

Ασκήσεις Θ. Αριθμών

1 Φυλλάδιο

Παράδοση Παρασκευή 11 Οκτωβρίου

1. Θεωρούμε το πολυώνυμο με συντελεστές από το \mathbb{Z} της μορφής

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Δείξτε ότι αν το $f(x)$ έχει ρητή ρίζα $q = a/b$ τότε το $b \mid a_n$ και το $a \mid a_0$.
Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, δεν είναι ρητοί. Είναι σωστό ότι το άθροισμα δύο άρρητων είναι άρρητος;

2. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $100m + n$ διαιρείται δια του 7, αν ο αριθμός $2m + n$ διαιρείται δια του 7.
3. Να αποδειχτεί ότι ένας αριθμός διαιρείται δια του 3 ή του 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται δια του 3 ή του 9, αντίστοιχα.
4. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $3n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, δεν μπορεί να είναι το τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού.
5. Αν για τους φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει $m < n$ να αποδειχτεί ότι $2^{2^m} + 1 \mid 2^{2^n} - 1$.
6. Να αποδειχτεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n > 0$ ισχύει 10 δεν διαιρεί το $(n - 1)! + 1$.