Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 8

Παράδοση 19/11/01

(1) Αποδείξτε ότι το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2x+3y+z=4 \\ x+y-2z=1 \\ x+4y+z=1 \end{pmatrix}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

(2) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & -1 & x \end{pmatrix}$$

(3) Έστω A αντισυμμετρικός πίνακας $n \times n$, δηλαδή $A^t = -A$. Να δείξετε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε $\det(A) = 0$.

(4) Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$. Θέτουμε $\bar{A} = (\bar{a_{ij}})$ (μιγαδική συζηγία). Δείξτε ότι $\det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$. Δείξτε ότι οι πίνακες με $A^t = \bar{A}$ έχουν πραγματική ορίζουσα.

(5) Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την συνάρτηση $D_\lambda = \det(A(\lambda))$, όπου $A(\lambda)$ είναι ο πίνακας $(a_{ij} + \lambda)$.

(α′) Δείξτε ότι η απεικόνιση $D(\lambda) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, είναι πολυονυμική συνάρτηση βαθμού 1 ή 0.

(β′) Υποθέτουμε ότι τα $D(\lambda_1), D(\lambda_2)$ είναι γνωστά για δύο τιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Υπολογίστε το $D(0) = \det(0)$.

(γ′) Έστω a, b δύο διαφορετικά στοιχεία του $\mathbb{R}$. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & b & \cdots & b \\ a & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(6) Να υπολογίστουν οι ορίζουσες των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$