Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 5

Παράδοση: 5/11/2001

(1) Θεωρούμε τους διαν. χώρους $E = \mathbb{R}^4$ και $F = \mathbb{R}^3$ και την συνάρτηση $f : E \to F$ η οποία στέλνει το (x, y, z, t) του E στο $(x + y, y - z, x + z)$ του F. Να δειχτεί ότι είναι γραμμική. Δώστε μια βάση του πυρήνα και της εικόνας. Ποιά είναι η τάξη της συνάρτησης;

(2) Έστω $E = \mathbb{R}[x]$ ο χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και η απεικόνιση $f : P \to P'$ του E στο E. Να δειχτεί ότι η f είναι γραμμική και να υπολογίσετε τον πυρήνα και την εικόνα της.

(3) Θεωρούμε το ευθή άθροισμα $E = F \oplus G$ δύο διανυσματικών χώρων και $p : E \to E$ την συνάρτηση που ορίζεται στο τυχαίο $x = y + z$, $y \in F, z \in G$ ως $p(x) = y$ (προβολή στον πρώτο χώρο). Αποδείξτε ότι η p είναι γραμμική συνάρτηση τέτοια ώστε $p^2 = p$. Καθορίστε τους $kerp$ και imp. Θεωρήστε βάσεις $\{y_1, ..., y_n\}$ του F και $\{z_1, ..., z_m\}$. Γράψτε μια βάση του $F \oplus G$ και εκφράστε την p ως προς την βάση αυτή.

(4) Θεωρήστε p μία γραμμική συνάρτηση $E \to E$, τέτοια ώστε $p^2 = p$. Να δείξεται ότι ο πυρήνας και η εικόνα της p είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του E.

(5) Επαληθεύστε ότι το σύνολο των 2×2 πινάκων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ της μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ είναι υπόχωρος του διαν. χώρου των 2×2 πινάκων. Βρείτε μία βάση του.

(6) Θεωρήστε τους 2×2 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστούν οι πίνακες $AB, BA, A^2, B^2, A^2 - B^2, (A + B)(A - B)$.

(7) Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε τους AB, BA. Να βρεθεί μη μηδενικός πίνακας D τέτοιος ώστε $DC = CD = 0$.

(8) Έστω ϕ η γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^4$ ορισμένη από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

όταν στον $\mathbb{R}^3$ και στον $\mathbb{R}^4$ θεωρήσουμε τις κανονικές βάσεις. Βρέστε βάσεις του πυρήνα και της εικόνας. Θεωρήστε τον ανάστροφο του πίνακα A. Αυτός ορίζει γραμμική απεικόνιση ϕ' από τον $\mathbb{R}^4$ στον $\mathbb{R}^3$. Βρέστε βάση του πυρήνα και της εικόνας της ϕ'.