Ασκήσεις Θ. Αριθμών

3 Φυλλάδιο

Παράδοση Τετάρτη 16 Νοεμβρίου

1. Αν $\tau(n)$ παριστάνει το πλήθος των φυσικών διαιρετών του n να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $n \mapsto \tau(n)$, είναι αριθμητική πολλαπλασιαστική.

2. Να αποδειχτεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \frac{n}{\phi(n)}.$$

3. Να αποδειχτεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$\sum_{d|n} \mu(d)\phi(d) = \prod_{p|n}(2-p),$$

   όπου το d διατρέχει τους φυσικούς διαιρέτες του n, και το p τους πρώτους διαιρέτες του n.

4. Να βρεθεί το πλήθος και το άθροισμα των φυσικών διαιρετών του 1440.

5. Αν p πρώτος, δείξτε ότι

$$\binom{p}{i} \equiv 0 \mod p$$

   για κάθε $0 < i < p$. Αποδείξτε στην συνέχεια

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \mod p.$$

   Το παραπάνω για ευνόητους λόγους αποκαλείται «το όνειρο του πρωτοετούς».

6. Να αποδειχτεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό a ισχύει

$$a^2 \equiv 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 4 \mod 8$$

   Επίσης να αποδειχτεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό a ισχύει

$$a^3 \equiv a \mod 3, \quad a^5 \equiv a \mod 5 \quad a^7 \equiv a \mod 7.$$

7. Αν p, q είναι πρώτοι αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, να αποδειχτεί ότι

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \mod pq.$$