Ασκήσεις Θ. Αριθμών

2 Φυλλάδιο

Παράδοση Τετάρτη 23 Οκτωβρίου

1. Για m, n ακεραίους $n > m$, ορίζεται το $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Δείξτε ότι το $\binom{n}{m}$ είναι ακέραιος.

2. Να αποδειυθεί ότι ο αριθμός $2^{4n+2} + 1$ δεν είναι πρώτος για $n \geq 1$.

3. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $n^4 + 4$ δεν είναι πρώτος για $n > 1$.

4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $6m + 5$.

5. Αν p_n συμβολίζει τον n-οστό πρώτο αριθμό, να αποδειχθεί ότι $p_{n-1} \geq n + 2$ για $n \geq 5$.

6. Πότε ο αριθμός $(p-1)! + 1$ είναι δύναμη του p, όπου p πρώτος αριθμός;

7. Να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 625 και 231 και να εκφρασθεί αυτός σαν γραμμικός συνδιασμός των παραπάνω αριθμών.

8. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών αριθμών διαιρείται δια του 24.

9. Να βρεθεί η ανάλυση του αριθμού

   1881988129206079638386972394616504398071635633794173827007
   63356422988859715234665485319060606504743045317388011303396
   716199692321205734031879550656996221305168759307650257059

   σε πρώτους παράγοντες. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό σαν «RSA-576» και όποιος το λύσει θα πάρει βραβείο $10.000 από την RSA. Για περισσότερες πληροφορίες καθώς και για λίστα προβλημάτων με ανάλογες αμοιβές ρίξτε μια ματιά στο:

   `www.rsasecurity.com/rsalabs/challenges/factoring/index.html`

10. Να αποδειχθεί ότι κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 4 μπορεί να παρασταθεί σαν άθροισμα δύο περιττών πρώτων αριθμών, για παράδειγμα $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, $12 = 7 + 5$, $14 = 11 + 3$.