

# Ασκήσεις Θ. Αριθμών

1 Φυλλάδιο

Παράδοση Πέμπτη 20 Οκτωβρίου

1. Θεωρούμε το πολυώνυμο με συντελεστές από το  $\mathbb{Z}$  της μορφής

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Δείξτε ότι αν το  $f(x)$  έχει ρητή ρίζα  $q = a/b$  τότε το  $b \mid a_n$  και το  $a \mid a_0$ .  
Να δείξετε ότι οι αριθμοί  $\sqrt[13]{3}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ , δεν είναι ρητοί. Είναι σωστό ότι το άθροισμα δύο άρρητων είναι άρρητος;

2. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός  $100m + n$  διαιρείται δια του 7, αν ο αριθμός  $2m + n$  διαιρείται δια του 7.
3. Να αποδειχτεί ότι ένας αριθμός διαιρείται δια του 3 ή του 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται δια του 3 ή του 9, αντίστοιχα.
4. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός  $3n^2 + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , δεν μπορεί να είναι το τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού.
5. Αν για τους φυσικούς αριθμούς  $m, n$  ισχύει  $m < n$  να αποδειχτεί ότι  $2^{2^m} + 1 \mid 2^{2^n} - 1$ .
6. Να αποδειχτεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n > 0$  ισχύει 10 δεν διαιρεί το  $(n - 1)! + 1$ .