

Ασκήσεις Θ. Αριθμών

3 Φυλλάδιο

Παράδοση Τετάρτη 6 Νοεμβρίου

1. Δύο πρώτοι αριθμοί p, p' θα λέγονται δίδυμοι αν η διαφορά τους είναι 2, Βρείτε το πλήθος των διδύμων πρώτων που είναι μικρότεροι από 100000.
2. Να δείξετε ότι το $x^2 - x + 41$ για $x = 0, \dots, 40$ είναι πρώτος. Ομοίως να δείξετε ότι το $x^2 - 79x + 1601$ για $x = 0, \dots, 79$ είναι πρώτος.
3. Να υπολογιστούν οι πρώτοι αριθμοί του Fermat, δηλαδή πρώτοι αριθμοί της μορφής $2^{2^n} + 1$ για $n \leq 100$.
4. Αν p πρώτος, δείξτε ότι

$$\binom{p^k}{i} \equiv 0 \pmod{p}$$

για κάθε $0 < i < p^k$. Αποδείξτε στην συνέχεια

$$(x + y)^{p^k} \equiv x^{p^k} + y^{p^k} \pmod{p}.$$

Το παραπάνω για ευνόητους λόγους αποκαλείται «το όνειρο του πρωτοετούς».

5. Να αποδειχτεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό a ισχύει

$$a^2 \equiv 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 4 \pmod{8}$$

Επίσης να αποδειχτεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό a ισχύει

$$a^3 \equiv a \pmod{3}, \quad a^5 \equiv a \pmod{5}, \quad a^7 \equiv a \pmod{7}.$$

6. Να λυθούν οι γραμμικές ισοδυναμίες

$$88x \equiv 1 \pmod{137}$$

$$21x \equiv 45 \pmod{239}$$

$$33x \equiv 398 \pmod{631}$$

$$55x \equiv 7 \pmod{71}$$

$$513x \equiv -17 \pmod{1163}.$$

Να πάτε στην διεύθυνση <http://eloris.samos.aegean.gr/mailman/listinfo/numth> και να γίνετε μέλη της δημόσιας λίστας συζήτησης σχετικά με το μάθημα.