

Ασκήσεις Ελλειπτικών Καμπύλων

1 Φυλλάδιο

Παράδοση Παρασκευή 12 Μαρτίου

1. Θεωρούμε τις επίπεδες αλγεβρικές καμπύλες που δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$(\alpha') \quad y^2 = x^3 + 1.$$

$$(\beta') \quad y^3 + x^3 = 1.$$

$$(\gamma') \quad x^2y^2 + x^2 + y^2 = 0.$$

$$(\delta') \quad y^2 = x^6 - 1.$$

$$(\epsilon') \quad y^2 = x^5 - 1.$$

$$(\zeta') \quad y^3 = x^5 - 1.$$

$$(\eta') \quad y^3 = (x^2 + 1)^2(x^3 - 1).$$

$$(\theta') \quad y^7 = x^2(x - 1).$$

$$(\vartheta') \quad y + x^3 + xy^3 = 0.$$

Ναδειχτεί ότι οι αφινικές καμπύλες $(1\alpha'), (1\beta'), (1\delta'), (1\epsilon'), (1\zeta')$ και $(1\theta')$, είναι ομαλές. Ναδειχτεί ότι οι καμπύλες $(1\gamma'), (1\eta')$ είναι ιδιόμορφες και να βρεθούν τα σημεία στα οποία είναι ιδιόμορφες.

2. Θεωρούμε την επίπεδη καμπύλη $y^2 = x^3 + ax + b$. Να αποδειχτεί ότι είναι μη ιδιόμορφη αν και μόνο αν $3^3b^2 - 2^2a^3 \neq 0$. Στην περίπτωση που είναι ιδιόμορφη να υπολογιστούν τα ιδιόμορφα σημεία.
3. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις της πρώτης άσκησης να υπολογιστούν ομογενή πολυώνυμα τα οποία να δίνουν προβολικές καμπύλες των οποίων ο περιορισμός στο αφινικό επίπεδο $z \neq 0$ να δίνει τις αρχικές αφινικές καμπύλες. Να υπολογιστούν οι τομές των καμπύλων με την επ' άπειρο ευθεία $z = 0$.