Ασκήσεις Θ. Αριθμών

4 Φυλλάδιο

Παράδοση Παρασκευή 15 Νοεμβρίου

1. Αν $\tau(n)$ παριστάνει το πλήθος των φυσικών διαιρετών του n να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $n \mapsto \tau(n)$, είναι αριθμητική πολλαπλασιαστική.

2. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ είναι πολλαπλασιαστική αριθμητική να αποδειχτεί ότι και η
$$g : \mathbb{N} \ni n \to \sum_{d|n} f(d) \in \mathbb{C},$$
είναι πολλαπλασιαστική αριθμητική.

3. Να αποδειχτεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n
$$\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \frac{n}{\phi(n)}.$$

4. Να αποδειχτεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει
$$\sum_{d|n} \mu(d)\phi(d) = \prod_{p|n}(2-p),$$
όπου το d διατρέχει τους φυσικούς διαιρέτες του n, και το p τους πρώτους διαιρέτες του n.

5. Να βρεθεί το πλήθος και το άθροισμα των φυσικών διαιρετών του 1440.

6. Αν $\sigma(n)$ συμβολίζει το άθροισμα των φυσικών διαιρετών του n και $\tau(n)$ το πλήθος των φυσικών διαιρετών του n να αποδειχτεί ότι
$$\sum_{d|n} \sigma(d)\mu(\frac{n}{d}) = n,$$
και
$$\sum_{d|n} \tau(d)\mu(\frac{n}{d}) = 1.$$

7. Αν p, q είναι πρώτοι αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, να αποδειχτεί ότι
$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \mod pq.$$