

Ασκήσεις Θ. Αριθμών

5 Φυλλάδιο

Παράδοση Παρασκευή 29 Νοεμβρίου

1. Αν για τον ακέραιο αριθμό a και για τον φυσικό αριθμό m ισχύει $(a, m) = 1$ και $(a - 1, m) = 1$, να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{\phi(m)-1} \equiv 0 \pmod{m}.$$

2. Να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$2^{341} \equiv 2 \pmod{11}.$$

3. Να αποδειχτεί ότι η ισοδυναμία

$$x^{13} \equiv 1 \pmod{29},$$

έχει μοναδική λύση την $x \equiv 1 \pmod{29}$.

4. Να λυθούν οι ισοδυναμίες:

$$x^3 - 3 \equiv 0 \pmod{13}$$

$$7x^4 + 19x + 25 \equiv 0 \pmod{27}.$$

5. Αν $0 < s < p$ όπου p πρώτος αριθμός να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$(s - 1)!(p - s)! + (-1)^{s-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

6. Να βρεθεί η τάξη του 7 modulo 34.

7. Αν p είναι περιττός πρώτος αριθμός και a είναι ακέραιος αριθμός πρώτος προς τον p με $\text{ord}_p a = r > 1$, να αποδειχτεί ότι ισχύει

$$a + a^2 + \dots + a^{r-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$