Πρόοδος Γραμμικής Άλγεβρας Ι
Κυριακή 18 Νοεμβρίου 2001

(1) (α′) Έστω $x_1, ..., x_n$ διανύσματα εντός του K-διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι τα $x_1, ..., x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδιασμός των υπολοίπων.

(β′) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και $\{x_1, ..., x_n\}$ βάση του X. Θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση $L : X \to Y$. Ορίζουμε τα $y_1, ..., y_n \in Y$ σαν $y_i = L(x_i)$. Δείξτε ότι αν η L είναι 1-1 τότε τα $y_1, ..., y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εξηγήστε τι μπορεί να συμβεί αν η L δεν είναι 1-1, δίνοντας κατάλληλο παράδειγμα.

(2) Θεωρούμε τον χώρο E των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3. Να δείξετε ότι τα πολυώνυμα $\{1, x, x^2, x^3\}$ αποτελούν βάση του E. Στην συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση $L : E \to E$, η οποία στέλνει το f στην παράγωγο του είναι γραμμική συνάρτηση. Να γράψετε τον πίνακα της ως προς την παραπάνω βάση να υπολογίσετε μια βάση για τον πυρήνα και την εικόνα της.

(3) Έστω $n \times n$ πίνακας A, ο οποίος γράφεται στην μορφή $A = QBQ^{-1}$, όπου Q αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Να εκφράσετε τις δυνάμεις του A συναρτήσει των δυνάμεων του B.

(4) Να υπολογίσετε τους 2×2 πίνακες A τέτοιους ώστε

$$AB = BA,$$

για όλους τους 2×2 πίνακες B.

(5) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος ορίζει γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^4$ στο $\mathbb{R}^3$. Να κατασκευαστεί μία βάση για τον πυρήνα και την εικόνα της παραπάνω γραμμικής απεικόνισης. Να θεωρήσετε την γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^4$ που ορίζεται από τον ανάστροφο πίνακα και να υπολογίσετε μια βάση για τον πυρήνα και την εικόνα αυτής.

Καλή επιτυχία