## Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 4

Παράδοση: 29/10/2001

(1) Έστω $E_n = \{P \in \mathbb{C}[x] : P = 0 \text{ ή } \deg P \leq n\}$. Έστω $A$ στοιχείο βαθμού $p$ του $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου $E_n$. Θεωρούμε το σύνολο $F$ των στοιχείων του $E_n$ που διαιρούνται με το $A$ και $G = \{P \in E_n : P = 0 \text{ ή } \deg P < p\}$. Να δείξετε ότι οι $F, G$ είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του $E_n$. Ποιές είναι οι διαστάσεις αυτών των υποχώρων;

(2) Μέσα στον χώρο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τα διανύσματα $a = (1,1,1,0), b = (0,1,1,0), c = (0,0,-1,1), d = (0,-1,0,-1)$. Είναι τα $a, b, c, d$ γραμ. ανεξάρτητα; Από αυτά βρέστε το μέγιστο σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων και συμπληρώστε το σε μία βάση του $\mathbb{R}^4$, χρησιμοποιόντας τα διανύσματα της κανονικής βάσης $e_1, e_2, e_3, e_4$.

(3) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $E_n$ της πρώτης άσκησης. Δείξτε ότι αν $P$ πολυώνυμο βαθμού $n$, τότε οι πρώτες $n$ παράγωγοι $P, P', ..., P^{(n)}$ είναι βάση του $E_n$. Αν $a \in \mathbb{C}$, να υπολογίσετε την γραφή του πολυωνύμου $Q(x) = P(x+a)$ ως προς την παραπάνω βάση.

(4) Ονομάζουμε πολυώνυμα του Tchebychev τα πολυώνυμα $T_n$, $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\forall x \in [-1,1], T_n(x) = cos(nArccosx).$$

Αποδείξτε την επαγωγική σχέση

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Συμπεράνετε ότι τα $T_n$ είναι πολυώνυμα βαθμού $n$. Να δείξετετε ότι το σύνολο $\{T_0, ..., T_n\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων $\mathbb{R}[x]$ με βαθμό το πολύ $n$.

(5) Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις από τον διανυσματικό χώρο $E$ στον διανυσματικό χώρο $F$ είναι γραμμικές και στην συνέχεια υπολογίσετε για αυτές τον πυρήνα και την εικόνα τους.

(α′) $E = F = \mathbb{R}^2$.
- $T(x,y) = (2x+3y, x)$
- $T(x,y) = (y, x+y+1)$

(β′) Έστω $\mathcal{F}((a,b),\mathbb{R})$ ο χώρος των πραγματικών συναρτήσεων από το $(a,b)$ στο $\mathbb{R}$.
- $E = F = \mathcal{F}((a,b),\mathbb{R})$, $T(f)(x) = (x^2+1)f(x)$.
- $E = F = \mathcal{F}((a,b),\mathbb{R})$, $T(f) = |f|$.

(6) Θεωρούμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων επί του $\mathbb{R}$. Σημειώνουμε με $T$ την απεικόνιση η οποία σε κάθε συνάρτηση $f$ του $E$ στέλνει την συνάρτηση $F = T(f)$, ορισμένη από την σχέση

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)e^{-t^2}dt$$

Να δείξετε ότι η $T$ είναι γραμμική συνάρτηση. Είναι 1-1; Είναι επί;

(7) Έστω $f, g$ γραμμικές συναρτήσεις $E \to E$ τέτοιες ώστε $g \circ f = 0_E$, $f+g$ είναι 1-1 και επί. Να δείξετε ότι

$$rank(f) + rank(g) = n$$

(8) Έστω $E, F, G$ τρείς διανυσματικοί χώροι και $f : E \to F$, $\phi : E \to G$, με $\ker \phi \subset \ker f$. Να δείξετε ότι υπάρχει γραμμική συνάρτηση $h : G \to F$, τέτοια ώστε $f = h \circ \phi$.