

Ασκήσεις Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών

2 Φυλλάδιο

Παράδοση Πέμπτη 7 Απριλίου

1. Έστω a ένας ακ. αλγεβρικός που γεννά το σώμα K , έστ $\mathcal{O}$ οι ακ. αλγεβρικοί του K . Θα ονομάζουμε δείκτη του a στο $\mathcal{O}$ τον δείκτη $[\mathcal{O} : \mathbb{Z}[a]]$. Αποδείξτε ότι αν το ελάχιστο πολυώνυμο του a πάνω από το $\mathcal{O}$ ικανοποιεί το κριτήριο του Eisenstein ως προς τον πρώτο p , δηλαδή έχει την μορφή $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ με $p \mid a_i$, $p^2 \nmid a_0$ τότε ο δείκτης του a στο K δεν διερρείται με p .
2. Έστω ζ μία πρωταρχική p^n -ρίζα της μονάδας (p -πρώτος) και έστω $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. Αποδείξτε ότι η επέκταση $K/\mathbb{Q}$ είναι κανονική δηλαδή όλα τα συζυγή του ζ ανήκουν στο K βαθμού $\phi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$. Υπόδειξη: Δείξτε ότι το πολυώνυμο $W(x) = (x^{p^n} - 1)/(x^{p^{n-1}} - 1)$ είναι ανάγωγο. Για να δείξτε ότι είναι ανάγωγο θεωρήστε το $F(x) = W(x+1)$ και χρησιμοποιείστε το κριτήριο του Eisenstein.
3. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^r$ με $r = \phi(p^n) - 1$ αποτελούν μία βάση ακεραιότητας και υπολογίστε ότι η διακρίνουσα είναι ίση με $(-1)^{p(p-1)/2} p^N$ όπου $N = n\phi(p^n) - p^{n-1}$. Υπόδειξη: υπολογίστε την διακρίνουσα της βάσης $\mathbb{Z}[\zeta]$ χρησιμοποιώντας τον τύπο με την νόρμα της παραγώγου. Τέλος παρατηρήστε ότι η διακρίνουσα του $\zeta - 1$ (δηλαδή η διακρίνουσα των δυνάμεων του $\zeta - 1$) είναι ίση με την διακρίνουσα του ζ και το ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του $\zeta - 1$ ικανοποιεί το κριτήριο του Eisenstein modulo p . Η περίπτωση $n = 1$ είναι λυμμένη στο βιβλίο των Stewart και Tall και μπορεί να σας φανεί χρήσιμη.