Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 6

Παράδοση: 12/11/2001

(1) Έστω ϕ η απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^{2,2}$ στον $\mathbb{R}^{2,2}$ η οποία στον πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ αντιστοιχεί τον πίνακα $\begin{pmatrix} a-d & -b-c \\ b+c & d-a \end{pmatrix}$. Δείξτε ότι είναι γραμμική απεικόνιση. Γράψτε μία βάση του $\mathbb{R}^{2,2}$ και υπολογίστε τον πίνακα της παραπάνω συνάρτησης ως προς αυτή την βάση. Βρείτε βάσεις του $ker\phi, im(\phi), im(\phi) \cap ker(\phi)$.

(2) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{1+x, x+x^2, ..., x^{n-1}+x^n\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου E_n των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές με βαθμό μικρότερο του n. Έστω ϕ η γραμμική απεικόνιση από τον E_2 στον E_3 που καθορίζεται από την σχέση

$$\phi(P) = xP + x^2P', \text{ όπου } P' \text{ παράγωγος του } P$$

Καθορίστε τον πίνακα της ϕ ως προς τις βάσεις $\{1, x, x^2\}$ και $\{1, x, x^2, x^3\}$ και τον πίνακα ως προς τις βάσεις $\{1+x, x+x^2, x^2\}$ και $\{1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3\}$.

(3) Θεωρούμε δυο πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n,p}$ και $B \in \mathbb{R}^{p,q}$ τους οποίους γράφουμε στην μορφή

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1,p_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_2,p_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2,p_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2,p_2}$ με $n_1+n_2 = n$ και $p_1+p_2 = p$ και $B_{11} \in \mathbb{R}^{p_1,q_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{p_1,q_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{p_2,q_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{p_2,q_2}$ με $q_1+q_2 = q$. Αποδείξτε ότι

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: Αν ο J είναι ο τετραγωνικός πίνακας $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$$

όπου τα O, I_n είναι οι τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$, υπολογίστε τον J^2.

(4) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι ο πίνακας $I_4 - A$, όπου ο I_4 είναι ο ταυτοτικός 4×4 πίνακας, δέχεται αντίστροφο πίνακα της μορφής $I - cA$.

(5) Έστω A, B πίνακες $n \times n$. Δείξτε ότι αν A αντιστρέψιμος και $AB = 0$ τότε $B = 0$ και αν B αντιστρέψιμος και $AB = 0$ τότε $A = 0$. Εξ αυτού συμπεράνετε ότι αν $AB = 0$ ή $A = 0$ ή $B = 0$ ή A, B μη αντιστρέψιμοι. Έστω A τέτοιος ώστε $A^2 = A$. Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο A είναι ο ταυτοτικός.

(6) Ένας πίνακας θα λέγεται συμμετρικός αν $A^t = A$. Δείξτε ότι οι συμετρικοί $n \times n$ αποτελούν υπόχωρο του συνόλου των $n \times n$ πινάκων. Βρείτε μία βάση του χωρου των συμμετρικών πινάκων και υπολογίστε την διάσταση του.