Εξέταση Γραμμικής Άλγεβρας Ι

Παρασκευή 18 Ιανουαρίου 2002

(1) (α′) Έστω Q διανυσματικός χώρος και $x_1, ..., x_m$ ιδιοδιανύσματα της γραμμικής συνάρτησης $L : X \to X$, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Να δείξετε ότι τα $x_1, ..., x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β′) Να δείξετε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Να δώσετε παράδειγμα πινάκων με ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο που να μην είναι όμοιοι.

(2) (α′) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της L.

(β′) Να βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{array}{llll} x & & +z & = 1 \\ x & +y & +2z & = 1 \\ 2x & +1y & +3z & = 2 \\ 2x & & +2z & = 2 \end{array}$$

(3) Ένας πίνακας $n \times n$ θα λέγεται αντισυμμετρικός αν και μόνο αν $A^t = -A$. Να δείξετε ότι για n περιττό κάθε αντισυμμετρικός πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

(4) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, -1)$.

(5) (α′) Είναι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι, να τον γράψετε σε διαγώνια μορφή.

(β′) Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(a_n)_n$ και $(b_n)_n$ που ορίζονται ως εξής: $a_0 = b_0 = 1$, $a_{n+1} = 4a_n + 3b_n$, $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. Να υπολογίσετε τα a_n, b_n συναρτήσει του n.

(6) Θεωρήστε τον γραμμικό χώρο P_n των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$ με συντελεστές πραγματικούς. Θεωρήστε την βάση $1, x, x^2, ..., x^n$ του P_n. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $L : P_n \to P_n$ που στέλνει το πολυώνυμο f στην παράγωγο του είναι γραμμική. Αφού υπολογίσετε τον πίνακα της L ως προς την παραπάνω βάση, να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τους ιδιόχωρους κάθε ιδιοτιμής. Για ποιους φυσικούς n είναι ο πίνακας της L διαγωνοποιήσιμος;

Καλή επιτυχία