλεσμα είναι το Θεώρημα 2 του Garcia [16]. Για $m > 1$ είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\sum_{k=0}^{p^n-1}(\Gamma_k(m) - 2m + 1) = \dim_K \Omega_F(m)$.

Αρχικά, υπολογίζουμε το $\sum_{k=0}^{p^n-1} \nu_{ik}(m)$, το οποίο ισούται με

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{p^n-1} \frac{m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - k\Phi(i)}{p^n} - \sum_{k=0}^{p^n-1} \left\langle \frac{m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - k\Phi(i)}{p^n} \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{p^n-1} \frac{m(p^n-1)(\Phi(i)+1)}{p^n} - \sum_{k=0}^{p^n-1} \frac{k\Phi(i)}{p^n} - \sum_{i=1}^{p^n-1} \left\langle \frac{m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - k\Phi(i)}{p^n} \right\rangle \\
&= m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - \frac{\Phi(i)(p^n-1)}{2} - \sum_{k=0}^{p^n-1} \left\langle \frac{m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - k\Phi(i)}{p^n} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Καθώς το k σχηματίζει ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων $\mod p^n$ και μ.κ.δ.$(\Phi(i), p) = 1$, το ίδιο θα ισχύσει και για το $m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - k\Phi(i)$, συνεπώς

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p^n-1} \nu_{ik}(m) &= m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - \frac{\Phi(i)(p^n-1)}{2} - \frac{1}{p^n}\sum_{k=0}^{p^n-1} k \\
&= m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - \frac{\Phi(i)(p^n-1)}{2} - \frac{p^n-1}{2} \\
&= m(p^n-1)(\Phi(i)+1) - \frac{(p^n-1)}{2}(\Phi(i)+1) \\
&= (2m-1)(\Phi(i)+1)\frac{(p^n-1)}{2}. \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.3.19. *Παρατηρούμε για μια ακόμα φορά ότι από την Εξίσωση (1.39), έχουμε ότι*

$$\frac{2}{2m-1} \sum_{k=0}^{p^n-1} \Gamma_k(m) = \deg \mathit{Diff}(F/E).$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (1.39) και (1.34), θα έχουμε τότε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p^n-1} \Gamma_k(m) &= \sum_{k=0}^{p^n-1} \sum_{i=1}^{r} \nu_{ik}(m) \\ &= (2m-1)(g_F + p^n - 1). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Τέλος, από την Εξίσωση (1.40), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p^n-1} (\Gamma_k(m) - 2m + 1) &= \sum_{k=0}^{p^n-1} \Gamma_k(m) - 2mp^n + p^n \\ &= (2m-1)(g_F + p^n - 1) - p^n(2m-1) \\ &= (2m-1)(g_F - 1). \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 1.3.20. *Αν η $F/K(x)$ είναι επέκταση βαθμού p (δηλαδή, μια Artin Schreier επέκταση), τότε ο Boseck, [7] απέδειξε ότι το σύνολο Σ_1, αποτελεί βάση του $\Omega_F(1)$. Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε εδώ, εύκολα κάποιος μπορεί να δείξει ότι ότι το σύνολο που ορίστηκε στην Πρόταση 1.3.18, είναι βάση του $\Omega_F(m)$, όταν το $F/K(x)$ είναι μια κυκλική Artin Schreier επέκταση βαθμού p.*

Παρατήρηση 1.3.21. *Μια βάση ολόμορφων m-(πολυ)διαφορικών συνδέεται στενά με τον υπολογισμό των m–Weierstrass σημείων του F. Για την $m = 1$, βλέπουμε στους Garcia, Boseck ([16], [15] και [7]), ότι μας οδηγεί στον υπολογισμό κλασικών Weierstrass σημείων. Κάποιος μπορεί τώρα να ακολουθήσει τις ιδέες τους για την περίπτωση $m > 1$. Η βάση των διαφορικών επιτρέπει την εύρεση όλων των $(|mK|, P)$–orders για κάποιο $P \in \mathbb{P}_F$, όπου $|K|$ είναι το κανονικό linear series. Αυτές θα είναι ίσες με την generic order ακολουθία στην περίπτωση που το P δεν είναι σημείο του Weierstrass. Μπορούμε να συμβουλευτούμε τον Villa–Salvador, [83][σελ. 555, Θεώρημα 14.2.48].*

1.3ζ′ Η δομή του χώρου $\mathbf{\Omega_F(m)}$ σαν $\mathbf{K[G]}$–πρότυπο

Σε αυτήν την υποενότητα θα υπολογίσουμε την δομή του χώρου $\Omega_F(m)$, των m-(πολυ)διαφορικών σαν $K[G]$–πρότυπο, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.3.18. Ακολουθώντας από κοντά τις ιδέες των Calderón, Salvador, Madan ([62, Θεώρημα 1]), που σκέφτηκαν την περίπτωση $m = 1$, γενικεύουμε το αποτέλεσμα τους για την περίπτωση $m > 1$.

Παίρνουμε $\theta_0, \dots, \theta_{p^n-1} \in K$ και για $j = 1, \dots, p^n$, θέτουμε με

$$W_j = \langle \theta_0, \dots, \theta_{j-1} \rangle_K.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η G δρα σε αυτά τα θ_i, με την δράση να δίνεται ως εξής:

$$\sigma_\alpha(\theta_i) = \sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ l \end{pmatrix} \alpha^{i-l} \theta_l, \text{ για } 0 \le i \le k.$$

Στο άμεσο μέλλον θα συσχετίσουμε τα παραπάνω θ_i, ως αθροίσματα συγκεκριμένων m–ολόμορφων (πολυ)διαφορικών (ο ανυπόμονος αναγνώστης πρέπει να μεταπηδήσει στην Εξίσωση (1.45)).

Θεώρημα 1.3.22. *Παίρνουμε το $F/K(x)$ όπως παραπάνω. Τα $K[G]$–πρότυπα W_j, για τις διάφορες τιμές του $j = 1, \ldots, p^n$ είναι αδιάσπαστα, και*

$$\Omega_F(m) \simeq \bigoplus_{j=1}^{p^n} W_j^{d_j},$$

όπου το d_{p^n} ισούται με $\Gamma_{p^n-1}(m) - 2m + 1$ και μας δίνει πόσες φορές η ομαλή αναπαράσταση της G εμφανίζεται στον $\Omega_F(m)$, ενώ η αδιάσπαστη αναπαράσταση W_j, εμφανίζεται $d_j = \Gamma_{j-1}(m) - \Gamma_j(m)$ φορές, για κάθε $j = 1, \ldots, p^n - 1$, και για κάθε $m > 1$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\omega_{k,\nu}^m$ ένα τυχαίο στοιχείο της βάσης του $\Omega_F(m)$ και $\sigma_\alpha \in G$, για ένα $\alpha \in \mathbb{F}_q$. Τότε
(1.41)

$$\sigma_\alpha(\omega_{k,\nu}^m) = x^\nu (y+\alpha)^k [g_k(x)]^{-1} (dx)^{\otimes m} = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \alpha^{k-i} y^i x^\nu [g_k(x)]^{-1} (dx)^{\otimes m}.$$

Για $0 \leq i \leq k$, θέτουμε με $h_{i,k}(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - a_j)^{\nu_{ji}(m) - \nu_{jk}(m)}$. Καθώς $0 \leq i \leq k$, έχουμε ότι $\nu_{ji}(m) \geq \nu_{jk}(m)$. Συνεπώς

$$K[x] \ni h_{i,k}(x) = \sum_{e=0}^{n(i,k,m)} b_e^{(i,k,m)} x^e, \tag{1.42}$$

με $n(i,k,m) = \Gamma_i(m) - \Gamma_k(m)$ και $b_{n(i,k,m)}^{(i,k,m)} = 1$. Από τις Εξισώσεις (1.41), (1.42) και (1.37) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\omega_{k,\nu}^m) &= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \alpha^{k-i} y^i x^\nu [g_i(x)]^{-1} h_{i,k}(x) (dx)^{\otimes m} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{e=0}^{n(i,k,m)} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \alpha^{k-i} y^i x^{\nu+e} [g_i(x)]^{-1} b_e^{(i,k,m)} (dx)^{\otimes m}. \end{aligned}$$

Καθώς $0 \leq e \leq \Gamma_i(m) - \Gamma_k(m)$, έχουμε ότι $0 \leq \nu + e \leq \Gamma_i(m) - 2m$. Αυτό σημαίνει ότι το $y^i x^{\nu+e} [g_i(x)]^{-1} (dx)^{\otimes m}$ είναι στοιχείο της βάσης, δηλαδή το $\omega_{i,\nu+e}^m$. Συνεπώς, έχουμε ότι η G–δράση στα στοιχεία της βάσης του $\Omega_F(m)$, δίνεται από

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\omega_{k,\nu}^m) &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{e=0}^{n(i,k,m)} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \alpha^{k-i} b_e^{(i,k,m)} \omega_{i,\nu+e}^m \\ &= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \alpha^{k-i} \left\{ \sum_{e=0}^{n(i,k,m)} b_e^{(i,k,m)} \omega_{i,\nu+e}^m \right\}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του $\omega_{k,\nu}^m$ στο δεξί μέλος της Εξίσωσης (1.43) ισούται με την μονάδα.
Θέτουμε με $M_{k,\nu}^m$, να είναι εκείνο το $K[G]$–πρότυπο, που παράγεται από τα

$$\{\omega_{i,\nu+e}^m | 0 \leq i \leq k, \ 0 \leq e \leq n(i,k,m)\}.$$

Οι ακόλουθες περιπτώσεις διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στην διάσπαση του $M_{k,\nu}^m$, η οποία και θα ακολουθήσει:

- Η συνθήκη $i = k$, έχει σαν συνέπεια $e = 0$ με τα διαφορικά του $M^m_{k,\nu}$ που ικανοποιούν αυτήν την συνθήκη, να είναι της μορφής $\{\omega^m_{k,\nu}\}$, ενώ
- Οι συνθήκες $e = 0$ και $i \neq k$ ικανοποιούνται από τα διαφορικά του $M^m_{k,\nu}$, που έχουν μορφή $\{\omega^m_{i,\nu} |\ 0 \leq i \lneqq k\}$.

Έχοντας αυτά υπόψιν, βλέπουμε ότι

$$M^m_{k,\nu} = N^m_{k,\nu} \oplus U^m_{k,\nu}, \tag{1.44}$$

σαν $K[G]$–πρότυπα, όπου τα $N^m_{k,\nu}$ και $U^m_{k,\nu}$ γεννούνται αντίστοιχα από τα σύνολα:

$$\{\omega^m_{i,\nu+e} | 0 \leq i \lneqq k,\ 0 \lneqq e \leq n(i,k,m)\}, \text{ και } \{\theta_0, \ldots, \theta_k\},$$

όπου

$$\begin{aligned} \theta_i \ &:= \ \theta_i^{(k,\nu,m)} = \\ \sum_{e=0}^{n(i,k,m)} b_e^{(i,k,m)} \omega^m_{i,\nu+e} &= \begin{cases} b_0^{(i,k,m)} \omega^m_{i,\nu} + \sum_{e=1}^{n(i,k,m)} b_e^{(i,k,m)} \omega^m_{i,\nu+e}, & \text{αν } i \neq k, \\ \omega^m_{k,\nu}, & \text{αν } i = k. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.45}$$

Παρατηρούμε ότι η διάσπαση της Εξίσωσης (1.44) είναι μια διάσπαση στην κατηγορία των K–διανυσματικών χώρων, καθώς μπορούμε να επιλέξουμε το μοντέλο της καμπύλης μας τέτοιο ώστε $b_0 \neq 0$ (Παρατήρηση 1.3.23).

Η $K[G]$–δράση στα $N^m_{k,\nu}$ δίνεται από:

$$\sigma_\alpha(\omega^m_{i,\nu+e}) = \sum_{\delta=0}^{i} \sum_{\theta=0}^{n(\delta,i,m)} \begin{pmatrix} i \\ \delta \end{pmatrix} \alpha^{i-\delta} b_\theta^{(\delta,i,m)} \omega^m_{\delta,\nu+e+\theta}. \tag{1.46}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} 0 \lneqq e + \theta \ &\leq \ n(i,k,m) + n(\delta,i,m) \\ &= \ \Gamma_i(m) - \Gamma_k(m) + \Gamma_\delta(m) - \Gamma_i(m) \\ &= \ n(\delta,k,m), \end{aligned}$$

βλέπουμε ότι η δράση είναι καλά ορισμένη, δηλαδή $\omega^m_{\delta,\nu+e+\theta} \in N^m_{k,\nu}$. Όμοια, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (1.43) για τα θ_i (μπορούμε να συγκρίνουμε και με την [62, σελ. 153, Εξ. (7)]), έχουμε ότι την $K[G]$–δράση στο $U^m_{k,\nu}$ να δίνεται από

$$\sigma_\alpha(\theta_i) = \sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ l \end{pmatrix} \alpha^{i-l} \theta_l, \text{ για } 0 \leq i \leq k. \tag{1.47}$$

Συνεπώς οι χώροι $N^m_{k,\nu}$ και $U^m_{k,\nu}$ είναι πράγματι $K[G]$–πρότυπα, με συνέπεια η Εξίσωση (1.44), να είναι στην πραγματικότητα μια διάσπαση στην κατηγορία των $K[G]$–προτύπων για το $M^m_{k,\nu}$.

Παρατήρηση 1.3.23. *Στην Εξίσωση (1.45), όπου και ορίσαμε τα θ, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b_0^{(i,k,m)} \neq 0$, για να έχουμε τους επιθυμητούς όρους $\omega^m_{i,\nu}$. Πράγματι ο $b_0^{(i,k,m)}$ είναι απλά ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $h_{i,k}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - a_j)^{\nu_{ji}(m)-\nu_{jk}(m)}$, ο οποίος ισούται με μηδέν όταν οποιαδήποτε από τις ρίζες του a_j είναι η μηδενική. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε, αφού πρώτα εφαρμόσουμε έναν αμφίρητο μετασχηματισμό (ο οποίος δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια κατάλληλη μεταφορά), ότι τα $a_j \neq 0$ στην Εξίσωση (1.32), για όλες τις τιμές του $1 \leq j \leq r$.*

Τώρα παρουσιάζουμε ένα επιχείρημα που μας βοηθάει στην μέτρηση των αδιάσπαστων προτύπων που συμμετέχουν στην γραφή του $\Omega_F(m)$ σαν άθροισμα από αδιάσπαστα $K[G]$–πρότυπα:
Παίρνουμε το $0 \leq k_0 \leq p^n - 1$ να είναι μέγιστο, έτσι ώστε $\Gamma_{k_0}(m) - 2m \geq 0$ και θέτουμε $0 \leq \Gamma_{k_0}(m) - 2m = \nu_0$. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την παραπάνω υπόθεση $k_0 = p^n - 1$. Αν βρισκόμασταν στην περίπτωση όπου $m = 1$, μια επιτρεπτή τιμή για το k_0 θα ήταν η $p^n - 2$.
Σ'αυτό το σημείο ας θυμηθούμε ότι ο $\Omega_F(m)$ παράγεται από τα

$$\{\omega^m_{k,\nu} | 0 \leq k \leq k_0,\ 0 \leq \nu \leq \Gamma_k(m) - 2m\}.$$

Ισχυρισμός:

$$\Omega_F(m) = N^m_{k_0,\nu_0} \bigoplus_{j=0}^{\nu_0} U^m_{k_0,j}, \tag{1.48}$$

σαν $K[G]$–πρότυπα, με τα N_{k_0,ν_0} να παράγονται από τα

$$\{\omega^m_{k,\nu} | 0 \leq k \lneqq k_0,\ 0 \leq \nu_0 \lneqq \nu \leq \Gamma_k(m) - 2m\} \tag{1.49}$$

και για κάθε $0 \leq j \leq \nu_0$, καθένα από τα $U^m_{k_0,j}$ παράγεται από τα

$$\{\theta_i^{(k_0,j,m)} |\ 0 \leq i \leq k_0\},$$

όπου τα $\theta_i^{(k_0,j,m)}$ δίνονται από την Εξίσωση (1.45) .
Απόδειξη του Ισχυρισμού:
Παρατηρούμε ότι $\dim_K U^m_{k_0,j} = k_0 + 1$, για κάθε $0 \leq j \leq \nu_0$.

Ας θυμηθούμε ότι το $\theta_i^{(k_0,j,m)}$ ισούται με

$$\begin{aligned} \theta_i^{(k_0,j,m)} &= \sum_{e=0}^{n(i,k_0,m)} b_e^{(i,k_0,m)} \omega^m_{i,j+e} \\ &= \begin{cases} b_0^{(i,k_0,m)} \omega^m_{i,j} + \sum_{e=1}^{n(i,k_0,m)} b_e^{(i,k_0,m)} \omega^m_{i,j+e}, & \text{αν } i \neq k_0, \\ \omega^m_{k_0,j}, & \text{αν } i = k_0, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Χρειαζόμαστε τις ακόλουθες Προτάσεις για την απόδειξη του Ισχυρισμού:

Πρόταση 1.3.24. *$U^m_{k_0,j} \cap N^m_{k_0,\nu_0} = \{0\}$, για κάθε $0 \leq j \leq \nu_0$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Εξίσωση (1.50), κάθε $\theta_i^{(k_0,j,m)}$, θα περιέχει σαν προσθετέο κάποια $b_0^{(i,k_0,m)} \omega^m_{i,j}$, με $0 \leq j \leq \nu_0$, από τον ορισμό όμως του $N^m_{k_0,\nu_0}$, Εξίσωση (1.49), τα στοιχεία αυτά δεν ανήκουν στο $N^m_{k_0,\nu_0}$. Τα στοιχεία αυτά $b_0^{(i,k_0,m)} \omega^m_{i,j}$, δεν απλοποιούνται από κανέναν γραμμικό συνδυασμό στοιχείων που ανήκουν στο $U^m_{k_0,j}$. Συνεπώς στο $N^m_{k_0,\nu_0}$ δεν μπορεί να ανήκει κανένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $\theta_i^{(k_0,j,m)}$. $\square$

Πρόταση 1.3.25. *$U^m_{k_0,j} \cap U^m_{k_0,j'} = \{0\}$, για κάθε $j \neq j'$, με $0 \leq j \lneqq j' \leq \nu_0$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε κάποιο j και παίρνουμε $j' \neq j$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $j \lneqq j'$. Σκεφτόμαστε γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων $\theta_i^{(k_0,j',m)}$, στον $U^m_{k_0,j'}$.

Με την υπόθεση $j \lneqq j'$, η Εξίσωση (1.50) μας λέει ότι το $b_0^{(i,k_0,m)}\omega^m_{i,j}$, σαν προσθετέος ενός γραμμικού συνδυασμού των $\theta_i^{(k_0,j,m)}$, δεν αποτελεί προσθετέο ενός γραμμικού συνδυασμού στοιχείων $\theta_i^{(k_0,j',m)}$, δηλαδή, $\omega^m_{i,j} \notin \langle\theta_i^{(k_0,j',m)}\rangle_{0\leq i\leq k_0}$. □

Βλέπουμε ότι το M_{k_0,ν_0}, είναι ένα $\Omega_F(m)$–υποπρότυπο συνδιάστασης $(k_0+1)\nu_0$ και ότι από την Εξίσωση (1.44), το ίδιο θα ισχύει για το $N^m_{k_0,\nu_0} \oplus U^m_{k_0,\nu_0}$. Ο Ισχυρισμός τώρα έπεται από τις Προτάσεις 1.3.24 και 1.3.25, αν παρατηρήσουμε ότι $\dim_K \bigoplus_{j=0}^{\nu_0-1} U^m_{k_0,j} = \nu_0(k_0+1)$.

Σημειώνουμε επίσης ότι, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (1.47), για κάθε j, τα $U^m_{k_0,j}$ που εμφανίζονται στην Εξίσωση (1.48), είναι $K[G]$–ισόμορφα. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας πάλι την Εξίσωση (1.45), μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό $f : U^m_{k_0,0} \longrightarrow U^m_{k_0,1}$ ως εξής: η f απεικονίζει $\omega_{i,\nu} \mapsto \omega_{i,\nu+1}$, με $0 \leq \nu \leq \nu_0$ και $0 \leq i \leq k_0$. Συνεπώς μπορούμε να ξεχάσουμε τον δείκτη j στον συμβολισμό του $U^m_{k_0,j}$ και να σκεφτούμε το $\bigoplus_{j=0}^{\nu_0} U^m_{k_0,j}$, ως ν_0+1 αντίγραφα του $U^m_{k_0}$. Ξαναγράφοντας τότε την Εξίσωση (1.48), έχουμε ότι

$$\Omega_F(m) = N^m_{k_0,\nu_0} \oplus [U^m_{k_0}]^{\Gamma_{k_0}-2m+1}. \tag{1.51}$$

Αυτό ολοκληρώνει και το μηδενικό βήμα[8] για την απόδειξη του Θεωρήματος. Συνεχίζουμε με το πρώτο βήμα. Παίρνουμε το $N^m_{k_0,\nu_0}$, στην θέση του $\Omega_F(m)$:
Παίρνουμε το $0 \leq k_1 \lneqq k_0 = p^n - 1$ να είναι μέγιστο και τέτοιο ώστε $\Gamma_{k_1}(m) - 2m \geq 0$ και θέτουμε έπειτα $0 \leq \Gamma_{k_1}(m) - 2m = \nu_1$. Τότε, επαναλαμβάνοντας τον ισχυρισμό του προηγούμενου βήματος, μπορούμε να δούμε ότι:

$$N^m_{k_0,\nu_0} = N^m_{k_1,\nu_1} \bigoplus_{j=0}^{\nu_1} U^m_{k_1,j}, \tag{1.52}$$

όπου το $N^m_{k_1,\nu_1}$ παράγεται από

$$\{\omega^m_{k,\nu} | 0 \leq k \lneqq k_1,\ 0 \leq \nu_0 \lneqq \nu_1 \lneqq \nu \leq \Gamma_k(m) - 2m\}$$

και για κάθε $0 \leq j \leq \nu_1$, καθένα από τα $U^m_{k_1,j}$ παράγεται από

$$\{\theta_i^{(k_1,j,m)} |\ 0 \leq i \leq k_1\},$$

με τα $\theta_i^{(k_1,j,m)}$ να δίνονται πάντα από την Εξίσωση (1.45). Ας σημειώσουμε ότι για $0 \leq j \leq \nu_1$, $\dim_K U^m_{k_1,j} = k_1 + 1$, όλα τα $U^m_{k_1,j}$ που εμφανίζονται στην Εξίσωση (1.52) είναι $K[G]$–ισόμορφα. Υπάρχουν ακριβώς $\nu_1 - \nu_0$ τέτοια πρότυπα, με $0 \lneqq \nu_1 - \nu_0 = \Gamma_{k_1}(m) - \Gamma_{k_0}(m)$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση (1.52), ξεχνώντας τώρα τον δείκτη j, σκεπτόμενοι το $\bigoplus_{j=0}^{\nu_1} U^m_{k_1,j}$, σαν $\Gamma_{k_1}(m) - \Gamma_{k_0}(m)$ αντίγραφα του U_{k_1}:

$$N^m_{k_0,\nu_0} = N^m_{k_1,\nu_1} \oplus [U^m_{k_1}]^{\Gamma_{k_1}(m)-\Gamma_{k_0}(m)}. \tag{1.53}$$

Επαναλαμβάνουμε τώρα το παραπάνω επιχείρημα για το $N^m_{k_\zeta,\nu_\zeta}$, για $0 \leq \zeta \leq p^n - 1$, συνεχίζοντας την παραπάνω διάσπαση και αντικαθιστώντας πάντα τα $N^m_{k_\zeta,\nu_\zeta}$, με $N^m_{k_{\zeta-1},\nu_{\zeta-1}}$.

[8] το ονομάζουμε έτσι, για να συμβαδίζουμε με τους δείκτες.

Από τις Εξισώσεις (1.51), (1.53) καθώς και από την όλη επαναλαμβανόμενη διαδικασία, είμαστε τώρα σε θέση να εκφράσουμε τον $\Omega_F(m)$, ως ευθύ άθροισμα των $U^m_{k_\zeta,\nu_\zeta}$. Μαζεύοντας αυτά τα $K[G]$–πρότυπα ίδιας διάστασης παίρνουμε

$$\Omega_F(m) \simeq \oplus_{\zeta=0}^{p^n-1}[U^m_{k_\zeta}]^{\Lambda_{k_\zeta}},$$

με $\Lambda_{k_0} = \Gamma_{p^n-1}(m) - 2m + 1$ και $\Lambda_{k_\zeta} = \Gamma_{k_\zeta}(m) - \Gamma_{k_{\zeta-1}}(m)$, για όλα τα βήματα: $1 \leq \zeta \leq p^n - 1$. Από την Εξίσωση (1.47), όλα τα $U^m_{k_\zeta}$ με την ίδια διάσταση, ας πούμε j, είναι $K[G]$–ισόμορφα, συνεπώς είναι όλα ισόμορφα με το U^m_{j-1}. Οργανώνοντας ξανά τους δείκτες μας για να είμαστε συνεπείς με την διάσταση, θέτουμε $j - 1 = k_\zeta$ (παρατηρούμε ότι με αυτόν τον συμβολισμό έχουμε $k_\zeta + 1 = k_{\zeta-1}$), και παίρνουμε την τελική μας διάσπαση που είναι

$$\begin{aligned}\Omega_F(m) &\simeq \oplus_{j=1}^{p^n}[U^m_{j-1}]^{\Lambda_{j-1}}, \text{ ή} \\ \Omega_F(m) &\simeq \oplus_{j=1}^{p^n} T_j. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Το πρότυπο T_{p^n} είναι ευθύ άθροισμα των προτύπων $\Gamma_{p^n-1}(m) - 2m + 1$ διάστασης p^n, ενώ το πρότυπο T_j είναι το ευθύ άθροισμα των προτύπων $\Gamma_{j-1}(m) - \Gamma_j(m)$, διάστασης j, όπου $1 \leq j \leq p^n - 1$.

