Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 10

Παράδοση 10/12/01

(1) Μέσα στον $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο F που γεννάτε από τα $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1,1)$. Καθορίστε μία ορθοκανονική βάση του χώρου $F_1 := \{y \in \mathbb{R}^4 : \forall x \in F, \langle x, y\rangle = 0$ και συμπληρώστε την σε μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

(2) Θεωρούμε τον χώρο E_3 των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του n, μαζί με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

Μία βάση του E_3 είναι τα $\{1, x, x^2, x^3\}$. Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του E_3 αποτελούμενη από τέσσερα πολυώνυμα διαφόρων βαθμών και της οποίας το πρώτο στοιχείο να είναι το σταθερό πολυώνυμο. Να υπολογίσετε το πολυώνυμο $A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + x^3$, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} A^2(x)dx$ να είναι ελάχιστο.

(3) Θεωρούμε τον διανυσματικού χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με την κανονική βάση και το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Δείξτε ότι τα διανύσματα $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,1,0)$ σχηματίζουν μία βάση και υπολογίστε μία ορθοκανονική βάση της οποίας το πρώτο διάνυσμα να είναι της μορφής av_1.

(4) Έστω E διανυσματικός χώρος και F γνήσιος υπόχωρος. Ορίζουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα F_1 του F ως τον διανυσματικό υπόχωρο $F_1 := \{y \in E : \forall x \in F \langle x, y\rangle = 0\}$. Δείξτε ότι $E = F_1 \oplus F$.

(5) Ένας μηχανικός πέρνει πειραματικές μετρήσεις, με σφάλματα, και καταλήγει ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων της μορφής

$$a_i x = b_i, \quad 1 \le i \le 100.$$

Είναι απίθανο όλες οι μετρήσεις που έχει κάνει να είναι ακριβείς όποτε το παραπάνω σύστημα δεν έχει λύση. Για να υπολογίσουμε την "καλύτερη" λύση εργαζόμαστε ως εξής: Ελαχιστοποιούμε τα σφάλματα, ελαχιστοποιόντας το

$$||ax - b||^2 = \sum_{i=1}^{100} (a_i x - b_i)^2.$$

Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή του σφάλματος επιτυγχάνεται στο

$$\bar{x} = \frac{a^t b}{a^t a}.$$

(6) Θεωρήστε το σύνολο των παραγωγισίμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για οι οποίες ταυτίζονται με την παράγωγο τους, δηλαδή $f(x) = f'(x)$. Δείξτε ότι αποτελούν διανυσμάτικό χώρο. Αποδείξτε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \lambda e^x$.