

## Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 9

Παράδοση 3/12/01

- (1) Καθορίστε όλα τα εσωτερικά γινόμενα επί ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου διάστασης 2.
- (2) Αποδείξτε ότι επί ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου  $E$  διαστάσεως 1 η γωνία δεν εξαρτάται από το εσωτερικό γινόμενο.
- (3) Έστω  $a, b$  με  $a \neq b$  δύο δεδομένα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου  $E$  επί του  $\mathbb{R}$ , ο οποίος είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι κάθε  $x \in E$  τέτοιο ώστε  $\|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|$  γράφεται  $x = \lambda a + \mu b$  με  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $\lambda + \mu = 1$ .
- (4) Θεωρούμε επί του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^3$  εφοδιασμένου με την κανονική βάση, το κανονικό εσωτερικό γινόμενο
  - (α') Επαληθεύστε ότι τα διανύσματα  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 2, -3)$ ,  $v_3 = (5, -4, -1)$  είναι ανά δύο ορθογώνια. Συμπεράνετε μια ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ .
  - (β') Καθορίστε τα μοναδιαία διανύσματα (δηλαδή αυτά με μήκος 1) τα οποία είναι ταυτόχρονα ορθογώνια με τα δύο διανύσματα  $v_1 - v_2$  και  $v_1 + v_3$ .
  - (γ') Καθορίστε τα διανύσματα τα οποία είναι ορθογώνια με το  $2v_2 + v_3$  και ταυτόχρονα ανήκουν σε ένα διανυσματικό υπόχωρο που γεννάται από τα  $v_1 - v_2$  και  $v_1 + v_3$ .
- (5) Έστω ο διανυσματικός χώρος των πολωνύμων

$$E_n = \{P \in \mathbb{R}[x] : \deg P \leq n\}.$$

Αποδείξτε ότι η απεικόνιση  $f : E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$  ορισμένη ως εξής:

$$f(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

- (6) Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  λέγεται ορθογώνιος αν  $A^t = A^{-1}$ .
  - (α') Δείξτε ότι οι ορθογώνιοι πίνακες τάξεως  $n$  σχηματίζουν μια ομάδα για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων.
  - (β') Ο ανάστροφος ενός ορθογωνίου πίνακα είναι ορθογώνιος.
  - (γ') Οι στήλες (και οι γραμμές) ενός ορθογωνίου πίνακα σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση.
  - (δ') Ο πίνακας περάσματος από μία ορθοκανονική βάση σε μία άλλη ορθοκανονική βάση είναι ορθογώνιος.