Δείχνοντας την διάσπαση, αρκεί να δείξουμε τώρα ότι τα πρότυπα U^m_{j-1} είναι πράγματι αδιάσπαστα, και να πάρουμε έτσι την ζητούμενη αναπαράσταση που να είναι το ευθύ άθροισμα αδιάσπαστων αναπαραστάσεων.
Θέτουμε με $\Omega_F(m) \simeq \oplus_{i=1}^{\eta} M_i$, να συμβολίζει μια διάσπαση σε αδιάσπαστα $K[G]$–πρότυπα, του χώρου των ολόμορφων m-(πολυ)διαφορικών. Τότε

$$\eta \geq \sum_{j=1}^{p^n-1} (\Gamma_{j-1}(m) - \Gamma_j(m)) + \Gamma_{p^n-1}(m) - 2m + 1 = \Gamma_0(m) - 2m + 1. \tag{1.55}$$

Καθώς η G είναι μια p–ομάδα, γνωρίζουμε ότι η μονοδιάστατη ταυτοτική αναπαράσταση, ας την πούμε τ, είναι η μόνη ανάγωγη αναπαράσταση της G ([85, σελ.187, Πρόταση 1.1]). Τότε, αν τα M_i^G συμβολίζουν τα $K[G]$– υποπρότυπα που σταθεροποιούν τα στοιχεία των M_i, τα M_i^G θα περιέχουν την τ σαν υποπαράσταση, έτσι $\dim_K M_i^G \geq 1$. Συνεπώς

$$\eta \leq \dim_K \Omega_F^G(m). \tag{1.56}$$

Είναι επίσης γνωστό ([13, σελ. 271, V.2.2], [70, σελ.83, Θεώρημα III.4.6]), ότι τα διαφορικά του $K(x)$ μπορούν να ανορθωθούν (lifted) σε G–αναλλοίωτα διαφορικά του F, μέσω της απεικόνισης του Cotrace. Έτσι $\Omega_F^G(m) = \{\kappa(dx)^{\otimes m} \mid \kappa \in K(x)$ με $\mathrm{div}_F(\kappa(dx)^{\otimes m}) \geq 0\}$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_F(\mathrm{Cotr}_{F/K(x)}(\kappa(dx)^{\otimes m})) &:= \mathrm{div}_F(\kappa(dx)^{\otimes m}) \\ &= \mathrm{Con}_{F/K(x)}(\mathrm{div}_K(\kappa(dx)^{\otimes m})) + m\mathrm{Diff}(F/K(x)).\end{aligned} \tag{1.57}$$

Εκτιμώντας την Εξίσωση (1.57), στις θέσεις $P_i \in \mathbb{P}_F$ έχουμε, για κάθε $1 \leq i \leq r$ και για κάθε $\kappa(dx)^{\otimes m} \in \Omega_F^G(m)$, ότι

$$v_{P_i}(\mathrm{div}_F(\kappa(dx)^{\otimes m})) = p^n v_{p_i}(\kappa) + m(\Phi(i) + 1)(p^n - 1) \geq 0,$$

με συνέπεια

$$v_{p_i}(\kappa) \geq -\frac{m(\Phi(i) + 1)(p^n - 1)}{p^n},$$

ή χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (1.36)

$$v_{p_i}(\kappa) \geq -\nu_{i0}(m), \text{για κάθε } 1 \leq i \leq r. \tag{1.58}$$

Για $Q \in \mathbb{P}_{K(x)}$, με $Q \neq p_i, p_\infty$, παίρνοντας $\kappa(dx)^{\otimes m} \in \Omega_F^G(m)$ και χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (1.57) και (1.33), παίρνουμε ότι

$$v_Q(\kappa) \geq 0, \tag{1.59}$$

ενώ για την άπειρη θέση του $K(x)$, η ίδια υπόθεση και Εξισώσεις μας δίνουν ότι

$$v_{p_\infty}(\kappa) \geq 2m. \tag{1.60}$$

Μαζεύοντας τις Εξισώσεις (1.58), (1.59) καθώς και (1.60), μπορούμε να γράψουμε το $\Omega_F^G(m)$ εναλλακτικά σαν

$$\Omega_F^G(m) = \left\{ \frac{c(x)}{\prod_{i=1}^r (x-a_i)^{\nu_{i0}(m)}} | c(x) \in K[x], \deg c(x) \leq \sum_{i=1}^r \nu_{i0}(m) - 2m \right\}.$$

Συνεπώς

$$\dim_K \Omega_F^G(m) = \Gamma_0(m) - 2m + 1. \tag{1.61}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό, μαζί με τις Εξισώσεις (1.55) και (1.56) έχουμε ότι $\eta = \Gamma_0(m) - 2m + 1$. Πράγμα που μας δείχνει ότι τα $K[G]$–πρότυπα που εμφανίζονται σε καθένα από τα T_j, στην διάσπαση του $\Omega_F(m)$ της Εξίσωσης (1.54), είναι όλα αδιάσπαστα για κάθε $1 \leq j \leq p^n$.

Το θεώρημα έπεται έτσι θέτοντας όπου $W_j = U_{j-1}^m$ και $d_j = \Lambda_{j-1}$. □

Παρατήρηση 1.3.26. *Ένας άλλος τρόπος για να δούμε ότι τα W_j, για $j \neq 0$ είναι αδιάσπαστα, είναι να παρατηρήσουμε ότι αν τα W_j μπορούσαν να διασπαστούν, τότε $W_j = M_1 \oplus M_2$ για κάποια M_i, με το καθένα από τα M_i θα περιείχε ένα αντίγραφο του $U_{0,\nu}^m$, και έτσι το W_j θα περιείχε την $U_{0,\nu}^m \oplus U_{0,\nu}^m$ σαν υποπαράσταση. Καθώς όμως $\dim_K W_j^G \leq 1$, $(\dim_K W_j^G \leq \dim_K K[G]^G = 1)$, αυτό είναι άτοπο!*

1.3η′ Μια εικασία που αφορά αβελιανές ομάδες τάξης $\mathbf{p^n}$

Πιστεύουμε ότι για μια τυχαία Galois p– επέκταση σωμάτων συναρτήσεων, F/E, με αβελιανή ομάδα Galois, κάποιος μπορεί να υπολογίσει πλήρως την δομή του χώρου των ολόμορφων m–(πολυ)διαφορικών σαν $K[G]$–πρότυπο χρησιμοποιώντας τις αναλλοίωτες του Boseck ως εξής:

Εικασία 1. *Θέτουμε G, να είναι μια αβελιανή p–ομάδα αυτομορφισμών του F. Παίρνουμε $E = F^G$ και συμβολίζουμε με g_E το γένος του E και με $g_F \geq 2$, το γένος του F. Παίρνουμε m έναν φυσικό αριθμό με $m > 1$, συμβολίζουμε με δ_i τον εκθέτη του different της επέκτασης και με e_i τους δείκτες διακλάδωσης των διακλαδισμένων πρώτων του E στον F. Η ομαλή αναπαράσταση της G εμφανίζεται $\Gamma_{p^n-1}(m) + (g_E - 1)(2m-1)$ φορές στην αναπαράσταση της G στον χώρο $\Omega_F(m)$. Για $k = 1, \ldots, [F:E]-1$, η αδιάσπαστη αναπαράσταση βαθμού k, εμφανίζεται $\Gamma_{k-1}(m) - \Gamma_k(m)$ φορές. Όπου $\Gamma_k(m) = \sum_i \nu_{ik}(m)$, είναι οι αναλλοίωτες του Boseck, με τα i να τρέχουν τους διακλαδισμένους πρώτους του E στο F και οι ποσότητες $\nu_{ik}(m)$, δίνονται*

$$\left\lfloor \frac{m\delta_i + \{\text{εκτίμηση του } k \text{ στοιχείου της } E\text{–βάσης του } F \text{ από μια εκτίμηση του } F\}}{p^{e_i}} \right\rfloor,$$

όπου τα στοιχεία της βάσης εκτιμώνται από μια κανονικοποιημένη εκτίμηση που καθορίζεται από μια θέση του F υπέρ μιας διακλαδισμένης θέσης του E, ενώ το $\lfloor(\cdot)\rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του $(\cdot)$.

Για την περίπτωση $m = 1$, η παραπάνω Εικασία έχει αποδειχτεί για κάποιες περιπτώσεις, καθώς έχει την μορφή:

Εικασία 2.

(i) *Άγρια Διακλάδωση:*
Αν η G είναι μια p–ομάδα, $m = 1$ και υπάρχει μια θέση $\mathbb{P}_E$ που να διακλαδίζεται πλήρως στον F, με $F^G = E$, τότε η ομαλή αναπαράσταση της G εμφανίζεται $d_{p^n} := g_E$ φορές στην αναπαράσταση της G στον $\Omega_F(1)$. Για $k = 1, \ldots, p^n - 1$, η αδιάσπαστη αναπαράσταση βαθμού k, εμφανίζεται $d_k := \Gamma_{k-1}(1) - \Gamma_k(1) + \beta$ φορές, με β να ισούται με -1, στην περίπτωση που $k = p^n - 1$ και με μηδέν διαφορετικά. Οι αναλλοίωτες του Boseck ορίζονται όπως και πριν, θέτοντας $m = 1$.

(ii) *Ήμερη διακλάδωση:*
Αν $m = 1$ και η F/E είναι διακλαδιζόμενη επέκταση βαθμού n, όπου μ.κ.δ.$(n, p) = 1$, τότε για $k = 0, \ldots, n-1$, έχουμε n διαφορετικές ανάγωγες αναπαραστάσεις βαθμού 1. Η k αναπαράσταση εμφανίζεται $d_{n-k} := \Gamma_{n-k}(1) - 1 + g_E + \beta$ φορές στην αναπαράσταση της G στον $\Omega_F(1)$, με το β να ισούται με 1, στην περίπτωση που το$k = 0$ και με μηδέν διαφορετικά. Τα $\Gamma_k(1) = \sum_i \nu_{ik}(1)$, είναι οι αναλλοίωτες του Boseck, το i τρέχει τις διακλαδισμένες θέσεις του E στο F και οι ποσότητες $\nu_{ik}(1)$, δίνονται, όπως είδαμε, ως

$$\left\langle \frac{\{\text{εκτίμηση του } k \text{ στοιχείου της } E\text{–βάσης του } F \text{ από μια εκτίμηση του } F\ \}}{e_i} \right\rangle,$$

όπου η εκτίμηση στα στοιχεία της βάσης είναι κανονικοποιημένη, e_i είναι οι αντίστοιχοι δείκτες διακλάδωσης και $\langle(\cdot)\rangle$ συμβολίζει το κλασματικό μέρος του $(\cdot)$.

Η πρώτη περίπτωση έχει αποδειχτεί όταν η G είναι κυκλική ή στοιχειώδης αβελιανή τάξης p^n, με $n \geq 1$. Η δεύτερη, αποτελεί το Θεώρημα του Hurwitz, (δείτε το Θεώρημα 1.3.16). Αξίζει να παρατηρήσουμε τον εξέχοντα ρόλο των αναλλοίωτων του Boseck $\Gamma_k(m)$, που ορίστηκαν όπως είδαμε σαν ποσότητες που προέκυψαν από τις βάσεις του Boseck.

Ας δούμε τώρα γιατί αυτές οι εικασίες μας ενδιαφέρουν, πέρα του ότι φυσικά αποτελούν από μόνες τους ανοικτά προβλήματα, και πού θα μας βοηθήσουν στην περίπτωση που αυτές αποδειχτούν:

Συμβολίστε με $\mathscr{C}$ τον Cartier operator (δείτε για παράδειγμα στους [49, σελ. 349]), τότε από την θεωρία των $\frac{1}{p}$–γραμμικών απεικονίσεων, είναι γνωστό ότι ο $\Omega_F(1)$ διασπάται ως

$$\Omega_F(1) = \Omega_F^s(1) \bigoplus \Omega_F^n(1),$$

όπου το $\Omega_F^s(1)$ συμβολίζει το semisimple κομμάτι του $\Omega_F(1)$, που είναι ο K–διανυσματικός χώρος που παράγεται από το σύνολο $\{\omega \in \Omega_F(1) |\ \mathscr{C}\omega = \omega\}$, ενώ το

$\Omega_F^n(1)$ συμβολίζει το μηδενοδύναμο (nilpotent) κομμάτι των αναλυτικών διαφορικών, δηλαδή τον K–διανυσματικό χώρο που παράγεται από τα $\{\omega \in \Omega_F(1) | \mathscr{C}^i\omega = 0,\ \text{για κάποιο } i \geq 1\}$. Μάλιστα

$$\gamma_X = p\text{–rank} = \dim_K \Omega_F^s(1). \tag{1.62}$$

Τώρα, αν η Εικασία 2 (i) αποδειχτεί, μαζί με το κύριο αποτέλεσμα των [49], θα μας δώσει πλήρως την δομή του μηδενοδύναμου κομματιού $\Omega_F(1)$, κάτι που αποτελεί ένα ανοικτό πρόβλημα, όσο εμείς γνωρίζουμε. Είμαστε ήδη σε θέση να υπολογίσουμε το μηδενοδύναμο κομμάτι του $\Omega_F(1)$, και για τις δύο περιπτώσεις που η G είναι κυκλική και στοιχειώδης αβελιανή, δηλαδή για τις περιπτώσεις που η Εικασία αυτή έχει ήδη αποδειχτεί, συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των [82], [62] και [49].

Ακόμη ένας λόγος παρατίθεται στο τέλος της επόμενης παραγράφου.

Όσον αφορά τις ενδείξεις πού μπορούν να βασίσουν αυτές τις εικασίες, πέρα από ότι έχουν αποδειχτεί για πολλές περιπτώσεις, είναι το ότι οι περιπτώσεις που έχουν αποδεχτεί είναι μεταξύ τους «ακραίες». Για παράδειγμα εμείς την αποδείξαμε για τις ακραίες περιπτώσεις αβελιανών ομάδων τάξης p^n, κυκλικών $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ και για στοιχειώδη αβελιανών ομάδων $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Και πώς αυτό μπορεί να γίνει; Ποιες είναι οι πιθανές δυσκολίες;
Καθώς η G είναι αβελιανή, διασπάται σαν ευθύ άθροισμα κυκλικών p–ομάδων. Έτσι ένα σώμα συναρτήσεων με την ομάδα G σαν την ομάδα Galois μπορεί να προκύψει σαν το compositum από κάποια κυκλικά σώματα συναρτήσεων της παραγράφου 1.3β′ με κάποια στοιχειώδης αβελιανή σώματα συναρτήσεων της παραγράφου 1.3ε′. Μια δυσκολία που παρουσιάζεται βλέποντας το πρόβλημα υπό αυτό το πρίσμα είναι ο υπολογισμός των Boseck αναλλοίωτων και συνεπώς πως συμπεριφέρονται οι βάσεις των ολόμορφων m– διαφορικών σε αυτά τα compositums (ακόμα και για την «απλή» $m = 1$ περίπτωση).

1.3ϑ′ Μια εφαρμογή στους τοπικούς deformation functors

Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια p–ομάδα. Ο Κοντογεώργης, στην εργασία του [37], παρατήρησε ότι ο εφαπτόμενος χώρος του καθολικού deformation functor $H^1(G, \mathscr{T}_X)$, μπορεί να υπολογιστεί με βάση τα covariants των 2-αναλυτικών (πολυ)διαφορικών μέσω της Εξίσωσης:

$$H^1(G, \mathscr{T}_X) = \Omega_X^{\otimes 2} \otimes_{K[G]} K, \tag{1.63}$$

όπου $\Omega_X^{\otimes 2} := \Omega_X(2)$. Σε αυτήν την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που πήραμε μέχρι το σημείο αυτό για να εκφράσουμε την διάσταση των παραπάνω χώρων συναρτήσει των Boseck αναλλοίωτων. Θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση διαμέσου του καθολικού (global deformation functor για την μελέτη του εφαπτόμενου χώρου $H^1(G, \mathscr{T}_{K[[t]]})$ του τοπικού deformation functor, όπως αυτός ορίζεται στους J.Bertin, A. Mézard στην εργασία τους [5].

Αυτό γίνεται διαμέσου των καλυμμάτων Katz-Gabber, [33], της προβολικής ευθείας, δηλαδή των καλυμμάτων Galois $\pi : X \to \mathbb{P}^1$, με μόνον ένα σημείο διακλάδωσης, το οποίο και διακλαδίζεται πλήρως, και με ομάδα Galois G. Για first order infinitesimal παραμορφώσεις της καμπύλης X, με ομάδα αυτομορφισμών G, μπορούμε να διασπάσουμε τον εφαπτόμενο χώρο $H^1(G, \mathscr{T}_X)$ ως εξής:

$$H^1(G, \mathscr{T}_X) = H^1(X/G, \pi_*^G(\mathscr{T}_X)) \oplus H^1(G, \mathscr{T}_{K[[t]]}). \tag{1.64}$$

Για την διάσταση του χώρου $H^1(X/G, \pi_*^G(\mathscr{T}_X))$ έχουμε, από τον Κοντογεώργη, τον τύπο

$$\dim_K H^1(X/G, \pi_*^G(\mathscr{T}_X)) = 3g_{X/G} - 3 + \left\lceil \frac{\delta}{p^n} \right\rceil, \tag{1.65}$$

όπου δ είναι ο εκθέτης του different στο μοναδικό σημείο διακλάδωσης, δείτε στην εργασία του [36, Εξίσωση (38)].

Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο Περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Η ομάδα G είναι κυκλική. Στην περίπτωση αυτή καθεμιά από τις αδιάσπαστες συνιστώσες του Θεωρήματος 1.3.7 έχει έναν μονοδιάστατο covariant υπόχωρο και συνεπώς

$$\begin{aligned} \dim_K \Omega_X^{\otimes 2} \otimes_{K[G]} K &= \sum_{\nu=1}^{p^n} d_\nu \\ &= 3(g_{X/G} - 1) + \Gamma_0(2) = -3 + \left\lfloor \frac{2\delta}{p^n} \right\rfloor . \end{aligned} \tag{1.66}$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (1.64),(1.65) και (1.66), καταλήγουμε στην

$$\dim_K H^1(G, \mathscr{T}_{K[[t]]}) = \left\lfloor \frac{2\delta}{p^n} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\delta}{p^n} \right\rceil ,$$

η οποία και συμπίπτει με τον υπολογισμό των Bertin–Mézard [5, Πρόταση 4.1.1].

Περίπτωση 2. Η ομάδα G είναι στοιχειώδης αβελιανή. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.3.22, για να καταλήξουμε έτσι στην

$$\dim_K H^1(G, \mathscr{T}_{K[[t]]}) = \sum_{j=1}^{p^n} d_j \cdot \dim_K (W_j \otimes_{K[G]} K) + 3 - \left\lceil \frac{\delta}{p^n} \right\rceil . \tag{1.67}$$

Πρόταση 1.3.27. *Για την διάσταση του χώρου $W_j \otimes_{K[G]} K$, υπολογίζουμε*

$$\dim_K W_j \otimes_{K[G]} K = \begin{cases} 1, & \text{αν } 1 \le j \le p \\ 2, & \text{αν } p+1 \le j \le p^n \text{ και } j \neq 0 \mod p \\ 1, & \text{αν } j = 0 \mod p \end{cases} .$$

Απόδειξη. Ταυτίζουμε την στοιχειώδη αβελιανή ομάδα τάξης p^n με την προσθετική ομάδα του σώματος $\mathbb{F}_{p^n}$. Το σώμα $\mathbb{F}_{p^n}$ αποτελεί έναν $\mathbb{F}_p$ διανυσματικό χώρο με βάση $1, e, e^2, \ldots, e^{n-1}$, για κάποιο στοιχείο e. Κάθε στοιχείο $a \in \mathbb{F}_{p^n}$ μας δίνει έναν αυτομορφισμό σ_a. Θα συμβολίζουμε με $\bar{W}_j = W_j \otimes_{K[G]} K$. Τα πρότυπα $\bar{W}_j$, δίνονται από την σχέση $W_j/(\sigma_a(w) - w)$, όπου το a τρέχει στο σώμα $\mathbb{F}_{p^n}$ και το w τρέχει τα στοιχεία του W_j.

Το πρότυπο $W_1 = \langle \theta_0 \rangle$ είναι ήδη G–αναλλοίωτο. Παρατηρούμε ότι $W_2 = \langle \theta_0, \theta_1 \rangle$ με την δράση να δίνεται από την σχέση $\sigma_a(\theta_0) = \theta_0$, $\sigma_a(\theta_1) = \theta_1 + a\theta_0$. Συνεπώς έχουμε μόνον μια σχέση στο πρότυπο των covariants $\bar{W}_2$, που είναι $\sigma_a(\theta_1) - \theta_1 = a\theta_0$ και που έχει σαν συνέπεια η εικόνα του θ_0 μέσα στο $\bar{W}_2$, $\bar{\theta}_0$ να είναι μηδέν.

Το πρότυπο W_3 γεννάται από τα $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ με την σχέση $\bar{\theta}_0 = 0$ να κληρονομείται στο $\bar{W}_3$. Επίσης έχουμε την σχέση $\sigma_a(\theta_2) = \theta_2 + a\theta_1 + a^2\theta_0$, που έχει σαν συνέπεια ότι το $\bar{\theta}_1 = 0$, στο $\bar{W}_3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι για $j+1 \leq p$ έχουμε τη σχέση $\bar{\theta}_0, \ldots, \bar{\theta}_{j-2} = 0$, στο $\bar{W}_j$. Τότε $\sigma_a(\theta_j) = \theta_j + a\theta_{j-1} + L$, όπου L είναι ένας $\mathbb{F}_{p^n}$ γραμμικός συνδυασμός των θ_ν, με $\nu \leq j-2$, που έχουν μηδενική εικόνα στο πρότυπο των covariants. Συνεπώς $\bar{\theta}_{j-1} = 0$ στο $\bar{W}_{j+1}$ και $\bar{W}_{j+1} = \langle \bar{\theta}_j \rangle$.

Για το πρότυπο W_{p+1} η κατάσταση είναι διαφορετική: Έχουμε $\sigma_a(\theta_p) = \theta_p + a^p\theta_0$, πράγμα που δεν μας δίνει καμιά καινούρια σχέση. Συνεπώς το $\bar{W}_{p+1}$ έχει διάσταση 2 και γεννάται από τα στοιχεία $\bar{\theta}_{p-1}, \bar{\theta}_p$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Για τα πρότυπα $\bar{W}_{p+\nu+1}$, $1 \leq \nu < p-1$ η επαγωγική υπόθεση είναι ότι $\bar{W}_{p+\nu+1} = \langle \bar{\theta}_{p-1}, \bar{\theta}_{p+\nu} \rangle$. Υπολογίζουμε ότι για $1 < \nu \leq p-1$

$$\sigma_a(\theta_{p+\nu}) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{p+\nu}{p+\mu} a^{\nu-\mu}\theta_{p+\mu} + \binom{p+\nu}{p-1} a^{\nu+1}\theta_{p-1}. \tag{1.68}$$

Σύμφωνα με την [12, Πρόταση 15.21] έχουμε $\binom{p+\nu}{p-1} = 0$, εκτός αν $\nu = p-1$. Συνεπώς, για $\nu < p-2$ και έπειτα από μερικούς υπολογισμούς, φτάνουμε στη σχέση

$$\sigma_a(\theta_{p+\nu+1}) = \theta_{p+\nu+1} + \nu a\theta_{p+\nu},$$

κάτι που έχει σαν συνέπεια ότι $\bar{\theta}_{p+\nu} = 0$, μέσα στο $\bar{W}_{p+\nu+2}$, συνεπώς $\bar{W}_{p+\nu+2} = \langle \bar{\theta}_{p-1}, \bar{\theta}_{p+\nu+1} \rangle$.

Καθώς $\bar{W}_{2p-1} = \langle \bar{\theta}_{p-1}, \bar{\theta}_{2p-2} \rangle$, είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε, από την Εξίσωση (1.68), για $\nu = p-1$, ότι

$$\sigma(\theta_{2p-1}) = \theta_{2p-1} - a\theta_{2p-2} + a^p\theta_{p-1}.$$

Συνεπώς στο $\bar{W}_{2p}$ έχουμε τις σχέσεις $a\bar{\theta}_{2p-2} = a^p\bar{\theta}_{p-1}$, για $a \in \mathbb{F}_{p^n}$. Παίρνοντας $a = 1$, έχουμε ότι $\bar{\theta}_{2p-2} = \bar{\theta}_{p-1}$ και έπειτα παίρνοντας $a = e$, έχουμε $\bar{\theta}_{2p-2} = e^{p-1}\bar{\theta}_{2p-2}$. Συνεπώς $\bar{\theta}_{p-1} = \bar{\theta}_{2p-2} = 0$. Έτσι, $\bar{W}_{2p} = \langle \bar{\theta}_{2p-1} \rangle$.

Συνεχίζουμε με το πρότυπο $\bar{W}_{2p+1}$, υπολογίζοντας ότι

$$\sigma_a(\theta_{2p}) = \theta_{2p} + 2a^p\theta_p + a^{p^2}\theta_0,$$

συνεπώς το $\bar{W}_{2p+1} = \langle \bar{\theta}_{2p-1}, \bar{\theta}_{2p} \rangle$ έχει διάσταση 2.

Αν $n \geq 2$ συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: τα πρότυπα $\bar{W}_{2p+\nu}$, $1 \leq \nu \leq p-1$ έχουν διάσταση 2 και το $\bar{W}_{3p}$ είναι μονοδιάστατο. Ένα τελευταίο επαγωγικό βήμα μας δείχνει ότι το $\bar{W}_{\lambda p+\nu}$, για τις τιμές $\lambda \leq p^{n-1}$, έχει τις ζητούμενες διαστάσεις. $\square$

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε έναν κλειστό τύπο για το άθροισμα της Εξίσωσης (1.67). Από την κατασκευή του καλύμματος Katz–Gabber υπάρχει μόνο μια διακλαδισμένη θέση και το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στα 2–αναλυτικά (πολυ)διαφορικά ($m = 2$). Έτσι θέτουμε

$$\Gamma_j(2) := \Gamma_j = \left\lfloor \frac{2(p^n-1)(\Phi+1) + j\Phi}{p^n} \right\rfloor.$$

Υπολογίζουμε:

$$\sum_{j=1}^{p^n} d_j \cdot \dim_K(W_j \otimes_{K[G]} K) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} d_j \cdot \dim_K (W_j \otimes_{K[G]} K) + \sum_{j=p}^{p^n} d_j \cdot \dim_K (W_j \otimes_{K[G]} K) =$$

$$= \Gamma_0 - \Gamma_{p-1} + 2(\Gamma_{p-1} - 3) - \sum_{\substack{\nu=0 \\ p|\nu}}^{p^n-1} (\Gamma_{\nu-1} - \Gamma_\nu) =$$

$$= \Gamma_0 + \Gamma_{p-1} - 6 - \sum_{\substack{\nu=0 \\ p|\nu}}^{p^n-1} (\Gamma_{\nu-1} - \Gamma_\nu) . \tag{1.69}$$

Ο παραπάνω τύπος πρέπει να δίνει τα ίδια αποτελέσματα με αυτά που δίνει ο Κοντογεώργης [36]. Το να δώσουμε μια άμεση απόδειξη ότι οι δύο αυτοί τύποι συμπίπτουν αποδείχτηκε κάτι το πολύπλοκο. Εντούτοις, χρησιμοποιώντας το αλγεβρικό σύστημα Magma, [8], ελέγξαμε ότι η Εξίσωση (1.69) ταυτίζεται με τον τύπο που δίνει ο [36], για όλες τις επιλογές ζευγών G, p που επιχειρήσαμε. Το πρόγραμμα του Magma που χρησιμοποιήθηκε παρατίθεται στο Παράρτημα Α΄.

Τέλος ένας λόγος ακόμα που μας ενδιαφέρει η απόδειξη της Εικασίας 1 είναι και ο ακόλουθος

Παρατήρηση 1.3.28. *Αν οι εικασίες που δόθηκαν στην παράγραφο 1.3η΄ αποδειχτούν, τότε έχουμε μια μέθοδο υπολογισμού του εφαπτόμενου χώρου για τον χώρο παραμόρφωσης καμπυλών με αυτομορφισμούς, για την περίπτωση των αβελιανών p–ομάδων.*

Κεφάλαιο 2

Ημιομάδες του Weierstrass

Σε αυτό το Κεφάλαιο συσχετίζουμε την δομή της Weierstrass ημιομάδας σε ένα σημείο P της καμπύλης με τον σταθεροποιητή του σημείου $G(P)$. Δείχνουμε την στενή σχέση μεταξύ της ομάδας αυτομορφισμών της καμπύλης, με την Weierstrass ημιομάδα καθώς και με άλλες αναλλοίωτες της καμπύλης που η πληροφορία τους υπάρχει μέσα στην Weierstrass ημιομάδα.

Στην ενότητα 2.3α′ βλέπουμε τα κύρια αποτελέσματα της εργασίας του Κοντογεώργη, [35], όπου μελετάει αναπαραστάσεις της $G_1(P)$ σε χώρους Riemann-Roch. Στην 2.3β′ εισάγουμε την έννοια της *representation filtration*, η οποία μοιράζεται πολλές ιδιότητες με την ramification filtration και επηρεάζει την δομή της ημιομάδας του Weierstrass.

Στις Προτάσεις 2.3.20 και 2.3.21 χαρακτηρίζουμε τα πηδήματα της representation filtration συναρτήσει της ημιομάδας του Weierstrass και αντίστοιχα συναρτήσει των ενδιάμεσων επεκτάσεων του σώματος συναρτήσεων της καμπύλης.

