

## Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Φυλ. 1

Παράδοση: 5/10/2001

- (1) Έστω  $E, F, G, H$  σύνολα και έστω οι απεικονίσεις

$$f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, h : G \rightarrow H.$$

Δείξτε ότι  $g \circ f$  και  $h \circ g$  είναι 1-1 και επί αν και μόνο αν οι  $f, g, h$  είναι 1-1 και επί

- (2) Έστω  $E$ , ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με την πράξη  $\star$ , προσεταιριστική και τέτοια ώστε για κάθε  $x \in E$ , οι απεικονίσεις,  $\gamma_x$  και  $\delta_x$ , ορισμένες ως εξής

$$\gamma_x : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & x \star t \end{cases} \quad \text{και} \quad \delta_x : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & t \star x \end{cases}$$

να είναι επί. Να δείξετε ότι η  $(E, \star)$  είναι ομάδα

- (3) Έστω  $E$  ένα μη κενό σύνολο και  $a$  ένα στοιχείο του  $E$ . Να δείξετε ότι το σύνολο των 1-1 και επί απεικονίσεων του  $E$  επί του εαυτού του, οι οποίες αφήνουν το  $a$ , αμετάβλητο, σχηματίζουν ομάδα με πράξη την σύνθεση των απεικονίσεων.

- (4) Θεωρούμε το σύνολο

$$K = \{a + \sqrt{2}b; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Δείξτε ότι

- Για κάθε  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $(a + b\sqrt{2} = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$
  - Αποδείξτε ότι το  $(K, +)$ , είναι προσθετική ομάδα.
  - Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο στοιχείων του  $K$  ανήκει στο  $K$ .
  - Έστω η συνάρτηση  $\phi : K \rightarrow \mathbb{Z}$ , η οποία στέλνει το  $a + b\sqrt{2}$  στο  $\phi(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$ . Αποδείξτε ότι  $\forall x, y \in K$ ,  $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ .
  - Δείξτε ότι το σύνολο των στοιχείων του  $K$  για τα οποία ισχύει  $(\phi(x))^2 = 1$ , αποτελούν ομάδα με πράξη τον πολ/σμο.
  - Είναι το  $K$  σώμα με πράξεις την συνήθη πρόσθεση και πολλ/σμό;
- (5) Να κατασκευάσετε ένα σώμα με 3 στοιχεία. Υπάρχει σώμα με τέσσερα στοιχεία;
- (6) Στο σύνολο  $E$  των διατεταγμένων ζευγών από πραγματικούς αριθμούς, θέτουμε

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, 0).$$

Οι παραπάνω πράξεις, ορίζουν διανυσματικό χώρο επί του σώματος των πραγματικών αριθμών;

- (7) Καθορίστε μεταξύ των παρακάτω συνόλων, αυτά τα οποία είναι διανυσματικοί χώροι επί του σώματος των πραγματικών αριθμών:

- $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f' + 2f = 0\}$ , με  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  συμβολίζουμε τις απειροδιαφορίσιμες συναρτήσεις από το  $\mathbb{R}$  στο  $\mathbb{R}$ .
- $\{f \in C([a, b], \mathbb{R}) : \int_a^b f(t)dt = 0\}$ ,  $C([a, b], \mathbb{R})$  συμβολίζει τις συνεχείς συναρτήσεις από το  $[a, b]$  στο  $\mathbb{R}$ .
- $\{P \in \mathbb{R}[x] : \deg(P) \geq 4\}$
- $\{P \in \mathbb{R}[x] : P' \text{ διαιρεί το } P\}$