Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 11

Παράδοση 17/12/01

(1) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) Βρείτε τις ιδιοτιμές και μια βάση για καθέναν από τους ιδιόχωρους του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3) Έστω $A \in K^{n,n}$ και p το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Αν $p(0) \neq 0$ να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^{-1}. Αποδείξτε ότι $p(A) = 0$. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και έστω ότι υπάρχει k για τον οποίο $A^k = 0$. Δείξτε ότι ένας τέτοιος πίνακας δέχεται μόνο την μηδανική ιδιοτιμή. Δείξτε ότι $A^n = 0$.

(4) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσημος; Θεωρούμε δύο ακολουθίες (u_n) και (v_n) που ορίζονται αναδρομικά ως εξής: $u_0 = 1, v_0 = 1$ $u_{n+1} = 6u_n - 2v_n$, $v_{n+1} = -2u_n + 0v_9$. Υπολογίστε τα u_n και v_n συναρτήσει του n.

(5) Είναι (για t σταθερό) ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$; Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικής απεικόνισης $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από αυτόν τον πίνακα; Να γράψετε τον A σε διαγώνια μορφή στο σώμα $\mathbb{C}$.

(6) (ΙΚΥ 1995) Έστω A διαγωνοποιήσιμος πίνακας $n \times n$, $f(t)$ αναλυτική συνάρτηση, δηλαδή η $f(t)$ δέχεται ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

Δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q και διαγώνιος πίνακας $D = diag(\delta_1, ..., \delta_n)$ έτσι ώστε

$$f(A) = Qdiag(f(\delta_1), ..., f(\delta_n))Q^{-1}$$

(7) Έστω E ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n. Θεωρήστε την γραμμική απεικόνιση L που ορίζει η παράγωγος. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της και μία βάση για κάθε ιδιόχωρο. Μπορεί να γραφεί η L σε διαγώνια μορφή;