Τελική εξέταση Άλγεβρας

24 Ιουνίου 2004

---

1. Να οριστεί η ομάδα μεταθέσεων S_n. Ποιά είναι η τάξη της και γιατί. Πότε μία μετάθεση είναι άρτια; Να οριστεί η ομάδα των αρτίων μεταθέσεων A_n. Ποιά είναι η τάξη της A_n και γιατί; Να αποδειχτεί ότι η A_n είναι κανονική υπομάδα της S_n. Δίνονται οι μεταθέσεις

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ και } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Να υπολογιστεί το $\sigma^2\tau\sigma$. Να γραφεί το ϕ σαν γινόμενο ξένων κύκλων.

2. Πότε μία ομάδα είναι κυκλική; Να αποδειχτεί ότι κάθε υποομάδα κυκλικής ομάδας είναι κυκλική.

3. Αν H είναι κανονική υποομάδα της G και $m = [G : H]$, να αποδειχτεί ότι $a^m \in H$ για κάθε $a \in G$.

4. Να αποδειχτεί ότι κάθε ομάδα με τάξη πρώτο είναι κυκλική.

5. Να δοθεί ο ορισμός της ακεραίας περιοχής. Να δοθούν παραδείγματα δακτυλίων που είναι ακέραιες περιοχές και δακτυλιών που δεν είναι.

6. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Να δειχτεί ότι ο R είναι σώμα αν και μόνο αν τα μοναδικά του ιδεώδη είναι τα τετριμμένα.

7. Να αποδειχτεί ότι κάθε ιδεώδες του $\mathbb{R}[x]$ είναι κύριο.

8. Δίνεται ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων του Gauß:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}, i \in \mathbb{C}, i^2 = -1.$$

   Να υπολογιστεί η ομάδα των μονάδων του.

9. Ποιά από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[x]$;

$$x^3 + 3x + 2, \;\; 25x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 12, \;\; x^3 + x - 2.$$

Να απαντήσετε σε ακριβώς 8 θέματα

Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες και 45 λεπτά

Καλή Επιτυχία