Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 2

Παράδοση: 12/10/2001

(1) Εστω E δ.χ. επί του σώματος K και F μη κενό υποσύνολο του E. Αποδείξτε ότι το F είναι υπόχωρος του E τότε και μόνο τότε αν

$$\forall x \in F, \forall y \in F, \forall a \in K, \forall b \in K : ax + by \in F.$$

(2) Αποδείξτε ότι η τομή δυο διανυσματικών υποχώρων F, G του διανυσματικού χώρου E είναι διανυσματικός υπόχωρος του E . Έστω $E = \mathbb{R}^3$, F παράγεται από τα $a = (1,0,0)$ και $b = (0,1,0)$ ενώ G παράγεται από τα $(0,1,0)$ και $d = (1,0,1)$. Βρέστε τον $F \cap G$.

Αποδείξτε ότι $F \cap G$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του E αν και μόνο αν $F \subset G$ ή $G \subset F$. Είναι δυνατόν η ένωση δύο γνήσιων υπόχωρων του E να ταυτίζεται με τον E;

(3) Έστω E ένας διανυσματικός χώρος, F, G υπόχωροι του E. Σημειώνουμε με H το σύνολο

$$H = \{z \in E : z = x + y, x \in F, y \in G\}$$

(α′) Αποδείξτε ότι ο H είναι υπόχωρος του E τον οποίο θα συμβολίζουμε με $H = F + G$.

(β′) Αποδείξτε ότι $F \subset H, G \subset H$ και ότι αν H' είναι υπόχωρος τέτοιος ώστε $F \subset H'$ και $G \subset H'$, τότε $H \subset H'$.

(γ′) Αποδείξτε ότι $F \cap G = \{0\}$ αν και μόνο αν κάθε $z \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $z = x + y$ με $x \in F, y \in G$.

(4) Επαληθεύσετε ότι το σώμα K είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του ευατού του, το οποίο θα σημειώνουμε με (K).

Δείξτε ότι οι μοναδικοί διανυσματικοί υπόχωροι του (K), είναι το $\{0\}$ και το (K).

Έστω K' γνήσιο υπόσωμα του K ($K' \neq K$). Είναι το (K') διανυσματικός υπόχωρος του (K); Δείξτε ότι το K είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του K'. Εφαρμόστε το στο $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

(5) Στον $\mathbb{R}^3$, αποδείξτε ότι τα διανύσματα $x_1 = (2,1,1)$, $x_2 = (1,3,1)$ και $x_3 = (-2,1,3)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

(6) Στον $\mathbb{R}^3$, αποδείξτε ότι τα διανύσματα $x_1 = (1,0,3)$, $x_2 = (0,1,2)$, $x_3 = (2,-3,0)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(7) Θεωρόντας το σώμα $\mathbb{R}$ σαν διανυσματικό χώρο επί του σώματος $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών αποδείξτε ότι οι αριθμοί $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ είναι ανά δύο γραμμικώς ανεξάρτητοι. Αποδείξτε ότι οι $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι.

(8) Αποδείξτε ότι μέσα στον διανυσματικό χώρο E των συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τα στοιχεία $f_1, ..., f_n$, όπου $f_k(x) = sin(kx)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(9) Στον χώρο $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ θέτουμε $s(x) = sin(x)$. Μελετήσατε την ανεξαρτησία της οικογένειας $(s, s \circ s, s \circ s \circ s)$.

Να γραφτείτε στην δημόσια λίστα μυνημάτων στην διεύθηνση

`http:\\poseidon.math.uoc.gr\mailman\listinfo\gral`

Εκεί θα δοθούν υποδείξεις σχετικές με την λύση των ασκήσεων.