Εξέταση Άλγεβρας Σεπτεμβρίου

18 Σεπτεμβρίου 2004

---

1. Να δωθεί ο ορισμός του ιδεώδους ενός δακτυλίου. Να αποδειχτεί ότι κάθε ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ είναι κύριο.

2. Δίνονται οι μεταθέσεις

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ και } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Να υπολογιστεί το $\sigma\tau^2\sigma$. Να γραφεί το ϕ σαν γινόμενο ξένων κύκλων.

3. Να υπολογιστούν, μέχρι ισομορφισμού, όλες οι αβελιανές ομάδες τάξης 48.

4. Αν H είναι κανονική υποομάδα της G και $m = [G : H]$, να αποδειχτεί ότι $a^m \in H$ για κάθε $a \in G$.

5. Να αποδειχτεί ότι κάθε ομάδα με τάξη πρώτο είναι κυκλική.

6. Να δοθεί ο ορισμός της ακεραίας περιοχής. Να δοθούν παραδείγματα δακτυλίων που είναι ακέραιες περιοχές και δακτυλιών που δεν είναι ακεραίες περιοχές.

7. Έστω p πρώτος. Να δικαιολογηθεί γιατί οι ομάδες $\mathbb{Z}_{p^2}$ και $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ δεν είναι ισόμορφες.

8. Έστω I ιδεώδες του αντιμεταθετικού δακτυλίου με μονάδα R. Ορίζουμε το σύνολο J το οποίο αποτελείται από τα $f \in R$ ώστε $f^n \in I$ για κατάλληλο $n \in \mathbb{N}$. Να δειχτεί ότι το J είναι ιδεώδες του R, και ότι $J \subset I$.

9. Ποιά από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[x]$;

$$x^3 + 3x + 2, \;\; 25x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 12, \;\; x^3 + x - 2.$$

Να απαντήσετε σε ακριβώς 8 θέματα

Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες και 45 λεπτά

Καλή Επιτυχία