

Ασκήσεις Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών

1 Φυλλάδιο

Παράδοση Τρίτη 22 Μαρτίου

1. Έστω R δακτύλιος ώστε για κάθε P πρώτο ο εντοπισμός R_P να είναι DVR. Αποδείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.
2. Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $P_1, \dots, P_n$ ένα σύνολο ιδεωδών του R με $P_i + P_j = R$ για $i \neq j$. Θεωρούμε την τομή $I = \cap P_i$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$b \mapsto (b + P_1, \dots, b + P_n)$$

επάγει ισομορφισμό δακτυλίων

$$R/I \rightarrow R/P_1 \oplus \dots \oplus R/P_n.$$

Ποιο θεώρημα της στοιχειώδους θεωρίας αριθμών γενικεύει αυτό;

3. Έστω αντιμεταθετικός δακτύλιος της Noether στον οποίο κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο. Αποδείξτε ότι κάθε ιδεώδες του R περιέχει γινόμενο πρώτων ιδεωδών. Αποδείξτε ότι το μηδενικό ιδεώδες γράφεται ως γινόμενο $0 = P_1^{a_1} \dots P_n^{a_n}$.
4. Αν P_1, P_2 διαφορετικά μέγιστα ιδεώδη στον R τότε για κάθε $a, b > 0$ φυσικούς $P_1^a + P_2^b = R$.
5. Έστω R δακτύλιος όπως στην άσκηση 3. Αποδείξτε ότι

$$R = R/P_1^{a_1} \oplus \dots \oplus R/P_n^{a_n},$$

όπου $0 = P_1^{a_1} \dots P_n^{a_n}$. Αποδείξτε ότι $P_1, \dots, P_n$ είναι όλα τα ιδεώδη του R .

6. Έστω P μέγιστο ιδεώδες του R , $a > 0$. Αποδείξτε ότι ο εγκλεισμός $R \hookrightarrow R_P$ επάγει ισομορφισμό $R/P^a \cong R_P/P^a R_P$.
7. Έστω δακτύλιος R ώστε για κάθε πρώτο ιδεώδες P ο δακτύλιος R_P να είναι DVR. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \neq 0$ υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος πρώτα ιδεώδη που να περιέχουν το a . Υπόδειξη: κάντε χρήση της άσκησης 5 στον δακτύλιο R/aR .
8. Έστω R ακεραία περιοχή. Θεωρούμε όλους τους εντοπισμούς R_P σαν υποδακτυλίους του σώματος πηλίκων. Δείξτε ότι

$$R = \cap_P \text{ μέγιστο } R_P.$$

9. Έστω R ακεραία περιοχή και $I_1 I_2$ ιδεώδη του R . Αν $I_1 R_P = I_2 R_P$ για κάθε μέγιστο ιδεώδες P τότε $I_1 = I_2$.