Η παράγραφος 2.3γ′ είναι αφιερωμένη στην περιγραφή της ημιομάδας του Weierstrass στην περίπτωση που η $G_1(P)$ είναι κυκλική ομάδα. Η περίπτωση αυτή είναι σημαντική γιατί συνδέεται με την εικασία του Oort, σχετικά με την παραμόρφωση μιας καμπύλης με αυτομορφισμούς από την θετική χαρακτηριστική στην χαρακτηριστική μηδέν. Τα αποτελέσματα αυτά, ο αναγνώστης πρέπει να τα εκλάβει σαν το ανάλογο στην p χαρακτηριστική, της δουλείας των Morrison-Pinkham, [53], πάνω σε ημιομάδες του Weierstrass για Galois Weierstrass σημεία. Αυτό φαίνεται στο Λήμμα 2.3.9. Επίσης στην κυκλική πλήρως διακλαδιζόμενη περίπτωση καθορίζουμε πλήρως τα πηδήματα της $G_1(P)$, στην Πρόταση 2.3.30. Οι Valentini–Madan [81, Λήμμα 2] έκαναν έναν παρόμοιο υπολογισμό για τα gaps της ramification filtration για κυκλικές ομάδες χρησιμοποιώντας την θεωρία των Witt vectors, [63].

Στην παράγραφο 2.3δ′ μελετάμε πάλι ημιομάδες που εμφανίζονται σαν ημιομάδες του Weierstrass σε διακλαδιζόμενα σημεία μιας καμπύλης της οποίας το σώμα συναρτήσεων είναι κυκλική επέκταση του ρητού σώματος συναρτήσεων, αλλά τώρα η θέαση γίνεται μέσα από τις αναλλοίωτες του Boseck. Παράλληλα, ήλθε στην επιφάνεια και μια παράβλεψη που δυστυχώς υιοθετήθηκε και από όσους μελέτησαν την δουλεία του. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που υπάρχει μοναδική θέση που διακλαδίζεται και ο πρώτος της χαρακτηριστικής είναι «μικρός». Εξηγούμε τι εννοούμε λέγοντας μικρός. Για παράδειγμα το λάθος εμφανίζεται στην περίπτωση καμπυλών Artin-Schreier όπου η χαρακτηριστική είναι μικρότερη του conductor. Το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται τώρα στην βιβλιογραφία σε αρκετές περιπτώσεις όπως στους [15, σελίδα 235 Παρατήρηση (α)], [79, σελίδα 170 στις 3 πρώτες γραμμές], [16, σελίδα 3028, Παρατήρηση (α)]. Για την περίπτωση όπου έχουμε μια Artin-Schreier επέκταση το διορθώσαμε στο Λήμμα 2.3.36.

Στην παράγραφο 2.3ε′ μελετάμε το μέγιστο gap μιας ημιομάδας δίνοντας φράγματα για αυτό συναρτήσει πολλών αναλλοίωτων της καμπύλης. Όταν το μέγιστο gap σε ένα σημείο είναι το $2g-1$ τότε τότε η ημιομάδα του Weierstrass είναι συμμετρική και το σημείο αυτό είναι σημείο του Weierstrass, Πρόταση 2.3.45. Στην ίδια Πρόταση βλέπουμε ότι η ύπαρξη ενός μόνο σημείου με συμμετρική ημιομάδα του Weierstrass καθορίζει το γένος της καμπύλης. Πολλές γνωστές καμπύλες έχουν την ιδιότητα αυτήν. Συγκεκριμένα καθορίζουμε τα κυκλικά ολικά διακλαδιζόμενα καλύμματα του ρητού σώματος συναρτήσεων που έχουν την ιδιότητα αυτήν, Πορίσμα 2.3.39 και Λήμμα 2.3.40.

Τέλος στην παράγραφο 2.3ϛ′ μελετάμε την εξάρτηση του Cartier operator και της αναλλοίωτης του Hasse-Witt με την θεωρία των ημιομάδων του Weierstrass. Δίνουμε κάποια αποτελέσματα για τις big actions, Πόρισμα 2.3.51 και χαρακτηρίζουμε κάποιες μη κλασικές καμπύλες ως προς το canonical linear series και μηδενοδύναμο τελεστή του Cartier, Πόρισμα 2.3.52. Βλέπουμε ποιες maximal καμπύλες έχουν το μέγιστο δυνατό gap. Μάλιστα χαρακτηρίζουμε όλες τις maximal καμπύλες επι του $\mathbb{F}_{q^2}$ με δύο γεννήτορες για την ημιομάδα του Weierstrass σε ένα $\mathbb{F}_{q^2}$–ρητό σημείο, ως καμπύλες με συμμετρικές ημιομάδες του Weierstrass στα σημεία αυτά, Παρατήρηση 2.3.54.

2.1 Θεμέλια

Ότι σημειώσαμε στο αντίστοιχο κομμάτι του πρώτου κεφαλαίου, όσον αφορά για την χρήση αυτής της παραγράφου ισχύει και εδώ. Ο σκοπός μας και εδώ είναι μόνον να σκιαγραφήσουμε το υπόβαθρο του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε στην παράγραφο των αποτελεσμάτων.

Ας αρχίσουμε βλέποντας την περίπτωση της χαρακτηριστικής μηδέν σαν ένα απλουστευμένο παράδειγμα, με το οποίο θα εισάγουμε τον αναγνώστη στο θέμα.

2.1α′ Πάνω από το $\mathbb{C}$

Έστω $P \in X$, X μια καμπύλη πάνω από το $\mathbb{C}$, με σώμα συναρτήσεων το F. Ας ξεκινήσουμε με έναν σημαντικό ορισμό:

Ορισμός 2.1.1 (pole numbers–gaps). *Έναν φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}_0$, θα τον λέμε pole number του P αν υπάρχει $x \in F$, τέτοιο ώστε*

$$(x)_\infty = nP,$$

που σημαίνει ότι το x έχει μοναδικό πόλο στο P με τάξη ακριβώς n. Επίσης αν για κάθε $x \in F$ έχουμε ότι

$$(x)_\infty \neq nP,$$

τότε θα λέμε ότι το n είναι ένα gap του P.

Παρατηρούμε ότι αν n_1, n_2 είναι pole numbers, τότε και το άθροισμά τους θα είναι ένας pole number, καθώς αφού υπάρχουν $x_1, x_2 \in F$ τέτοια ώστε $(x_1)_\infty = n_1 P$ και $(x_2)_\infty = n_2 P$, παρατηρούμε από τις ιδιότητες των κύριων divisors ότι $(x_1 \cdot x_2)_\infty = (n_1 + n_2)P$.

Συμπεραίνουμε έτσι ότι τα pole numbers είναι κλειστά ως προς την πρόσθεση και έτσι έχουμε μια ημιομάδα, την ημιομάδα των pole numbers ή ημιομάδα του Weierstrass.

Θεώρημα 2.1.2 (Weierstrass gap Theorem). *Ας συμβολίσουμε το $g_F > 0$ να είναι το γένος της καμπύλης. Για κάθε θέση $P \in \mathbb{P}_F$ υπάρχουν g το πλήθος gaps*

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_g,$$

με $i_1 = 1$ και το $i_g \leq 2g - 1$.

Απόδειξη. Τονίζουμε ότι στην απόδειξη δεν βάζουμε κανέναν περιορισμό για την χαρακτηριστική του σώματος. Κάθε gap είναι μικρότερο ή ίσο του $2g-1$. Θα δείξουμε ότι για κάθε n με $n \geq 2g$, υπάρχει $x \in F$, τέτοιο ώστε $(x)_\infty = nP$. Χρησιμοποιώντας το Riemann–Roch δύο φορές, βλέπουμε ότι

$$\ell((n-1)P) = (n-1) + 1 - g = n - g, \text{ ενώ } \ell(nP) = n + 1 - g,$$

καθώς $\deg(K \setminus (n-1)P), \deg(K \setminus (nP)) < 0$ και έτσι $\ell(K \setminus (n-1)P) = 0 = \ell(K \setminus (nP))$, με K να είναι ένας κανονικός divisor. Συνεπώς

$$\ell((n-1)P) \lneq \ell(nP),$$

άρα υπάρχει ένα $x \in L(nP) \setminus L((n-1)P)$, και συνεπώς το n είναι pole number.

Παρατηρούμε ότι το 0 είναι πάντα pole number ενώ το 1 είναι gap: στην περίπτωση που το 1 ήταν ένας pole number, τότε η ημιομάδα του Weierstrass θα ήταν όλοι οι φυσικοί αριθμοί, δηλαδή κάθε θετικός αριθμός θα ήταν pole number.

Το i είναι gap, αν και μόνον αν $L((i-1)P) = L(iP)$. Παίρνουμε τώρα την παρακάτω ακολουθία διανυσματικών χώρων:

$$k = L(0) \subseteq L(P) \subseteq \cdots \subseteq L((2g-1)P), \tag{2.1}$$

με $\ell(0) = 1$ και $\ell((2g-1)P) = 2g - 1 - g + 1 + 0 = g$. Από την άλλη, για κάθε i έχουμε ότι $\ell(iP) - \ell((i-1)P) \leq 1$. Έτσι από την Εξίσωση 2.1 υπάρχουν ακριβώς $g-1$ pole numbers $2 \leq i \leq 2g-1$ με $L((i-1P) \subsetneq L(iP)$ με τους υπόλοιπους $g-1$ αριθμούς να είναι τα gaps στο P και το θεώρημα έπεται. □

Παρατήρηση 2.1.3. *Συγκεντρώνουμε κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις:*

- *Το 0 είναι πάντα pole number και το 1 ένα gap αν και μόνον αν $g > 0$.*
- *Το i είναι ένα gap αν και μόνον αν $L((i-1)P) = L(iP)$.*
- *Το m είναι ένας pole number αν και μόνον αν*

  $$L((m-1)P) + 1 = L(mP), \tag{2.2}$$

  (μπορούμε να πάρουμε και τις διαστάσεις) ή ισοδύναμα από το Riemann–Roch αν και μόνον αν $\ell(K \setminus (m-1)P) = \ell(K \setminus mP)$.
- *Η κατανομή των gaps και των pole numbers σχεδόν για όλα τα σημεία της καμπύλης είναι η παρακάτω:*

$$\underset{\text{pole number}}{0} \qquad \underset{\text{gaps}}{1\,.\,.\,g} \qquad \underset{\text{pole numbers}}{g{+}1 \_\_\_ 2g \_\_\_ \infty}\,.$$

Ας εξηγήσουμε λίγο αυτό το «σχεδόν όλα» στην παραπάνω παρατήρηση, βλέποντας αυτά τα πεπερασμένα το πλήθος εξαίρετα σημεία που δεν συμπεριφέρονται όπως «σχεδόν όλα» τα υπόλοιπα:

Ορισμός 2.1.4. *Ένα σημείο P λέγεται σημείο του Weierstrass, αν υπάρχει $1 \leq n \leq g$ τέτοιο ώστε*

$$(x)_\infty = nP$$

Είναι ακριβώς εκείνα τα σημεία που χαλάνε την παραπάνω κατανομή. Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι απλά η ακόλουθη συνθήκη

$$P \text{ είναι σημείο του Weierstrass } \iff \ell(gP) > 1.$$

Τώρα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \ell(gP) &= \deg(gP) + 1 - g + \ell(K \setminus gP) \\ \ell(gP) &= 1 + \ell(K \setminus gP) \end{aligned}$$

και ότι στην περίπτωση που το P είναι σημείο του Weierstrass τότε

$$\ell(K \setminus gP) > 0,$$

και καθ'ότι ο χώρος $L(K) \simeq_K \Omega_F(1)$, έχουμε ότι κάτι τέτοιο ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός αναλυτικού ένα διαφορικού $\omega \in L(K \setminus gP)$, που από τον ορισμό θα πρέπει να *μηδενίζεται στο P, με τάξη μεγαλύτερη ή ίση του g.*

Αυτό το όμορφο αποτέλεσμα μας συνδέει τα αναλυτικά διαφορικά με τα σημεία του Weierstrass.

Για παραπάνω μελέτη, μπορούμε να ορίσουμε μια ορίζουσα Wronski. Παίρνοντας μια βάση ολόμορφων διαφορικών Φ_i (ο αναγνώστης δεν θα πρέπει να ξεχνάει ότι $\#\Phi_i = g$) και περιοριζόμενοι σε μια γειτονιά του P μπορούμε να γράψουμε σαν $\Phi_i = h_i dz$ και η ορίζουσα Wronski είναι τότε η ορίζουσα που προκύπτει από τις παραγώγους

$$W(z) = \begin{vmatrix} h_1(z) & \cdots & h_g(z) \\ \frac{dh_1(z)}{dz} & \cdots & \frac{dh_g(z)}{dz} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d^{g-1}h_1(z)}{dz^{g-1}} & \cdots & \frac{d^{g-1}h_g(z)}{dz^{g-1}} \end{vmatrix}$$

Μάλιστα έχουμε ότι η W μηδενίζεται στο P αν και μόνον αν το P είναι σημείο του Weierstrass.

2.1β΄ Η περίπτωση της θετικής χαρακτηριστικής

Για ένα survey άρθρο πάνω στα σημεία του Weierstrass μπορούμε να κοιτάξουμε το [31]. Για την θετική χαρακτηριστική μπορούμε να φτιάξουμε μια ανάλογη θεωρία, η οποία περιγράφεται από τον Goldschmidt, [24] και στο πολύ καλό εισαγωγικό άρθρο του Torres [75]. Ας δούμε λίγο εκτενέστερα τι γίνεται, κρατώντας την μέχρι τώρα ορολογία *αλλά* έχοντας στο μυαλό μας ότι δύο πράγματα αλλάζουν ριζικά όταν περνάμε στην θετική χαρακτηριστική για τις Weierstrass ημιομάδες και τα Weierstrass σημεία

- Τα Weierstrass σημεία δεν είναι πλέων κλασικά, δηλαδή δεν ταξινομούνται από την τάξη της ρίζας αναλυτικών διαφορικών. Ας εξηγήσουμε, τα gaps για «σχεδόν όλα» τα σημεία της καμπύλης δεν είναι κατ'ανάγκη το σύνολο $\{1, \ldots, g\}$ αλλά δίνονται από $\mathscr{G}(P) = \{\varepsilon_i(P) + 1 | \ 0 \leq i \leq g-1\}$. Σχεδόν όλα λοιπόν, έχουν αυτήν την ακολουθία gaps, και συνεπώς σχεδόν όλα τα

P χαρακτηρίζονται από την generic ακολουθία $\mathscr{E}(P) = \{\varepsilon_i | \ 0 \leq i \leq g-1\}$. Παρ'όλα αυτά τις περισσότερες φορές τυχαίνει $\mathscr{E}(P) = \{0, \ldots, g-1\}$ με συνέπεια να έχουμε $\mathscr{G}(P) = \{1, \ldots, g\}$ και τότε λέμε ότι η X είναι μια K–κλασική καμπύλη. Μάλιστα αυτές βρίσκονται σε *τεράστια* πλειοψηφία μεταξύ των μη K–κλασικών καμπυλών. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι *δεν* υπάρχουν K–μη κλασικές καμπύλες γένους μηδέν, ένα, δύο, ενώ για γένος τρία υπάρχει μόνο μία που είναι K–μη κλασική, η οποία και περιγράφεται στον Komiya, [34]. Οι εξαιρέσεις λέγονται K–Weierstrass σημεία ή Weierstrass σημεία ως προς K, με K να συμβολίζει τον κανονικό divisor. Στα τελευταία $\mathscr{G}(P) = \{j_i(P)+1| \ 0 \leq i \leq g-1\}$ με το κάθε στοιχείο της ακολουθίας, $j_i(P)$ να ονομάζεται μια (K,P)–order και $(\varepsilon_0(P), \ldots, \varepsilon_{g-1}(P)) \neq (j_0(P), \ldots, j_{g-1}(P))$. Μάλιστα $\varepsilon_i(P) \leq j_i(P)$ για κάθε P.

- Καθ'ότι η χαρακτηριστική είναι θετική πρέπει να αναθεωρήσουμε την έννοια της παραγώγου, αυτό γίνεται μέσω των Hasse παραγώγων, δείτε [24, σελ. 28–30].

Ας ξεκινήσουμε με μια παρατήρηση για τις Weierstrass ημιομάδες και τις ημιομάδες που χαρακτηρίζονται ως *αριθμητικές*, δηλαδή ημιομάδες φυσικών αριθμών που περιέχουν το μηδέν και μετά από κάποιον φυσικό n κάθε άλλος ακέραιος μεγαλύτερος του n ανήκει στην ημιομάδα. Μια φυσιολογική ερώτηση που μπορεί να γίνει σε αυτό το σημείο είναι η ακόλουθη:
«Αντιστοιχεί κάθε αριθμητική ομάδα σε μια ημιομάδα από pole numbers, δηλαδή σε μια Weierstrass ημιομάδα μιας καμπύλης;»
Η απάντηση είναι όχι. Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι μια αριθμητική ημιομάδα, ημιομάδα του Weierstrass είναι η ακόλουθη, που εμπλέκει σε σημαντικό βαθμό μάλιστα τα m–ολόμορφα (πολυ)διαφορικά, και συχνά αναφέρεται σαν συνθήκη του Buchweitz, [9, σελ. 33]:

Λήμμα 2.1.5 (Buchweitz)**.** *Έστω H μια αριθμητική ημιομάδα και $\mathscr{G}(H) := \mathbb{N}_0 \setminus H$ το σύνολο των gaps της H. Για κάθε φυσικό $m \geq 2$, συμβολίζουμε με $m\mathscr{G}(H)$ το σύνολο όλων των αθροισμάτων των m στοιχείων της $\mathscr{G}(H)$, τότε αν η H είναι Weierstrass πρέπει να ισχύει*

$$\#m\mathscr{G}(H) \leq \dim_K \Omega_F(m).$$

Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό για μια αριθμητική ημιομάδα H και για τα είδη «συμμετρίας» που μπορούν τα υπακούν τα στοιχεία της:

Ορισμός 2.1.6. (i) *Οι αριθμητικές ημιομάδες που έχουν μέγιστο gap το $2g-1$ ονομάζονται symmetric και γι'αυτές ισχύει ότι*

$$m \in H, \text{ αν και μόνον αν } 2g-1-m \notin H.$$

Επίσης αυτές πιάνουν την ισότητα στην ανισότητα του Λήμματος 2.1.5, [56].

(ii) *Οι αριθμητικές ημιομάδες που έχουν μέγιστο gap το $2g-2$ ονομάζονται quasi–symmetric, κάτι που ισοδυναμεί με το $g-1 \notin H$ και γι'αυτές ισχύει ότι*

$$m \in H, \text{ αν και μόνον αν } 2g-2-m \notin H.$$

Για αυτές ισχύει ότι $\#m\mathscr{G}(H) = \dim_K \Omega_F(m) - (m-2)$, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Λήμματος 2.1.5..

Θα μας απασχολήσουν οι ημιομάδες που ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη.

Μετά από το εντυπωσιακό Λήμμα του Buchweitz, ας συνεχίσουμε. Θα μελετήσουμε τις ημιομάδες του Weierstrass μέσα από μια ευρύτερη ματιά, η οποία περνάει πρώτα από τα linear series (ή κατά τον Hartshorne, [25] linear system). Ένας ικανοποιητικός ορισμός περιέχεται στον Serre [66, σελ. 9] ενώ για μια πιο εκτεταμένη αντιμετώπιση υπάρχει και ο [84] με το μειονέκτημα ότι η γλώσσα που χρησιμοποιεί δεν είναι σύγχρονη. Ουσιαστικά δουλεύουμε με κλάσεις ισοδυναμίας divisors:

Ορισμός 2.1.7 (linear series). *Παίρνουμε έναν divisor $E \in \mathrm{Div}_F$, με F όπως πάντα το σώμα συναρτήσεων μιας καμπύλης X, και συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ισοδύναμων με τον E, θετικών divisors με $|E|$, δηλαδή παίρνουμε*

$$|E| = \{D \in \mathrm{Div}_F |\ D \sim E, \deg D \geq 0\} = \{E + (f)_F |\ f \in L(E) \setminus \{0\}\},$$

παρατηρώντας ότι δύο στοιχεία του $|E|$ αν και μόνον αν υπάρχουν $f, g \in L(E)$ με $f = \lambda g, \lambda \in K^*$. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει μια απεικόνιση 1-1 και επί με τον προβολικό χώρο που αντιστοιχεί στον διανυσματικό χώρο $L(E)$

$$|E| \longrightarrow \mathbb{P}(L(E)), \text{ με τύπο } E + (f)_F \mapsto [f]. \tag{2.3}$$

Ένα πλήρες (complete) linear series $\mathscr{D} = |E|$ στην καμπύλη X είναι ακριβώς ένα τέτοιο σύνολο από θετικούς divisors. Ονομάζουμε (προβολική) διάσταση του $\mathscr{D}$ την $\ell(E) - 1 := r$ και degree του $\mathscr{D}$, το $\deg E := d$ και συμβολίζουμε με g_d^r.

Η τακτική είναι η εξής: Από την μια μεριά έχουμε linear series διάστασης r, που προκύπτουν όπως στον παραπάνω ορισμό και από την άλλη έχουμε προβολικές απεικονίσεις $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^r(K)$. Υπάρχει μια κατασκευή που περιγράφεται για παράδειγμα στον [75, σελ. 5–11], όπου αρχίζοντας με κάποια $f_i \in F$, με F/K όπως πάντα σώμα συναρτήσεων, τα οποία είναι K γραμμικά ανεξάρτητα καταλήγουμε σε ένα linear series $|E| \simeq \mathbb{P}(L(E))$, μέσω της Εξίσωσης 2.3 όπου $L(E) = \langle f_i \rangle_K$, [75, Λήμμα 1.9] για το ευθύ, και για το αντίστροφο [75, Λήμμα 1.4]. Γενικά έχουμε άλλη μια αντιστοιχία, [75, Λήμμα 1.13]:

Παρατήρηση 2.1.8. *Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να τονίσουμε ότι το σύνολο των linear series διάστασης r που δεν έχουν βάση (αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν θέσεις που να ανήκουν στην κοινή τομή όλων των divisors στο $|E|$) είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των προβολικών απεικονίσεων $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^r(K)$ που δεν είναι εκφυλισμένοι (degenerate). Το τελευταίο, σημαίνει ότι ο ϕ είναι ο μορφισμός $(f_0, f_1, \ldots, f_r)$ με $f_i \in F$, F όπως πάντα το σώμα συναρτήσεων της καμπύλης X, και τα f_i είναι K γραμμικά ανεξάρτητα, με K το σώμα των σταθερών.*

Από την άλλη ο [24, 4.4] ακολουθεί την ίδια κατασκευή ξεκινώντας στο 4.2 με προβολικές απεικονίσεις. Απλά με την προηγούμενη παρατήρηση οι δύο αυτές κατασκευές ενοποιούνται

Με χρήση των linear series οι Stöhr–Voloch, [72], κατάφεραν να δείξουν την διάσημη υπόθεση του Riemann για αλγεβρικές καμπύλες (ας ανατρέξει ο αναγνώστης και στην παράγραφο 2.2) και να την βελτιώσουν σε κάποιες περιπτώσεις.

Η θέαση μέσα από τα linear series μπορεί να μας επιτρέψει να μιλήσουμε για $\mathscr{D}$–Weierstrass σημεία, όπου $\mathscr{D}$ ένα linear series, με $\deg \mathscr{D} = d$ και $\dim \mathscr{D} = r$, κάτι που έχει σαν συνέπεια να μιλάμε για $(\mathscr{D}, P)$–orders. Το κανονικό linear series

$|\mathscr{K}|$ αντιστοιχεί σε έναν κανονικό $\mathscr{K}$ divisor, είναι βαθμού $2g-2$ και διάστασης g, και από αυτό προκύπτουν τα $|\mathscr{K}|$–Weierstrass σημεία ή απλά, Weierstrass σημεία. Ας δούμε όμως τι εννοούμε λέγοντας $(\mathscr{D}, P)$–order, έννοια που ο αναγνώστης θα πρέπει να την σκέφτεται σαν γενίκευση αυτής του pole number, δίνοντας έναν ορισμό που προέρχεται από τους Stöhr–Voloch:

Ορισμός 2.1.9 ($(\mathscr{D}, P)$–orders)**.** *Έστω $P \in X$ και για κάθε μη αρνητικό ακέραιο i ορίζουμε*

$$\mathscr{D}_i(P) = \mathscr{D}_i := \{D \in \mathscr{D} | \ v_P(D) \geq i\},$$

να είναι ένα g_d^r. Παρατηρώντας ότι τα παραπάνω φτιάχνουν μια ακολουθία, με

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 \supseteq \mathscr{D}_1 \supseteq \mathscr{D}_2 \supseteq \mathscr{D}_3 \supseteq \cdots .$$

Βλέπουμε ότι $\mathscr{D}_j = \varnothing$ αν $d < i$, με την παραπάνω ακολουθία να πηδάει στο j αν υπάρχει ένας $D \in \mathscr{D}$ με $v_P(D) = j$. Τα πηδήματα αυτής της ακολουθίας είναι $r = \dim \mathscr{D}$ το πλήθος και ονομάζονται $(\mathscr{D}, P)$–orders. Δηλαδή η j είναι $(\mathscr{D}, P)$–order αν και μόνον αν

$$\mathscr{D}_j \supsetneq \mathscr{D}_{j+1},$$

που συμβαίνει αν και μόνον αν ([75, Παρατήρηση 1.16γ])

$$\dim(\mathscr{D}_j) = \dim(\mathscr{D}_{j+1}) + 1.$$

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνει ο αναγνώστης είναι να συγκρίνει με τον Ορισμό 2.1.1 που είχαμε για τον pole number, όπως και την Εξίσωση 2.2 της Παρατήρησης 2.1.3, για να διαπιστώσει έπειτα την αναλογία. Η αλλαγή που έχει γίνει είναι ότι ενώ πριν μιλάγαμε για στοιχεία του σώματος συναρτήσεων τώρα γενικεύουμε με κλάσεις ισοδύναμων και θετικών divisors. Παρατηρούμε επίσης ότι οι $(|\mathscr{K}|, P)$–orders είναι ακριβώς $g = \ell(K)$, το πλήθος με K να είναι ένας canonical divisor. Χρησιμοποιούμε τον εξής ορισμό

Ορισμός 2.1.10. *Έστω ένας divisor $D \in \mathrm{Div}_F$ και κάποιο $\ell \in \mathbb{N}_0$. Λέμε ότι το ℓ είναι ένα (D, P)–gap αν για κάθε $f \in L(D + \ell P)$ έχουμε $(f + D)_\infty \neq \ell P$. Επίσης,*
το ℓ είναι (D, P)–gap αν και μόνον αν το $\ell - 1$ είναι μια $(|\mathscr{K} \setminus \mathscr{D}|, P)$–order.
Αν με $\mathscr{G}(P)$ συμβολίσουμε όλα τα $(0, P)$–gaps, τότε η ημιομάδα του Weierstrass στο P είναι $H(P) = \mathbb{N}_0 \setminus \mathscr{G}(P)$ και τα στοιχεία της ονομάζονται pole numbers.

Για $D = 0$ έχουμε τα συνήθη gaps και ο ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 2.1.1.

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω κατασκευή συνεχίζεται, ορίζοντας Wronski ορίζουσες κατ'αναλογία με την χαρακτηριστική μηδέν και χρησιμοποιώντας Hasse παραγώγους, για να καταλήξει στην έυρεση $(\mathscr{D}, P)$–orders, [24, Κεφάλαιο σημεία του Weierstrass], [75]. Αν θέλουμε να περιοριστούμε πάνω από το σώμα $\mathbb{F}_q$, με q μια δύναμη πρώτου και να ακολουθήσουμε από αυτό το σημείο τους Stöhr–Voloch, [72], θα πρέπει να επιτρέψουμε να δράσει στην προβολική απεικόνιση της Παρατήρησης 2.1.8 ο q–Frobenius: $x \mapsto x^q$ και να ορίσουμε κάποιες Frobenius orders στο linear series [72], [75], [24].

