Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 3

Παράδοση: 22/10/2001

(1) Να δείξετε ότι τα διανύσματα, $v_1 = (0,1,1,1), v_2 = (1,0,1,1), v_3 = (1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$, σχηματίζουν μία βάση του $\mathbb{R}^4$. Να εκφραστούν τα διανύσματα $(1,1,1,1)$ και $(1,0,0,0)$ σαν γραμμικοί συνδιασμοί της βάσης $\{v_1, ..., v_4\}$.

(2) Δείξτε ότι το σώμα $\mathbb{C}$ θεωρούμενο ως διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, είναι διάστασης 2. Πως πρέπει να εκλέξουμε το $z = a + ib$, ώστε τα z και $\bar{z}$ να σχηματίζουν βάση του $\mathbb{C}$; Υπολογίστε τις συντεταγμένες του μιγαδικού αριθμού $x + iy$ ως προς την βάση $\{z, \bar{z}\}$

(3) Έστω $E_{\mathbb{C}}$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$. Να δείξετε ότι μπορούμε να εφοδιάσουμε τον $E_{\mathbb{C}}$ με την δομή διανυσματικού χώρου $E_{\mathbb{R}}$ υπέρ το $\mathbb{R}$. Αν ο $E_{\mathbb{C}}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, να δείξετε ότι και ο $E_{\mathbb{R}}$ είναι πεπερασμένης διάστασης και μάλιστα ισχύει: $\dim_{\mathbb{R}} E_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{R}} E_{\mathbb{C}}$.

(4) Έστω $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$. Να ορίσετε τον $E_{\mathbb{R}}$. Να δείξετε ότι ο $E = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, είναι υπόχωρος του $E_{\mathbb{R}}$ αλλά όχι του $E_{\mathbb{C}}$.

(5) Σε ένα δ.χ. E διάστασης 4 επί του σώματος $\mathbb{R}$, αναφερόμενοι στην βάση $\{e_1, ..., e_4\}$, θεωρούμε τα διανύσματα:

$$v_1 = e_1 + 2e_2 + ae_3 + e_4, v_2 = ae_1 + e_2 + 2e_3 + 3e_4, v_4 = e_2 + be_3.$$

Να καθορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, b, έτσι ώστε τα v_1, v_2, v_3 να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ποια σχέση υπάρχει τότε μεταξύ των v_1, v_2, v_3. Ποιά είναι η διάσταση του υπόχωρου E' που παράγεται από τα v_1, v_2, v_3; Δώστε μια βάση.

(6) Έστω $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ συνεχής}\}$, ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$. Έστω F το σύνολο των συναρτήσεων που είναι σταθερές στο $[0,1]$, και έστω $G = \{g \in E : \int_0^1 g(t)dt = 0\}$. Να δείξετε ότι $E = F \oplus G$.

(7) Έστω $F_1, ..., F_n$ υπόχωροι του δ.χ. E. Να οριστούν
- Το $H = F_1 + ... + F_n$
- Το ευθή άθροισμα $E = F_1 \oplus ... \oplus F_n$.

Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων
- $E = F_1 \oplus ... \oplus F_n$
- $E = F_1 + ... + F_n$ και για κάθε $i \in \{1, ..., n-1\}$, $(F_1 + ... + F_i) \cap F_{i+1} = \{0\}$.

Αποδείξτε ότι

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}, (F_1 + ... + F_i) \cap F_{i+1} = \{0\} \Rightarrow \forall i \neq j F_i \cap F_j = \{0\}.$$

Αποδείξτε ότι το αντίστροφο δεν είναι σωστό.

(8) Έστω E ένας K-διανυσματικός χώρος διαστάσεως $n \geq 2$. Έστω $B = \{e_1, ..., e_n\}$ μία βάση του E. Τα σύνολα $B' = \{e_1, e_1 + e_2, ..., e_1 + e_2 + ... + e_n$ και $B'' = \{e_1 + e_2, e_2 + e_3, ..., e_{n-1} + e_n, e_n + e_1\}$ είναι βάσεις του E; Το σύνολο $S = \{e_i - e_j, 1 \leq i < j \leq n\}$, παράγει το E;