Ασκήσεις Θ. Αριθμών

6 Φυλλάδιο

Παράδοση Παρασκευή 6 Δεκεμβρίου

1. Αν ισχύει
$$ab \equiv 1 \mod m,$$
να αποδειχτεί ότι ισχύει
$$\mathrm{ord}_m a = \mathrm{ord}_m b.$$

2. Αν ισχύει
$$\mathrm{ord}_m a = r,$$
τότε θα ισχύει
$$\mathrm{ord}_m a^n = \frac{r}{(n,r)}.$$

3. Αν για ένα πρώτο αριθμό p ισχύει
$$\mathrm{ord}_p a = r \text{ και } \mathrm{ord}_p b = s,$$
και επιπλέον ισχύει $(r,s) = 1$, να αποδειχτεί ότι θα ισχύει
$$\mathrm{ord}_p ab = rs.$$

4. Αν a είναι μία αρχική ρίζα modulo m, τότε a^n είναι αρχική ρίζα modulo m, αν ισχύει $(n, \phi(n)) = 1$.

5. Αν w, u είναι δύο αρχικές ρίζες modulo p, όπου p πρώτος αριθμός, να αποδειχτεί ότι ισχύει
$$\mathrm{ind}_u a \equiv \mathrm{ind}_{\mathrm{w}} a \cdot \mathrm{ind}_u w \mod (p-1).$$

6. Να αποδειχτεί ότι το πλήθος των λύσεων της ισοδυναμίας
$$x^2 \equiv a \mod p,$$
όπου p περιττός πρώτος αριθμός είναι
$$N = \begin{cases} 1 + \left(\frac{a}{p}\right), & \text{αν } p \nmid a \\ 1, & \text{αν } p \mid a. \end{cases}$$