Ας δούμε τώρα συνοπτικά πως συνδέονται τα σημεία του Weierstrass με τους αυτομορφισμούς της καμπύλης: *Κάθε αυτομορφισμός του σώματος συναρτήσεων* *που αφήνει αναλλοίωτο το σώμα των σταθερών μεταθέτει τα σημεία του Weierstrass.* Για την μηδέν χαρακτηριστική (ο αναγνώστης δεν πρέπει να ξεχνάει ότι η ακολουθία των gaps είναι μία, για όλα εκτός από πεπερασμένο το πλήθος σημεία) ο Lewittes, στην εργασία του [46] έδειξε για συμπαγείς επιφάνειες Riemann ότι, αν ένας αυτομορφισμός σταθεροποιεί τουλάχιστον πέντε σημεία, τότε τα σταθερά σημεία είναι σημεία του Weierstrass. Για την θετική χαρακτηριστική οι Valentini–Madan, [80, Θεώρημα 2] διόρθωσαν τον Schmid που μελέτησε σημεία του Weierstrass για κυκλικές επεκτάσεις p^n, και το αποτέλεσμα μαζί με την δουλειά των Boseck, Garcia που είδαμε, για επεκτάσεις p βαθμού, συνοψίζεται ως εξής

Θεώρημα 2.1.11 (Boseck–Schmid–Valentini–Madan–Garcia)**.** *Αν $F/K(x)$ κυκλική επέκταση βαθμού p^n, K αλγεβρικά κλειστό σώμα θετικής χαρακτηριστικής p, τότε κάθε πλήρως διακλαδιζόμενη θέση της είναι σημείο του Weierstrass, εκτός μιας εξαίρεσης (την αναφέρουμε στο πρώτο κεφάλαιο) για $n = 1$.*

Οι περιπτώσεις των κυκλικών επεκτάσεων σωμάτων συναρτήσεων που θα δούμε, σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι για σημεία του Weierstrass.

Ας δούμε και τα Weierstrass σημεία σε μια καμπύλη με κλασική ακολουθία από gaps, δηλαδή τα $P \in X$, έτσι ώστε P να είναι σημείο του Weierstrass και $\mathscr{G}(P) = \{1, \ldots, g\}$. Είναι το [80, θεώρημα 4]:

Θεώρημα 2.1.12. *Έστω F να έχει κλασική ακολουθία από gaps και $\sigma \in Aut(X)$ τέτοιος ώστε $\sigma^k = \mathrm{id}$, με $k = mp^n, (m,p) = 1$. Κάθε σημείο που σταθεροποιεί είναι σημείο του Weierstrass αν συμβαίνει κάποιο από τα ακόλουθα*

(i) *$n \geq 2$ και $p \geq 5$,*

(ii) *$n \geq 1$ και ο αριθμός των σημείων που σταθεροποιεί είναι τουλάχιστον 3,*

Lewittes αν ο αριθμός των σημείων που σταθεροποιεί είναι τουλάχιστον 5.

2.1γ′ Ramification filtration

Έστω F'/F να είναι μια Galois επέκταση αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων με $\mathrm{Gal}(F'/F) = G$, με G να είναι μια υποομάδα των αυτομορφισμών της καμπύλης που έχει σώμα συναρτήσεων το F'. Παίρνουμε μια θέση $P \in \mathbb{P}_F$ και μια επέκταση αυτής $P'|P$. Ας ορίσουμε την (κάτω) ramification filtration

Συμβολίζουμε την G_0 να είναι ο σταθεροποιητής της P', δηλαδή $G_0 = \{\sigma \in G |\ \sigma(P') = P'\}$. Η G_0 ονομάζεται ομάδα διάσπασης (decomposition) της P' υπέρ της P και $|G_0| = e(P'|P)$. Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν r διαφορετικές θέσεις υπέρ της P, καθώς είμαστε σε Galois καλύμματα, η δράση της G στις θέσεις είναι μεταβατική, συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ στοιχεία της G, τέτοια ώστε οι θέσεις $\sigma_1(P'), \sigma_2(P'), \ldots, \sigma_r(P')$ να εξαντλούν όλες τις θέσεις υπέρ της P. Έτσι, τα στοιχεία $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ σχηματίζουν ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων της $G \mod G_0$ και έτσι $[F' : F] = |G| = r|G_0|$. Χρησιμοποιώντας τώρα την Πρόταση 1.1.22 του Κεφαλαίου 1, σε συνδυασμό με το ότι οι δείκτες διακλάδωσης πάνω από μια θέση σε Galois επεκτάσεις είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους, δείξαμε τον ισχυρισμό μας.

Ορισμός 2.1.13. *Οι υποομάδες της G που ονομάζονται οι i ομάδες διακλάδωσης, ορίζονται σαν*

$$G_i(P'|P) = \{\sigma \in G |\ v_{P'}(\sigma t - t) \geq i + 1\},$$

όπου t είναι ένα P'–πρώτο στοιχείο.

Έχουμε την ακόλουθη Πρόταση, [70, Πρόταση III.8.6], [65, Πόρισμα 4, σελ. 68], [55, Πρόταση 1], [55, Θεώρημα 2],

Πρόταση 2.1.14. *Σταθεροποιούμε μια $P \in \mathbb{P}_F$ και μια θέση $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ υπέρ αυτής, συμβολίζουμε με $G_i := G_i(P'|P)$.*

(i) *Για $i \geq 0$ σχηματίζεται η ακολουθία*

$$G \supseteq G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \cdots$$

με την ιδιότητα ότι είναι τελικά σταθερή, δηλαδή $G_m = \{\mathrm{id}\}$ για κάποιο κατάλληλο δείκτη m. Την παραπάνω ακολουθία θα την καλούμε Ramification Filtration. Παρατηρούμε ότι $G = G_0$ σε περίπτωση ολικής διακλάδωσης.

(ii) *Αν η χαρακτηριστική του F είναι μηδέν τότε $G_i = \{\mathrm{id}\}$ για κάθε $i \geq 1$ και η G_0 είναι κυκλική.*

(iii) *Αν η χαρακτηριστική του F είναι θετική p, τότε η G_1 είναι κανονική υποομάδα της G_0, αποτελεί το p–κομμάτι της και η ομάδα πηλίκο G_0/G_1 είναι κυκλική και έχει τάξη πρώτη ως προς το p. Μάλιστα η G_0 είναι το ημιευθή γινόμενο αυτής και της G_1. Επίσης κάθε G_{i+1} είναι κανονική υποομάδα της G_i με την ομάδα πηλίκο G_i/G_{i+1} να είναι μια στοιχειώδη αβελιανή p–ομάδα.*

Nakajima *Στην περίπτωση (iii) υποθέτουμε ότι $|G_1/G_2| = q$, q μια p–δύναμη, και συμβολίζουμε με $|G_0/G_1| = E$, τότε το $q - 1 \equiv 0 \mod E$.*

Nakajima *Στην περίπτωση (iii), αν η καμπύλη είναι ordinary, δηλαδή $\gamma = g$, με γ να είναι η p–rank έχουμε ότι $G_i(P) = \mathrm{id}$ για κάθε $i \geq 2$.*

Τα πηδήματα της παραπάνω ακολουθίας, δηλαδή οι δείκτες για τους οποίους $G_i \supsetneq G_{i+1}$ αποτελούν ένα αντικείμενο έρευνας. Ο ρόλος που διαδραματίζουν είναι σημαντικός εξαιτίας του ακόλουθου θεωρήματος, γνωστό σαν τύπος του Hilbert για το different:

Θεώρημα 2.1.15 (Τύπος του Hilbert για το different)**.** *Παίρνουμε μια Galois επέκταση αλγεβρικών σωμάτων συναρτήσεων F'/F, $P \in \mathbb{P}_F$ και $P' \in \mathbb{P}_{F'}$, τέτοια ώστε $P'|P$, τότε ο εκθέτης του different δίνεται από τον ακόλουθο τύπο*

$$d(P'|P) = \sum_{i=0}^{\infty} \big(|G_i(P'|P)| - 1 \big).$$

Ας σημειώσουμε κάποια πράγματα που γνωρίζουμε για τα πηδήματα

- Αν η G είναι αβελιανή και $e_0 = |G_0/G_1|$, τότε κάθε πήδημα πρέπει να διαιρείται με το e_0, [65, Πόρισμα 2, σελ. 70].
- Όλα τα πηδήματα είναι ισότιμα $\mod p$, [65, Πρόταση 11, σελ. 70].

Hasse–Arf Αν G αβελιανή με την ακολουθία των πηδημάτων να δίνεται από $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$ και συμβολίσουμε με $[G_{b_i} : G_{b_{i+1}}] = p^{r_i}$ τότε τα πηδήματα πρέπει να ικανοποιούν

$$b_{i+1} \equiv b_i \mod p^{\sum_{j=1}^{i} r_j}.$$

Στην κυκλική p^n περίπτωση αυτό σημαίνει ότι $b_0 \equiv b_1 \mod p$, $b_1 \equiv b_2 \mod p^2, \ldots, b_{n-1} \equiv b_n \mod p^n$, δείτε, [65, Παράδειγμα σελ. 76]. Πρέπει να τονίσουμε ότι το διάσημο Θεώρημα των Hasse–Arf δεν είναι ακριβώς αυτή η πρόταση αλλά πρόκειται για ισοδύναμο ισχυρισμό, [74, σελίδα 3819]. Όπως ήδη θα έχει υποψιαστεί ο προσεκτικός αναγνώστης μπορούμε να σχηματίσουμε και μια πάνω (το «πάνω» όπως και το «κάτω» αναφέρεται στο ότι τις συμβολίζουμε με πάνω και αντίστοιχα κάτω δείκτες) ακολουθία ομάδων διακλάδωσης και υπάρχουν οι λεγόμενες συναρτήσεις του Herbrand που απεικονίζουν τους κάτω σε πάνω δείκτες και αντιστρόφως. Οι κάτω δείκτες συμπεριφέρονται καλά στις υποομάδες και οι πάνω στις ομάδες πηλίκα υπό την εξής έννοια: Αν $H \leq G$ τότε $H_i = H \cap G_i$ και τα πηδήματα της ramification filtration της H είναι στα πηδήματα της G. Αντίστοιχα αν η H είναι κανονική υποομάδα τότε $(G/H)^v = G^v H/H$. Τώρα το Hasse–Arf μας λέει ότι για αβελιανές G η εικόνα των κάτω πηδημάτων είναι ακέραιοι πάνω, [65, σελ. 76].

- Αν m είναι ο αριθμός των πηδημάτων (μεγαλύτερων της μονάδας), δηλαδή των μη τετριμμένων υποομάδων της G τότε

$$m \leq \frac{2(g-\gamma)}{p-1} + 1,$$

με γ να συμβολίζει την p–rank της καμπύλης, [59, Πρόταση 2.2.2, σελ 43].

- Αν P' είναι άγρια διακλαδισμένο, τότε κάθε πήδημα j της $G_1(P')$ γράφεται σαν $j = m_r - m_i$ όπου $i = 0, \ldots r$, και $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_r$ παριστάνει την αύξουσα ακολουθία από pole numbers στο P' μέχρι το m_r, όπου m_r είναι ο πρώτος pole number μη διαιρετέος από p, Κοντογεώργης, [35]. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην εργασία αυτή ο συγγραφέας δεν προϋποθέτει την συνθήκη της αβελιανής $G_1(P')$.

Όπως θα κατάλαβε ο αναγνώστης, μας ενδιαφέρουν εκείνοι οι αυτομορφισμοί που σταθεροποιούν σημεία, δηλαδή μας ενδιαφέρει να υπάρχουν αρκετοί αυτομορφισμοί στην καμπύλη έτσι ώστε $G_0(P) \neq \mathrm{id}$. Σε αντίθετη περίπτωση όλα στην παραπάνω παράγραφο γίνονται τετριμμένα.

2.2 Συσχέτιση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία

Ας μιλήσουμε λίγο για το τι γνωρίζουμε για την *ποσότητα* των αυτομορφισμών κάνοντας μια μικρή ιστορική αναδρομή:

- Ο Hurwitz το 1892 έδειξε ότι στην περίπτωση της μηδέν χαρακτηριστικής και αν $g \geq 2$ τότε
$$|Aut(X)| \leq 84(g-1).$$

- Ο Schmid, και οι Iwasawa–Tamagawa, [30], το 1951 απέδειξαν ότι για οποιαδήποτε χαρακτηριστική $|Aut(X)| < \infty$. Μάλιστα το φράγμα του Hurwitz ισχύει αν $p \nmid |Aut(X)|$.

- Ο Roquette, [61] απέδειξε ότι αν η χαρακτηριστική είναι $p > g+1$ τότε, εκτός μιας υπερελλιπτικής εξαίρεσης, το φράγμα του Hurwitz εξακολουθεί να ισχύει. Αν έχουμε άγρια διακλάδωση τότε ο Hurwitz δεν ισχύει και $p \leq g+1$.

- Φράγματα για το $G_1(P)$ από τον Stichtenoth το 1973, [68], [69], αν $|Aut(X)| \geq 8g^3$ τότε $|G_1(P)| > \frac{pg}{p-1}$, για κάποια θέση P. Επίσης
$$|Aut(X)| \leq 16g^4,$$
εκτός και αν η X είναι η Hermitian. Γενικά ισχύει ότι $|G_1(P)| \leq \frac{4pg^2}{p-1}$. Τέλος ο Stichtenoth ρωτάει το εξής:

  ★ Ταξινομήστε τις καμπύλες με ομάδες αυτομορφισμών G, έτσι ώστε να υπάρχει $P \in X$ και να ισχύει $|G_1(P)| > \frac{pg}{p-1}$.

- Οι αυτομορφισμοί της Fermat $x^n + y^m + 1 = 0, n = m$ (και συνεπώς της Hermitian) καθορίζονται πλήρως για
  - (i) Χαρακτηριστική μηδέν από τον Τζερμιά το 1993, [76].
  - (ii) Θετική χαρακτηριστική από τον Leopoldt το 1996[1], [45].
  - (iii) Ο Κοντογεώργης το 1998 μελέτησε την περίπτωση όπου $m \neq n$, [39].

- Φράγματα για τις τάξεις αβελιανών υποομάδων των αυτομορφισμών, δίνονται από τον Nakajima, [54], το 1986. Συγκεκριμένα αν $g \geq 2$ και G αβελιανή υποομάδα των $Aut(X)$ τότε για $p > 2$
$$|G| \leq 4(g + 1)$$

- Φράγματα για p–υποομάδες των αυτομορφισμών συναρτήσει της p–rank γ (ας ανατρέξει ο αναγνώστης στο Κεφάλαιο 1, στην Εξίσωση 1.62 για έναν ορισμό), δίνονται από τον Nakajima, στην εργασία του [55], το 1987. Συγκεκριμένα αν $g \geq 2$ και H p–υποομάδα των $Aut(X)$ τότε
  - (i) Αν $\gamma \geq 2$ και $p > 2$
  $$|H| \leq \frac{p}{p-1}(\gamma - 1),$$
  - (ii) Αν $\gamma = 1$, $p > 2$ τότε η H είναι κυκλική, $|H||g - 1$, και το κάλυμμα $X \longrightarrow X/H$ είναι αδιακλάδιστο,
  - (iii) Αν $\gamma = 1$ και $p = 2$ τότε $|H| \leq 4(g - 1)$,
  - (iv) Αν $\gamma = 0$ τότε
  $$|H| \leq \max\left\{g, \frac{4pg^2}{(p-1)^2}\right\}.$$

- Οι Giulietti, Korchmaros το 2007-2009, απαντούν στην ερώτηση ★ του Stichtenoth. Συγκεκριμένα είτε $G = G_0(P)$, είτε η καμπύλη είναι η Hermitian, ή θα πρέπει να είναι μια από τρεις συγκεκριμένες καμπύλες, [22].

Στην εργασία τους οι Viana–Stöhr, [71], συνδέουν μια διαισθητικά τοπική πληροφορία όπως είναι η πληροφορία της γνώσης των pole–numbers με μια καθολική πληροφορία όπως αυτή του rank του Hasse–Witt πίνακα δίνοντας συνθήκες διαιρετότητας των pole numbers. Οι big actions για τις οποίες μιλάμε προέρχονται από τις εργασίες των [44], [60], [52] και είναι καμπύλες με μια συνθήκη στην τάξη μιας p–υποομάδας των αυτοφορφισμών που έχει να κάνει με τα φράγματα της

[1] αξίζει να σημειώσουμε ότι αυτή η δουλεία του παρέμενε αδημοσίευτη για παραπάνω από 25 χρόνια.

$G_1(P)$ που αναφέραμε παραπάνω. Αυτές έχουν δύο πηδήματα στην ramification filtration, που το πρώτο πήδημα είναι στην μονάδα.

O Lewittes (πρόκειται για το ίδιο άτομο που προαναφέραμε στους αυτομορφισμούς και τα σημεία του Weierstrass), στην εργασία του [47], συσχετίζει τα gaps σε μια πλήρως διακλαδισμένη επέκτασης F'/F σωμάτων συναρτήσεων με κοινό σώμα σταθερών το K, σε μια θέση του F και σε μια θέση υπέρ αυτής, χρησιμοποιώντας κάποιες αναλλοίωτες οι οποίες μοιάζουν με αυτές του Boseck. Συγκεκριμένα δουλεύει με τον (απειροδιάστατο) διανυσματικό χώρο M_P, όλων των συναρτήσεων στο F οι οποίες έχουν σε κάποια σταθεροποιημένη θέση $P \in \mathbb{P}_F$ πόλο σε αυτήν. Έπειτα επιλέγει μια θέση $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ με $P'|P$, παίρνει τον αντίστοιχο K διανυσματικό χώρο στην P', $M_{P'}$ το βλέπει σαν M_P–πρότυπο και βγάζει κάποια συμπεράσματα στην περίπτωση όπου αυτό είναι ένα ελεύθερο M_P πρότυπο με βάση m_i. Σε κάποιες περιπτώσεις που αυτή η βάση ταυτίζεται με την βάση της επέκτασης των σωμάτων αναφέρουμε κάποια παραδείγματα και αναδεικνύουμε τις σχέσεις μεταξύ αυτών των αναλλοίωτων και των αναλλοίωτων του Boseck.

Συγκεκριμένα μελετάμε την κυκλική p^n περίπτωση με μοναδικό σημείο διακλάδωσης. Γιατί όμως να μας ενδιαφέρουν οι κυκλικές ομάδες με μόνο ένα σημείο διακλάδωσης πάνω από ένα ρητό σώμα συναρτήσεων;

Αυτές οι καμπύλες έχουν ομάδες αυτόμορφισμών εξαιρετικά μεγάλες, όπως μας δείχνει ο Stichetonth στο [68]. Επίσης μας ενδιαφέρουν εξαιτίας της κατασκευής που περιγράφεται σαν συμπαγοποίηση των Katz-Gabber, [33, Θεώρημα 1.4.1], [21, Πόρισμα 1.9]. Τέλος κατανοώντας τι γίνεται στην περίπτωση των κυκλικών καλυμμάτων ερχόμαστε πιο κοντά στην κατανόηση της εικασίας του Oort που υποθέτει ότι κάθε κυκλική δράση μπορεί στην p–χαρακτηριστική μπορεί να ανορθωθεί στην χαρακτηριστική μηδέν.

Βγάζουμε κάποια συμπεράσματα και για τις maximal καμπύλες. Πρόκειται για congruence σώματα συναρτήσεων, δηλαδή περνάμε στην περίπτωση όπου το σώμα των σταθερών είναι το $\mathbb{F}_q$, με q να είναι μια δύναμη πρώτου.

Ένα survey άρθρο για τις maximal καμπύλες είναι το [17]. Ας δώσουμε όμως λίγα στοιχεία για αυτές. Κρίνεται απαραίτητο να συμβουλευτούμε ξανά τον ορισμό 1.1.9 του Κεφαλαίου 1, εστιάζοντας στο ότι το σώμα των σταθερών δεν είναι πια αλγεβρικά κλειστό με συνέπεια την ύπαρξη θέσεων με βαθμό (degree) μεγαλύτερο από την μονάδα. Το όλο ζήτημα έγκειται στην εύρεση του αριθμού των θέσεων που έχουν βαθμό μονάδα, ας συμβολίσουμε τον αριθμό αυτόν με N. Μερικές φορές τα σημεία με βαθμό μονάδα, τα ονομάζουμε και $\mathbb{F}_q$–ρητά σημεία και τα συμβολίζουμε με $X(\mathbb{F}_q)$, ένας συμβολισμός που ταιριάζει περισσότερο μέσω της θέασης από σχήματα (schemes).

Η υπόθεση του Riemann για αλγεβρικές καμπύλες ισοδυναμεί (ο Villa–Salvador, [83], αφιερώνει όλο το κεφάλαιο επτά στην απόδειξη της εικασίας πάνω από το $\mathbb{F}_q$ καθώς και για την ισοδυναμία με την παρακάτω συνθήκη) με:

$$|N-(q+1)| \leq 2g\sqrt{q}, \text{ ή ισοδύναμα } N \leq q+1+2gq^2, \tag{2.4}$$

η οποία αποδείχτηκε από τον Weil το 1948. Οι καμπύλες που πιάνουν την ισότητα ονομάζονται maximal καμπύλες υπέρ του $\mathbb{F}_{q^2}$. Ένα σημαντικός λόγος που μας απασχόλησαν είναι γιατί έχουν *τεράστιες* ομάδες αυτομορφισμών συγκριτικά με το γένος τους. Για παράδειγμα η Hermitian

$$y^q + y = x^{q+1},$$

είναι η maximal με το μεγαλύτερο γένος, και όπως είδαμε έχει την μεγαλύτερη γνωστή ομάδα αυτομορφισμών. Είναι καμπύλες με μηδενική p–rank και το nilpotent Cartier operator με rank of nilpotency τον εκθέτη του p στο q (που πρέπει να είναι ζυγός από την Εξίσωση 2.4). Είναι σημαντικό να πούμε ότι γνωρίζουμε μόνον 5 οικογένειες από maximal καμπύλες πάνω από το $\mathbb{F}_{q^2}$, με την έννοια ότι όλες οι υπόλοιπες είναι καλύμματα αυτών των τριών από ένα αποτέλεσμα του Serre, [41, Πρόταση 6], που λέει ότι οποιαδήποτε καμπύλη καλύπτεται από μια maximal είναι η ίδια μια maximal καμπύλη. Τα αποτελέσματα αυτά θεωρούνται γνωστά από τους ειδικούς της περιοχής, και μπορεί να βρεθούν στα ακόλουθα άρθρα: [20] για τους ισχυρισμούς του Cartier Operator, για τις maximal καμπύλες που δεν προκύπτουν σαν καλύμματα της Hermitian δείτε [18] και [23] με μια πλήρη εισαγωγή για τις οικογένειες. Οι καμπύλες στους [18], έχει αποδειχτεί ότι δεν είναι Galois καλύμματα της Hermitian, αλλά δεν γνωρίζουμε αν αντιστοιχούν σε ένα κάλυμμα που δεν είναι Galois. Τέλος αναφέρουμε τους [14], που αποτελεί ένα από τα πρώτα άρθρα για τις maximal καμπύλες. Εκεί αποδεικνύεται ότι οι καμπύλες αυτές για τις οποίες $q-1 \leq g$, είναι μη κλασικές ως προς $|\mathscr{K}|$ [14, Πρόταση 1.7] την οποία και γενικεύουμε για την περίπτωση των καμπυλών με nilpotent Cartier operator. Επίσης εκεί καθορίζουν το γένος μιας καμπύλης όταν για μια θέση βαθμού ένα, η Weierstrass ημιομάδα σε αυτό το σημείο έχει δύο γεννήτορες, [14, Πρόταση 1.10] και [40, Θεώρημα 2.5]. Εμείς δείχνουμε ότι αυτές οι περιπτώσεις αντιστοιχούν σε καμπύλες με symmetric Weierstrass ημιομάδες.

2.3 Αποτελέσματα

2.3α΄ Ομάδες διακλάδωσης

Πρόταση 2.3.1. *Αν $g \geq 2$ και $p \neq 2,3$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας pole number $m \leq 2g-1$ ο οποίος δεν διαιρείται από την p. Συμβολίζουμε με $1 \leq m \leq 2g-1$ να είναι ο μικρότερος τέτοιος pole number. Τότε υπάρχει μια πιστή αναπαράσταση*

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}\big(L(mP)\big). \tag{2.5}$$

Απόδειξη. [35, Λήμματα 2.1,2.2] □

Πρόταση 2.3.2. *Υπάρχει μια βάση για τον διανυσματικό χώρο $L(mP)$, η οποία δίνεται από*

$$\left\{ 1, \frac{u_i}{t^{m_i}}, \frac{1}{t^m} : \text{ όπου } 1 < i < r, p \mid m_i \text{ και } u_i \text{ είναι συγκεκριμένες μονάδες} \right\}.$$

Ως προς την παραπάνω βάση, ένα στοιχείο $\sigma \in G_1(P)$ δρα στο $1/t^m$ ως εξής

$$\sigma \frac{1}{t^m} = \frac{1}{t^m} + \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) \frac{u_i}{t^{m_i}}.$$

Η δράση στο P–πρώτο στοιχείο δίνεται από

$$\sigma(t) = t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{r} c_i(\sigma) u_i t^{m-m_i+1} + \cdots , \tag{2.6}$$

Το παραπάνω έχει σαν συνέπεια

Πρόταση 2.3.3. *Ας είναι το P μια άγρια διακλαδισμένη θέση μιας καμπύλης X. Συμβολίζουμε με*

$$\rho : G_1(P) \to \mathrm{GL}_{\ell(mP)}(k)$$

να είναι η αντίστοιχη πιστή αναπαράσταση του Λήμματος 2.3.1. Συμβολίζουμε με $m = m_r > m_{r-1} > \cdots > m_0 = 0$ να είναι οι pole numbers στο σημείο P οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι του m. Αν $G_i(P) > G_{i+1}(P)$ τότε το πήδημα δίνεται από $i = m - m_k$, για κάποιο pole number m_k.

Παρατήρηση 2.3.4. *Πρέπει να σημειωθεί ότι εδώ αριθμούμε τα pole numbers με δείκτη που αυξάνει ενώ στον Κοντογεώργη [35] ο δείκτης φθίνει.*

2.3β′ Πηδήματα της ramification filtration και διαιρετότητα των στοιχείων της ημιομάδας του Weierstrass

Παίρνουμε ένα κάλυμμα Galois $\pi : X \to Y = X/G$ αλγεβρικών καμπυλών και P να είναι ένα πλήρες διακλαδιζόμενο σημείο της X. Αναρωτιώμαστε πως μπορούν να συσχετίζονται οι ημιομάδες του Weierstrass, στο σημείο P, και στο $\pi(P)$;

Λήμμα 2.3.5. *Συμβολίζουμε με $k(X)$ το σώμα συναρτήσεων της X, και με $k(Y) = k(X)^G$ το σώμα συναρτήσεων της καμπύλης Y. Οι μορφισμοί*

$$N_G : k(X) \to k(Y) \text{ και } \pi^* : k(Y) \to k(X),$$

που στέλνουν το $f \in k(X)$ στο $N_G(f) = \prod_{\sigma \in G} f$ και το $g \in k(Y)$ στο $\pi^* g \in k(X)$, επάγουν αντίστοιχα τους εγκλεισμούς

$$N_G : H(P) \to H(Q), \quad \text{και } \pi^* : H(Q) \xrightarrow{\times |G|} H(P),$$

όπου $Q := \pi(P)$.

Απόδειξη. Για κάθε στοιχείο $f \in k(X)$, τέτοιο ώστε $(f)_\infty = mP$, το στοιχείο $N_G(f)$ είναι ένα G–αναλλοίωτο στοιχείο και συνεπώς ανήκει στο $k(Y)$. Επίσης, η τάξη του πόλου του στοιχείου $N_G(f)$, αν αυτό θεαθεί σαν ένα στοιχείο του $k(X)$, είναι $|G| \cdot m$. Καθώς όμως το P είναι πλήρως διακλαδιζόμενο, η εκτίμηση του $N_G(f)$ αν την εκφράσουμε συναρτήσει ενός $\pi(P)$–πρώτου στοιχείου είναι απλά $-m$.

