Εξέταση Θεωρίας Αριθμών

17 Σεπτεμβρίου 2003

1. Να αποδειχτεί ότι το γινόμενο τεσάρων διαδοχικών αριθμών διαιρείται με το 24.

2. Αν ο p είναι πρώτος δείξτε ότι
$$\binom{p}{i} \equiv 0 \mod p.$$
Αποδείξτε στην συνέχεια ότι
$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \mod p.$$
Γιατί το $\binom{p}{i}$ είναι ακέραιος;

3. Να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 1193930 και 936327 και να γραφεί σαν ακέραιος γραμμικός συνδιασμός των αριθμών αυτών.

4. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} 3x &\equiv 1 \mod 5 \\ 2x &\equiv 3 \mod 7 \\ 5x &\equiv 11 \mod 3. \end{aligned}$$

5. Να οριστεί πότε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ θα λέγεται αριθμητική πολλαπλασιαστική. Να οριστεί η συνάρτηση ϕ του Euler και να αποδειχτεί ότι είναι αριθμητική πολλαπλασιαστική. Αποδείξτε ότι
$$\phi(p) = p - 1 \text{ και } \phi(p^n) = p^n - p^{n-1},$$
για $n \geq 1$.

6. Να αποδειχτεί ότι ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

7. Να εξεταστεί αν έχει λύσεις η ισοδυναμία
$$x^2 \equiv 631 \mod 1033.$$
Δίνεται ότι ο αριθμός 1033 είναι πρώτος.

Καλή Επιτυχία