Πρόοδος Άλγεβρας

7 Μαΐου 2004

---

1. Να δείξετε ότι αν σε μια ομάδα κάθε στοιχείο έχει τάξη δύο, τότε η ομάδα είναι αβελιανή.

2. Να δείξετε ότι ο πυρήνας ενός ομομορφισμού $\phi : G \to G'$, είναι κανονική υποομάδα της ομάδας G.

3. Να δείξετε ότι αν η ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων, τότε η ϕ είναι 1-1 αν και μόνο αν ο πυρήνας της ϕ είναι η τετριμένη υποομάδα, δηλαδή $\ker \phi = \{1\}$.

4. Να υπολογιστούν όλες οι δυνατές αβελιανές υποομάδες με τάξη 24.

5. Έστω p πρώτος. Να δικαιολογήσετε γιατί οι ομάδες $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ και $\mathbb{Z}_{p^2}$ δεν είναι ισόμορφες.

6. Να αποδείξετε ότι αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $(n, m) = 1$, τότε οι ομάδες $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ και $\mathbb{Z}_{nm}$ είναι ισόμορφες.

7. Αν H υποομάδα της G, και $g \in G$, να αποδείξετε ότι το σύνολο
$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\},$$
είναι υποομάδα της G. Αν επιπλέον η H, έχει τάξη s, να δείξετε ότι και η ομάδα gHg^{-1} έχει τάξη s. Να δείξετε ότι η τομή όλων των υποομάδων της G με τάξη s, είναι κανονική υποομάδα της G.

Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες

Καλή Επιτυχία