Από την άλλη, ένα στοιχείο $g \in k(Y)$ μπορούμε να το δούμε σαν ένα στοιχείο του $k(X)$ παίρνοντας το pullback $\pi^*(g)$. Για τον ίδιο λόγο η εκτίμηση του στο P θα είναι πολλαπλασιασμένη με την τάξη της ομάδας G. □

Παρατήρηση 2.3.6. *Η συνθήκη της πλήρης διακλάδωσης της θέσης είναι αναφαίρετη από το παραπάνω Λήμμα. Πράγματι, αν ένα σημείο $Q \in Y$ έχει παραπάνω από μία προεικόνες $\pi^{-1}(Q)$, τότε αυτές θα ανήκουν στο support του pullback της g, με $(g)_\infty = mQ$ και δεν θα είχαμε πληροφορία για την ημιομάδα Weierstrass σε κανένα από τα σημεία $P \in \pi^{-1}(Q)$.*

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο

Λήμμα 2.3.7. *Αν ένα στοιχείο f, τέτοιο ώστε $(f)_\infty = aP$ παραμένει αναλλοίωτο από την δράση μιας υποομάδας $H < G_1(P)$, τότε η $|H|$ διαιρεί το a.*

Απόδειξη. Γράφουμε την $f = u/t^a$, όπου t είναι P–πρώτο στοιχείο και u μια μονάδα. Καθώς η f είναι αναλλοίωτη τότε, τότε αποτελεί το pullback μιας συνάρτησης $g \in k(X/H)$. Αν το t' είναι ένα $Q = \pi(P)$–πρώτο στοιχείο, τότε η g γράφεται σαν $g = u'/t'^b$. Καθώς τώρα $t' = t^{|H|}v$ για κάποια μονάδα v, δείτε στον [25, IV 2.2c], το αποτέλεσμα έπεται. $\square$

Για την συνέχεια δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 2.3.8. *Έστω $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_r$ να είναι η αύξουσα ακολουθία από pole numbers μέχρι το m_r. Για κάθε $0 \leq i \leq r$ έχουμε τις αναπαραστάσεις*

$$\rho_i : G_1(P) \to \mathrm{GL}(L(m_i P)).$$

Σχηματίζουμε την ακόλουθη φθίνουσα ακολουθία ομάδων:

$$G_1(P) = \ker\rho_0 \supseteq \ker\rho_1 \supseteq \ker\rho_2 \supseteq \cdots \supseteq \ker\rho_r = \{1\}, \tag{2.7}$$

την οποία και ονομάζουμε από εδώ και στο εξής «ακολουθία αναπαράστασης».

Αν $\sigma \in \ker\rho_i$, τότε η $\rho_{i+1}(\sigma)$ έχει την ακόλουθη μορφή

$$\rho_{i+1}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ a_{i+1,1}(\sigma) & a_{i+1,2}(\sigma) & \cdots & a_{i+1,i}(\sigma) & 1 \end{pmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι όλες οι συναρτήσεις $a_{i+1,\nu} : \ker\rho_i \to k$ αποτελούν ομομορφισμούς ομάδων με την προσθετική ομάδα του σώματος k. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\ker\rho_{i+1} = \ker\rho_i \cap \bigcap_{\nu=i+1}^{i} a_{i+1,\nu}.$$

Το επόμενο Λήμμα συσχετίζει την εργασία μας με αυτή των Morrison–Pinkham, [53]:

Λήμμα 2.3.9. *Το linear series $|m_1 P|$, ορίζει μια απεικόνιση $X \to \mathbb{P}^1$ βαθμού m_1. Αυτό οδηγεί σε μια αλγεβρική επέκταση $F/k(f_1)$ βαθμού m_1. Η επέκταση αυτή είναι Galois αν και μόνον αν $m_1 = |\ker\rho_1|$, και σε αυτήν την περίπτωση η ομάδα Galois είναι η $\ker\rho_1$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $F \supseteq F^{\ker\rho_1} \supseteq k(f_1)$, καθώς το f_1 είναι $\ker\rho_1$ αναλλοίωτο και έτσι $|\ker\rho_1| | m_1$. Βλέπουμε επίσης ότι ο βαθμός της επέκτασης $F/k(f_1)$ ισούται με m_1 και συνεπώς αν $|\ker\rho_1| = m_1$ τότε $k(f_1) = F^{\ker\rho_1}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η επέκταση $F/k(f_1)$ είναι Galois με ομάδα Galois την A. Καθώς $F^{\ker\rho_1} \supseteq k(f_1) = F^A$ έχουμε ότι $A \supseteq \ker\rho_1$. Εξ'ορισμού έχουμε ότι $A = \{\sigma \in G_1(P) : \sigma(f_1) = f_1\} \subseteq \ker\rho_1$. $\square$

Παρατήρηση 2.3.10. *Στην χαρακτηριστική μηδέν ένα τέτοιο σημείο P ονομάζεται* Galois Weierstrass *σημείο και είναι εξ'ορισμού σημείο του Weierstrass. Η ημιομάδα του Weierstrass σε ένα Galois Weierstrass σημείο στην μηδέν χαρακτηριστική είναι τώρα πολύ καλά κατανοητή, [53]. Στην θετική χαρακτηριστική η συνθήκη $m_1 \leq g$, δεν δίνει πληροφορία για το αν το P είναι ένα σημείο του*

Weierstrass ή όχι, καθώς ένα canonical linear series μπορεί να μην είναι κλασικό. Στην παράγραφο 2.3γ′ περιοριζόμαστε σε κυκλικές επεκτάσεις τάξης p^n, με $n \geq 2$ όπου το P θα είναι σημείο του Weierstrass σύμφωνα με το [80, Θεώρημα 2].

Το Λήμμα 2.3.7 μπορεί να γενικευτεί ως εξής:

Πρόταση 2.3.11. *Η τάξη του $|\ker\rho_i|$ της ομάδας $\ker\rho_i$ διαιρεί το m_ν, για όλα τα $\nu \leq i$.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει από το Λήμμα 2.3.7, καθώς τα f_i, με $(f_i)_\infty = m_i P$ είναι εξ'ορισμού $\ker\rho_i$–αναλλοίωτα, καθώς $\rho_i(\sigma) = \mathrm{id}$ για κάθε $\sigma \in \ker\rho_i$, με συνέπεια $\rho_i(\sigma)(f_i) = f_i$ για όλα τα $\nu \leq i$. □

Ας θυμηθούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.3.12. *Για μια γνωστή πεπερασμένη ομάδα G, η υποομάδα Frattini της, συμβολίζεται με $\Phi(G)$ και ορίζεται ως η τομή όλων των μη τετριμμένων μέγιστων υποομάδων της. Ο ορισμός αυτός είναι ανάλογος του ορισμού του Jacobson ιδεώδους σε (αντιμεταθετικούς) δακτυλίους, που ορίζεται σαν την τομή όλων των μέγιστων ιδεωδών, ([3, σελ 5–6]). Αν τώρα η G είναι μια p–ομάδα τότε η υποομάδα Frattini έχει την μορφή $\Phi(G) = G^p[G,G]$, και είναι η μικρότερη υποομάδα N της G, έτσι ώστε η G/N να είναι στοιχειώδης αβελιανή.*

Ας σκεφτούμε τώρα τον πρώτο πόλο m_1 στην ημιομάδα του Weierstrass και ας πάρουμε την f_1, τέτοια ώστε $(f_1)_\infty = m_1 P$. Η εικόνα της αναπαράστασης

$$\rho : G_1(P) \to GL(L(m_1 P)),$$

είναι μια στοιχειώδης αβελιανή ομάδα, με συνέπεια ο αντιμεταθέτης και η υποομάδα Frattini της $G_1(P)$ να βρίσκονται στον πυρήνα της ρ. Αυτό, συνδυασμένο με το Λήμμα 2.3.7 μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα

Λήμμα 2.3.13. *Η τάξη $|\Phi(G)|$ της $\Phi(G)$ διαιρεί τον πρώτο pole number.*

Παράδειγμα 2.3.14. *Στην εργασία [44], οι C. Lehr, M. Matignon, εισήγαγαν την έννοια της big action. Οι καμπύλες που έχουν μια big action μελετήθηκαν εκτενέστερα από τους M. Rocher και M. Matignon, [52],[60]. Μια καμπύλη X, μαζί με μια υποομάδα G, της ομάδας των αυτομορφισμών της X, ονομάζεται big action αν η G είναι μια p–ομάδα και ισχύει το ακόλουθο*

$$\frac{|G|}{g} > \frac{2p}{p-1}.$$

Όλες οι big action ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα, σύμφωνα με τους [44]:

Πρόταση 2.3.15. *Υπάρχει ένα σημείο P της X έτσι ώστε $G_1(P) = G$, η ομάδα $G_2(P)$ δεν είναι η ταυτοτική και περιέχεται γνήσια στην G_1 με την καμπύλη πηλίκο $X/G_2(P)$ να είναι σιόμορφη με $\mathbb{P}^1$. Επίσης, η ομάδα G αποτελεί μια επέκταση ομάδων*

$$0 \to G_2(P) \to G = G_1(P) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^v \to 0.$$

Καθώς η καμπύλη $X/G_2(P)$ έχει γένος μηδέν, η ημιομάδα του Weierstrass ισούται με το $\mathbb{Z}_+$, με συνέπεια η ομάδα $|G_2(P)| \cdot \mathbb{Z}_+$ να αποτελεί μια υποομάδα της ημιομάδας του Weierstrass, στο μοναδικό σημείο που σταθεροποιείται P.

Λήμμα 2.3.16. *Ο μικρότερος pole number m_1 που ανήκει στην $H(P)$ ισούται με $|G_2(P)|$.*

Απόδειξη. Ας συμβολίσουμε με f_1 να είναι η συνάρτηση του σώματος συναρτήσεων $k(X)$, τέτοια ώστε $(f_1)_\infty = m_1 P$. Από τους [52] έχουμε $\ker\rho_1 = G_2(P)$. Συνεπώς το αποτέλεσμα έπεται, από το Λήμμα 2.3.9. □

Παρατήρηση 2.3.17. *Καθώς υπάρχει ένα πήδημα στην ramification filtration στο 1, που σημαίνει ότι, $G_1 \neq G_2$ έχουμε ότι $m_r = m_{r-1} + 1$.*

Παίρνουμε F/F_0, να είναι μια επέκταση σωμάτων συναρτήσεων και παίρνουμε επίσης $P_0 \in \mathbb{P}_{F_0}$ και μια θέση $P \in \mathbb{P}_F$ με $P|P_0$. Το ακόλουθο Θεώρημα του Lewittes μας συνδέει τα gaps στο P_0 με τα gaps στο P:

Θεώρημα 2.3.18. *Έστω F_0 να είναι ένα αλγεβρικό σώμα συναρτήσεων γένους g, που ορίζεται πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα των σταθερών k, το οποίο είναι χαρακτηριστικής $p > 0$. Επιλέγουμε μια θέση P_0 του F_0 και παίρνουμε μια Artin-Schreier επέκταση F/F_0 η οποία προκύπτει επισυνάπτοντας ένα y, δηλαδή $F = F_0(y)$, που να ικανοποιεί την εξίσωση $y^{p^h} - y = G$, όπου $v_{P_0}(G) = -m < 0$, και $(m,p) = 1$. Έστω P η μοναδική θέση του F η οποία βρίσκεται υπέρ της P_0 και υποθέτουμε επίσης ότι το σύνολο από τα gaps του F_0 στην θέση P_0 δίνονται από*

$$\mathscr{G}(P_0) = \begin{cases} \{1 = h_1 < h_2 < \cdots < h_{g_{F_0}} \leq 2g_{F_0} - 1\}, & \text{αν } g_{F_0} \geq 1 \\ \emptyset, & \text{αν } g_{F_0} = 0 \end{cases}.$$

Τότε τα gaps $\mathscr{G}(P)$ στο P δίνονται από

$$\mathscr{G}(P) = \bigcup_{i=1}^{p^h - 1} A_i,$$

όπου

$$A_i = \left\{ mi - jp^h : 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{mi}{p^h} \right\rfloor \right\} \bigcup \left\{ mi + p^h h_j : j = 1, 2, \ldots, g_{F_0} \right\}.$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί ένα συνδυασμό των Θεωρημάτων 1 και 5 στον Lewittes, [47]. Ο αναγνώστης δεν θα πρέπει να ξεχνάει ότι βρισκόμαστε σε ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα των σταθερών, και έτσι όλες οι θέσεις έχουν degree ίσο με την μονάδα. Επίσης ο Lewittes αποδεικνύει τα παραπάνω εργαζόμενος πάνω από το $k = \mathbb{F}_q$. Εμείς χρησιμοποιούμε εδώ τα αποτελέσματα του για αλγεβρικά κλειστό σώμα, αλλά η απόδειξη είναι η ίδια. □

Παρατήρηση 2.3.19. *Οι αριθμοί m, p^h είναι πάντα pole numbers, καθώς δεν μπορούμε να τα εκφράσουμε σαν κάποιο gap που δίνονται από το Θεώρημα 2.3.18. Αυτό σημαίνει ότι το $m\mathbb{Z}_+ + p^h\mathbb{Z}_+$ περιέχεται πάντα στην ημιομάδα $H(P)$. Αν το γένος του F_0 δεν ισούται με το μηδέν, τότε ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος.*

Πρόταση 2.3.20. *Αν το i είναι πήδημα της representation filtration, δηλαδή αν $\ker\rho_i \supsetneq \ker\rho_{i+1}$, τότε το $m_{i+1} \notin \langle m_1, \ldots, m_i \rangle_{\mathbb{Z}_+}$. Βλέπουμε μάλιστα ότι ο αριθμός των γεννητόρων της $H(P)$ μέχρι το m_r ισούται με τον αριθμό των πηδημάτων της representation filtration.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι f_i είναι στοιχεία του σώματος συναρτήσεων τέτοια ώστε $\mathrm{div}_\infty(f_i) = m_i P$. Πάρτε την f_1 να είναι η πρώτη τέτοια συνάρτηση με μοναδικό πόλο στο P τάξης m_1.

Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι οι πρώτοι ν το πλήθος pole numbers δίνονται από $m_2 = 2m_1, m_3 = 3m_1, \ldots, m_\nu = \nu m_1$. Σε αυτήν την περίπτωση μια βάση για τον k διανυσματικό χώρο $L(m_\nu P)$, αποτελείται από $\{f_1, f_1^2, \ldots, f_1^\nu\}$ και σε αυτήν την περίπτωση είναι σαφές ότι $\ker \rho_1 = \ker \rho_2 = \cdots = \ker \rho_\nu$.

Στην γενική περίπτωση, αν το m_{i+1} ανήκει στην ημιομάδα $\langle m_1, \ldots, m_i \rangle_{\mathbb{Z}_+}$, η οποία παράγεται από όλα τα $m_1, \ldots, m_i$, τότε $m_{i+1} = \sum_{\nu_i \in \mathbb{Z}_+} \nu_i m_i$ και

$$f_{i+1} = \prod_{\nu_i \in \mathbb{Z}_+} f_i^{\nu_i}.$$

Κάτι που επάγει ότι $\ker \rho_{i+1} = \ker \rho_i$. □

Η ακόλουθη Πρόταση χαρακτηρίζει επ'ακριβώς τα πηδήματα της representation filtration:

Πρόταση 2.3.21. *Συμβολίζουμε με X_i την καμπύλη $X/\ker \rho_i$ και με F_i το σώμα συναρτήσεων που της αντιστοιχεί. Έστω ότι $X_1 = \mathbb{P}^1$ και ότι $F_1 = k(f_1)$. Τα πηδήματα της representation filtration εμφανίζονται ακριβώς σε εκείνους τους δείκτες i για τους οποίους $F_i \neq F_{i+1}$. Επίσης αν $i_1, i_2, \ldots, i_n$ είναι τα πηδήματα της representation filtration τότε για κάθε ℓ, με $1 \leq \ell \leq n$ έχουμε ότι $F_{i_\ell} = k(f_0, f_{i_1}, \ldots, f_{i_\ell})$, δηλαδή τα πηδήματα είναι ακριβώς εκείνοι οι ακέραιοι i για τους οποίους η συνάρτηση f_i, που μας δίνει τον pole number m_i, δεν μπορεί να εκφραστεί σαν μια ρητή συνάρτηση των f_ν, $\nu < i$.*

Απόδειξη. Η εικόνα έχει ως εξής:

$$G_1(P) = \ker\rho_0 \supseteq \ker\rho_1 \supseteq \ldots \ker\rho_i \ldots \supseteq \ker\rho_r = \{1\}$$

να αντιστοιχεί στην representation filtration, με τον γνήσιο εγκλεισμό να ισχύει όταν έχουμε πήδημα στο i, που συμβαίνει όταν $i \in \{i_1, \ldots i_r\}$.

$$\begin{tikzcd}
X/G_1(P) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & X/\ker\rho_1 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \ldots X/\ker\rho_i \ldots \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & X \arrow[d, leftrightarrow] \\
F_0 := F_r^{G_1(P)} \subseteq \arrow[d, dash] & F_1 := k(f_1) \subseteq \arrow[d, dash] & F_i \arrow[d, dash] & \subseteq F_r \arrow[d, dash] \\
P_0 \arrow[r, dash] & P_1 \arrow[r, dotted, dash] & P_i \arrow[r, dotted, dash] & P
\end{tikzcd}$$

Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί σε καλύμματα. η δεύτερη σε σώματα συναρτήσεων και η τελευταία στις ολικά διακλαδισμένες θέσεις τους. Συμβολίζουμε με P_i, να είναι ο περιορισμός μιας θέσης P του F_r στο ενδιάμεσο σώμα F_i, και με $H_{F_i}(P_i)$ την ημιομάδα του Weiestrass της P_i . Έχουμε υποθέσει ότι το $F_1 = k(f_1)$ είναι ρητό με συνέπεια η Weierstrass ημιομάδα στο P_1 να είναι η $H_{F_1}(P_1) = \mathbb{Z}_+$. Αυτό δίνει ότι $|\ker \rho_1|\mathbb{Z}_+ \subset H_{F_r}(P)$.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε η ομάδα $G_1(P)$ να δρά τετριμμένα στο f_1 και συνεπώς $\ker \rho_1 = G_1(P)$ ή η ομάδα $G_1(P)$ δρα με μετατοπίσεις f_1 (αυτές οι δύο περιπτώσεις είναι οι μοναδικές δυνατές δράσεις της ομάδας Galois σε ένα ρητό σώμα συναρτήσεων, [79]). Ο γεννήτορας του σώματος συναρτησεων F_0 μας δίνει κάποιους pole numbers που είναι πολλαπλάσια του $|G_1(P)|$. Καθώς $|\ker\rho_1| \mid |G_1(P)|$, όλοι οι pole numbers που προέρχονται από τον γεννήτορα του F_0 ανήκουν ήδη στο $|\ker\rho_1|\mathbb{Z}_+ \subset H_{F_r}(P)$. Παρατηρούμε ότι το 0 είναι πήδημα της representation filtration μόνον αν το f_1 δεν είναι $G_1(P)$–αναλλοίωτο. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $F_0(f_1) = F_1$.

Υποθέτουμε ότι το 1 είναι το πρώτο πήδημα στην representation filtration, δηλαδή παίρνουμε $i_1 = 1$. Συνεχίζουμε με το πρώτο m_{i_1} έτσι ώστε $m_{i_1} \notin |\ker\rho_1|\mathbb{Z}_+$, δηλαδή επιλέγουμε το μικρότερο m_i με την ιδιότητα $|\ker\rho_1| \nmid m_i$ για $1 < i$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο f_{i_1} δεν είναι $\ker\rho_1$–αναλλοίωτο και ότι $\ker\rho_1 \supsetneq \ker\rho_{i_1}$, δηλαδή το πρώτο πήδημα στην representation filtration εμφανίζεται στο πρώτο m_{i_1} που δεν ανήκει στο $|\ker\rho_1|\mathbb{Z}_+$. Η επέκταση F_{i_1}/F_1 είναι στοιχειώδης αβελιανή με ομάδα Galois την $\ker\rho_1/\ker\rho_{i_1}$. Το στοιχείο f_{i_1} δεν ανήκει στο F_1, καθώς κάθε στοιχείο του F_1 είναι $\ker\rho_1$–αναλλοίωτο.

Υποθέτουμε τώρα ότι $i_1 \neq 1$. Τότε $\ker\rho_0 = \ker\rho_1 = \cdots = \ker\rho_{i_1}$, με $m_\nu \in |\ker\rho_{i_1}|\mathbb{Z}_+$ για όλα τα $\nu \leq i_1$. Επιλέγουμε το μικρότερο m_{i_2} έτσι ώστε $m_{i_2} \notin |\ker\rho_{i_1}|\mathbb{Z}_+$, δηλαδή $|\ker\rho_{i_1}| \nmid m_{i_2}$. Αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη συνάρτηση f_{i_2} δεν είναι $\ker\rho_{i_1}$–αναλλοίωτη και ότι $\ker\rho_{i_1} \supsetneq \ker\rho_{i_2}$. Παρατηρούμε ότι $F_0 = F_1 = \cdots = F_{i_1}$. Η επέκταση $F_{i_2}/F_{i_1} = F_{i_2}/F_1$ είναι στοιχειώδης αβελιανή με ομάδα Galois την $\ker\rho_{i_1}/\ker\rho_{i_2}$, όμως το στοιχείο f_{i_2} δεν ανήκει στο F_{i_1}, καθώς δεν είναι $\ker\rho_{i_1}$–αναλλοίωτο.

Το αποτέλεσμα έπεται επαναλαμβάνοντας το κάθε βήμα και ανεβαίνοντας με Artin-Schreier επεκτάσεις. □

Οι επεκτάσεις $F_{i_\nu+1}/F_{i_\nu}$ μπορούν θεαθούν σαν Artin-Schreier επεκτάσεις ως εξής: Για παράδειγμα, αν $\nu = 1$, με $i_1 \neq 0$, έχουμε ότι $\mathrm{Gal}(F_{i_1+1}/F_1) = \oplus_\nu \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Επιλέγουμε έναν γεννήτορα σ_ν για κάθε κυκλικό προσθετέο της $\mathrm{Gal}(F_{i_1+1}/F_1)$. Παρατηρούμε ότι $F_0 = F_1 = \cdots = F_{i_1}$. Τότε, για την δράση του σ_ν στο f_{i_1+1} έχουμε ότι:

$$\sigma_\nu^\ell(f_{i_1+1}) = f_{i_1+1} + \sum_{0\leq\mu\leq i_1} c_\mu(\sigma_\nu) f_\mu,$$

με $c_\mu(\sigma_\nu) \in k$. Έχουμε ότι το $\sum_{0\leq\mu\leq i_1} c_\mu(\sigma_\nu) f_\mu$ είναι $\ker\rho_1$–αναλλοίωτο. Συνεπώς θέτουμε

$$Y_{i_1+1} = \frac{f_{i_1+1}}{\sum_{0\leq\mu\leq i_1} c_\mu(\sigma_\nu) f_\mu}, \tag{2.8}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\sigma_\nu^\ell(Y_{i_1+1}) = Y_{i_1+1} + \ell.$$

Αυτό μας δίνει ότι οι Y_{i_1+1} είναι ένα σύνολο από Artin-Schreier γεννήτορες της επέκτασης F_{i_1+1}/F_1, με τα στοιχεία Y_{i_1+1} να ικανοποιούν εξισώσεις της μορφής $Y_{i_1+1}^p - Y_{i_1+1} = a_{i_1}$ για κάποιο $a_{i_1} \in F_1 = F_{i_1}$. Όμως στην πραγματικότητα χρειαζόμαστε μόνον ένα επιπλέον γεννήτορα f_{i_1+1} για να εκφράσουμε το F_{i_1+1} σαν $F_{i_1+1} = k(f_1, f_{i_1+1})$.

Παρατήρηση 2.3.22. *Παρατηρούμε ότι μια Artin-Schreier επέκταση σαν αυτή της Εξίσωσης (2.8), εισάγει περισσότερους διακλαδισμένους πρώτους. Κάθε ρίζα της ποσότητας $\sum_{0\leq\mu\leq i_1} c_\mu(\sigma_\nu) f_\mu$ είναι μια διακλαδιζόμενη θέση στην επέκταση F_{i_1+1}/F_{i_1}. Επίσης βλέπουμε ότι η εκτίμηση του Y_{i_1+1} στην θέση P που εξετάζουμε είναι $v_P(Y_{i_1+1}) = v_P(f_{i_1+1}) - v_P(\sum_{0\leq\mu\leq i_1} c_\mu(\sigma_\nu) f_\mu)$.*

Παρατήρηση 2.3.23. *Φαίνεται φυσιολογικό να αναρωτηθεί κάποιος το ακόλουθο: Αν L/K είναι μια Galois επέκταση με την Galois ομάδα να είναι κυκλική τάξης p, και P να είναι μια άγρια και ολικά διακλαδισμένη θέση του L. Για έναν pole number στο $H(P)$ που είναι διαιρετός με το p, αληθεύει ότι το αντίστοιχο στοιχείο $f \in L$ που μας δίνει αυτό το pole number είναι $\mathrm{Gal}(L/K)$–αναλλοίωτο; Η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι γενικά αρνητική όπως προκύπτει από το ακόλουθο παράδειγμα:*

Παίρνουμε την στοιχειώδη αβελιανή επέκταση του ρητού σώματος συναρτήσεων που προκύπτει από (το compositum) δύο Artin-Schreier επεκτάσεων:

$$y_1^p - y_1 = f_1(x), \qquad y_2^p - y_2 = f_2(x),$$

όπου $f_i(x) \in k[x]$ για $i = 1, 2$. Σκεφτόμαστε τις $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$–επεκτάσεις του $K_1 := k(x, y_1), K_2 := k(x, y_2)$ του ρητού σώματος συναρτήσεων. Στις παραπάνω επεκτάσεις διακλαδίζεται μόνον η άπειρη θέση ∞ του $k(x)$. Επίσης, είναι γνωστό, δείτε στον [69, Korollar 1], ότι η ημιομάδες του Weierstrass στις θέσεις του K_i υπέρ της άπειρης θέσης, δίνονται από $p\mathbb{Z}_+ + m_i\mathbb{Z}_+$, όπου $m_i = \deg f_i$. Συνεπώς προκύπτει η ακόλουθη εικόνα για τον πύργο σωμάτων και τις ημιομάδες:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
k(x,y_1,y_2) \arrow[d, "\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}"'] \arrow[dr, "\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}"] & \\
k(x,y_1) \arrow[d, "\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}"'] & k(x,y_2) \arrow[dl, "\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}"] \\
k(x) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
H(P) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
p\mathbb{Z}_+ + m_1\mathbb{Z}_+ \arrow[d] & p\mathbb{Z}_+ + m_2\mathbb{Z}_+ \arrow[dl] \\
\mathbb{Z}_+ &
\end{tikzcd}$$

Έτσι, η ημιομάδα του Weierstrass $H(P)$, μιας θέσης P του $k(x, y_1, y_2)$, η οποία είναι υπέρ του ∞, έχει την $p^2\mathbb{Z}_+ + pm_1\mathbb{Z}_+ + pm_2\mathbb{Z}_+$ σαν υπο–ημιομάδα. Έχουμε ότι $\mathrm{div}_\infty(y_i) = pm_i$, όμως το y_2 δεν ανήκει στο $k(x, y_1)$, δηλαδή δεν είναι $\mathrm{Gal}(k(x, y_1, y_2)/k(x, y_1))$–αναλλοίωτο στοιχείο.

Μάλιστα γι'αυτές τις επεκτάσεις στην περίπτωση όπου τα m_i είναι διαφορετικά γνωρίζουμε από τους [1, Θεωρήματα 3,4] και τους [86, Θεώρημα 3.11], ότι τα πηδήματα της ramification filtration είναι, αν $m_1 < m_2$, στο m_1 και στο $m_1 + p(m_2 - m_1)$.

Η παραπάνω κατάσταση αλλάζει στην περίπτωση που το σώμα συναρτήσεων αποτελεί μια κυκλική επέκταση του ρητού σώματος συναρτήσεων, όπως βλέπουμε στην ακόλουθη ενότητα.

2.3γ′ Κυκλικές ολικά διακλαδισμένες Galois επεκτάσεις

Χρειαζόμαστε τα ακόλουθα στοιχεία που χρησιμοποιήσαμε και στην ενότητα 1.3α′ του Κεφαλαίου 1, με την πρόσθετη συνθήκη ότι δουλεύουμε πάνω από το ρητό σώμα συναρτήσεων. Για χάρη του αναγνώστη υπενθημίζουμε

Πρόταση 2.3.24. *Αν L_m είναι μια κυκλική επέκταση του ρητού σώματος συναρτήσεων L_0 βαθμού p^m, τότε*

(i) *Υπάρχει μοναδικός πύργος ενδιάμεσων σωμάτων*

$$k(x) = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{m-1} \subset L_m,$$

έτσι ώστε κάθε βήμα $[L_j : L_{j-1}] = p$ *να είναι μια Artin-Schreier επέκταση*

$$L_j = L_{j-1}(y_j): \qquad y_j^p - y_j = B_j,$$

όπου το $B_j \in L_{j-1}$ *να έχει την ιδιότητα της τυπικής μορφής (standard form):*

$$\mathrm{div} B_j = A - \sum_{i,\ell} \lambda_{i,\ell} P_{i,j-1,\ell},$$

με A *ένας πρώτος ως προς τον pole divisor του* B_j *και το* $\lambda(i,j)$ *να είναι μηδέν ή θετικός ακέραιος και πρώτος ως προς την χαρακτηριστική* p. *Μάλιστα* $-\lambda_{i,j} = v_{P_{i,j-1}}(B_j) = v_{P_{i,j}}(y_j)$, *όπου συμβολίζουμε με* $P_{i,j}$ *την θέση όπου ο δείκτης* j *τρέχει τα ενδιάμεσα σώματα* L_j, *ενώ ο δείκτης* i *φανερώνει ότι η θέση που παίρνουμε βρίσκεται υπέρ της* i *διακλαδιζόμενης θέσης του* L_0. *Επίσης*

(ii) *Τα στοιχεία* $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}$ *κάνουν μια βάση* L_m *υπέρ του* L_0, *με* $0 \le \alpha_i < p$.

(iii) *Για κάθε πλήρως διακλαδισμένη θέση* P *στην επέκταση* L_m/L_0 *και κάθε ακέραιο* $a \in \mathbb{N}$ *έχουμε την εξής παραγοντοποίηση:*

$$L(aP) = \bigoplus_{1 \le a_1, \ldots, a_m < p} \big(L(aP) \cap y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m} k(x)\big),$$

όπου $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m} k(x)$ *συμβολίζει τον μονοδιάστατο* $k(x)$*–διανυσματικό χώρο που παράγεται από τα* $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}$.

Απόδειξη. Για τα πρώτα δύο μέρη έχουμε ήδη μιλήσει στο Κεφάλαιο 1 1.3α′. Το (iii) μέρος έπεται παρατηρώντας ότι ο divisor a^{-1} στην σελίδα 311 του [50] μπορεί να αντικατασταθεί από οποιονδήποτε $\mathrm{Gal}(L_m/L_0)$–αναλλοίωτο divisor. ☐

Ορισμός 2.3.25. *Θα συμβολίζουμε με* $G(i)$, *την υποομάδα του* $G_1(P)$, *τάξης* p^{n-i}.

Πρόταση 2.3.26. *Σταθεροποιούμε μια θέση* $P_{i_0,0}$ *του ρητού σώματος συναρτήσεων* L_0, *η οποία διακλαδίζεται πλήρως στην επέκταση* L_m/L_0. *Το σύνολο των θέσεων* $P_{i_0,j}$ *του* L_j, *που βρίσκονται υπέρ της* $P_{i_0,0}$, *θα συμβολίζονται με* P_j *και* $\lambda_j = \lambda_{i_0,j}$, $1 \le j \le m$. *Αν* $H_{L_j}(P_j)$ *συμβολίζει την ημιομάδα του Weierstrass σε μια θέση* P_j *του σώματος συναρτήσεων* L_j, *έχουμε ότι:*

$$H_{L_i}(P_i) \subseteq p^j \mathbb{Z}_+ + p^{j-1}\lambda_1 \mathbb{Z}_+ + \cdots + \lambda_j \mathbb{Z}_+, \tag{2.9}$$

Συγκεκριμένα

$$H_{L_m}(P_m) \subseteq p^m \mathbb{Z}_+ + p^{m-1}\lambda_1 \mathbb{Z}_+ + \cdots + \lambda_m \mathbb{Z}_+.$$

Αν επιπρόσθετα έχουμε ότι $P_{i_0,0}$ *είναι η μοναδική διακλαδιζόμενη θέση στην επέκταση* L_m/L_0 *τότε οι παραπάνω εγκλεισμοί είναι ισότητες.*

Απόδειξη. Υποθέτοντας ότι $\mu < j$ και συμβολίζοντας με y_μ να είναι ο γεννήτορας της επέκτασης του L_μ επί του $L_{\mu-1}$, παρατηρούμε ότι στο σώμα συναρτήσεων L_j έχουμε $v_{P_j}(y_\mu) = -p^{j-\mu}\lambda_\mu$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.24, μέρος (iii), κάθε στοιχείο στο $\cup_{\nu \ge 1} L(\nu P_m)$ προέρχεται από ένα στοιχείο της μορφής $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m} f(x)$ με τις εκτιμήσεις των τελευταίων στοιχείων να φτιάχνουν την ημιομάδα $p^m\mathbb{Z}_+ + p^{m-1}\lambda_1\mathbb{Z}_+ + \cdots + \lambda_m\mathbb{Z}_+$. Συνεπώς $H_{L_m}(P_m) \subseteq p^m\mathbb{Z}_+ + p^{m-1}\lambda_1\mathbb{Z}_+ + \cdots + \lambda_m\mathbb{Z}_+$.

Δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν τα στοιχεία y_i έχουν και άλλους πόλους, συνεπώς μπορεί να μην ανήκουν στο $L(\kappa P_m)$ για κάποιον ακέραιο κ. Αν υπάρχει μόνο μια διακλαδιζόμενη θέση, τότε μόνον η θέση P_m θα ανήκει στο support των pole divisors των y_i, με συνέπεια τα $\lambda_i p^{m-i}$ να ανήκουν στην ημιομάδα του Weierstrass. □

Χρησιμοποιώντας αυτήν την περιγραφή των L_m, μπορούμε να δούμε την ακόλουθη

Πρόταση 2.3.27. *Έστω ότι η* $\mathrm{Gal}(L_m/L_0)$ *είναι κυκλική τάξης* p^m *και η* $H(P)$ *είναι η Weierstrass ημιομάδα σε ένα πλήρως διακλαδισμένο σημείο του* L_m. *Αν* $\mathrm{div}_\infty(f) = aP$, *για κάποιο ακέραιο* a, *με* $p^\kappa \mid a$, *τότε η* f *ανήκει στο* $L_{m-\kappa}$, *δηλαδή, η* f *σταθεροποιείται από την μοναδική υποομάδα της* $\mathrm{Gal}(L_m/L_0)$ *που έχει τάξη* p^κ.

Απόδειξη. Εκτιμώντας τα στοιχεία της μορφής $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}$, παρατηρούμε ότι αν $p^\kappa \mid a$, τότε η f αποτελεί έναν F_0–γραμμικό συνδυασμό στοιχείων της μορφής $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}$, με $\alpha_m = \cdots = \alpha_{m-\kappa+1} = 0$, τα οποία και ανήκουν στο $L_{m-\kappa}$. □

Στην Εξίσωση (2.9) εισάγαμε την ακολουθία αριθμών $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ η οποία και αντιστοιχεί στις εκτιμήσεις των γεννητόρων y_i του σώματος L_m. Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα ακόλουθα

Υπάρχει κάποια σχέση με την ακολουθία από pole numbers $m_1 < m_2 < \ldots$;

Ποια είναι η σχέση με τα πηδήματατης representation filtration;

Υποθέτουμε ότι τα πηδήματα της representation filtration εμφανίζονται στους ακεραίους $j_1, j_2, \ldots, j_n$, δηλαδή έχουμε ότι $\ker \rho_{j_i} > \ker \rho_{j_i+1}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Έχουμε το ακόλουθο:

$$G_1(P) = \ker \rho_1 = \ker \rho_2 = \cdots = \ker \rho_{j_1} > \ker \rho_{j_1+1} = \cdots = \ker \rho_r = \{1\}.$$

Ο πυρήνας της ρ_r είναι τετριμμένος γιατί η ρ_r είναι μια πιστή αναπαράσταση εξαιτίας της Πρότασης 2.3.1. Τα πηδήματα της representation filtration συμβαίνουν για $j_1, j_2, \ldots, j_n$ και $\ker \rho_{j_\nu} = G(\nu)$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των πηδημάτων για τις δύο filtrations, την representation αλλά και την ramification είναι ο ίδιος, καθ'ότι και στις δυό, οι στοιχειώδεις αβελιανές ομάδες που προκύπτουν από πηλίκα για τους δείκτες όπου έχουμε κάποιο πήδημα, είναι απλά κυκλικές ομάδες τάξης p. Έτσι το m, ο αριθμός των πηδημάτων της ramification filtration, θα ισούται με το n, τον αριθμό των πηδημάτων της representation filtration.

Συμβολίζουμε με j_ν να είναι εκείνος ο δείκτης για τον οποίον έχουμε $G(\nu) = \ker \rho_{j_\nu} \supsetneq \ker \rho_{j_\nu+1} = G(\nu+1)$. Επειδή μελετάμε την κυκλική περίπτωση έχουμε

$$\ker \rho_{j_\nu} / \ker \rho_{j_\nu+1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Παίρνουμε σ να είναι ένας γεννήτορας της τελευταίας ομάδας πηλίκο. Μπορούμε να γράψουμε την δράση στο $f_{j_\nu+1}$ ως εξής:

$$\sigma f_{j_\nu+1} = f_{j_\nu+1} + \sum_{\mu \leq j_\nu} c_\mu(\sigma) f_\mu.$$

Καθώς όλα τα $f_\mu, \mu \leq j_\nu$ είναι σ–αναλλοίωτα, για το στοιχείο

$$Y_{j_\nu+1} = \frac{f_{j_\nu+1}}{\sum_{\mu \leq j_\nu} c_\mu(\sigma) f_\mu} \tag{2.10}$$

η δράση του σ είναι η εξής: $\sigma Y_{j_\nu+1} = Y_{j_\nu+1} + 1$, και είναι ένας Artin-Schreier γεννήτορας της επέκτασης $F_{j_\nu+1}/F_{j_\nu}$.

Ορισμός 2.3.28. *Παίρνουμε έναν πύργο σωμάτων $F = F_n \supseteq F_{n-1} \supseteq \ldots \supseteq F_1$. Σε αυτόν τον πύργο παίρνουμε την ακολουθία των πηδημάτων $F_n \supsetneq F_{j_m} \supsetneq F_{j_{m-1}} \supsetneq \cdots \supsetneq F_0$. Με τον συμβολισμό της Πρότασης 2.3.24 τα σώματα F_{j_ν} είναι απλά τα σώματα L_ν. Σταθεροποιούμε μια θέση P του F και συμβολίζουμε με P_i τον περιορισμό της P στο σώμα F_i. Ένα στοιχείο $f_i \in F_j$, μπορεί να ιδωθεί σαν στοιχείο που ανήκει σε όλα τα σώματα $F_{j'}$, με $j' \geq j$. Για $j \geq i$ θα συμβολίζουμε με $0 > -m_{j,i}$ την εκτίμηση του f_i σαν στοιχείο του F_j στην θέση P_j, όπου η συνάρτηση f_i αντιστοιχεί στον pole number m_i της $H(P)$. Ενδιαφερόμαστε για τα στοιχεία f_{j_ν}, δηλαδή για εκείνους τους δείκτες όπου έχουμε πήδημα στην representation filtration. Το στοιχείο m_{j_ν,j_ν} είναι πρώτο ως προς το p και θα το συμβολίζουμε με μ_ν.*

Τώρα υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.10)

$$\begin{aligned} v_{P_{j_\nu+1}}(Y_{j_\nu+1}) &= -m_{j_\nu+1,j_\nu+1} - v_{P_{j_\nu+1}}\left(\sum_{\mu \leq j_\nu} c_\mu(\sigma) f_\mu\right) \\ &= -\mu_{\nu+1} + \max\{m_{j_\nu,\mu} : c_\mu(\sigma) \neq 0\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Παρατηρούμε ότι τα $\lambda_{i,j}$, οι εκτιμήσεις των γεννητόρων y_j, των σωμάτων που δίνονται στον πύργο της Πρότασης 2.3.24 μέρος (i), είναι επίσης πρώτα προς την χαρακτηριστική από την standart form υπόθεση. Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχουν ν το πλήθος γεννήτορες $Y_{j_\nu+1}$. Παραποιώντας τον συμβολισμό, θα συμβολίσουμε με Y_ν, $1 \leq \nu \leq n$ τους γεννήτορες των επεκτάσεων $F_{j_\nu+1}/F_{j_\nu}$. Καθώς τώρα τα Y_ν και τα y_ν είναι και οι δύο Artin-Schreier γεννήτορες, οι εκτίμησεις τους, θα ισούνται με τον conductor της επέκτασης και συνεπώς είναι ίσες, έτσι τα στοιχεία Y_ν και y_ν έχουν την ίδια εκτίμηση στην θέση P_{j_ν}. Η απόλυτη τιμή της εκτίμησης που υπολογίστηκε στην Εξ. (2.11) θα ισούται με λ_ν, με τα λ_ν να είναι οι αριθμοί της Πρότασης 2.3.26.

Πόρισμα 2.3.29. *Κρατάμε τον συμβολισμό του Ορισμού 2.3.28. Οι εκτιμήσεις λ_ν των στοιχείων y_ν στο P, ικανοποιούν $\lambda_\nu \leq \mu_\nu$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν υπάρχει μοναδική θέση P που διακλαδίζεται στην επέκταση F_n/F_0, δηλαδή είμαστε στην περίπτωση ενός Katz-Gabber κυκλικού καλύμματος τάξης p^n.*

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της Εξίσωσης (2.11). Αν το $\lambda_\nu = \mu_\nu$, τότε όλοι οι συντελεστές $c_\mu(\sigma)$ με $\mu > 0$ στην Εξίσωση (2.11), είναι μηδέν. Τότε $Y_\nu = f_\nu$ και υπάρχει μόνο μια θέση που διακλαδίζεται στην επέκταση $F_{\nu+1}/F_\nu$. □

Πρόταση 2.3.30. *Ας είναι η P, όπως και στον Ορισμό 2.3.28. Τα πηδήματα της ramification filtration στο P, είναι ακριβώς στους ακεραίους λ_ν, όπου λ_ν είναι οι εκτιμήσεις των στοιχείων y_ν στο P.*

Απόδειξη. Από την απόδειξη της [35, Πρόταση 2.3], ο ακέραιος λ_ν ισούται με το πήδημα της representation filtration $\ker \rho_{i_\nu}/\ker \rho_{i_\nu+1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ας μην ξεχνάει ο αναγνώστης ότι η αρίθμηση εκεί φθίνει). Παρατηρούμε ότι $\ker \rho_{j_\nu} = G(\nu)$ και $\ker \rho_{j_\nu+1} = G(\nu+1)$. Η ramification filtration της $G(\nu)$ δίνεται από $G(\nu)_\mu = G_\mu(P) \cap G(\nu)$. Οι ομάδες $G(\nu)$ είναι ήδη στοιχεία της ramification filtration και έτσι δεν υπάρχει λόγος να καταφύγουμε στην πάνω ramification filtration, για να συσχετίσουμε τις ramification filtrations των $G_1(P)$ και $G_1(P)/G(\nu)$ [65, Πόρισμα, έπειτα από την Πρόταση 3. IV.1], δηλαδή,

$$(G_1(P)/G(\nu))_j = G_j(P)/G(\nu).$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι

$$\left(\frac{G(\nu)}{G(\nu+1)}\right)_j = \frac{G(\nu)_j}{G(\nu+1)} = \frac{G_j(P)\cap G(\nu)}{G(\nu+1)}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές παρατηρήσεις έχουμε ότι οι ακέραιοι λ_ν είναι τα πηδήματα της ramification filtration. □

Παράδειγμα 2.3.31. *Έστω μια κυκλική επέκταση σωμάτων συναρτήσεων L/L_0, τάξης p^n με μόνον ένα σημείο διακλάδωσης, το οποίο διακλαδίζεται πλήρως και μόνον το L_0 είναι ρητό. Έχουμε τον ακόλουθο πύργο από $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$–κυκλικές επεκτάσεις:*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dotted, no head] & P \arrow[d, dotted, no head] & p^n\mathbb{Z}_+ + p^{n-1}\lambda_1\mathbb{Z}_+ + p^{n-2}\lambda_2\mathbb{Z}_+ + \cdots + \lambda_n\mathbb{Z}_+ \\
L_2 = L^{G(2)} \arrow[d, no head, "\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}"'] & P_2 \arrow[d, no head] & p^2\mathbb{Z}_+ + p\lambda_1\mathbb{Z}_+ + \lambda_2\mathbb{Z}_+ \arrow[u, hook, dotted] \\
L_1 = L^{G(1)} \arrow[d, no head, "\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}"'] & P_1 \arrow[d, no head] & p\mathbb{Z}_+ + \lambda_1\mathbb{Z}_+ \arrow[u, hook] \\
L_0 = L^{G_1(P)} & P_0 & \mathbb{Z}_+ \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Η θέση P, διακλαδίζεται πλήρως στην επέκταση $L/L^{G_1(P)}$ και θα συμβολίζουμε με P_i την θέση του $L^{G(i)}$ που βρίσκεται από κάτω της. Έχουμε υποθέσει ότι το σώμα $L^{G_1(P)}$ είναι ρητό και άρα έχει Weierstrass ημιομάδα την $\mathbb{Z}_+$. Το σώμα $L^{G(1)}$ είναι μια Artin-Schreier επέκταση του $L^{G_1(P)}$ και η ημιομάδα του Weierstrass στο P_1 έχει ένα κομμάτι $p\mathbb{Z}_+$, το οποίο προέρχεται από την ημιομάδα των $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = G_1(P)/G(1)$–αναλλοίωτων στοιχείων συν ένα καινούριο και όχι αναλλοίωτο στοιχείο το οποίο δεν είναι διαιρετό από το p, και θα δώσει την ημιομάδα $\lambda_1\mathbb{Z}_+$. Η ημιομάδα του Weierstrass στο P_1 είναι $p\mathbb{Z}_+ + \lambda_1\mathbb{Z}_+$.

Το επόμενο βήμα είναι να σκεφτούμε την ημιομάδα του Weierstrass του P_2. Ένα κομμάτι της, το $p^2\mathbb{Z}_+ + p\lambda_1\mathbb{Z}_+$ προέρχεται από τα $G(1)/G(2) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$–αναλλοίωτα στοιχεία ενώ υπάρχει και ένα άλλο κομμάτι που προέρχεται από άλλα στοιχεία και που πρέπει να περιέχει μια ημιομάδα της μορφής $\lambda_2\mathbb{Z}_+$, με $(\lambda_2, p) = 1$. Όμως η Εξίσωση (2.9), μας δίνει ότι $H(P_2) \subseteq p^2\mathbb{Z}_+ + p\lambda_1\mathbb{Z}_+ + \lambda_2\mathbb{Z}_+$, και καθώς έχουμε μοναδική διακλαδιζόμενη θέση παίρνουμε την ισότητα.

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να φτάσουμε έως το L και να δούμε ότι η ημιομάδα του Weierstrass δίνεται από

$$H(P) = p^n\mathbb{Z}_+ + p^{n-1}\lambda_1\mathbb{Z}_+ + p^{n-2}\lambda_2\mathbb{Z}_+ + \cdots + \lambda_n\mathbb{Z}_+.$$

2.3δ′ Ολόμορφα διαφορικά στην κυκλική ολικά διακλαδιζόμενη περίπτωση

Εδώ χρησιμοποιούμε γνωστές βάσεις ολόμορφων 1–διαφορικών για να εκφράσουμε gaps της ημιομάδας του Weierstrass, συναρτήσει των Boseck αναλλοίωτων των καμπυλών. Υποθέτουμε ότι το F είναι μια κυκλική και ολικά διακλαδιζόμενη επέκταση τάξης p^n του ρητού σώματος συναρτήσεων $k(x)$. Περιοριζόμαστε στην κυκλική περίπτωση αν και μια πανομοιότυπη κατασκευή λειτουργεί και για τις στοιχειώδης αβελιανές ομάδες. Με τον συμβολισμό της παραγράφου 1.3α′ του Κεφαλαίου 1, έχουμε για κάποιο θετικό k παίρνοντας την p–αδική του γραφή ότι:

$$k = a_1^{(k)} + a_2^{(k)}p + \cdots + a_n^{(k)}p^{n-1}.$$

Με το σύνολο $w_k = y_1^{a_1^{(k)}} y_2^{a_2^{(k)}} \cdots y_n^{a_n^{(k)}}$, $0 \le k \le p^n - 1$ να είναι η $k(x)$–βάση του F από το Θεώρημα 1.3.4. Οι εκτιμήσεις των στοιχείων της βάσης ως προς μια θέση του F δίνεται από

$$v(i,n,w_k) = -\sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}. \tag{2.12}$$

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες $\Phi(i,j)$ ταυτίζονται με τις ποσότητες $\lambda_{i,j}$ της Πρότασης 2.3.24, μέρος (i). Συμβολίζουμε τους διακλαδισμένους πρώτους του $k(x)$, με $(x-\alpha_i)$, με $1 \le i \le s$, καθώς έχουμε το κάτω σώμα να είναι ρητό και κάθε διακλαδισμένος πρώτος του $\bar{P}_i$ αντιστοιχεί σε κάποιο ανάγωγο πολυώνυμο, $\bar{P}_i(x)$, το οποίο και πρέπει να είναι γραμμικό καθ'ότι το k είναι αλγεβρικά κλειστό. Παίρνουμε την *αναλλοίωτη του Boseck* για αυτήν την περίπτωση

$$\Gamma_k := \sum_{i=1}^{s} \nu_{ik},$$

όπου, ως γνωστόν,

$$\nu_{ik} = \left\lfloor \frac{\delta_i - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}}{p^n} \right\rfloor, \tag{2.13}$$

και

$$\rho_i^{(k)} = \big(\delta_i - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)}\Phi(i,j)p^{n-j}\big) - \nu_{ik}\cdot p^n, \tag{2.14}$$

με όπου $\delta_i = \delta(P|(x-\alpha_i))$, να συμβολίζει τον εκθέτη του different. Ας πάρουμε μια ελάχιστα διαφοροποιημένη βάση από αυτήν του Λήμματος 1.3.11 του πρώτου Κεφαλαίου:

Πρόταση 2.3.32. *Το σύνολο*

$$\left\{\omega_{k\nu}^{(\alpha_i)} = (x-\alpha_i)^{\nu^{(k)}} g_k(x)^{-1} w_k dx : 0 \le \nu^{(k)} \le \Gamma_k - 2, 0 \le k \le p^n - 2\right\}$$

αποτελεί μια βάση για τα ολόμορφα 1–διαφορικά μιας κυκλικής επέκτασης του ρητού σώματος συναρτήσεων τάξης p^n.

Απόδειξη. Ξεκινάμε από την βάση του Λήμματος 1.3.11, θέτουμε $m = 1$ και την τροποποιούμε για να εκτιμήσουμε ολόμορφα διαφορικά σε διακλαδιζόμενες θέσεις της επέκτασης. Η ίδια κατασκευή δίνεται στον Garcia, [16], ο οποίος μελετά την στοιχειώδη αβελιανή πλήρως διακλαδιζόμενη περίπτωση. Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με αυτήν που δίνεται εκεί. □

Παρατήρηση 2.3.33. *Από την Εξίσωση (2.13) αν $\Gamma_k = 0$, τότε $\nu_{ik} = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, r$ και αυτό θα μπορούσε να γίνει μόνον όταν $k = p^n - 1$, καθώς $\nu_{ik} \geq 0$. Συνεπώς τα Γ_k πετυχαίνουν την μέγιστη τιμή τους στην περίπτωση που $k = 0$, δηλαδή $\Gamma_0 \geq \Gamma_k$, για κάθε $0 \leq k \leq p^n - 1$ και για $0 \leq k \leq p^n - 2$, έχουμε ότι $\rho_i^{(k)} \leq p^n - 2$.*

Προκύπτει η ακόλουθη Πρόταση με την οποία και λογαριάζουμε όλα τα gaps στις διακλαδιζόμενες θέσεις:

Πρόταση 2.3.34. *Η ακολουθία των gaps σε διακλαδισμένες θέσεις P_i που βρίσκονται υπέρ των $(x - \alpha_i)$, με $1 \leq i \leq s$, δίνεται από*

$$\mathscr{G}(P_i) = \left\{ \nu^{(k)} \cdot p^n + \rho_i^{(k)} + 1 |\ 0 \leq k \leq p^n - 2,\ 0 \leq \nu^{(k)} \leq \Gamma_k - 2 \right\},$$

όπου Γ_k, είναι η αναλλοίωτη του Boseck της επέκτασης $F/k(x)$.

Απόδειξη. Ο υπολογισμός αυτός βασίζεται στην εκτίμηση των στοιχείων της βάσης των αναλυτικών διαφορικών που δώσαμε στην Πρόταση 2.3.32. Παίρνουμε τα $\rho_i^{(k)}$ να είναι όπως στην Εξίσωση 2.14. Υπολογίζοντας εκτιμήσεις στα P_i, των στοιχείων της βάσης, βρίσκουμε ότι όλες οι (K, P_i)–orders, τις συμβολίζουμε με $j^K(P_i) = j^K$, δίνονται από:

$$\left\{ \nu^{(k)} \cdot p^n + \rho_i^{(k)} |\ 0 \leq k \leq p^n - 2,\ 0 \leq \nu^{(k)} \leq \Gamma_k - 2 \right\}. \tag{2.15}$$

Στον παραπάνω υπολογισμό πρέπει να σκεφτούμε ότι για διαφορετικές τιμές των k, και $\nu^{(k)}$, με $0 \leq k \leq p^n - 2$, και $0 \leq \nu^{(k)} \leq \Gamma_k - 2$, οι τιμές $\nu^{(k)} \cdot p^n + \rho_i^{(k)}$ είναι διαφορετικές και καθ'ότι αποτελούν εκτιμήσεις αναλυτικών διαφορικών, εφαρμόζεται με αυτόν τον τρόπο η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα των εκτιμήσεων· δηλαδή, η εκτίμηση ενός γραμμικού συνδυασμού από διαφορικά της πρότασης 2.3.32, είναι το ελάχιστο της εκτίμησης του κάθε προσθεταίου.

Καθώς όμως η γνώση των (K, P_i)–orders, ισοδυναμεί με την γνώση όλων των $(0, P_i)$–gaps, θα έχουμε την ακολουθία των gaps να δίνεται από τα $j_i^K + 1$. □

Παρατήρηση 2.3.35. *Ο Boseck στην εργασία του [7], όπου μελετάει την περίπτωση $n = 1$, δηλώνει ότι καθώς το k παίρνει όλες τις τιμές $0 \leq k \leq p - 2$, τότε το υπόλοιπο από την κατασκευή της Boseck βάσης του $\rho_i^{(k)}$ παίρνει όλες τις τιμές $0 \leq \rho_i^{(k)} \leq p - 2$. Αυτό δεν είναι απόλυτα σωστό όπως μας δείχνει το παράδειγμα 2.3.38. Το πρόβλημα εμφανίζεται στην περίπτωση όπου υπάρχει μοναδική θέση που να διακλαδίζονται στην επέκταση Galois.*

Για την συνέχεια ακολουθεί ένα Λήμμα για τα «μικρά» gaps:

Λήμμα 2.3.36. *Αν κάθε $\Gamma_k \geq 2$, τότε όλοι οι αριθμοί $1, \dots, p^n - 1$ είναι gaps. Αν συμβαίνει $\Gamma_k = 1$ για κάποια k τότε το σύνολο των gaps τα οποία είναι μικρότερα από p^n είναι ακριβώς το σύνολο $\{\rho_i^{(k)} + 1 |\ k : 0 \leq k \leq p^n - 2, \Gamma_k \geq 2\}$.*

Απόδειξη. Δεν ξεχνάμε ότι τα $\rho_i^{(k)}$ ορίστηκαν σαν υπόλοιπα διαίρεσης του $\delta_i - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(k)} \Phi(i,j) p^{n-j}$, με p^n. Καθώς το k τρέχει τους αριθμούς $0 \leq k \leq p^n - 2$, το $\rho_i^{(k)}$ τρέχει τα $0, \ldots, p^n - 2$. Πράγματι, ας ορίσουμε την απεικόνιση

$$\Psi : \{0, \ldots, p^n - 2\} \to \{0, \ldots, p^n - 2\},$$

$$k \mapsto \rho_i^{(k)}.$$

Καθώς οι εκφράσεις της Εξίσωσης (2.15) είναι όλες διαφορετικές η Ψ είναι επί. Όμως τα Γ_k που είναι ίσα με μονάδα θα πρέπει να εξαιρεθούν καθώς δεν μας δίνουν αναλυτικά διαφορικά στην Πρόταση 2.3.32 (Κεφάλαιο 1 Λήμμα 1.3.11) όπως και το παράδειγμα 2.3.38. □

Παρατήρηση 2.3.37. *Η κατάσταση όπου $\Gamma_k = 1$, μπορεί να εμφανιστεί μόνον για πρώτους $p \geq \Phi(i,j)$ και στην περίπτωση που έχουμε μοναδική διακλαδιζόμενη θέση.*

Παράδειγμα 2.3.38. *Τώρα μελετάμε την περίπτωση μιας Artin-Schreier επέκτασης του ρητού σώματος $k(x)$, που έχει την μορφή $y^p - y = 1/x^m$. Σε αυτήν την επέκταση διακλαδίζεται μόνον η θέση $(x-0)$ με εκθέτη του different που ισούται με $\delta_1 = (m+1)(p-1)$. Οι αναλλοίωτες του Boseck, στην περίπτωση αυτή είναι ίσες με*

$$\Gamma_k = \left\lfloor \frac{(m+1)(p-1) - km}{p} \right\rfloor \quad \text{για } k = 0, \ldots, p-2.$$

Η ημιομάδα του Weierstrass είναι γνωστή από τον [69], και ισούται με $m\mathbb{Z}_+ + p\mathbb{Z}_+$. Ας προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε μικρά gaps, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3.36. Αν $p < m$, τότε όλοι οι αριθμοί $1, \ldots, p-1$ είναι gaps. Αν $p > m$ τότε ο m είναι ένας pole number μικρότερο του p.

Πράγματι, το $\Gamma_{p-2} = 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(m+1)(p-1) - (p-2)m$ με το p, ισούται με $\rho^{(p-2)} = m-1$. Όμως σε αυτήν την περίπτωση το $\rho^{(p-2)} + 1 = m$ δεν είναι gap.

Ας δούμε τώρα την συμπεριφορά του μέγιστου gap

Πόρισμα 2.3.39. *Υποθέτουμε ότι η καμπυλή X αποτελεί μια κυκλική p επέκταση του ρητού σώματος συναρτήσεων και ότι υπάρχει μοναδικό σημείο διακλάδωσης P_{i_0} το οποίο και διακλαδίζεται πλήρως, τότε $\nu_{i_0 k} = \Gamma_k$. Το μεγαλύτερο gap, ισούται με $(\Gamma_0 - 2)p^n + \rho^{(0)} + 1 = \delta - 2p^n + 1$ και η ημιομάδα του Weierstrass είναι symmetric.*

Απόδειξη. Καθ'ότι υπάρχει μοναδική πλήρως διακλαδιζόμενη θέση, έχουμε $\nu_{i_0 k} = \Gamma_k$. Από την Παρατήρηση 2.3.33, έχουμε το μέγιστο gap ισούται με $(\Gamma_0 - 2)p^n + \rho^{(0)} + 1 = \delta - 2p^n + 1$, όπου δ είναι ο εκθέτης του different. Για την τελευταία ισότητα πρέπει να μην ξεχνάμε ότι $\Gamma_0 = \left\lfloor \frac{\delta}{p^n} \right\rfloor$ και $\delta = p^n \Gamma_0 + \rho^{(0)}$.

Ένας άμεσος υπολογισμός μέσω της Εξίσωσης των Riemann–Hurwitz μας δείχνει ότι

$$2g - 1 = -2p^n + 1 + \delta,$$

με συνέπεια η ημιομάδα να είναι symmetric. □

Ισχύει το Πόρισμα 2.3.39 για την γενικότερη περίπτωση όπου έχουμε περισσότερες από μία πλήρως διακλαδιζόμενες θέσεις; Η απάντηση είναι όχι, εν γένει, όμως το επόμενο Λήμμα δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει κάτι τέτοιο:

Λήμμα 2.3.40. *Υποθέστε ότι η X είναι όπως στο Πόριμα 2.3.39, αλλά τώρα υπάρχουν $s \geq 2$ το πλήθος πλήρως διακλαδιζόμενα σημεία P_i, με $1 \leq i \leq s$. Συμβολίστε με δ_i τον εκθέτη του different στην θέση i. Η ημιομάδα σε κάποια διακλαδιζόμενη θέση P_i είναι symmetric αν και μόνον αν*

$$\sum_{i' \neq i} \delta_{i'} = p^n \sum_{i' \neq i} \left\lfloor \frac{\delta_{i'}}{p^n} \right\rfloor . \tag{2.16}$$

Επίσης συμβολίστε με $\lambda_{i,j} = \Phi(i,j)$ να είναι οι εκτιμήσεις των γεννητόρων του πύργου των σωμάτων της παραγράφου 1.3α΄. Τότε η Εξίσωση (2.16) ισχύει αν και μόνον αν $\lambda_{i'} \equiv -1 \mod p^n$ για κάθε $i' \neq i$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα i. Από την Παρατήρηση 2.3.33 και την Πρόταση 2.3.34, έχουμε ότι το μέγιστο gap στο P_i είναι $(\Gamma_0 - 2)p^n + \rho_i^{(0)} + 1$. Χρησιμοποιώντας για άλλην μια φορά την Εξίσωση των Riemann–Hurwitz, βλέπουμε ότι το να ισούται αυτό το gap με $2g-1$, ισοδυναμεί με την συνθήκη

$$(\Gamma_0 - 2)p^n + \rho_i^{(0)} + 1 = \sum_{i'=1}^{s} \delta_{i'} - 2p^n + 1. \tag{2.17}$$

Καθώς τώρα $\Gamma_0 = \sum_{i'=1}^{s} \left\lfloor \frac{\delta_{i'}}{p^n} \right\rfloor$, το αριστερό μέλος της Εξίσωσης (2.17) ισούται με

$$p^n \sum_{i' \neq i} \left\lfloor \frac{\delta_{i'}}{p^n} \right\rfloor + \delta_i - 2p^n + 1.$$

Έτσι, για να ισχύει η Εξίσωση (2.17) πρέπει να έχουμε ότι

$$\sum_{i' \neq i} \delta_{i'} = p^n \sum_{i' \neq i} \left\lfloor \frac{\delta_{i'}}{p^n} \right\rfloor . \tag{2.18}$$

Το δεξί μέλος της Εξίσωσης 2.18 ισούται με $\sum_{i \neq i'} \left(\delta_{i'} - \rho_{i'}^{(0)}\right)$. Καθώς τα $\rho_{i'}^{(0)}$ είναι εξ'ορισμού μη αρνητικά (είναι υπόλοιπα της διαίρεσης με p^n), η Εξίσωση 2.18 ισχύει αν και μόνον αν

$$\rho_{i'}^{(0)} = 0 \Leftrightarrow \delta_{i'} \equiv 0 \mod p^n, \text{ για κάθε } i' \neq i.$$

Για $n = 1$, έχουμε $\delta_{i'} = (\lambda_{i',j} + 1)(p-1)$ και η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με $\lambda_{i',j} \equiv -1 \mod p$, για $i' \neq i$.

Για $n > 1$, έχουμε $\delta_{i'} = (p-1)\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{i',j}+1)p^{n-j}$, και η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με $\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{i',j}+1)p^{n-j} \equiv \sum_{j=1}^{n}(\lambda_{i',j}+1)p^{n-j} \mod p^n$, για $i' \neq i$, ή $\lambda_{i',j} \equiv -1 \mod p^n$, για $i' \neq i$.

□

Πόρισμα 2.3.41. *Παίρνουμε την X να είναι όπως το Πόρισμα 2.3.39, ή το Λήμμα 2.3.40, δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχει μια θέση P_{i_0} η οποία και διακλαδίζεται πλήρως και η ημιομάδα του Weierstrass σε αυτήν είναι symmetric. Τότε η* *ακολουθία των pole numbers μέχρι το $2g$, στην P_{i_0}, η οποία και είναι υπερ μιας ρητής θέσης $(x-\alpha_{i_0})$, δίνεται από*

$$H(P_{i_0}) = \{2g-1-a | a \in \mathcal{G}(P_{i_0})\},$$

όπου η $\mathcal{G}(P_{i_0})$ είναι η ακολουθία των gaps στο P_{i_0}, από την Πρόταση 2.3.34.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια από την symmetric ιδιότητα του Πορίσματος 2.3.39 και του Λήμματος 2.3.40. □

Παρατήρηση 2.3.42. *Στην θεωρία των αριθμητικών ημιομάδων η ακόλουθη κατασκευή χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει κανείς την ημιομάδα, [53]: Έστω $d(P)$, να είναι το μιρότερο θετικό στοιχείο της $H(P)$. Όλα τα στοιχεία $\mu \in \{1,\ldots,d(P)-1\}$ είναι gaps και για κάθε τέτοιο μ, συμβολίζουμε με $b_\mu(P)$ το μικρότερο στοιχείο του $H(P)$, με την ιδότητα $b_\mu(P) \equiv \mu \mod d(P)$. Αυτό σημαίνει ότι $b_\mu(P) = \nu_\mu(P)d + \mu$, και ότι το $\nu_\mu(P) = \left\lfloor \frac{b_\mu(P)}{d(P)} \right\rfloor$ ισούται με τον αριθμό από gaps που είναι ισότιμα με μ, $\mathrm{modulo} d(P)$.*

Υποθέτουμε ότι ο μικρότερος pole number είναι p^n και υπάρχει μοναδική διακλαδιζόμενη θέση στην επέκταση F_n/F_0. Τότε οι ακέραιοι $\nu_\mu(P)$ σε αυτήν την περιγραφή της ημιομάδας είναι ίσοι με τις αναλλοίωτες του Boseck $\nu_\mu(P) = \Gamma_{\Psi^{-1}(\mu)} - 1$, καθ'ότι και οι δύο αυτοί ακεραιοι μετράν τον αριθμό από gaps που είναι ίσα με $\rho_i^{(k)} + 1 \mod p^n$ από την Πρόταση 2.3.34. Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα του Lewittes, [53, Θεώρημα 1.3], [46, Θεώρημα 5] στην χαρακτηριστική μηδέν, παίρνει την ακόλουθη μορφή για μια ταυτοτική ομάδα (η οποία είναι το πρώτο ως προς το p–κομμάτι μιας p–ομάδας που δρά στην καμπύλη μας):

$$g = \sum_{\mu=1}^{p^n-1} \nu_\mu = \sum_{\mu=1}^{p^n-1} (\Gamma_{\mu-1} - 1),$$

καθώς το g είναι το ίχνος της ταυτοτικής αναπαράστασης στα 1–ολόμορφα διαφορικά και το $\Gamma_\mu - 1$, μετράει τον αριθμό από gaps που είναι ισότιμα με $\mu \mathrm{modulo} p^n$. Αυτό είναι ισοδύναμο με τον τύπο που αποδείξαμε στο πρώτο Κεφάλαιο (Παρατήρηση 1.3.8 όπως και στην απόδειξη της βάσης για την κυκλική περίπτωση θέτοντας $m = 1$).

Πρόταση 2.3.43. *Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό του Θεωρήματος 2.3.18. Παίρνουμε Artin-Schreier κυκλική επέκταση του ρητού σώματος συναρτήσεων F_0, δηλαδή η ομάδα Galois είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Τότε για κάθε $0 \leq i \leq p-1$ υπάρχει ένας ακέραιος $k(i)$, με $0 \leq i, k(i) \leq p-1$, έτσι ώστε $\left\lfloor \frac{mi}{p} \right\rfloor = \Gamma_{k(i)} - 1$, για κάποια αναλλοίωτη του Boseck.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.18 ο αριθμός των gaps που είναι ισότημα με mi $\mathrm{modulo} p$ ισούται με $\left\lfloor \frac{mi}{p} \right\rfloor$. Από την Παρατήρηση 2.3.42 αυτός ο αριθμός ισούται με $\Gamma_k - 1$ για εκείνο το k που ικανοποιεί $\rho^{(k)} + 1 = mi \mod p$. □

2.3ε′ Ημιομάδες

Έστω $H \neq \mathbb{Z}_+$ να είναι μια ομάδα φυσικών αριθμών και υποθέστε ότι υπάρχει ένας φυσικός n , τέτοιος ώστε για κάθε $s \geq n$ έχουμε ότι $s \in H$. Επιλέγουμε τον μικρότερο τέτοιο n, δηλαδή έτσι ώστε $n-1 \notin H$. Παρατηρείστε ότι στην περίπτωση που η ημιομάδα είναι η Weiestrass ημιομάδα μιας καμπύλης σε ένα της σημείο P, τότε το γένος της ημιομάδας (δηλαδή ο αριθμός από gaps) και το γένος της καμπύλης ταυτίζονται και θα πρέπει να έχουμε ότι $g+1 \leq n \leq 2g$. Όταν $n = g+1$ τότε τα gaps στο P είναι της μορφής $\mathscr{G}(P) = \{1, \ldots, g\}$. Θα ασχοληθούμε με ένα άνω φράγμα του n στο άμεσο μέλλον.

Παίρνουμε ένα d_1 στοιχείο στην H και συμβολίζουμε με d_2 να είναι το μικρότερο στοιχείο στην $H \backslash d_1\mathbb{Z}_+$ έτσι ώστε $(d_1, d_2) = 1$. Υποθέτουμε ότι $d_2 > d_1$, αν όχι αλλάζουμε μεταξύ τους τους δείκτες $1, 2$ σε ότι ακολουθεί, και γράφουμε $d_2 = d_1 \left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + u$, $0 < u < d_1$.

Λήμμα 2.3.44. *Οι αριθμοί d_1, d_2 παράγουν μια ημιομάδα $d_1\mathbb{Z}_+ + d_2\mathbb{Z}_+ \subset H$, έτσι ώστε κάθε αριθμός $s > (d_1-1)(d_2-1)$ να ανήκει στο $d_1\mathbb{Z}_+ + d_2\mathbb{Z}_+ \subset H$. Μάλιστα*

$$n \leq (d_1-1)(d_2-1), \tag{2.19}$$

και αν οι αριθμοί d_1, d_2 παράγουν όλη την ημιοομάδα H, τότε

$$n = (d_1-1)(d_2-1). \tag{2.20}$$

Απόδειξη. Γράφουμε $d_2 = d_1 \left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + u$, $(u, d_1) = 1$, $0 < u < d_1$. Σε ότι ακολουθεί θα περιγράψουμε τους ακεραίους που μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός των d_1, d_2 με συντελεστές από το $\mathbb{Z}_+$.

Σκεπτόμενοι στοιχεία της μορφής $\nu d_1 + d_2$, παίρνουμε όλα τα στοιχεία της μορφής $\left(\nu + \left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor\right) d_1 + u$, με $\nu \geq 0$. Συμβολίστε με I_λ, να είναι το διάστημα $[\lambda d_1, (\lambda+1)d_1)$. Για $\lambda \geq \left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor$, κάθε διάστημα I_λ περιέχει έναν ακέραιο που είναι ισότιμος με u modulo d_1.

Σκεπτόμενοι στοιχεία της μορφής $\nu d_1 + 2d_2$, παίρνουμε όλα τα στοιχεία της μορφής $\left(\nu + 2\left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor\right) d_1 + 2u$. κ.ο.κ..

Για να πάρουμε ένα στοιχείο με τυχαίο υπόλοιπο modulo d_1 πρέπει να σκεφτούμε όλα τα στοιχεία που έχουν την μορφή $\nu d_1 + \mu d_2$, όπου τώρα το μ θα παίρνει όλες τις τιμές $0, \ldots, d-1$. Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο μ. Τα στοιχεία που παίρνουμε έχουν την μορφή

$$\left(\nu + \mu \left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor\right) d_1 + \mu u = \left(\nu + \mu \left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\mu u}{d_1} \right\rfloor\right) d_1 + \left(\mu u - \left\lfloor \frac{\mu u}{d_1} \right\rfloor d_1\right). \tag{2.21}$$

Κάτι που δείχνει ότι για κάθε $\lambda \geq \left(\mu \left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\mu u}{d_1} \right\rfloor\right)$ κάθε διάστημα I_λ, περιέχει έναν ακέραιο που να είναι ισότιμος με το μu modulo d_1.

Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μ είναι $d_1 - 1$ και έτσι για

$$\lambda \geq (d_1-1)\left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(d_1-1)u}{d_1} \right\rfloor = (d_1-1)\left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + u - 1.$$

Για αυτήν την τιμή του μ, ο συντελεστής του d_1 στην Εξίσωση (2.21) είναι $(d_1 - 1)\left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + u - 1$, και αυτό σημαίνει ότι κάθε φυσικός $\geq d_1(d_1-1)\left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + d_1(u-1)$ ανήκει στην H. Αντικαθιστώντας τώρα το $d_1 \left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor$ με $d_2 - u$ επαληθεύουμε ότι:

$$d_1(d_1-1)\left\lfloor \frac{d_2}{d_1} \right\rfloor + d_1(u-1) = (d_1-1)(d_2-1) + u - 1. \tag{2.22}$$

Για την συνέχεια παρατηρούμε ότι στο διάστημα I_{λ_*}, που προκύπτει για την επιλογή $\mu = d_1 - 2$, υπάρχει ακριβώς ένα gap που είναι ισότιμο με $-u = d_1 - u \mod d_1$. Η τιμή του gap αυτού ισούται με

$$(d_1 - 1)(d_2 - 1) + u - 1 - u = (d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1.$$

Συνεπώς, όλοι ο αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από αυτό το gap ανήκουν στο $d_1\mathbb{Z}_+ + d_2\mathbb{Z}_+$. Δηλαδή

$$s \geq (d_1 - 1)(d_2 - 1) \Rightarrow s \in d_1\mathbb{Z}_+ + d_2\mathbb{Z}_2.$$

Δείξαμε ότι $(d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1 \notin d_1\mathbb{Z}_+ + d_2\mathbb{Z}_+$. Αν $H = d_1\mathbb{Z}_+ + d_2\mathbb{Z}_+$, τότε το $(d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1$ είναι gap και $n = (d_1 - 1)(d_2 - 1)$. □

Ήλθε η ώρα να ασχοληθούμε με την μέγιστη τιμή του n. Ας σημειώσουμε ότι αν $2g - 1 \notin H(P)$, τότε $n = 2g$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι αν το σώμα συναρτήσεων F δεν είναι υπερελλιπτικό, κάτι που ισοδυναμεί με $m_1 \neq 2$, τότε $m_i \geq 2i + 1$ για $i = 1, \ldots, g-2$ και $m_{g-1} \geq 2g - 2$ [75, Λήμμα 1.25]. Αυτό σημαίνει ότι ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις για το m_{g-1}, είτε $m_{g-1} = 2g - 2$, ή $m_{g-1} = 2g - 1$.

Σε ένα μη Weierstrass σημείο P μιας K–κλασικής καμπύλης X, έχουμε ότι $m_i(P) = g + i$, για κάθε i. Στην περίπτωση αυτή τα gaps όπως και η generic order sequence είναι κλασικές, και ίσες με

$$\mathscr{G}(P) = \{1, \ldots, g\} \text{ και } \mathscr{E}(P) = \{0, \ldots, g-1\} = \{\epsilon_i(P) | \; 0 \leq i \leq g-1\}.$$

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι $m_{g-1} = 2g-2$ σε κάποιο σημείο P της καμπύλης. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη αυτή επάγει ότι το μέγιστο gap στο P ισούται με $2g-1$. Συνεπώς οδηγούμαστε ακριβώς στο συμπλήρωμα της παραπάνω κατάστασης. Πιο συγκεκριμένα οδηγούμαστε στην μελέτη που η καμπύλη πρέπει να ικανοποιεί *τουλάχιστον μία* από τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) Η καμπύλη δεν είναι K–κλασική,

(ii) Το P είναι σημείο του Weierstrass.

Μάλιστα μια πιο προσεκτική ανάλυση μας δείχνει ότι αν $m_{g-1} = 2g - 2$, τότε πρέπει να αληθεύει πάντα η δεύτερη συνθήκη, δηλαδή το P πρέπει να είναι σημείο του Weierstrass. Πράγματι, ξεχωρίζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Η καμπύλη X δεν είναι K–κλασική και το σημείο P είναι σύνηθες (ordinary), δηλαδή $2g - 1 \in \mathscr{G}(P) \neq \{1, \ldots, g\}$ και καθώς

$$\mathscr{G}(P) = \{j_i^K(P) + 1 | \; 0 \leq i \leq g-1\} = \{\epsilon_0 + 1, \ldots, \epsilon_{g-1} + 1\}$$

θα έχουμε ότι $\epsilon_{g-1} = 2g - 2 = j_{g-1}^K(P)$· όμως κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει δείτε τον [75, Λήμμα 2.31, σελίδα 30].

Περίπτωση 2: Το σημείο P είναι ένα K–Weierstrass σημείο και η X είναι μια K–κλασική καμπύλη. Αυτό σημαίνει ότι $2g - 1 \in \mathscr{G}(P) \neq \{1, \ldots, g\}$,

$$\mathscr{G}(P) = \{j_i^K(P) + 1 | \; 0 \leq i \leq g-1\} \neq \{\epsilon_0 + 1, \ldots, \epsilon_{g-1} + 1\} = \{1, \ldots, g\},$$

έτσι $j_{g-1}^K(P) = 2g - 2$, όμως $\epsilon_{g-1} = g - 1 \neq j_{g-1}^K(P)$.

Περίπτωση 3: Η καμπύλη X δεν είναι K–κλασική και το P είναι σημείο του Weierstrass. Θα έχουμε ότι $g - 1 < \epsilon_{g-1} \lneqq j_{g-1}^K(P)$

Φτάσαμε έτσι στην ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 2.3.45. *Αν μια καμπύλη έχει symmetric Weierstrass ημιομάδα σε ένα σημείο της P, τότε το σημείο αυτό είναι σημείο του Weierstrass. Επίσης αν η ημιομάδα του Weierstrass στο σημείο αυτό παράγεται από δύο στοιχεία, d_1, d_2, δηλαδή αν ισχύει η ισότητα του Λήμματος 2.3.44, στην Εξίσωση (2.20), το γένος της καμπύλης θα δίνεται από*

$$g = \frac{(d_1-1)(d_2-1)}{2}.$$

Αν η ημιομάδα του Weierstrass σε αυτό το σημείο δεν μπορεί να παραχθεί από τα δύο στοιχεία, τότε

$$g < \frac{(d_1-1)(d_2-1)}{2}.$$

Παραδείγματα 2.3.46. *Στα ακόλουθα παραδείγματα βλέπουμε ότι το n πετυχαίνει την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει, δηλαδή $n = 2g$.*

Ας πάρουμε μια Artin–Schreier που ορίζεται από το Παράδειγμα 2.3.38 ή ακόμα την γενικότερη περίπτωση όπου

$$y^q - y = f,$$

με το f να είναι ένα πολυώνυμο βαθμού m, με το m πρώτο ως προς το p και το $q = p^h$. Αυτές έχουν γένος $g = \frac{(q-1)(m-1)}{2}$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας την θεωρία των αναλλοίωτων του Boseck υπολογίζουμε ότι το μεγαλύτερο gap είναι

$$\delta - 2q + 1 = (m+1)(q-1) - 2q + 1 = (m-1)(q-1) - 1 = 2g - 1,$$

και $n = 2g$.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε από το Λήμμα 2.3.44. Πράγματι από τον [69] γνωρίζουμε ότι η ημιομάδα του Weierstrass παράγεται από τα m, q. Συνεπώς $n = (q-1)(m-1) = 2g$.

Βλέπουμε ότι πολλά σώματα συναρτήσεων όπως τα Hermitian και τα πηλίκα αυτής $y^q + y = x^m$, $m \mid q+1$, $q = p^h$, οι καμπύλες των Matignon-Lehr που δίνονται στο [44, 4.1], οι Garcia–Stihtenoth, ή (GS) καμπύλες που δίνονται στο [19] ικανοποιούν όλες την συνθήκη $2n = g$. Οι δύο τελευταίες είναι Artin-Schreier επεκτάσεις του ρητού σώματος συναρτήσεων. Μάλιστα αν $k = \mathbb{F}_{q^2}$, το πεπερασμένο σώμα q^2 στοιχείων, τότε η Hermitian, και τα καλύμματα της, $y^q + y = x^m$, $m \mid q+1$, όπως και οι (GS) καμπύλες στο [19] είναι συγκεκριμένες maximal καμπύλες οι οποίες είναι επίσης Artin-Schreier καμπύλες, [20, Θεώρημα 5.4].

Ας συσχετίσουμε τις maximal καμπύλες με τις ημιομάδες του Weierstrass: Παίρνουμε X, να είναι μια maximal καμπύλη επί του $\mathbb{F}_{q^2}$ γένους g. Έστω P να είναι ένα σημείο που ανήκει στο $X(\mathbb{F}_{q^2})$ και με $m_i = m_i(P)$ να είναι ένας pole number στο P.

Σύμφωνα με τον Lewittes, [48, Θεώρημα 1(β)], [14, σελίδα 46]

$$\#X(\mathbb{F}_{q^2}) = N \leq q^2 m_i + 1.$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω με το Hasse-Weil φράγμα maximal καμπύλες, έχουμε το ακόλουθο φράγμα (m_i είναι οποιοσδήποτε pole number)

$$\#X(\mathbb{F}_{q^2}) = q^2 + 1 + 2gq \leq q^2 m_i + 1,$$

ή

$$g \leq \frac{q(m_i - 1)}{2}.$$

Αν $m_i = q$, το παραπάνω είναι ένα διάσημο αποτέλεσμα του Ihara, δείτε το [29], με την ισότητα να πετυχαίνεται όταν η X είναι η Hermitian καμπύλη. Παρατηρούμε ότι αν το P είναι $\mathbb{F}_{q^2}$–ρητό σημείο τότε $q, q+1$ είναι pole numbers, [14, Πρόταση 1.5 (iv)], και το γένος της Fermat υπολογίζεται από το Λήμμα 2.3.44 παίρνοντας $d_1 = q, d_2 = q+1$.

2.3ϛ΄ Ο πίνακας των Hasse-Witt και οι ημιομάδες

Στους [71] οι K.O. Stöhr, P.Viana εισήγαγαν μια νέα τοπική κατασκευή για τον πίνακα Hasse-Witt, [26]. Ένα από τα αποτελέσματά τους, το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε, ήταν το ακόλουθο

Πρόταση 2.3.47. *Έστω (a_{ij}), να συμβολίζει τον πίνακα του Hasse-Witt. Ας σκεφτούμε το γινόμενο*

$$A_r := (a_{ij})(a_{ij}^p) \cdots (a_{ij}^{p^{r-1}}).$$

Για κάθε θετικό r η τάξη (rank) του πίνακα A_r είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον αριθμό των gaps, τα οποία διαιρούνται από το p^r.

Απόδειξη. [71, Πόρισμα 2.7] □

Συγκεκριμένα, αν η τάξη του πίνακα A_r είναι μηδέν, τότε δεν υπάρχουν gaps, τα οποία διαιρούνται από το p^r και κάθε άλλος αριθμός που διαιρείται με p^r είναι pole number. Αυτό μπορεί να αποδεικτεί και με διαφορετικές μεθόδους, όπως για παράδειγμα στον [58].

Παρατήρηση 2.3.48. *Η p–rank της Jacobian είναι απλά η τάξη του πίνακα A_g. Αν η p–rank είναι μηδέν, τότε δεν παίρνουμε καμιά πληροφορία για τους pole numbers, καθώς γνωρίζουμε ότι κάθε αριθμός μεγαλύτερος του $2g$ είναι pole number. Για να το δούμε αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για $p \geq 5$ έχουμε ότι $2g < p^g$.*

Πρόταση 2.3.49. *Αν μια καμπύλη έχει Hasse-Witt πίνακα μηδενικό τότε κάθε φυσικός που διαιρείται με p είναι pole number. Αυτό σημαίνει ότι η $G_1(P)$ είναι το πολύ μια επέκταση μιας στοιχειώδης αβελιανής με μια κυκλικής τάξης p.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει ένας pole number m έτσι ώστε $m < p$, τότε η $G_1(P)$ αναπαρίσταται πιστά στον $L(mP)$ και γι'αυτό θα πρέπει να είναι μια στοιχειώδης αβελιανή ομάδα. Αν $p < m$, τότε $m_1 = p$ και από το Λήμμα 2.3.7 έχουμε ότι ο $\ker \rho_1$ διαιρεί το p, συνεπώς ο $\ker \rho_1$ είναι είτε τετριμμένος είτε ισόμορφος με μια κυκλική ομάδα τάξης p. Η ομάδα $G_1(P)$ δίνεται από μια μικρή ακριβής ακολουθία

$$1 \to \ker \rho_1 \to G_1(P) \to V \to 1,$$

όπου η V είναι μια στοιχειώδης αβελιανή ομάδα. □

Παράδειγμα 2.3.50. *Ένα κλασικό παράδειγμα καμπύλης με nillpotent Cartier operator δίνεται από την Hermitian καμπύλη*

$$y^{p^r} + y = x^{p^r+1},$$

(η οποία είναι ισόμορφη με την Fermat καμπύλη $x^{p^r+1} + y^{p^r+1} + 1 = 0$), με Cartier operator τέτοιο ώστε $C^r = 0$ [58].

Πόρισμα 2.3.51. *Αν η X έχει Hasse-Witt πίνακα μηδέν και είναι big action τότε η $G_2(P)$ είναι κυκλική τάξης p.*

Απόδειξη. Αν ο πρώτος pole number δεν διαιρείται από το p, τότε έχουμε μια πιστή δισδιάστατη αναπαράσταση της $G_1(P)$ στον $L(m_r P)$, με συνέπεια η $G_1(P)$ να είναι στοιχειώδης αβελιανή και έτσι η G να φράσεται από ένα γραμμικό φράγμα στο γένος, [54]. Ο πρώτος pole number διαιρείται από p καθώς ο πίνακας των Hasse-Witt είναι μηδέν. Επίσης ο πρώτος pole number είναι $m_1 = |G_2(P)|$ εξαιτίας του Λήμματος 2.3.16. Συνεπώς η $G_2(P)$ είναι κυκλική τάξης p. □

Πόρισμα 2.3.52. *Αν η καμπύλη X με $g_X \geq 2$, έχει μηδενοδύναμο Cartier operator, δηλαδή $C^\ell = 0$, και επιπρόσθετα ικανοποιεί την συνθήκη $p^\ell \leq g$, τότε η καμπύλη δεν είναι κλασική ως προς το canonical linear series. Επίσης, όλες οι άγρια διακλαδισμένες καμπύλες με μηδενικό Cartier operator και $g \neq p - 1$, δεν είναι κλασικές ως προς το canonical linear series. Εξαίρεση αποτελεί η υπερελλειπτική καμπύλη $y^2 = x^p - x$.*

Απόδειξη. Μια καμπύλη είναι κλασική ως προς το canonical linear series αν και μόνον αν η ακολουθία των gaps για ένα σημείο που δεν είναι Weierstrass δίνεται από $\{1, 2, \ldots, g\}$. Η Πρόταση 2.3.47 έχει σαν συνέπεια ότι το p^ℓ είναι ένας pole number. Καθώς $p^\ell \leq g$ η καμπύλη δεν μπορεί να είναι κλασική.

Υποθέτουμε τώρα ότι η καμπύλη X έχει μια ομάδα αυτομορφισών G τέτοια ώστε να υπάρχει ένα άγρια διακλαδισμένο σημείο του καλύμματος $X \to X/G$, και να έχει επίσης μηδενικό τελεστή Cartier. Συνεπώς $\ell = 1$ (στην βιβλιογραφία αναφέρονται σαν superspecial καμπύλες), και σύμφωνα με τον Roquette, [61] η ύπαρξη άγριας διακλάδωσης έχει σαν συνέπεια $p - 1 \leq g$ ή η καμπύλη να είναι η υπερελλειπτική $y^2 = x^p - x$. Για την περίπτωση όπου $p - 1 < g$ το αποτέλεσμα έπεται. Δεν γνωρίζουμε τι γίνεται γαι την περίπτωση $g = p - 1$ και για μεγάλους πρώτους (για πρώτους $p < 5$, αυτές οι καμπύλες είναι K-κλασικές γιατί ικανοποιούν το κριτήριο της Εξίσωσης (2.23) παρακάτω).

Η υπερελλειπτική καμπύλη $y^2 = x^p - x$ έχει γένος $g = (p-1)/2$ και είναι επίσης μια Artin-Schreier επέκταση του ρητού σώματος συναρτήσεων. Στον [78] αποδείχτηκε ότι αυτή η καμπύλη έχει μηδενικό τελεστή Cartier. Μάλιστα πρόκειται για την superspecial υπερελλειπτική καμπύλη με το μεγαλύτερο δυνατό γένος [4, Θεώρημα 1.2]. Όμως είναι γνωστό ότι όλες οι υπερελλειπτικές καμπύλες οποιασδήποτε χαρακτηριστικής είναι K–κλασικές, [64, Satz 8]. □

Παρατηρούμε ότι όλες οι superspecial υπερελλειπτικές καμπύλες X είναι K–κλασικές και ικανοποιούν το κριτήριο που δίνεται στην ακόλουθη εξίσωση

$$p > \deg K = 2g - 2, \Longrightarrow X \text{ είναι κλασική ως προς } K, \tag{2.23}$$

(δείτε για παράδειγμα στους [42, Θεώρημα 15] και [83, Πρόταση. 14.2.64, σελ.561]), καθ'ότι από το [4, Θεώρημα 1.2] τα γένη τους έχουν για άνω φράγμα το $\frac{p-1}{2}$. Επίσης αν $\mathrm{char} k = 0$ ή όταν η Εξίσωση (2.23) ισχύει τότε η X είναι K–κλασική. Το αξιοθάυμαστο είναι ότι *δεν υπάρχει* άγρια διακλαδισμένο καλύμμα $X \longrightarrow X/G$, με την X να *είναι ή όχι κλασική* ως προς το canonical linear series, που να ικανοποιεί την Εξίσωση 2.23 για $g \geq 3$ (ο αναγνώστης πρέπει να εξαιρέσει την υπερελλειπτική καμπύλη του Πορίσματος 2.3.52). Αυτό έπεται από τις απλές παρατηρησεις, ότι για τις καμπύλες αυτές έχουμε $p \leq g + 1$ και $2g - 2 \geq g + 1$ για κάθε $g \geq 3$. Ας μην ξεχνάμε ότι όλες οι καμπύλες για $g \leq 3$ είναι K–κλασικές, με μόνον μια εξαίρεση για $p = g = 3$, [34].

Παρατήρηση 2.3.53. *Το παραπάνω Πόρισμα, αν περιοριστεί στον κόσμο των maximal καμπυλών αποτελεί την [14, Πρόταση 1.7.]. Πράγματι από το [20, Θεώρημα 3.3], κάθε μέγιστη (και ελάχιστη προσθέτουμε) καμπύλη επί του $\mathbb{F}_{q^2}$, $q = p^\ell$ έχει μηδενοδύναμο Cartier operator, με $C^\ell = 0$. Η μικρή διαφορά που εμφανίζεται στο κάτω φράγμα που δίνεται εκεί, $p^\ell - 1 \leq g$ εξηγείται επειδή αν η X είνα κλασική και $g = p^\ell - 1$, τότε $m_1 = p^\ell$ και από την [14, Πρόταση 1.5 όπως και την Παρατήρηση ακριβώς πριν από αυτή], αυτή η καμπύλη πρέπει να είναι η Hermitian, που είναι άτοπο. Αυτή όμως δεν είναι η μοναδική περίπτωση για όχι maximal καμπύλες.*

Αξίζει να σημειώσουμε ότι τα γένη για τις καμπύλες με μηδενοδύναμο Cartier operator φράσσονται από

$$g \leq \frac{p^\ell(p^\ell - 1)}{2},$$

με ℓ, ο rank of nilpotency, [58].

Παρατηρούμε τέλος ότι οι καμπύλες με Cartier operator μηδέν, οι οποίες είναι άγρια διακλαδισμένες με $p - 1 = g$, γίνονται τώρα ένα πιο ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης. Για μικρούς πρώτους, $p < 5$, είναι μια εύκολη άσκηση να δείξει κάποιος ότι αυτές είναι κλασικές.

Ας ταξινομήσουμε τέλος μια κλάση maximal καμπυλών ως προς την Weierstrass ημιομάδα τους.

Παρατήρηση 2.3.54. *Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα από την [14, Πρόταση 1.10], Λήμμα 2.3.44, εδώ και [40, Θεώρημα 2.5], παίρνουμε το ακόλουθο:*

Σκεφτόμαστε maximal καμπύλες μη μηδενικού γένους επί του $\mathbb{F}_{q^2}$, και παίρνουμε το σύνολο Σ των $\mathbb{F}_{q^2}$–ρητών σημείων τους, έτσι ώστε η ημιομάδα του Weierstrass να παράγεται από δύο γεννήτορες. Τότε η ημιομάδα του Weierstrass στα σημεία του Σ είναι symmetric, δηλαδή το μέγιστο gap είναι πάντα το $2g - 1$.

Καθώς τα $q, q + 1$ πρέπει πάντα να ανήκουν στην ημιομάδα του Weierstrass σε ένα τέτοιο σημείο, η συνθήκη για τον αριθμό των γεννητόρων, αντιστοιχεί στον ελάχιστο αριθμό από γεννήτορες που μπορεί να έχει μια maximal καμπύλη. Αναδιατυπώνοντας έχουμε:

Οι maximal καμπύλες επί του $\mathbb{F}_{q^2}$ με ελάχιστο αριθμό γεννητόρων στις ημιομάδες του Weierstrass σε ένα $\mathbb{F}_{q^2}$–ρητό σημείο έχουν symmetric ημιομάδα του Weierstrass στο σημείο αυτό.

Παράρτημα Α΄

Λογαριασμοί στο πρόγραμμα Magma

Λογαριάζουμε

```
p:=7;

n:=3;
F<a>:=FiniteField(p^n);
NE:=NormalElement(F);
m:=2;
Phi:=5;


GammaList:=[* *];

for i in [0..p^n] do
Append(~GammaList,Floor((m*(p^n-1)*(Phi+1)-i*Phi)/p^n));
end for;


Different := (Phi+1)*(p^n-1);
g := -p^n+1+(1/2)*Different;

//Number of m-holomorphic differentials
Numm:=Floor((2*m-1)*(g-1));

//Compute Summation of Gamma elements
GammaSum:=[* 0 *];
summ:=0;
for i in [1..p^n] do
summ:=summ+GammaList[i];
Append(~GammaSum,summ);
end for;

Dlist:=[* *];
```

```
for mu in [1..p^n-1] do
dd:=GammaList[mu-1+1]-GammaList[mu+1];
Append(~Dlist,dd); //+1 afou oi deiktes metrane apo 1.
end for;
dd:=GammaList[p^n+1]-2*m+1;
Append(~Dlist,dd);

//Telos arxikopoihshs

summF:=0;
for Numm in [1..p^n] do

// Arxh toy ypologismou twn covariants
M:=ZeroMatrix(F,n*Numm,Numm);

for i in [0..Numm-1] do
for j in [0..i-1] do
for t in [0..n-1] do
M[i+1+t*Numm,j+1]:=Binomial(i,j)*NE^(t*(i-j));
//M[i+1+Numm,j+1]:=Binomial(i,j)*1^(i-j);
end for;
end for;
end for;
//"-----------------";
//Numm,Rank(M),Numm-Rank(M),Floor(Numm/p);
dias:=Numm-Rank(M);
// Telos ypologismou twn covariants.

summF:=summF+Dlist[Numm]*dias;
//summF;
end for;

summF;

b:=-Phi-1;
sum:=0;
for nu in [1..n] do
sum:=sum+Floor( ((Phi+1)*(p-1)+b)/p )-Ceiling(b/p);
b:=Ceiling(b/p);
end for;
sum;
Ceiling((Phi+1)*(p^n-1)/p^n)-3;
sum+Ceiling((Phi+1)*(p^n-1)/p^n)-3;
```

Βιβλιογραφία

[1] Nurdagül Anbar, Henning Stichtenoth, and Seher Tutdere, *On ramification in the compositum of function fields*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **40** (2009), no. 4, 539–552. MR MR2563130

[2] Jannis Antoniadis, *Representation theory of finite groups, available at http://myria.math.aegean.gr/ kontogar/reps2009/index.html*, (in greek) (1998).

[3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969. MR MR0242802 (39 #4129)

[4] Matthew H. Baker, *Cartier points on curves*, Internat. Math. Res. Notices (2000), no. 7, 353–370. MR MR1749740 (2001g:11096)

[5] José Bertin and Ariane Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*, Invent. Math. **141** (2000), no. 1, 195–238. MR 2001f:14023

[6] Niels Borne, *Cohomology of G-sheaves in positive characteristic*, Adv. Math. **201** (2006), no. 2, 454–515. MR MR2211535

[7] Helmut Boseck, *Zur Theorie der Weierstrasspunkte*, Math. Nachr. **19** (1958), 29–63. MR MR0106221 (21 #4955)

[8] Wieb Bosma, John Cannon, and Catherine Playoust, *The Magma algebra system I: The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), no. 3-4, 235–265, Computational algebra and number theory (London, 1993).

[9] R.Oo Buchweitz, *On zariski's criterion for equisingularity and non–smoothable monomial curves*, Paris VII, 1981, Thése.

[10] Martin Burrow, *Representation theory of finite groups*, Dover Publications Inc., New York, 1993, Corrected reprint of the 1971 edition. MR MR1218391 (94a:20001)

[11] Marcus du Sautoy and Ivan Fesenko, *Where the wild things are: ramification groups and the Nottingham group*, New horizons in pro-p groups, Progr. Math., vol. 184, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000, pp. 287–328. MR MR1765125 (2001h:20034)

[12] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

[13] Hershel M. Farkas and Irwin Kra, *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1980. MR MR583745 (82c:30067)

[14] Rainer Fuhrmann, Arnaldo Garcia, and Fernando Torres, *On maximal curves*, J. Number Theory **67** (1997), no. 1, 29–51. MR MR1485426 (98k:11077)

[15] Arnaldo García, *On Weierstrass points on Artin-Schreier extensions of $k(x)$*, Math. Nachr. **144** (1989), 233–239. MR MR1037171 (91f:14021)

[16] ______, *On Weierstrass points on certain elementary abelian extensions of $k(x)$*, Comm. Algebra **17** (1989), no. 12, 3025–3032. MR MR1030607 (90m:14020)

[17] Arnaldo Garcia, *Curves over finite fields attaining the Hasse-Weil upper bound*, European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000), Progr. Math., vol. 202, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 199–205. MR MR1905360 (2003e:11065)

[18] Arnaldo Garcia and Henning Stichtenoth, *A maximal curve which is not a Galois subcover of the Hermitian curve*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **37** (2006), no. 1, 139–152. MR MR2223491 (2007a:11083)

[19] ______, *A maximal curve which is not a Galois subcover of the Hermitian curve*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **37** (2006), no. 1, 139–152. MR MR2223491 (2007a:11083)

[20] Arnaldo Garcia and Saeed Tafazolian, *Certain maximal curves and Cartier operators*, Acta Arith. **135** (2008), no. 3, 199–218. MR MR2457195 (2009i:11076)

[21] Philippe Gille, *Le groupe fondamental sauvage d'une courbe affine en caractéristique $p > 0$*, Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998), Progr. Math., vol. 187, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 217–231. MR MR1768103 (2002a:14027)

[22] Massimo Giulietti and Gabor Korchmaros, *On large automorphism groups of algebraic curves in positive characteristic*, arXiv:0706.2320v1.

[23] Massimo Giulietti and Gábor Korchmáros, *A new family of maximal curves over a finite field*, Math. Ann. **343** (2009), no. 1, 229–245. MR MR2448446

[24] David M. Goldschmidt, *Algebraic functions and projective curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 215, Springer-Verlag, New York, 2003. MR MR1934359 (2003j:14001)

[25] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[26] Helmut Hasse and Ernst Witt, *Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p*, Monatsh. Math. Phys. **43** (1936), no. 1, 477–492. MR MR1550551

[27] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1974. MR MR0354211 (50 #6693)

[28] Adolf Hurwitz, *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Tranformationen in sich*, Math. Ann. **41** (1893), 403–442.

[29] Yasutaka Ihara, *Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), no. 3, 721–724 (1982). MR MR656048 (84c:14016)

[30] Kenkichi Iwasawa and Tsuneo Tamagawa, *On the group of automorphisms of a function field*, J. Math. Soc. Japan **3** (1951), 137–147. MR MR0043832 (13,325b)

[31] Eun-Ju Kang, *On weierstrass points, available at http://mathnet.kaist.ac.kr/*, Trends in Mathematics **2** (1999), 124–128.

[32] Sotiris Karanikolopoulos, *Uniformization on algebraic curves*, University Of Ægean, master thesis (in greek) (2005).

[33] Nicholas M. Katz, *Local-to-global extensions of representations of fundamental groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **36** (1986), no. 4, 69–106. MR MR867916 (88a:14032)

[34] Kaname Komiya, *Algebraic curves with non-classical types of gap sequences for genus three and four*, Hiroshima Math. J. **8** (1978), no. 2, 371–400. MR MR0498586 (58 #16680)

[35] A. Kontogeorgis, *The ramification sequence for a fixed point of an automorphism of a curve and the Weierstrass gap sequence*, Math. Z. **259** (2008), no. 3, 471–479. MR MR2395122 (2009a:14041)

[36] Aristides Kontogeorgis, *On the tangent space of the deformation functor of curves with automorphisms*, Algebra Number Theory **1** (2007), no. 2, 119–161. MR MR2361938

[37] ———, *Polydifferentials and the deformation functor of curves with automorphisms*, Journal of Pure and Applied Algebra **210** (2007), no. 2, 551–558.

[38] ———, *Field of moduli versus field of definition for cyclic covers of the projective line, preprint, available at http://myria.math.aegean.gr/kontogar/papers.html*, (2008).

[39] Aristides I. Kontogeorgis, *The group of automorphisms of the function fields of the curve $x^n + y^m + 1 = 0$*, J. Number Theory **72** (1998), no. 1, 110–136.

[40] Gábor Korchmáros and Fernando Torres, *Embedding of a maximal curve in a Hermitian variety*, Compositio Math. **128** (2001), no. 1, 95–113. MR MR1847666 (2002i:11060)

[41] Gilles Lachaud, *Sommes d'Eisenstein et nombre de points de certaines courbes algébriques sur les corps finis*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), no. 16, 729–732. MR MR920053 (88m:11044)

[42] Dan Laksov, *Wronskians and Plücker formulas for linear systems on curves*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), no. 1, 45–66. MR MR744067 (85k:14016)

[43] Serge Lang, *Elliptic functions*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1973, With an appendix by J. Tate. MR MR0409362 (53 #13117)

[44] Claus Lehr and Michel Matignon, *Automorphism groups for p-cyclic covers of the affine line*, Compos. Math. **141** (2005), no. 5, 1213–1237. MR MR2157136 (2006f:14029)

[45] Heinrich-Wolfgang Leopoldt, *Über die Automorphismengruppe des Fermatkörpers*, J. Number Theory **56** (1996), no. 2, 256–282.

[46] Joseph Lewittes, *Automorphisms of compact Riemann surfaces*, Amer. J. Math. **85** (1963), 734–752. MR MR0160893 (28 #4102)

[47] ______, *Genus and gaps in function fields*, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), no. 1, 29–44. MR MR996173 (90d:11129)

[48] ______, *Places of degree one in function fields over finite fields*, J. Pure Appl. Algebra **69** (1990), no. 2, 177–183. MR MR1086559 (92b:14004)

[49] Pedro Ricardo López-Bautista and Gabriel Daniel Villa-Salvador, *On the Galois module structure of semisimple holomorphic differentials*, Israel J. Math. **116** (2000), 345–365. MR MR1759412 (2001f:12007)

[50] Daniel J. Madden, *Arithmetic in generalized Artin-Schreier extensions of $k(x)$*, J. Number Theory **10** (1978), no. 3, 303–323. MR MR506641 (80d:12009)

[51] Myriam Rosalía Maldonado-Ramírez and Martha Rzedowski-Calderón, *Cyclic p-extensions of function fields with null Hasse-Witt map*, Int. Math. Forum **2** (2007), no. 49-52, 2463–2480. MR MR2381834

[52] Michel Matignon and Magali Rocher, *Smooth curves having a large automorphism p-group in characteristic $p > 0$*, Algebra Number Theory **2** (2008), no. 8, 887–926. MR MR2457356

[53] Ian Morrison and Henry Pinkham, *Galois Weierstrass points and Hurwitz characters*, Ann. of Math. (2) **124** (1986), no. 3, 591–625. MR MR866710 (88a:14033)

[54] Shōichi Nakajima, *On abelian automorphism groups of algebraic curves*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), no. 1, 23–32. MR MR897671 (88i:14016)

[55] ______, *p-ranks and automorphism groups of algebraic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), no. 2, 595–607. MR 88h:14037

[56] Gilvan Oliveira, *Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves*, Manuscripta Math. **71** (1991), no. 4, 431–450. MR MR1104994 (92c:14028)

[57] Gilvan Oliveira and Karl-Otto Stöhr, *Gorenstein curves with quasi-symmetric Weierstrass semigroups*, Geom. Dedicata **67** (1997), no. 1, 45–63. MR MR1468860 (98h:14035a)

[58] Riccardo Re, *The rank of the Cartier operator and linear systems on curves*, J. Algebra **236** (2001), no. 1, 80–92. MR MR1808346 (2002c:14016)

[59] Christophe Ritzenthaler, *Curves over finite fields, courses notes, available at www.math.jussieu.fr/ritzenth.*, 2005.

[60] Magali Rocher, *Large p-group actions with a p-elementary abelian derived group*, J. Algebra **321** (2009), no. 2, 704–740. MR MR2483289 (2010a:14059)

[61] Peter Roquette, *Abschätzung der Automorphismenanzahl von Funktionenkörpern bei Primzahlcharakteristik*, Math. Z. **117** (1970), 157–163. MR 43 #4826

[62] Martha Rzedowski-Calderón, Gabriel Villa-Salvador, and Manohar L. Madan, *Galois module structure of holomorphic differentials in characteristic p*, Arch. Math. (Basel) **66** (1996), no. 2, 150–156. MR MR1367157 (97e:11142)

[63] Hermann Ludwig Schmid, *Zur Arithmetik der zyklischen p-Körper.*, J. Reine Angew. Math. **176** (1936), 161–167 (German).

[64] Friedrich Karl Schmidt, *Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. II. Allgemeine Theorie der Weierstraßpunkte*, Math. Z. **45** (1939), no. 1, 75–96. MR MR1545805

[65] Jean-Pierre Serre, *Local fields*, Springer-Verlag, New York, 1979, Translated from the French by Marvin Jay Greenberg. MR 82e:12016

[66] ———, *Algebraic groups and class fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 117, Springer-Verlag, New York, 1988, Translated from the French. MR MR918564 (88i:14041)

[67] Igor R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1994, Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid. MR MR1328833 (95m:14001)

[68] Henning Stichtenoth, *Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik. I. Eine Abschätzung der Ordnung der Automorphismengruppe*, Arch. Math. (Basel) **24** (1973), 527–544. MR 49 #2749

[69] ———, *Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik. II. Ein spezieller Typ von Funktionenkörpern*, Arch. Math. (Basel) **24** (1973), 615–631. MR 53 #8068

[70] ———, *Algebraic function fields and codes*, Springer-Verlag, Berlin, 1993. MR 94k:14016

[71] Karl-Otto Stöhr and Paulo Viana, *A study of Hasse-Witt matrices by local methods*, Math. Z. **200** (1989), no. 3, 397–407. MR MR978599 (90d:11074)

[72] Karl-Otto Stöhr and José Felipe Voloch, *Weierstrass points and curves over finite fields*, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), no. 1, 1–19. MR MR812443 (87b:14010)

[73] Tuneo Tamagawa, *On unramified extensions of algebraic function fields*, Proc. Japan Acad. **27** (1951), 548–551. MR MR0047705 (13,918a)

[74] Lara Thomas, *A valuation criterion for normal basis generators in equal positive characteristic*, J. Algebra **320**, no. 10, 3811–3820.

[75] Fernando Torres, *The approach of Stöhr-Voloch to the Hasse-Weil bound with applications to optimal curves and plane arcs*, arXiv:math/0011091v1 (2000).

[76] Pavlos Tzermias, *The group of automorphisms of the Fermat curve*, J. Number Theory **53** (1995), no. 1, 173–178.

[77] Robert C. Valentini, *Representations of automorphisms on differentials of function fields of characteristic p*, J. Reine Angew. Math. **335** (1982), 164–179. MR MR667465 (84j:12013)

[78] ______, *Hyperelliptic curves with zero Hasse-Witt matrix*, Manuscripta Math. **86** (1995), no. 2, 185–194. MR MR1317743 (96a:14035)

[79] Robert C. Valentini and Manohar L. Madan, *A hauptsatz of L. E. Dickson and Artin-Schreier extensions*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 156–177. MR 82e:12030

[80] ______, *Weierstrass points in characteristic p*, Math. Ann. **247** (1980), no. 2, 123–132. MR MR568202 (81j:14015)

[81] ______, *Automorphism groups of algebraic function fields*, Math. Z. **176** (1981), no. 1, 39–52. MR MR606170 (83k:12013)

[82] ______, *Automorphisms and holomorphic differentials in characteristic p*, J. Number Theory **13** (1981), no. 1, 106–115. MR MR602451 (83d:14011)

[83] Gabriel Daniel Villa Salvador, *Topics in the theory of algebraic function fields*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2006. MR MR2241963 (2007i:11002)

[84] Robert J. Walker, *Algebraic curves*, Dover Publications Inc., New York, 1962. MR MR0144897 (26 #2438)

[85] Steven H. Weintraub, *Representation theory of finite groups: algebra and arithmetic*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR MR1984740 (2004k:20023)

[86] Qingquan Wu and Renate Scheidler, *The ramification groups and different of a compositum of artin-shreier extensions, preprint, available at http://math.ucalgary.ca/ quwu/ram-groups.pdf*, (2010).

[87] Oscar Zariski and Pierre Samuel, *Commutative algebra. Vol. 1*, Springer-Verlag, New York, 1975, With the cooperation of I. S. Cohen, Corrected reprinting of the 1958 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 28. MR MR0384768 (52 #5641)